

## 习题

- 5.1 现有一台计算机，在某个时刻同时到达了  $n$  个任务。该计算机在同一时间只能处理一个任务，每个任务都必须被不间断地得到处理。该计算机处理这  $n$  个任务需要的时间分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。将第  $i$  个任务在调度策略中的结束时间记为  $e_i$ 。请设计一个贪心算法输出这  $n$  个任务的一个调度使得用户的平均等待时间  $1/n \sum e_i$  达到最小。
- 5.2 现有面值为 1 角、5 分、2 分、1 分的硬币，每种硬币的个数都是无限的。给出一个贪心算法，使得对任意给定的面值为  $n$  ( $n > 18$ ) 分的纸币能够将它兑换成币值相等的硬币且使用硬币个数最少。证明算法的正确性并分析其复杂度。
- 5.3 给定  $k$  个排好序的有序序列  $s_1, s_2, \dots, s_k$ ，现在用 2 路归并排序算法对这些有序序列排序。假定用 2 路归并排序算法对长度分别为  $m$  和  $n$  的有序序列排序要用  $m+n-1$  次比较操作。设计一个贪心算法合并  $s_1, s_2, \dots, s_k$  使得所需的比较操作次数最少。
- 5.4 设计分治算法求解如下问题，并分析算法的复杂性。  
输入：字符表  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  的前缀编码  $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$   
输出：与前缀编码  $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$  对应的编码树  $T$
- 5.5 给定两个大小为  $n$  的正整数集合  $A$  和  $B$ 。对于  $A$  到  $B$  的一个一一映射  $f$ ，不妨设  $f(a_i) = b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )，则  $f$  的代价为  $\sum_{i=1}^n a_i^{b_i}$ 。试设计一个贪心算法，找出从  $A$  到  $B$  的代价最大的一一映射。
- 5.6 一个 DNA 序列  $X$  是字符集  $\{G, T, A, C\}$  上的串，其上有大量信息冗余。设  $x$  是  $X$  的子串， $x$  及其冗余形式在  $X$  内在出现的起、止位置构成了一系列等长区间  $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$ 。试设计一个贪心算法找出  $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$  中互不相交的区间的最大个数，即确定  $x$  的独立冗余度。
- 5.7 背包问题定义如下，输入背包容量  $C$  和  $n$  个物品，其中第  $i$  个物品 ( $1 \leq i \leq n$ ) 的重量为  $w_i$  且其价值为  $v_i$ ，试设计一个贪心算法输出向量  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  使得  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 且  $\sum_{i=1}^n x_i v_i$  达到最大值。
- 5.8 给定平面点集  $P = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  和  $Q = \{(x_j, y_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ 。 $(x_i, y_i) \in P$  支配  $(x_j, y_j) \in Q$  当且仅当  $x_i \geq x_j$  且  $y_i \geq y_j$ 。试设计一个贪心算法输出集合  $\{(p, q) \mid p \in P, q \in Q, p \text{ 支配 } q\}$  使得该集合中点对最多。
- 5.9 某工厂收到  $n$  个订单  $(a_i, b_i)$ ，其中  $a_i$  和  $b_i$  均是正整数 ( $1 \leq i \leq n$ )，订单  $(a_i, b_i)$  希望在时间  $b_i$  之前获得  $a_i$  件产品。工厂的生产能力为每个时间单位生产 1 件产品。工厂希望拒绝最少数量的订单，并恰当地排序剩下的订单使得剩下的订单均能够被满足。试设计一个贪心算法求解上述问题。
- 5.10 输入  $n$  个区间  $[a_i, b_i]$ ，其端点满足  $1 \leq a_i \leq b_i \leq n$ ，试设计一个贪心算法选出最少区间覆盖  $[1, n]$ 。
- 5.11. 在笔直的公路两侧各有  $n$  个炼油厂  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $n$  个加油站  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。炼油厂  $x_i$  每天生产汽油  $S(x_i)$ ，加油站每天出售汽油  $C(y_i)$  且  $\sum_i S(x_i) = \sum_j C(y_j)$ 。汽油从炼

油厂运输到加油站的代价正比于二者之间的距离。试设计算法将各个炼油厂生产的汽油全部运输到加油站，使得整体运输单价最小。