微积分（上）第一章 近年部分研究生入学考试题及答案

（1）

限(1)已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq0$，则

(A) $k=2,c=\dfrac{-1}{2}$　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　　(C) $k=3,c=\dfrac{-1}{3}$　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【答案】D

【解析】因为 $c\neq0$

$$c=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to0}x^{3-k}$$

所以 $3-k=0,k=3,c=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$，故选D

（2）

(1) 当 $x\to0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是　(

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

【答案】(D)

【解析】

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=0$，所以 $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}]=0$，所以 $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{o(x^2)}{x^2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}]=0$，所以 $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$

(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{o(x)}{x}+\dfrac{o(x^2)}{x}]=0$，所以 $o(x)+o(x^2)=o(x)$

（3）

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】（C）

【解析】

所有的间断点 $x=-1, x=0, x=1$，

因为

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=-\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{(x+1)\ln|x|}=-\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{(x+1)\ln|x|}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x\ln|x|}=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{\ln|x|}=\frac{1}{2}$$

所以有两个可去间断点.

（4）

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\neq 0$，则当 n 充分大时，下列正确的有（　　）

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

【详解】因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\neq 0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<a_n<$

$|a|-\varepsilon<|a_n|\leq|a|+\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则知 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，所以选择（A）

（5）

3. 设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则当 $x\to 0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）

（A）$a=0$　　（B）$b=1$　　（C）$c=0$　　（D）$d=\dfrac{1}{6}$

【详解】只要熟练记忆当 $x\to 0$ 时 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，显然 $a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$，应该选（D）

计算题

、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f($

$g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$$

因为分子的极限为 0，则 $a=-1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1$$，分子的极限为 0，$b=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{-2}{6k}=1 \Rightarrow k=-\dfrac{1}{3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1$$，$k=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=-1, b=-\dfrac{1}{2}, k=-\dfrac{1}{3}$