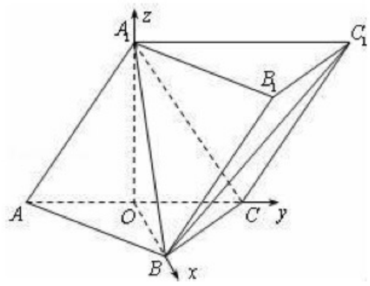
（Ⅰ）证明:因为 $A_1A = A_1C$, 且 O 为 AC 的中点，

所以 $A_1O \perp AC$.

又由题意可知，平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC, 交线为 AC, 且 $A_1O \subset$ 平面 AA_1C_1C,

所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC.

（Ⅱ）如图，以 O 为原点，OB, OC, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.



由题意可知，$A_1A = A_1C = AC = 2$, 又 $AB = BC, AB \perp BC$,

所以 $OB = \dfrac{1}{2}AC = 1$,

所

$O(0,0,0), A(0,-1,0), A_1(0,0,\sqrt{3}), C(0,1,0), C_1(0,2,\sqrt{3}), B(1,0,0)$,

则有: $\overrightarrow{A_1C} = (0,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{AA_1} = (0,1,\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (1,1,0)$,

设平面 AA_1B 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$, 则有 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \sqrt{3}z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$,

令 $y = 1$, 得 $x = -1, z = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\vec{n} = (-1, 1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

$\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|\vec{n}||\overrightarrow{A_1C}|} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

因为直线 A_1C 与平面 A_1AB 所成角 θ 和向量 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$ 所成锐角互余，所以 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

（Ⅲ）设 $E = (x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC_1}$,

即 $(x_0 - 1, y_0, z_0) = \lambda(-1, 2, \sqrt{3})$, 得 $\begin{cases} x_0 = 1 - \lambda \\ y_0 = 2\lambda \\ z_0 = \sqrt{3}\lambda \end{cases}$,

所以 $E(1-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda)$, 得 $\overrightarrow{OE} = (1-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

令 $OE //$ 平面 A_1AB，得 $\overrightarrow{OE} \cdot \vec{n} = 0$,

即 $-1 + \lambda + 2\lambda - \lambda = 0$, 得 $\lambda = \dfrac{1}{2}$,

即存在这样的点 E, E 为 BC_1 的中点.