双曲线

【知识梳理】

. 双曲线：平面内与两定点 F_1、F_2 的距离的差的绝对值等于常数 2a（$2a<|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做双曲线。定点 F_1、F_2 叫做焦点，定点间的距离叫焦距。

定义式：$||PF_1|-|PF_2||=2a$, $(2a<|F_1F_2|)$.

注：若 $2a=|F_1F_2|$,P 的轨迹是以 F_1 和 F_2 为端点射线；若 $2a>|F_1F_2|$,P 的轨迹不存在。

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
几何性质	焦点	$F_1(-C,0)$,$F_2(C,0)$	$F_1(0,C)$,$F_2(0,-C)$
	焦距	$|F_1F_2|=2c$	$C^2=a^2+b^2$
	范围	$x\le -a$,或 $x\ge a$;$y\in R$	$y\le -a$,或 $y\ge a$;$x\in R$
	对称性	关于 x 轴、y 轴和原点对称	
	顶点	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
	轴	实轴长 2a,虚轴长 2b	
	离心率	$e=\frac{c}{a}(e>1)$	
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

【经典例题】

1. 如果双曲线$\frac{x_2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$上一点$P$到双曲线右焦点的距离是2,那么点$P$到$y$轴的距离是（　　）

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{3}$

2. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,以C的右焦点为圆心且与C的渐近线相切的圆的半径是

A. a　　B. b　　C. $\sqrt{ab}$　　D. $\sqrt{a^2+b^2}$

3. 以双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的右焦点为圆心，且与其渐近线相切的圆的方程是（　　）

A. $x^2+y^2-10x+9=0$　　B. $x^2+y^2-10x+16=0$

C. $x^2+y^2+10x+16=0$　　D. $x^2+y^2+10x+9=0$

4. 以双曲线$x^2-y^2=2$的右焦点为圆心，且与其右准线相切的圆的方程是（　　）

A. $x^2+y^2-4x-3=0$　　B. $x^2+y^2-4x+3=0$

C. $x^2+y^2+4x-5=0$　　D. $x^2+y^2+4x+5=0$

5. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）上横坐标为$\frac{3a}{2}$的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A. (1, 2)　　B. (2, +∞)　　C. (1, 5)　　D. (5, +∞)

6. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点到一条准线的距离之比为 3：2 那么则双曲线的离心率是（　　）

A. 3　　B. 5　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

7. 过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的右顶点$A$作斜率为$-1$的直线，该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为$B,C$．若$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，则双曲线的离心率是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

8. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$、$F_2$，其一条渐近线方程为$y=x$，点$P(\sqrt{3},y_0)$在双曲线上.则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$＝（　　　）

A.　-12　　B.　-2　　C.　0　　D. 4

9. 过双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右顶点为 A，右焦点为 F。过点 F 平行双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点 B，则△AFB 的面积为_______

10. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，若双曲线上存在一点$P$使$\dfrac{\sin PF_1F_2}{\sin PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$，则该双曲线的离心率的取值范围是___________.

11. 过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点且垂直于$x$轴的直线与双曲线相交于$M,N$两点，以$MN$为直径的圆恰好过双曲线的右顶点，则双曲线的离心率为_____

12. 已知点P在双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$上，并且$P$到这条双曲线的右准线的距离恰是$P$到双曲线两个焦点的距离的等差中项，那么$P$点的横坐标是_______

13. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，PQ 是过点 F_1 的弦，且 PQ 的倾斜角为 α，那么 $|PF_2|+|QF_2|-|PQ|$ 的值是________

14. 已知 $B(-6,0),C(6,0)$ 是 $\triangle ABC$ 的两个顶点，内角 A,B,C 满足 $\sin B-\sin C=\frac{1}{2}\sin A$，则顶点 A 的轨迹方程是____________

15. 过双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 105^0 的直线，交双曲线于 PQ 两点，则 |FP||FQ| 的值为________.

16. 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上除顶点外任意一点，F_1,F_2 为左右焦点，C 为半焦距，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆与 F_1F_2 切于点 M，则 $|F_1M|\cdot|F_2M|$ 的值为________

17. 已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A，B 两点.

（I）若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$（其中 O 为坐标原点），求点 M 的轨迹方程；

（II）在 x 轴上是否存在定点 C，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

分版块专项复习　高二

1. A

2. B

3. A

4. B

5. B

6. D

7. C

8. C

9. $\frac{32}{15}$

10. $(1,1+\sqrt{2})$

11. 2

12. $-\frac{64}{5}$

13. 16

14. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1 \quad (x<-3)$

15. $|FP|\cdot|FQ|=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

16. $|F_1M|\cdot|F_2M|=b^2$

17．解：由条件知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$．

（Ⅰ）设$M(x, y)$，则 则$\overrightarrow{F_1M}=(x+2, y)$，$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+2, y_1)$，

$\overrightarrow{F_1B}=(x_2+2, y_2), \overrightarrow{F_1O}=(2,0)$，由$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$得

$\begin{cases}x+2=x_1+x_2+6,\\ y=y_1+y_2\end{cases}$即$\begin{cases}x_1+x_2=x-4,\\ y_1+y_2=y\end{cases}$

于是AB的中点坐标为$\left(\frac{x-4}{2},\frac{y}{2}\right)$.

当AB不与x轴垂直时，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{y}{2}}{\frac{x-4}{2}-2}=\frac{y}{x-8}$，即$y_1-y_2=\frac{y}{x-8}(x_1-x_2)$．

又因为A，B两点在双曲线上，所以$x_1^2-y_1^2=2$，$x_2^2-y_2^2=2$，两式相减得

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$，即$(x_1-x_2)(x-4)=(y_1-y_2)y$．

将$y_1-y_2=\frac{y}{x-8}(x_1-x_2)$代入上式，化简得$(x-6)^2-y^2=4$．

当AB与x轴垂直时，$x_1=x_2=2$，求得$M(8,0)$，也满足上述方程．

所以点M的轨迹方程是$(x-6)^2-y^2=4$．

（Ⅱ）假设在x轴上存在定点$C(m,0)$，使$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$为常数．

当AB不与x轴垂直时，设直线AB的方程是$y=k(x-2)(k\neq\pm1)$．

代入$x^2-y^2=2$有$(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$．

则x_1，x_2是上述方程的两个实根，所以$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{4k^2+2}{k^2-1}$，

于是$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+4k^2+m^2$

$=\frac{(k^2+1)(4k^2+2)}{k^2-1}-\frac{4k^2(2k^2+m)}{k^2-1}+4k^2+m^2$

$=\frac{2(1-2m)k^2+2}{k^2-1}+m^2=2(1-2m)+\frac{4-4m}{k^2-1}+m^2$．

因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$是与$k$无关的常数，所以$4-4m=0$，即$m=1$，此时$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$．

当 AB 与 x 轴垂直时，点 A，B 的坐标可分别设为 $(2,\sqrt{2})$，$(2,-\sqrt{2})$，

此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{2})\cdot(1,-\sqrt{2})=-1$．

故在 x 轴上存在定点 $C(1,0)$，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数．