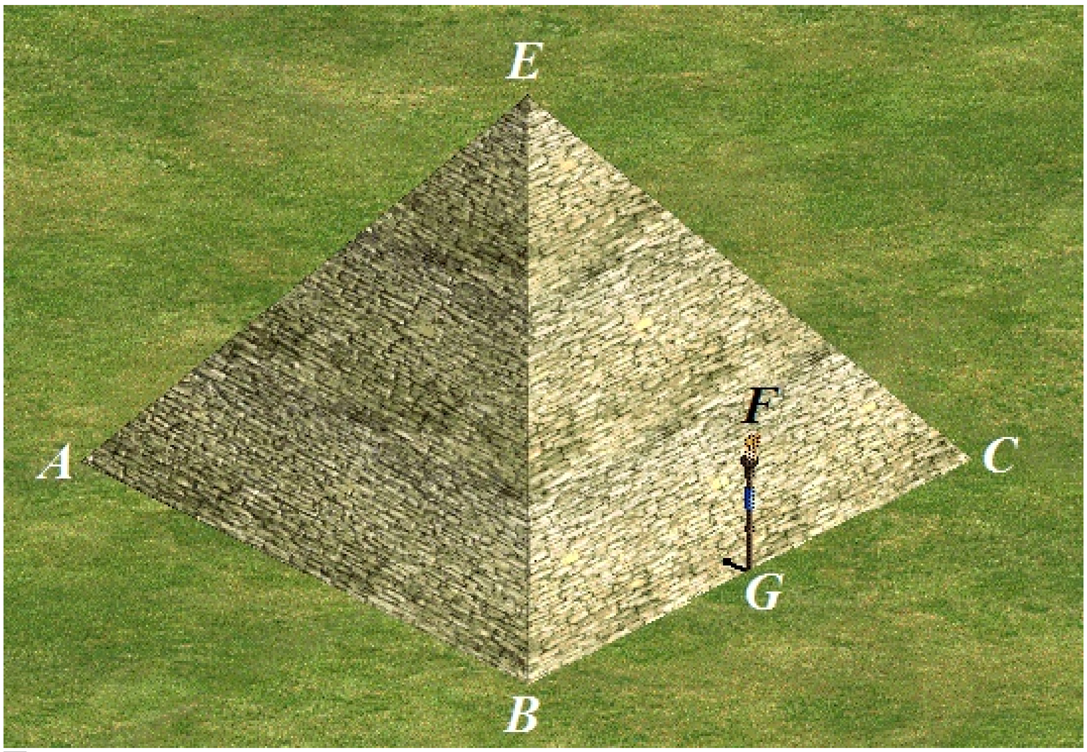
Default title

Posted on *2018年1月8日*

首发于松鼠的窝

写文章　　登录



王赟 Maigo王赟 Maigo

1 年前

.　　向量法是解高中立体几何题的神器。只要能建立空间直角坐标系的题，都可以用向量法来解，而这样的题目可以占到所有立体几何题的 95% 以上。与传统方法相比，向量法的计算量稍微大一些，但它的优点是不需要费脑筋做辅助线，而只需要简单粗暴地按套路进行计算，所以尤其适用于复杂的问题。

向量法的完整套路中，包含一种名为「叉积」的运算，它在部分地区是超出教学大纲的。但是没有「叉积」的向量法在很多情况下发挥不出它的魔力。本文就来把「叉积」这个缺口补上，让大家领略一下向量法的简单、粗暴、有效。当然啦，我知道你们会有「考试时不让用叉积」的抱怨。没关系，我会教你怎样把叉积「伪装」成不超纲的内容。

本文的第一部分将介绍向量间的点积、叉积两种运算，包括它们的定义、计算公式、运算律，以及向量法中直线和平面的方向的表示方法。高中立体几何题的大部分问题都是求角或求距离，本文的第二、三部分就来介绍各种角和距离用向量法怎么求。证明题一般是要证明线、面之间的平行或垂直，或者两个角的大小、两条线段的长度相等，都可以化归成求角或求距离。在第四部分，我会讲一下叉积在求面积、求体积这两种相对罕见的题型中的用法。最后展示一道例题。

一、基础知识

1.1 向量的点积运算

向量的点积是大纲之内的内容。设两个向量为$\vec{a},\vec{b}$，它们的夹角为θ。$\vec{a},\vec{b}$的点积记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，读作「a 点乘 b」，或干脆读作「a 点 b」（「点」字常常儿化）。$\vec{a}\cdot\vec{b}$是一个数，它等于$\vec{a},\vec{b}$各自的模之积再乘以夹角的余弦：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。当$\vec{a},\vec{b}$垂直时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

点积运算适用于任何维度的向量，不过本文只讨论三维情况。在空间直角坐标系中，设$\vec{a},\vec{b}$的坐标为$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$可用这些坐标表达为$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

向量的点积具有交换律和分配律：

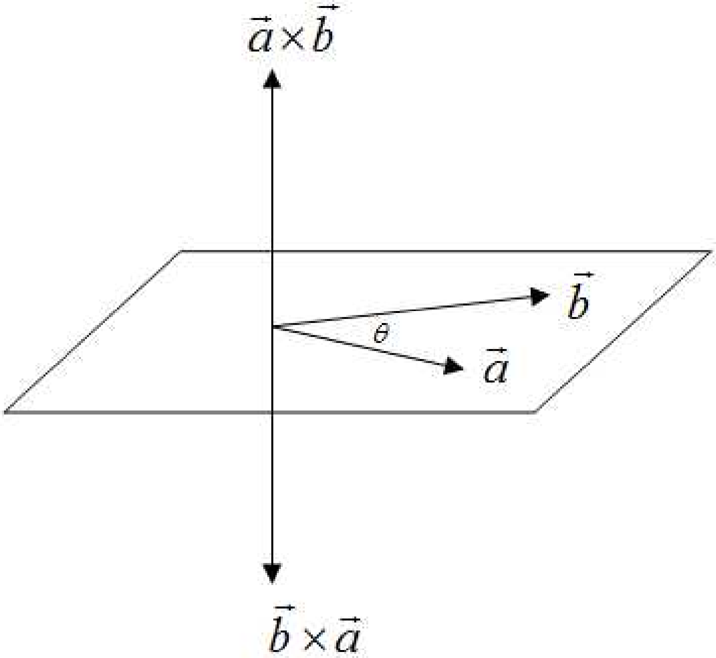
- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

但没有结合律，因为两个向量的点积是一个数，不能再与第三个向量进行点积运算。

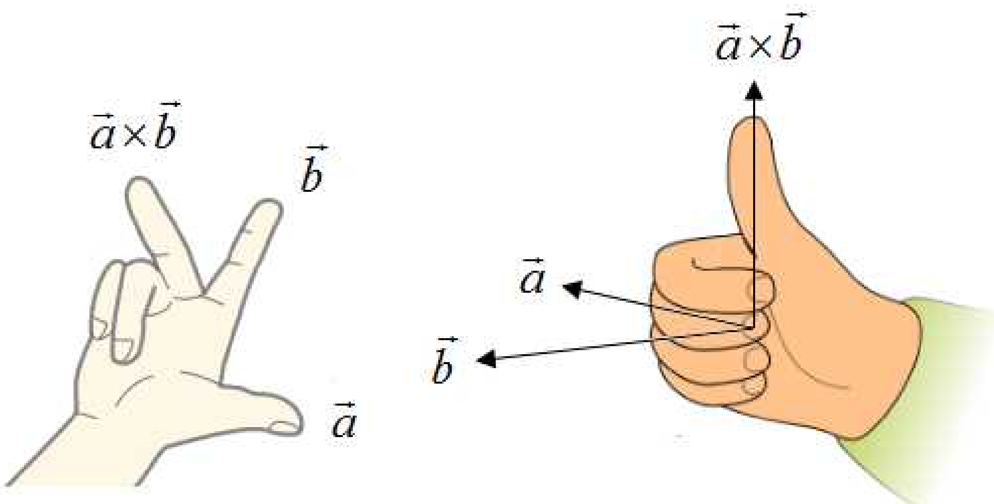
1.2 向量的叉积运算

向量的叉积是本文要介绍的重点。**叉积仅对三维向量有定义。**设两个三维向量为$\vec{a},\vec{b}$，它们的夹角为θ。$\vec{a},\vec{b}$的叉积记作$\vec{a}\times\vec{b}$，读作「a 叉乘 b」，或干脆读作「a 叉 b」（「叉」字也可以儿化）。$\vec{a}\times\vec{b}$是一个**向量**，它具有以下性质：

1. 它的模等于$\vec{a},\vec{b}$各自的模之积再乘以夹角的正弦，即$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$；
2. 它的方向与$\vec{a},\vec{b}$都垂直，且满足**右手定则**，如下图所示。

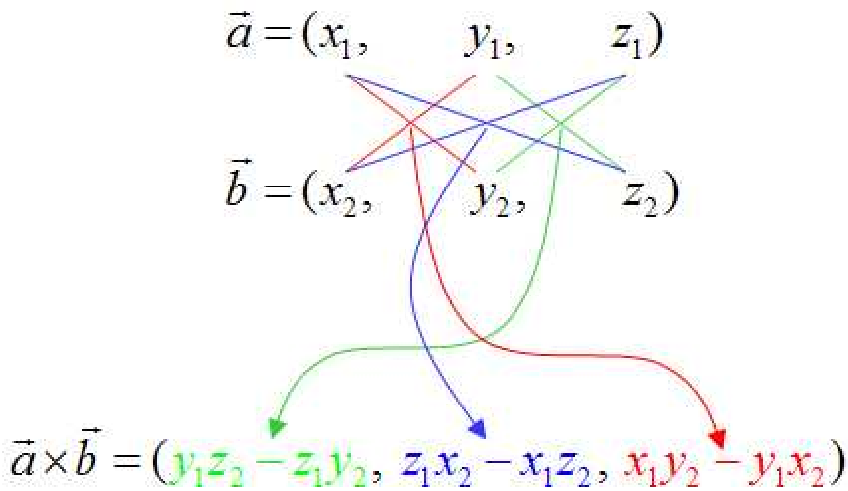


右手定则有两种理解方式，如下图。一种是：伸出拇指和食指，让它们分别朝向$\vec{a},\vec{b}$的方向，然后伸出中指让它与手掌垂直，则中指的方向就是$\vec{a}\times\vec{b}$的方向。另一种是：让四指从$\vec{a}$的方向弯向$\vec{b}$的方向，并伸出拇指，则拇指的方向就是$\vec{a}\times\vec{b}$的方向。



当$\vec{a},\vec{b}$平行时，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$（注意结果是**零向量**）。

在空间直角坐标系中，设$\vec{a},\vec{b}$的坐标为$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\vec{a}\times\vec{b}$可用这些坐标表达为$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2,\ x_1y_2-y_1x_2)$。这个公式可以用交叉相乘法来记忆：



注意，左、右两个交叉相乘是「捺减撇」，中间的交叉相乘是「撇减捺」。　　向量的叉积具有**反交换律**和分配律：

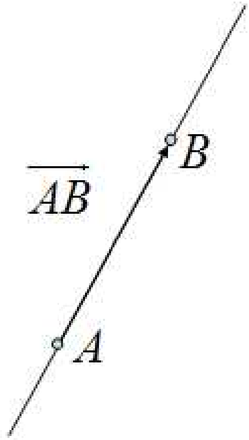
- 反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- 分配律：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

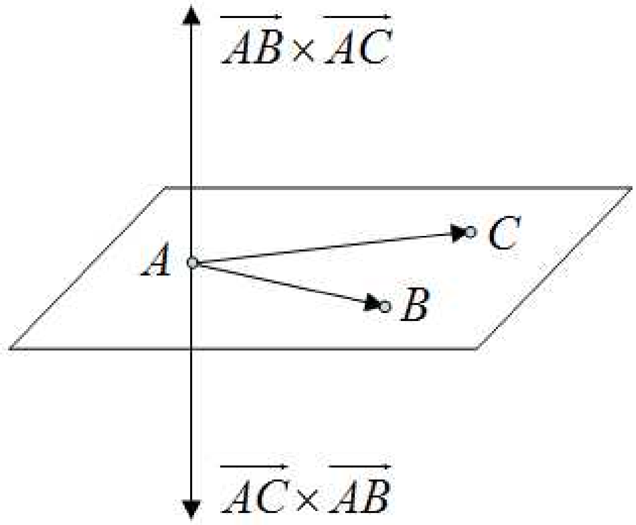
两个向量的叉积是一个向量，可以继续与第三个向量进行叉积运算，但不幸的是，叉积运算也不满足结合律，即没有$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$。

1.3 直线与平面方向的表示

在能建立空间直角坐标系的题目中，提到一条直线，一定会已知直线上两点A,B的坐标。两个坐标的差就是直线的方向向量$\overrightarrow{AB}$，它可以表示直线的方向，在求角和求距离时都很有用。

而平面的方向，则是用与平面**垂直**的向量来表示的，这个向量称为「法向量」。提到一个平面，一定会已知平面上不共线的三点A,B,C的坐标，由此可以得到两个向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$。这两个向量的叉积就是平面的法向量。根据需要，可以选择$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$或$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$作为平面的法向量，这两个法向量大小相同，方向相反。





在立体几何题中，叉积的主要用途就是求平面的法向量。如果考试时不允许在步骤中使用叉积运算，可以用如下方法绕过去：既然法向量就是与平面中两个已知向量都垂直的向量，那么可以设出法向量$\vec{n}$的坐标(x_n, y_n, z_n)，并利用$\vec{n}$与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$都垂直来列出两个方程。设$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的坐标分别为$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$，则两个垂直可以用点积表示为：

> $$\star\begin{cases} x_1x_n + y_1y_n + z_1z_n = 0 \\ x_2x_n + y_2y_n + z_2z_n = 0 \end{cases}$$

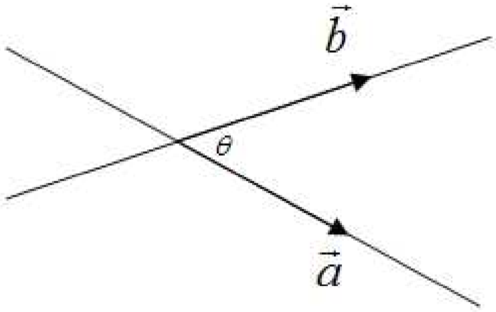
在试卷上列出这个方程组后，不必真正去解它，而是在草稿纸上根据$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$，利用交叉相乘法算出法向量坐标，直接把结果写到试卷上。但这种「伪装」具有一定的局限性——方程组只能解出法向量的方向，不能解出它的模，所以遇到需要使用叉积的模的场合，就绕不过去了。

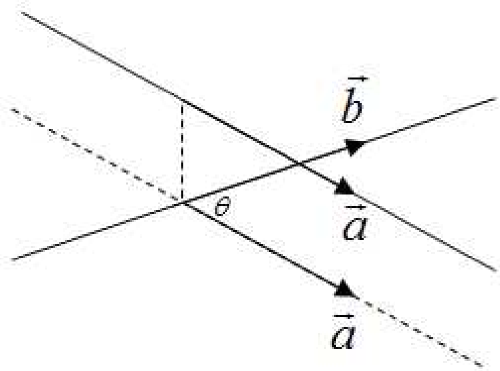
二、用向量法求各种角

高中立体几何涉及的角度有：线线角、线面角、面面角。

2.1 求两条直线的夹角

设两条直线的方向向量分别为$\vec{a}, \vec{b}$，它们的夹角为θ。两条直线的夹角，就是θ和$\pi - \theta$中较小的那个，它的余弦一定是非负的。由点积定义$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$可得两个方向向量的夹角为$\arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，于是两条直线的夹角就是$\arccos \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。





有同学要问了：上面的方法利用的是点积，那么利用叉积求得两条直线的夹角为$\arcsin\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$行不行呢？答案是：行，但是**叉积的计算量比点积大**，所以优先选择点积。　　注意向量法并不要求两条直线共面，它**同样适用于异面直线**！这就避免了传统方法中作平行线的麻烦。

2.2 求直线与平面的夹角

设直线的方向向量为$\vec{a}$，平面的法向量为$\vec{n}$，两个向量的夹角为θ。容易看出，待求的线面角α是θ和$\pi-\theta$中较小者的余角，$\sin\alpha=|\cos\theta|$。由点积定义，$\vec{a}\cdot\vec{n}=|\vec{a}||\vec{n}|\cos\theta$，于是有$\alpha=\arcsin\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}$。与 2.1 节相同，我们优先选择计算量小的点积运算，而不是叉积。

请再次领略向量法的简单粗暴有效：传统方法中，要求线面角，必须找到直线与平面的交点，并作出直线在平面内的投影。而在向量法中，只要知道直线上的任意两点和平面中任意三点（不共线）的坐标，就可以代入公式计算出直线的方向向量和平面的法向量，再代入公式计算夹角，完全不必考虑五个已知点的位置关系。

2.3 求两个平面的夹角

设两个平面的法向量分别为$\vec{n},\vec{m}$，它们的夹角为θ。两个平面的夹角，就是θ和$\pi-\theta$中较小的那个。用与 2.1 节相同的方法，可以得到两个平面的夹角为$\arccos\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}$。

在几何题中，提到「二面角」，往往指的不是两个「平面」的夹角，而是两个「半平面」的夹角——也就是说，求的是θ和$\pi-\theta$中特定的某一个。怎么知道是哪一个呢？还记得在求法向量的时候，可以人为选择箭头指向哪一头吗？只要让两个法向量**一个指向角外，一个指向角内**（如上图），那么两个半平面构成的二面角α，就一定是两个法向量的夹角$\theta=\arccos\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}$（注意分子上没有绝对值），而不是它的补角了。反之，如果两个法向量都指向角内或都指向角外，那么二面角α就是法向量夹角θ的补角$\pi-\theta$。

用向量法求二面角，同样不需要找到两个面的交线和它在两个面内的垂线，而只需要知道两个面内六个点的坐标。在很多情况下，交线上会有两个已知点，那么就只需要在两个面中各再找一个点。

三、用向量法求各种距离

点、线、面三种图形两两组合，可以得到六种距离：两点距、点线距、点面距、线线距、线面距、面面距。其中线面距、面面距只在线面或面面平行时才有定义，此时可以在直线或其中一个平面中任取一点，转化为点面距。因此这一部分将介绍前四种距离的求法。

3.1 求两点间的距离

设两点的坐标分别为$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则它们的距离为$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

3.2 求点到直线的距离

如图，设直线上任意一点到已知点的向量为$\vec{a}$，直线的方向向量为$\vec{b}$，两个向量的夹角为θ。可以看出，点到直线的距离为$|\vec{a}|\sin\theta$。由叉积的定义，有$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，所以点到直线的距离就是$\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$。

这里为什么使用了计算量大的叉积，而不是点积呢？这是为了利用叉积定义中现成的$\sin\theta$。 **3.3 求点到平面的距离**

如图，设平面上任意一点到已知点的向量为$\vec{a}$，平面的法向量为$\vec{n}$，两个向量的夹角为θ。可以看出，点到直线的距离为$|\vec{a}||\cos\theta|$（余弦取绝对值是因为θ可能是钝角）。由点积的定义，有$\vec{a}\cdot\vec{n}=|\vec{a}||\vec{n}|\cos\theta$，所以点到平面的距离就是$\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$。

点到平面的距离，其实是向量$\vec{a}$在法向量$\vec{n}$上的投影长度，$\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$也正是投影长度公式。

3.4 求两条直线的距离

三维空间中直线有三种位置关系：相交、平行、异面。后两种情况都可以求距离，但方法不一样。若两条直线平行，则可在其中一条直线上任取一点，转化成求该点到另一条直线的距离。若两条直线异面，则可以按如下步骤求出它们的距离。设第一条直线上有两个已知点A,B，第二条直线上有两个已知点

C, D。首先，找一个向量与两条直线都垂直，这个向量可以是两条直线的方向向量的叉积 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$。然后，任作一条连结两条直线的线段（比如$AC$），将它投影到$\vec{n}$上，投影长度 $\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ 就是异面直线的距离。

我们看到，两条直线的位置关系不同时，它们的距离求法不一样。但向量法最有用的时候，正是图形的位置关系不清楚的时候。有没有简便的方法判断直线的位置关系呢？有！先不管三七二十一地计算「法向量」$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$，如果算出来发现是零向量，那么说明两条直线平行，转化成点线距。如果算出来法向量非零，那么就继续计算投影长度，如果投影长度为 0，说明两条直线相交，否则两条直线异面，投影长度是它们之间的距离。

四、用向量法求三角形面积和四面体体积

这两种题型在高中立体几何中出现的频率不高，但它们与高等数学中「行列式」的概念联系紧密，有兴趣的同学可以涉猎一下。

4.1 求三角形的面积

设三角形三个顶点A, B, C的坐标均已知，则三角形的面积为$S = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle A$。而由叉积的定义，$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A$，所以$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$。

这个公式同样适用于平面几何，此时A, B, C的z坐标均为 0。设$\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, 0)$，$\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, 0)$，则$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, x_1y_2 - y_1x_2)$。这个向量的$z$坐标的绝对值的一半就是三角形$ABC$的面积，而$z$坐标的绝对值是以$AB, AC$为邻边的平行四边形的面积。$z$坐标的正负号，表示在平面中从$\overrightarrow{AB}$到$\overrightarrow{AC}$是逆时针还是顺时针旋转，因此$z$坐标也称为平行四边形的**有向面积**。

把$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的二维坐标排成两行两列$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$，这个东西称为「行列式」，它的值是一个数。二阶行列式的计算公式是「交叉相减」：$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$。二阶行列式对应着平面中两个向量的叉积，其几何意义就是「平行四面体的有向面积」。

4.2 求四面体的体积

设四面体四个顶点A,B,C,D的坐标均已知。由 4.1 节，底面三角形ABC的面积为$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$；而四面体的高是顶点$D$到底面的距离，由 3.3 节，这个距离为$h=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}$。四面体的体积为$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$。

上述结果去掉$\frac{1}{6}$后剩下的部分$|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$，是以$AB,AC,AD$为三边的平行六面体的体积。再去掉绝对值，剩下的部分称为向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$的**混合积**，它表示了平行六面体的**有向体积**−−若从角A内部观察，向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$呈逆时针排列，则体积为正，反之为负。

设$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AD}=(x_3,y_3,z_3)$。容易验证，$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=x_1y_2z_3+y_1z_2x_3+z_1x_2y_3-x_1z_2y_3-y_1x_2z_3-z_1y_2x_3$。这正是三阶行列式$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$的计算公式。三阶行列式对应着三维空间中三个向量的混合积，其几何意义是「平行六面体的有向体积」。

行列式的概念还可以推广到更高维的空间。从同一个点出发的n个n维向量的坐标排成的n阶行列式，代表了以这些向量为边的n维「超平行体」的「有向超体积」。

五、一道例题

图中是一座金字塔。它是一个正四棱锥，底面$ABCD$是一个边长 10 米的正方形，各个侧面都是正三角形。在底边BC的中点G处竖立着一根高$2\sqrt{2}$米的火把FG。

1. 求金字塔相邻侧面所成的二面角$A-EB-C$。
2. 求金字塔的棱AE所在直线与底边BC所在直线的距离。
3. 求火苗F到棱BE所在直线的距离。

解： 如上图建立空间直角坐标系，原点O为底面中心。容易求得下列各点坐标：$A(5,-5,0),B(5,5,0),C(-5,5,0),F(0,5,0),G(0,5,2\sqrt{2})$（单位均为米，下略）。金字塔的高未知，设顶点的坐标为$E(0,0,h)$。由于侧面都是等边三角形，$EB=\sqrt{5^2+5^2+h^2}=10$，解得$h=5\sqrt{2}$。

求二面角$A-EB-C$： 侧面EBC的一个法向量为$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BE}=(-10,0,0)\times(-5,-5,5\sqrt{2})=(0,50\sqrt{2},50)$，不妨缩短成$\vec{n}=(0,\sqrt{2},1)$，它指向二面角$A-EB-C$外部。侧面$EAB$的一个法向量为$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BE}=(0,-10,0)\times(-5,-5,5\sqrt{2})=(-50\sqrt{2},0,-50)$，不妨缩短成$\vec{m}=(-\sqrt{2},0,-1)$，它指向二面角$A-EB-C$内部。二面角的大小就是法向量的夹角，即$\arccos\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$。

求直线AE与BC的距离： 先求一个与两条直线都垂直的向量$\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BC}=(-5,5,5\sqrt{2})\times(-10,0,0)=(0,-50\sqrt{2},50)$，不妨缩短成$\vec{l}=(0,-\sqrt{2},1)$。将$\overrightarrow{AB}=(0,10,0)$投影到这个向量上，投影长度为$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{l}|}{|\vec{l}|}=\frac{10}{3}\sqrt{6}$，这就是直线$AE$与$BC$的距离。

求点F到直线BE的距离： 此距离$d=|BF|\sin\angle FBE=\frac{|\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BE}|}$。$\overrightarrow{BF}=(-5,0,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BE}=(-5,-5,5\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}=(10\sqrt{2},15\sqrt{2},25)$，代入得$d=\frac{\sqrt{51}}{2}$。

This entry was posted in *未分类*. Bookmark the *permalink*. *Edit*

← MY STORY

Leave a Reply

Logged in as w1109790800. Log out?