空间向量专项训练

◆ 知识梳理

1．空间向量及其运算：

(1)空间向量的线性运算：

①空间向量的加法、减法和数乘向量运算：平面向量加、减法的三角形法则和平行四边形法则拓广到空间依然成立．

②空间向量的线性运算的运算律：

加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

(2)空间向量的基本定理：

①共线(平行)向量定理：对空间两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}\parallel\lambda\boldsymbol{b}$．

②共面向量定理：如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在惟一一对实数 λ，μ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$．

③空间向量分解定理：如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在惟一的有序实数组 λ_1，λ_2，λ_3，使得 $\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}$．

(3)空间向量的数量积运算：

①空间向量的数量积的定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

②空间向量的数量积的性质：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}>$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$．

③空间向量的数量积的运算律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$．

(4)空间向量运算的坐标表示：

①空间向量的正交分解：建立空间直角坐标系 $Oxyz$，分别沿 x 轴，y 轴，z 轴的正方向引单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，则这三个互相垂直的单位向量构成空间向量的一个基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，由空间向量分解定理，对于空间任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在惟一数组(a_1,a_2,a_3)，使 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，那么有序数组$(a_1,a_2,a_3)$就叫做空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$．

②空间向量线性运算及数量积的坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$．

③空间向量平行和垂直的条件：

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1$，$a_2 = \lambda b_2$，$a_3 = \lambda b_3(\lambda \in \mathbf{R})$；

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$．

④向量的夹角与向量长度的坐标计算公式：

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$;

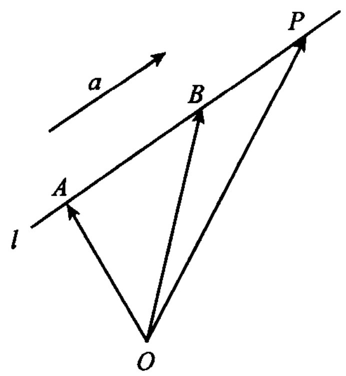
$\cos < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

在空间直角坐标系中，点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$，则 A，B 两点间的距离是 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

2．空间向量在立体几何中的应用：

(1)直线的方向向量与平面的法向量：

①如图，l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线，对空间任意一点 O，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使得 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\boldsymbol{a}$，其中向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做直线的方向向量．



由此可知，空间任意直线由空间一点及直线的方向向量惟一确定．

②如果直线 $l\perp$平面α，取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做平面α的法向量．

由此可知，给定一点 A 及一个向量 $\boldsymbol{a}$，那么经过点 A 以向量 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的平面惟一确定．

(2)用空间向量刻画空间中平行与垂直的位置关系：

设直线 l，m 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，平面α，β的法向量分别是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则

①$l\parallel m\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\parallel \boldsymbol{b}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，$k\in\mathbf{R}$；

②$l\perp m\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp \boldsymbol{b}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

③$l\parallel \alpha\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp \boldsymbol{u}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=0$；

④$l\perp \alpha\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\parallel \boldsymbol{u}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u}$，$k\in\mathbf{R}$；

⑤$\alpha\parallel \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\parallel \boldsymbol{v}\Leftrightarrow \boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}$，$k\in\mathbf{R}$；

⑥$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow \boldsymbol{u}\perp \boldsymbol{v}\Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$．

(3)用空间向量解决线线、线面、面面的夹角问题：

①异面直线所成的角：设 a，b 是两条异面直线，过空间任意一点 O 作直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，则 a'与 b'所夹的锐角或直角叫做异面直线 a 与 b 所成的角．

设异面直线 a 与 b 的方向向量分别是 v_1，v_2，a 与 b 的夹角为θ，显然$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$,则 $|\cos<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2>|=\dfrac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$.

②直线和平面所成的角：直线和平面所成的角是指直线与它在这个平面内的射影所成的角．

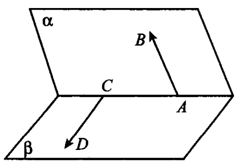
设直线 a 的方向向量是 $\boldsymbol{u}$，平面α的法向量是 $\boldsymbol{v}$，直线 a 与平面α的夹角为θ，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则$|\cos<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

③二面角及其度量：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角．记作$\alpha-l-\beta$在二面角的棱上任取一点 O，在两个半平面内分别作射线 $OA\perp l$，$OB\perp l$，则$\angle AOB$ 叫做二面角$\alpha-l-\beta$的平面角．

利用向量求二面角的平面角有两种方法：

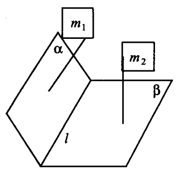
方法一：

如图，若 AB，CD 分别是二面角$\alpha-l-\beta$的两个面内与棱 l 垂直的异面直线，则二面角$\alpha-l-\beta$的大小就是向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的夹角的大小．



方法二：

如图，$\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$分别是二面角的两个半平面α，β的法向量，则$\langle\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2\rangle$与该二面角的大小相等或互补．



(4)根据题目特点，同学们可以灵活选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题．

◆ 经典习题

1．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BB_1 的中点，则二面角 $E-A_1D_1-D$ 的平面角的正切值是(　　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B)2　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $2\sqrt{2}$

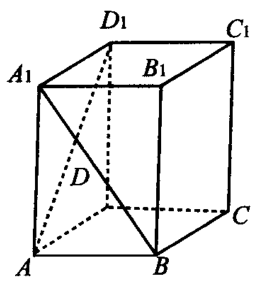
2．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AD_1 与平面 A_1ACC_1 所成角的大小是(　　)

(A)30°　　(B)45°　　(C)60°　　(D)90°

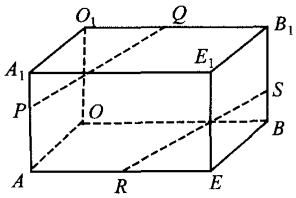
3．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别为 AA_1，AB，BB_1，B_1C_1 的中点，则异面直线 EF 与 GH 所成角的大小是_____．

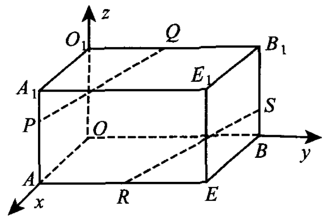
4．已知正四棱柱的对角线的长为 $\sqrt{6}$，且对角线与底面所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则该正四棱柱的体积等于_____．

5．如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为_____．

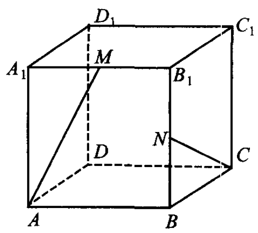


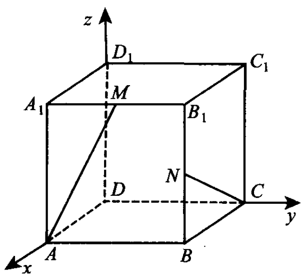
6. 如图，在长方体 $OAEB-O_1A_1E_1B_1$ 中，$OA=3$，$OB=4$，$OO_1=2$，点 P 在棱 AA_1 上，且 $AP=2PA_1$，点 S 在棱 BB_1 上，且 $B_1S=2SB$，点 Q，R 分别是 O_1B_1，AE 的中点，求证：$PQ\parallel RS$．



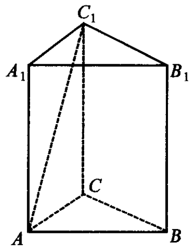


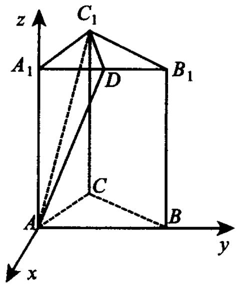
7.　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 是棱 A_1B_1，B_1B 的中点，求异面直线 AM 和 CN 所成角的余弦值．



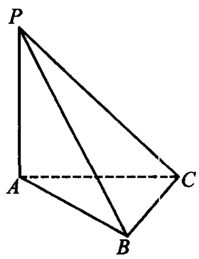


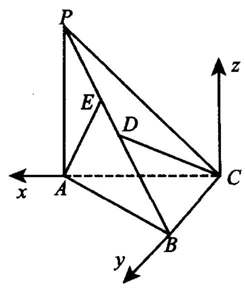
8. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为 $\sqrt{2}a$，求直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的大小．





9. 如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$AC\perp BC$，$PA=AC=1$，$BC=\sqrt{2}$，求二面角 $A-PB-C$ 的平面角的余弦值．



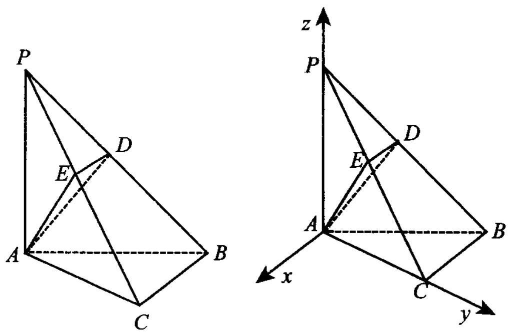


10.　图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$底面 ABC，$PA=AB$，$\angle ABC=60°$，$\angle BCA=90°$，点 D，E 分别在棱 PB，PC 上，且 $DE\parallel BC$．

(Ⅰ)求证：$BC\perp$平面 PAC；

(Ⅱ)当 D 为 PB 的中点时，求 AD 与平面 PAC 所成角的余弦值；

(Ⅲ)试问在棱 PC 上是否存在点 E，使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角?若存在，求出 $PE:EC$ 的值；若不存在，说明理由．



1. B
2. A
3. $\frac{\pi}{3}$
4. 2
5. $\frac{4}{5}$

6. 解：如图建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，

$O_1(0,0,2)$，$A_1(3,0,2)$，$B_1(0,4,2)$，$E(3,4,0)$．

$\because AP=2PA_1$，　$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{3}(0,0,2)=(0,0,\frac{4}{3})$,

$\therefore P(3,0,\frac{4}{3})$.

同理可得：$Q(0,2,2)$，$R(3,2,0)$，$S(0,4,\frac{2}{3})$.

$\because \overrightarrow{PQ}=(-3,2,\frac{2}{3})=\overrightarrow{RS}$,

$\therefore \overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{RS}$，又 $R\notin PQ$，

$\therefore PQ \parallel RS$．

7. **解法一**：设正方体的棱长为 2，如图建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，

$A(2,0,0)$，$M(2,1,2)$，$C(0,2,0)$，$N(2,2,1)$．

$\therefore \overrightarrow{AM}=(0,1,2),\overrightarrow{CN}=(2,0,1)$,

设 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{CN}$ 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CN}|}=\frac{2}{5}$,

$\therefore$异面直线 AM 和 CN 所成角的余弦值是 $\frac{2}{5}$.

解法二：取 AB 的中点 P，CC_1 的中点 Q，连接 B_1P，B_1Q，PQ，PC．

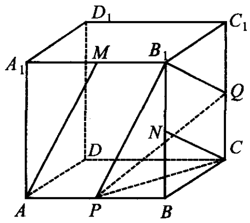
易证明：$B_1P \parallel MA$，$B_1Q \parallel NC$，

$\therefore \angle PB_1Q$ 是异面直线 AM 和 CN 所成的角．

设正方体的棱长为 2，易知 $B_1P = B_1Q = \sqrt{5}, PQ = \sqrt{PC^2 + QC^2} = \sqrt{6},$

$\therefore \cos PB_1Q = \dfrac{B_1P^2 + B_1Q^2 - PQ^2}{2B_1P \cdot B_1Q} = \dfrac{2}{5},$

∴异面直线 AM 和 CN 所成角的余弦值是 $\dfrac{2}{5}$.



8. 解法一：如图建立空间直角坐标系，则 $A(0，0，0)$，$B(0，a，0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a),$

$C_1(-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}, \dfrac{a}{2}, \sqrt{2}a)$. 取 A_1B_1 的中点 D，则 $D(0, \dfrac{a}{2}, \sqrt{2}a)$，连接 AD，C_1D．

则 $\overrightarrow{DC} = (-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}, 0, 0), \overrightarrow{AB} = (0, a, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, \sqrt{2}a),$

$\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0,$

$\therefore DC_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，

$\therefore \angle C_1AD$ 是直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所或的角．

$\because \overrightarrow{AC_1} = (-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}, \dfrac{a}{2}, \sqrt{2}a), \overrightarrow{AD} = (0, \dfrac{a}{2}, \sqrt{2}a),$

$\therefore \cos C_1AD = \dfrac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的大小是 30°．

解法二：如图建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，

$C_1(-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，从而 $\overrightarrow{AB}=(0,a,0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a),\overrightarrow{AC_1}=(-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$.

设平面 ABB_1A_1 的法向量是 $\boldsymbol{a}=(p,q,r)$，

由 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,$

得 $\begin{cases}aq=0,\\ \sqrt{2}ar=0,\end{cases}$ 取 $p=1$，得 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$．

设直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$

$\sin\theta=|\langle\cos\overrightarrow{AC_1},\mathbf{a}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\mathbf{a}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\mathbf{a}|}=\frac{1}{2},\theta=30^\circ.$

9. **解法一**：取 PB 的中点 D，连接 CD，作 $AE\perp PB$ 于 E．

$\because PA=AC=1$，$PA\perp AC$，

$\therefore PC=BC=\sqrt{2}$，$\therefore CD\perp PB$．

$\because EA\perp PB$，

$\therefore$向量 $\overrightarrow{EA}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 夹角的大小就是二面角 $A-PB-C$ 的大小．

如图建立空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$P(1,0,1)$，

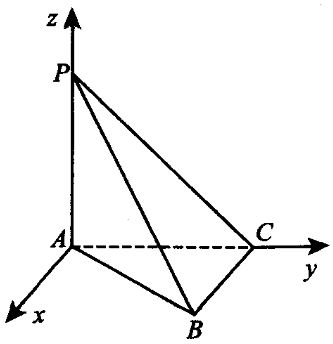
由 D 是 PB 的中点，得 $D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$.

由$\frac{PE}{EB}=\frac{AP^2}{AB^2}=\frac{1}{3}$,得$E$是$PD$的中点，从而$E(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3}{4})$.

$\therefore \overrightarrow{EA}=(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{4}),\overrightarrow{DC}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$　$\therefore \cos<\overrightarrow{EA},\overrightarrow{DC}>=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

即二面角$A-PB-C$的平面角的余弦值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法二：如图建立空间直角坐标系，则$A(0，0，0)$，$B(\sqrt{2},1,0)$，$C(0，1，0)$，$P(0，0，1)$，



$\overrightarrow{AP}=(0,0,1),\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},1,0),\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0),\overrightarrow{CP}=(0,-1,1).$

设平面PAB的法向量是$\boldsymbol{a}=(a_1，a_2，a_3)$，

平面PBC的法向量是$\boldsymbol{b}=(b_1，b_2，b_3)$．

由$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,$　得$\begin{cases}a_3=0,\\ \sqrt{2}a_1+a_2=0,\end{cases}$取$a_1=1$，得$\boldsymbol{a}=(1,-\sqrt{2},0).$

由$\boldsymbol{b}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\boldsymbol{b}\cdot\overrightarrow{CP}=0$得$\begin{cases}\sqrt{2}b_1=0,\\ -b_2+b_3=0,\end{cases}$取$b_3=1$，得$\boldsymbol{b}=(0，1，1)$．

$\therefore \cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because$二面角$A-PB-C$为锐二面角，

$\therefore$二面角$A-PB-C$的平面角的余弦值是$|-\frac{\sqrt{3}}{3}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 解：如图建立空间直角坐标系．

设 $PA=a$，由已知可得 $A(0，0，0)$，$B(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0),C(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0),P(0,0,a).$

(Ⅰ)$\because \overrightarrow{AP}=(0,0,a),\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2}a,0,0),$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\therefore BC\perp AP$．又$\angle BCA=90°$，$\therefore BC\perp AC$．

$\therefore BC\perp$平面 PAC．

(Ⅱ)$\because D$ 为 PB 的中点，$DE\parallel BC$，$\therefore E$ 为 PC 的中点．

$\therefore D(-\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a),E(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a)\cdot$

由(Ⅰ)知，$BC\perp$平面 PAC，$\therefore DE\perp$平面 PAC，

$\therefore\angle DAE$ 是直线 AD 与平面 PAC 所成的角．

$\therefore \overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a),\overrightarrow{AE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{2}a),$

$\therefore \cos\angle DAE=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\sqrt{14}}{4},$

即直线 AD 与平面 PAC 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot$

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，$DE\perp$平面 PAC，$\therefore DE\perp AE$，$DE\perp PE$，

$\therefore\angle AEP$ 是二面角 $A-DE-P$ 的平面角．

$\because PA\perp$底面 ABC，$\therefore PA\perp AC$，$\angle PAC=90°$．

$\therefore$在棱 PC 上存在一点 E，使得 $AE\perp PC$，

这时，$\angle AEP=90°$，且 $\frac{PE}{EC}=\frac{PA^2}{AC^2}=\frac{4}{3}\cdot$

故存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 是直二面角，此时 $PE:EC=4:3$．