HIT CS&E

第六章 平摊分析
(自学)

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提要

6.1 平摊分析原理
6.2 聚集方法
6.3 会计方法
6.4 势能方法
6.5 动态表操作的平摊分析
6.6 斐波那契堆性能平摊分析
6.7 并查集性能平摊分析

HIT CS&E

6.1 平摊分析原理

- 平摊分析的基本思想
- 平摊分析方法

HIT CS&E

平摊分析的基本思想

算法经常在某个数据结构上执行一系列操作
- 每个操作的代价各不相同（有高、有低）

问题
- 从平均效果看，每个操作的代价如何分析？
- 操作序列的时间复杂度如何分析？

平摊分析
- 将操作序列的总代价分摊到每个操作上
- 不涉及每个操作被执行的概率
- 不同于平均复杂度分析

HIT CS&E

平摊分析的基本思想

- 聚集方法（每个操作的代价）
  - 为每个操作都赋予相同的平摊代价
  - 确定n个操作的上界$T(n)$, 每个操作平摊$T(n)/n$
- 会计方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - 某些操作在数据结构的特殊对象上“预付”代价
- 势能方法（整个操作序列的代价）
  - 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  - “预付”的代价作为整个数据结构的“能量”

HIT CS&E

6.2 聚集方法

- 聚集方法的原理
- 聚集方法的实例之一
- 聚集方法的实例之二

HIT CS&E

聚集方法的原理

聚集方法的目的
- 分析平摊代价的上界

分析方法
- 分析操作序列中每个操作的代价上界t_i
- 求得操作序列的总代价的上界$T(n)=t_1+t_2+...+t_n$
- 将$T(n)$平摊到每个操作上得到平摊代价$T(n)/n$

特点
- 每个操作获得相同的平摊代价
- 较准确地计算$T(n)$需要一定的技巧

HIT CS&E

聚集方法实例之一: 栈操作系列

- 普通栈操作及其时间代价
  - **Push(*S*, *x*)**: 将对象压*x*入栈*S*
  - **Pop(*S*)**：弹出并返回*S*的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为*1*
  - *n*个**Push**和**Pop**操作系列的总代价是*n*
  - *n*个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

HIT CS&E

- 新的普通栈操作及其时间代价
  - 操作**Multipop(*S*, *k*)**:

    去掉*S*的*k*个顶对象, 当|*S*|<*k*时弹出整个栈
  - 实现算法

```
Multipop(S, k)
1  While  not STACK-EMPTY(S) and k≠0  Do
2          Pop(S);
3          k←k-1.
```

  - **Multipop(*S*, *k*)的实际代价 (设Pop的代价为1)**
    - Multipop的代价为*min*(|*S*|, *k*)

HIT CS&E

- 初始栈为空的*n*个栈操作序列的分析
  - *n*个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n)=O(n^2)$
    - 平摊代价为$T(n)/n=O(n)$
  - 精细分析
    - 一个对象在每次被压入栈后至多被弹出一次
    - 在非空栈上调用Pop的次数(包括在Multipop内的调用)至多为Push执行的次数, 即至多为*n*
    - 最坏情况下操作序列的代价为$T(n)\le 2n=O(n)$
    - 平摊代价=$T(n)/n=O(1)$

分析太粗糙
！！！

n-1个push
1个multipop

HIT CS&E

聚集方法实例之二：　二进计数器

- 问题定义：由 0 开始计数的*k*位二进计数器

  输入：*k*位二进制变量*x*，初始值为**0**

  输出：$x+1 \bmod 2^k$

  数据结构:

  A[0..*k*-1]作为计数器, 存储*x*

  *x*的最低位在*A*[0]中, 最高位在*A*[*k*-1]中

$$x=\sum_{i=0}^{k-1} A[i]\cdot 2^i$$

HIT CS&E

- 计数器加*1*算法

  输入：*A*[0..*k*-1]，存储二进制数*x*

  输出：*A*[0..*k*-1]，存储二进制数$x+1 \bmod 2^k$

```
INCREMENT(A)
1    i←0
2    while  i<k and A[i]=1  Do
3          A[i]←0;
4          i←i+1;
5    If  i<k  Then  A[i]←1
```

- 初始为零的计数器上*n*个INCREMENT操作分析

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	每个操作 Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

HIT CS&E

- 粗略分析
  - 每个Increment的时间代价最多$O(k)$
  - n个Increment序列的时间代价最多$O(kn)$
  - n个Increment平摊代价为$O(k)$
  - 例如上例中：$k*n=8*16=128$
- 精细分析

HIT CS&E

操作Cost＝O(发生改变的位数)

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

HIT CS&E

- 精细分析
  - $A[0]$每1次操作发生一次改变，总次数为n
  - $A[1]$每2次操作发生一次改变，总次数为$n/2$
  - $A[2]$每4次操作发生一次改变，总次数为$n/2^2$
  - $A[3]$每8次操作发生一次改变，总次数为$n/2^3$
  - 一般地
    - 对于i=0, 1, …., lg$n$, $A[i]$改变次数为$n/2^i$
    - 对于i>lg$n$, $A[i]$不发生改变
      (因为n个操作结果为n，仅涉及$A[0]$至$A[\lg n]$位）
  - $T(n)= \Sigma_{0\le i\le \lg n} n/2^i < n\ \Sigma_{0\le i\le\infty} 1/2^i = 2n=O(n)$
  - 每个Increment操作的平摊代价为$O(1)$

HIT CS&E

6.3 会计方法

- 会计方法的原理
- 会计方法的实例之一
- 会计方法的实例之二

HIT CS&E

Accounting方法的原理

- Accounting方法
  - 目的是分析n个操作序列的复杂性上界
  - 一个操作序列中有不同类型的操作
  - 不同类型的操作的操作代价各不相同
  - 于是我们为每种操作分配不同的平摊代价
    - 平摊代价可能比实际代价大，也可能比实际代价小

数据结构中存储的Credit在任何时候都必须非负，即$\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n}c_i \ge 0$永远成立

  - 平摊代价的选择规则：
    - 设c_i和α_i是操作i的实际代价和平摊代价
    - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n}c_i$ 必须对于任意n个操作序列都成立

栈操作序列的分析

- 各栈操作的实际代价
  - Cost(PUSH)=*1*
  - Cost(POP)=*1*
  - Cost(MULTIPOP)=*min{k, s}*
- 各栈操作的平摊代价
  - Cost(PUSH)=*2*
    - 一个*1*用来支付PUSH的开销,
    - 另一个*1*存储在压入栈的元素上, 预支POP的开销
  - Cost(POP)=*0*
  - Cost(MULTIPOP)=*0*
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n}c_i \ge 0$ 对于任意*n*个操作序列都成立
    - 因为在n个操作序列中, POP个数(包括MULTIPOP中的POP)不大于PUSH个数.
- *n*个栈操作序列的总平摊代价
  - *O(n)*

二进制计数器Increment操作序列分析

- Increment操作的平摊代价
  - 每次一位被置*1*时，付*2*美元
    - *1*美元用于置*1*的开销
    - *1*美元存储在该"*1*"位上，用于支付其被置*0*时的开销
    - 置*0*操作无需再付款
  - Cost(Increment)=*2*
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n}c_i$ 对于任意*n*个操作序列都成立，因为从前面的分析可知$\Sigma_{1\le i\le n}c_i < 2n$
- *n*个Increment操作序列的总平摊代价
  - *O(n)*

6.4 势能方法

- 势能方法的原理
- 势能方法的实例之一
- 势能方法的实例之二

Potential方法的原理

- Potential方法
  - 目的是分析n个操作系列的复杂性上界
  - 在会计方法中，如果操作的平摊代价比实际代价大，我们将余额与数据结构的数据对象相关联
  - Potential方法把余额与整个数据结构关联，所有的这样的余额之和，构成数据结构的势能
    - 如果操作的平摊代价大于操作的实际代价，势能增加
    - 如果操作的平摊代价小于操作的实际代价，要用数据结构的势能来支付实际代价，势能减少

- 数据结构势能的定义
  - 考虑在初始数据结构D_0上执行*n*个操作
  - 对于操作*i*
    - 操作*i*的实际代价为c_i
    - 操作*i*将数据结构D_{i-1}变为D_i
    - 数据结构D_i的势能是一个实数$\phi(D_i)$，ϕ是一个正函数
    - 操作*i*的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$
  - *n*个操作的总平摊代价（必须是实际代价的上界）

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

  - 关键是ϕ的定义
    - 保证$\phi(D_n) \ge \phi(D_0)$, 使总平摊代价是总实际代价的上界
    - 如果对于所有*i*, $\phi(D_i) \ge \phi(D_0)$，可以保证$\phi(D_n) \ge \phi(D_0)$
    - 实际可以定义$\phi(D_0)=0$，$\phi(D_i) \ge 0$

栈操作序列的分析

- 栈的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为栈D_m中对象的个数，于是
    - $\phi(D_0)=0$，D_0是空栈
    - $\phi(D_i) \ge 0 = \phi(D_0)$, 因为栈中对象个数不会小于0
    - *n*个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - 栈操作的平摊代价（设栈D_{i-1}中具有*s*个对象）
    - PUSH: $\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1 + (s+1) - s = 2$
    - POP: $\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1 + (s-1) - s = 0$
    - MULTIPOP(S, k): 设$k' = min(k,s)$

$$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = k' + (s-k') - s = k' - k' = 0$$

  - *n*个栈操作序列的平摊代价是*O(n)*

二进制计数器操作序列分析

- 计数器的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为第m个操作后计数器中1的个数b_m
    - $\phi(D_0)=0$，D_0中1的个数为0
    - $\phi(D_i)\geq 0=\phi(D_0)$, 因为计数器中$1$的个数不会小于0
    - 于是，n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - INCREMENT操作的平摊代价
    - 第i个INCREMENT操作将 t_i个1置0, 实际代价为t_i+1
    - 计算操作i的平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})$
      - If $b_i=0$, 操作i resets所有k位, 所以$b_{i-1}=t_i=k$
      - If $b_i>0$, 则$b_i=b_{i-1}-t_i+1$
      - 于是 $b_i \leq b_{i-1}-t_i+1$
        $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=b_i-b_{i-1} \leq b_{i-1}-t_i+1-b_{i-1}=1-t_i$
      - 平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})\leq(t_i+1)+(1-t_i)=2$
  - n个操作序列的总平摊代价是$O(n)$

6.5 动态表性能平摊分析

- 动态表的概念
- 动态表的扩张与收缩
- 仅含扩张操作的动态表平摊分析
- 一般的动态表平摊分析

动态表—基本概念

- 动态表支持的操作
  - ·TABLE-INSERT:将某一元素插入表中
  - ·TABLE-DELETE:将一个元素从表中删除
- 数据结构:用一个(一组)数组来实现动态表
- 非空表T的装载因子$\alpha(T)=T$存储的对象数/表大小
  - 空表的大小为0，装载因子为1
  - 如果动态表的装载因子以一个常数为下界，则表中未使用的空间就始终不会超过整个空间的一个常数部分

动态表的表示

设T表示一个动态表:
- *table*[T]是一个指向表示表的存储块的指针
- *num*[T]包含了表中的项数
- *size*[T]是T的大小
- 开始时，*num*[T]=*size*[T]=0

动态表的扩张

- 插入一个数组元素时,完成的操作包括
  - 分配一个包含比原表更多的槽的新表
  - 再将原表中的各项复制到新表中去
- 常用的启发式技术是分配一个比原表大一倍的新表,
  - 只对表执行插入操作,则表的装载因子总是至少为1/2
  - 浪费掉的空间就始终不会超过表总空间的一半

扩张算法

```
算法: TABLE—INSERT(T, x)                       /*复杂的插入操作*/
    If  size[T]=0 Then                         /*开销为常数*/
        获取一个大小为1的表 table[T];
        size[T]←1;
    If  num[T]=size[T] Then                    /*开销取决于size[T]*/
        获取一个大小为 2×size[T]的新表new-table;
        将 table[T]中元素插入new-table;        /*简单插入操作*/
        释放 table[T];
        table[T]←new-table;
        size[T]←2×size[T];
    将 x插入table[T];
    num[T]←num[T]+1
```

HIT CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析

聚集分析-粗略分析
- 考察第i次操作的代价C_i
  - 如果$i=1$, $C_i=1$;
  - 如果$num[T]<size[T]$, $C_i=1$;
  - 如果$num[T]=size[T]$, $C_i=i$;
- 共有n次操作
  - 最坏情况下,每次进行n次操作,总的代价上界为n^2
- 这个界不精确
  - n次TABLE—INSERT操作并不常常包括扩张表的代价
  - 仅当i-1为2地整数幂时第i次操作才会引起一次表地扩张

聚集分析-精细分析
- 第i次操作的代价C_i
  - 如果$i=2^m$, $C_i=i$; 否则$C_i=1$
- n次TABLE—INSERT操作的总代价为 $\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^j < n + 2n = 3n$
- ★每一操作的平摊代价为$3n/n=3$

HIT CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析

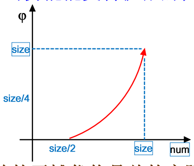
会计方法
- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3
  - 1支付第11步中的基本插入操作的实际代价
  - 1作为自身的存款
  - 1存入表中第一个没有存款的数据上
- 当发生表的扩张时，数据的复制的代价由数据上的存款来支付
- 任何时候，存款总和非负
- 初始为空的表上n次TABLE-INSERT操作的平摊代价总和为$3n$

HIT CS&E

初始为空的表上*n*次插入操作的代价分析

势能法分析

?势怎么定义才能使得表满发生扩张时势能能支付扩张的代价
- 如果势能函数满足
  - 刚扩充完,$\phi(T)=0$
  - 表满时 $\phi(T)=size(T)$



- $\phi(T)=2*num[T]-size[T]$
  - $num[T]\ge size[T]/2$, $\phi(T)\ge 0$
  - n次TABLE－INSERT操作的总的平摊代价是总的实际代价的一个上界
- 第i次操作的平摊代价
  - 如果发生扩张,c_i=3
  - 如果未发生扩张, c_i=3
- 初始为空的表上n次插入操作的代价的上界为$3n$

HIT CS&E

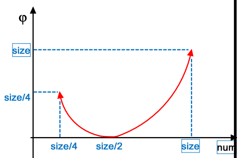
动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列:
    - 前n/2个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…
    - 每次扩张和收缩的代价为O(n)，共有O(n)扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为$O(n)$--每个操作的平摊代价太高
- 改进的收缩策略(允许装载因子低于1/2)
  - 满表中插入数据项时，将表扩大一倍
  - 删除数据项引起表不足1/4满时，将表缩小为原表的一半
  - 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2
  - 表的装载因子的下界是1/4

HIT CS&E

动态表上*n*次(插入、删除)操作的代价分析

势能函数的定义
- 操作序列过程,势能总是非负的
  - 保证一列操作的总平摊代价即为其实际代价的一个上界
- 表的扩张和收缩过程要消耗大量的势
- 势能函数应满足
  - $num(T)=size(T)/2$时，势最小
  - 当$num(T)$减小时，势增加直到收缩
  - 当$num(T)$增加时，势增加直到扩充



- 势能函数特征的细化
  - 当装载因子为1/2时，势为0
  - 装载因子为1时，有$num[T]=size[T]$，即$\phi(T)=num[T]$。这样当因插入一项而引起一次扩张时，就可用势来支付其代价
  - 当装载因子为1/4时，$size[T]=4\cdot num[T]$。即$\phi(T)=num[T]$。因而当删除某项引起一次收缩时就可用势来支付其代价

$$\Phi(T)=\begin{cases} 2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\ge 1/2 \\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2 \end{cases}$$

HIT CS&E

平摊代价的计算

- 第i次操作的平摊代价：$c'_i=c_i+\phi(T_i)-\phi(T_i-1)$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT： 未扩张 $c'_i\lesssim 3$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT： 扩张 $c'_i\lesssim 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE： 未收缩 $c'_i\lesssim 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE： 收缩 $c'_i\lesssim 3$
- 作用于一动态表上的n个操作的实际时间为O(n)

HIT CS&E

6.6 斐波那契堆性能平摊分析

HIT CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　　平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

HIT CS&E

堆的性能比较

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　　平摊分析

插入，删除和键值减小不可能均在$O(1)$时间内完成. 为什么?

HIT CS&E

斐波那契堆的历史渊源

斐波那契堆的提出. [Fredman and Tarjan, 1986]

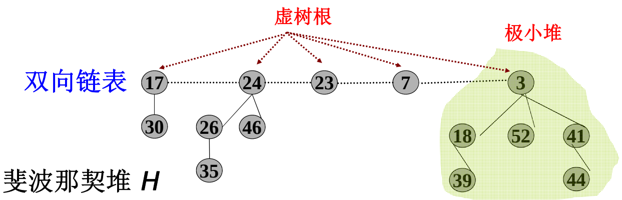
- 巧妙的数据结构和分析
- 提出动机: 改进 Dijkstra's算法的性能
- Dijkstra算法执行:
  - $|V|$次插入堆元素操作
  - $|V|$次抽取堆顶元素操作
  - $|E|$次减小键值操作
  - 总时间复杂度为$O(|E| \log |V|)$
- 改进后时间复杂度为 $O(|E| + |V| \log |V|)$

HIT CS&E

斐波那契堆的结构(1)

斐波那契堆:

- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
  - 任意结点的键值不超过其孩子结点的键值
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点

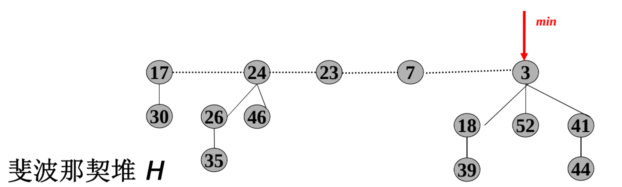


HIT CS&E

斐波那契堆的结构(2)

斐波那契堆:

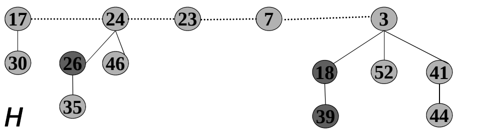
- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
  - 从堆中查找最小元素(Find_min操作)的开销为$O(1)$
- 一些标记顶点



HIT CS&E

斐波那契堆的结构(3)

斐波那契堆：
- 一系列树，每棵树均是一个极小堆
- 一个指针，指向最小元素
- 一些标记顶点
  - 用于保持堆的“扁平结构”
  - 标记的具体含义是：*x*被标记，如果它以前是树根，但堆操作过程中变成其他结点的孩子且失去过孩子

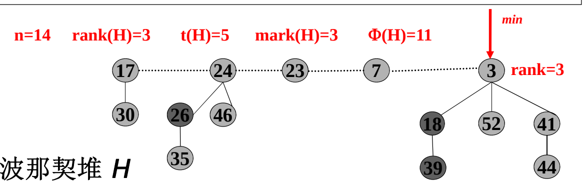


斐波那契堆 *H*

HIT CS&E

斐波那契堆的结构(4)

斐波那契堆记号：
- ***n*** ：堆H中数据元素的个数
- ***rank*(*x*)**：堆中结点x的孩子数
- ***rank*(*H*)**：堆H的所有结点中的最大孩子数
- ***t*(*H*)** ：堆H中树的棵数
- ***mark*(*H*)**：堆H中被标记顶点的个数
- ***Φ*(*H*)=*t*(*H*)+2·*mark*(*H*)**：势能函数

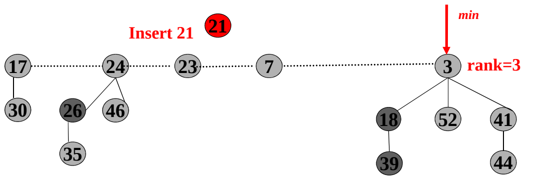


斐波那契堆 *H*

HIT CS&E

插入操作Insert

插入操作的过程：
- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针

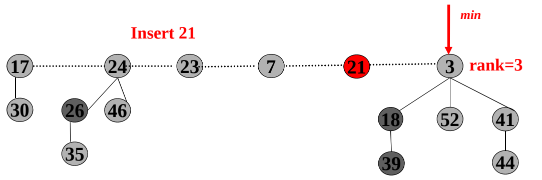


H

HIT CS&E

插入操作Insert

插入操作的过程：
- 以新结点为根，创建一棵新树
- 将新的树插入树根双向链表
- 如有必要，更新最小元素指针

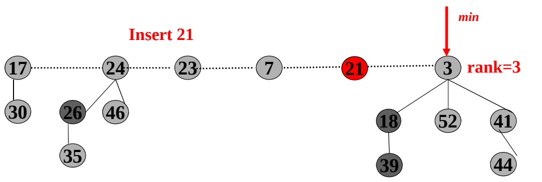


H

HIT CS&E

插入操作Insert分析

插入操作的代价分析：（势能函数***Φ*(*H*)=*t*(*H*)+2·*mark*(*H*)**）
- 实际开销O(1)
- 平摊代价O(1)
  - 操作完成后，*t*(*H*)增大1，但mark(*H*)不变

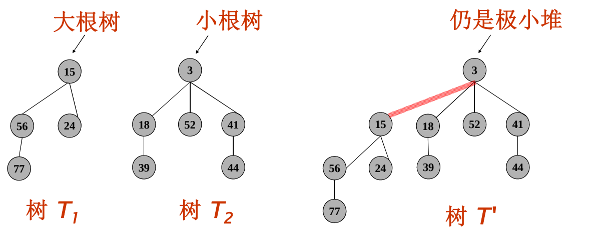


H

HIT CS&E

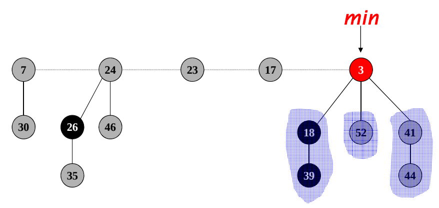
删除堆顶元素Delete_min(1)

- 链接调整操作
  - 将大根树作为小根树的子树，链接在小根树的根下
  - Delete_min操作中调用的子操作
  - 实际开销为*O*(1)



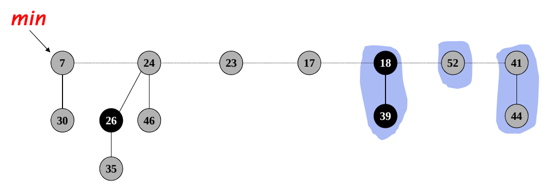
删除堆顶元素Delete_min(2)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链入双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



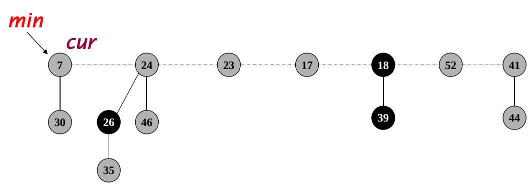
删除堆顶元素Delete_min(3)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
    - 实际开销O(t(H)+rank(x))
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



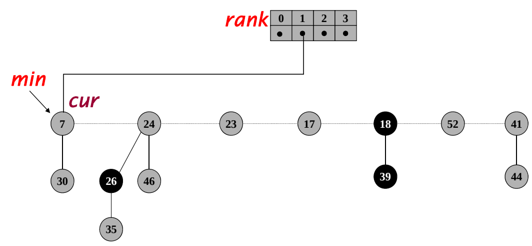
删除堆顶元素Delete_min(4)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



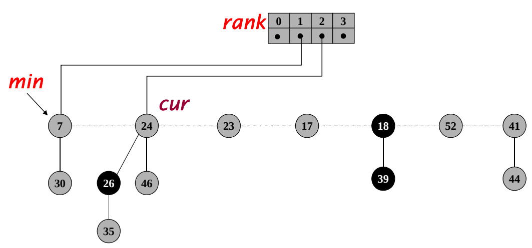
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



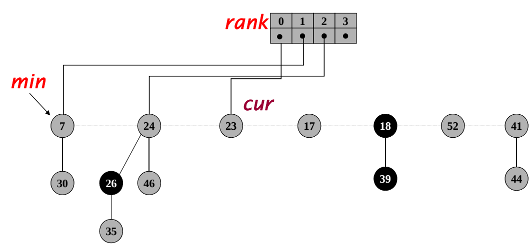
删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



删除堆顶元素Delete_min(5)

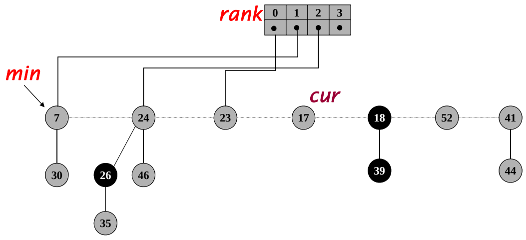
- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

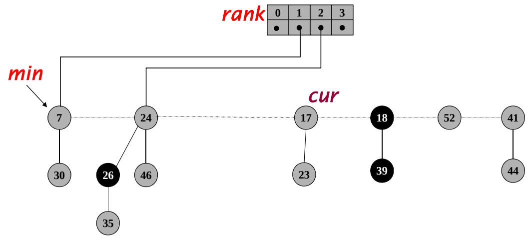
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

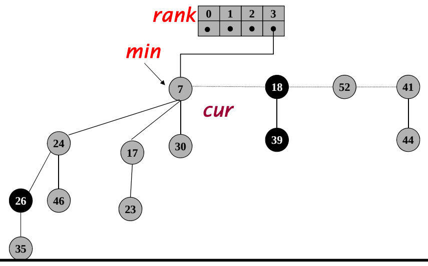
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

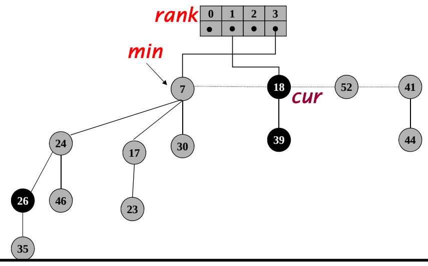
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

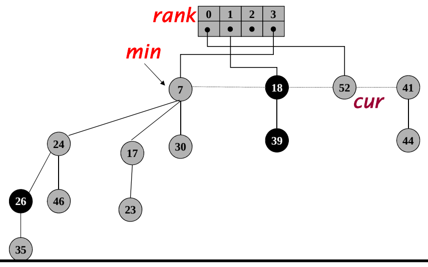
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

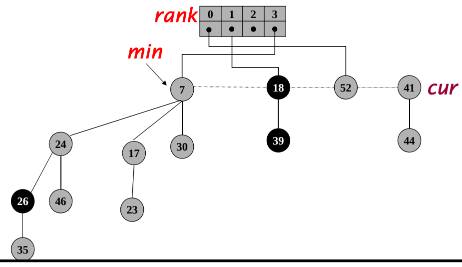
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

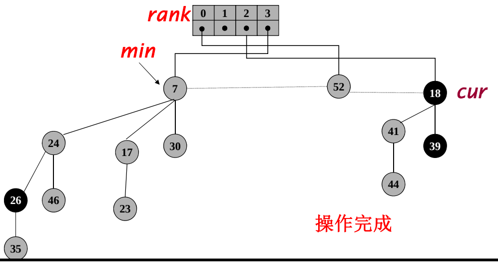
- **Delete_min操作过程**
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min(5)

- **Delete_min**操作过程
  - 删除最小元素；将其所有孩子链如双向链表，更新最小元素指针
  - 合并双向链表中的树根，使得没有树根具有相同rank



HIT CS&E

删除堆顶元素Delete_min的分析

删除操作的代价分析： （ 势能函数 $\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$ ）

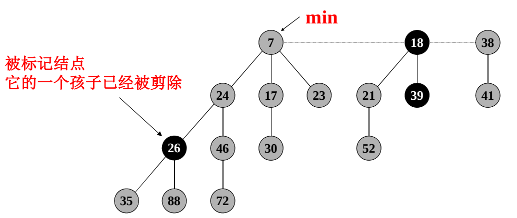
- 实际开销$O(rank(H)) + O(t(H))$
  - $O(rank(H))$ 时间内将最小元素结点的孩子插入双向链表
  - $O(rank(H)) + O(t(H))$ 时间内更新最小元素指针
  - $O(rank(H)) + O(t(H))$ 维护双向链表
- *平摊代价$O(rank(H))$*
  - *操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H*
  - *$t(H') \le rank(H) + 1$,因为H'中没有两个树具有相同rank*
  - *$\Delta\Phi(H) \le rank(H) + 1 - t(H)$*
- *Delete_min操作的平摊代价很好吗？*
  - *对，这个代价很好，因为*
  - *如果只有插入和删除操作，则结果即为二项堆*
  - *这意味着$rank(H) \le \lg n$*
  - *减小键值操作也将确保$rank(H) \le \lg n$*

HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key

直观上，键值减小操作作用于结点**x**，进行

- 若减小键值后，堆性质仍成立，则仅需减小键值
- 否则, 将x子树剪切下来插入双向链表，标记其父结点
- 为了保持堆的“扁平结构”，一旦剪除某个孩子的第二个孩子结点，则将该结点剪切下来插入双向链表（如果必要，需要去除该结点上的标记）



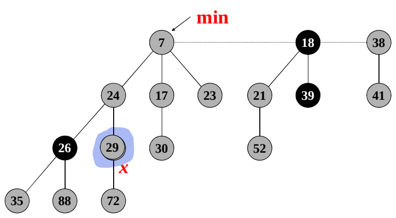
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(2)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为29）

情形1：减小键值后堆性质仍成立

- 减小键值
- 如有必要，更新最小元素指针



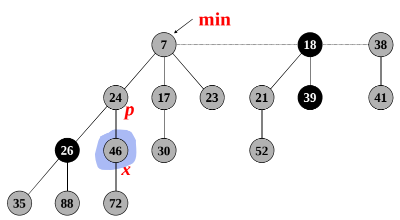
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(3)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



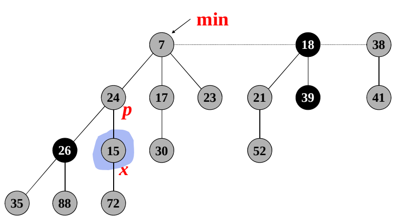
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(3)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



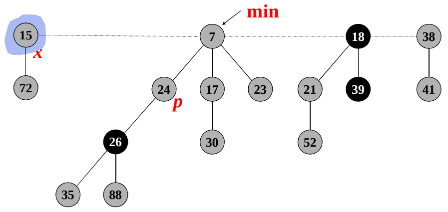
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(5)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



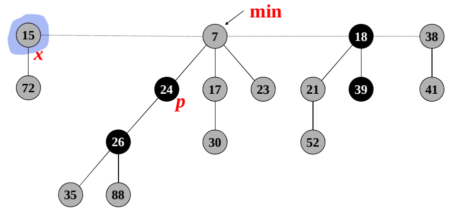
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(6)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从46减小为15）

情形2a：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



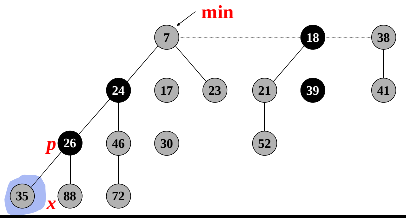
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(7)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



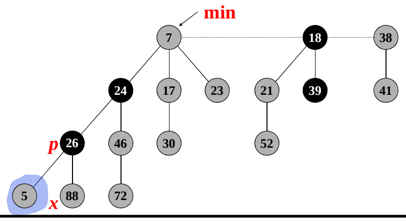
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(8)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



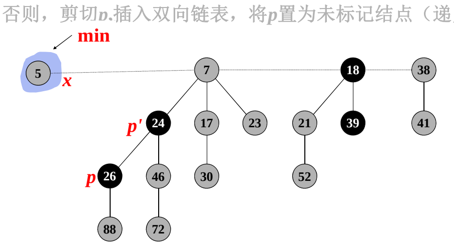
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(9)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



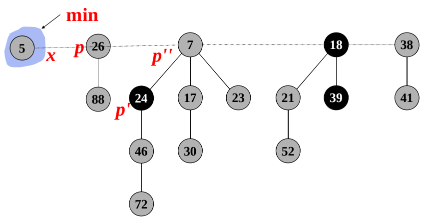
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(10)

直键值减小操作作用于结点*x*（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切*x*子树，插入双向链表，将*x*置为未标记结点
- 若*x*的父结点*p*未标记，则标价它
- 否则，剪切*p*,插入双向链表，将*p*置为未标记结点（递归过程）



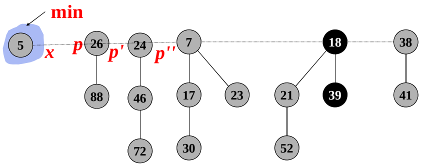
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(11)

直键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）



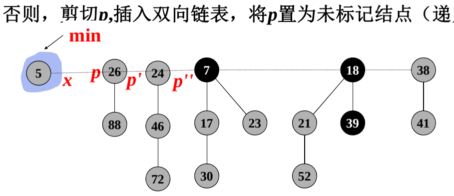
HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key(12)

直键值减小操作作用于结点x（例如，键值从35减小为5）

情形2b：减小键值后堆性质不成立

- 减小键值
- 剪切x子树，插入双向链表，将x置为未标记结点
- 若x的父结点p未标记，则标价它
- 否则，剪切p,插入双向链表，将p置为未标记结点（递归过程）



HIT CS&E

键值减小操作Decrease_key的分析

键值减小操作的代价分析（势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$）

- 实际开销O(c)
  - $O(1)$ 时间内减小键值
  - 执行c次剪切操作，每次需要时间O(1)
- 平摊代价$O(1)$
  - 操作完成后的堆记为H',操作前的堆记为H
  - $t(H') \le t(H) + c$
  - $mark(H')=mark(H)-c+2$
  - $\Delta\Phi(H)=2+2(-c+2)=4-c$

HIT CS&E

目前得到的分析结果

在势能函数$\Phi(H)=t(H)+2\cdot mark(H)$ 下

- 插入操作的平摊代价O(1)
- 键值减小操作的平摊代价O(1)
- delete_min的代价是O(rank(H))
- 删除操作的平摊代价$O(rank(H))$
  - 先将节点x的键值减小为-∞,则x将出现在堆顶，平摊代价O(1)
  - 调用delete_min删除堆顶元素,平摊代价O(rank(H))

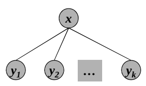
欲得定理结论，需证明$rank(H)=O(\log n)$

这意味着，斐波那契堆管理的元素个数是$rank(H)$的指数

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理1. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$。设 $y_1,y_2,\dots,y_k$ 是结点x的所有孩子结点且恰好按其成为x的孩子的先后次序列出，则$rank(y_1)=0$,且$rank(y_i)\ge i-2$对$i=2,3,\dots,k$成立



证明.当y_i成为x的孩子时，

x已有孩子$y_1,y_2,\dots,y_{i-1}$,故$rank(x)=i-1$

y_i要成为x的孩子，需满足$rank(y_i)=rank(x)=i-1$

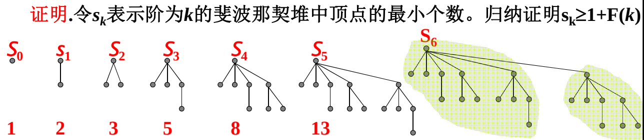
y_i成为x的孩子之后，至多失去一个孩子

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理2. 设x是斐波那契堆中的任意结点，记$k=rank(x)$,则x所在的极小堆中至少有$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$ 个结点。

证明.令s_k表示阶为k的斐波那契堆中顶点的最小个数。归纳证明$s_k \ge 1+F(k)$



根据引理1，用归纳法统计x及其子孙结点的个数有　　8 + 13 = 21

$s_k= 1+s_0+s_0+s_1+\dots+s_{k-2}$

根　1　2　3　　k

$\ge 1+1+F(0)+F(1)+\dots+F(k-2)$ （归纳假设）

$=1+F(k)$ （斐波那契数列性质，习题3.2）

$\ge \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$ （斐波那契数列性质，习题3.2）

HIT CS&E

$rank(H)$的上界分析

引理3. 设H是含有n个结点的斐波那契堆，则$rank(H)=O(\log n)$

证明.

- 记$rank(H)=k$
- 考虑H中结点的个数n
- 由引理2可知，结点个数至少为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$
- 于是，$n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$

HIT CS&E

斐波那契堆上的合并操作Union

合并操作作用于堆H_1和H_2

- 合并H_1和H_2的根结点双向链表
- 实际开销$O(1)$
- 平摊开销$O(1)$
  - $t(H_1 \cup H_2)=t(H_1)+t(H_2)$
  - $mark(H_1 \cup H_2)=mark(H_1)+mark(H_2)$
  - $\Phi(H)=t(H)+2 \cdot mark(H)$
  - 势能改变量为0

HIT CS&E

斐波那契堆上的删除操作Delete

删除操作作用于堆的任意结点x

- 将x的键值减小为$-\infty$
- 删除堆顶元素
- 平摊开销$O(\log n)$
  - 减小键值操作的平摊代价为$O(rank(H))$
  - $mark(H)=O(\log n)$
  - 删除堆顶元素的平摊代价为$O(1)$

HIT CS&E

结论

操作	链表	二叉堆	二项堆	斐波那契堆	松散堆
make-heap	1	1	1	1	1
is-empty	1	1	1	1	1
insert	1	log n	log n	1	1
delete-min	n	log n	log n	log n	log n
decrease-key	n	log n	log n	1	1
delete	n	log n	log n	log n	log n
union	1	n	log n	1	1
find-min	n	1	log n	1	1

n -堆中存储的元素个数　　　　平摊分析

定理. 从初始为空的斐波那契堆开始，任意执行由a_1个插入，a_2个删除，a_3个键值减小操作构成的长度为n的操作序列，其时间复杂度$O(a_1 + a_2 \log n + a_3)$.

HIT CS&E

6.7并查集性能平摊分析

- 并查集的概念 和基本操作
- 并查集的线性链表实现
- 并查集的森林实现
- 并查集性能的平摊分析

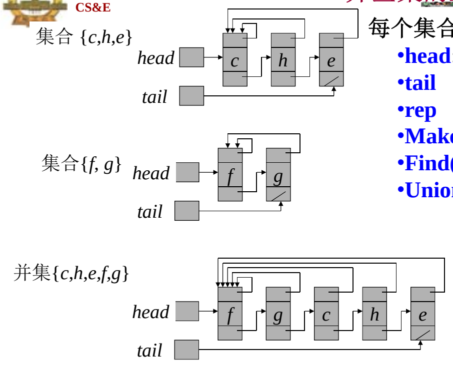
HIT CS&E

并查集

- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,\ldots,S_n\}$
  - 每个集合S_i维护一个代表元素x_i
- 支持的操作
  - MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的集合.
  - UNION(x,y)　：合并代表元素分别x和y的集合
  - FIND-SET(x)：返回x所在集合的代表元素
- 目标：使得如下操作序列的代价尽可能低
  - n个MAKE-SET 操作 (开始阶段执行).
  - m个MAKE-SET, UNION, FIND-SET操作(后续)
  - $m \geq n$,UNION操作至多执行 n-1次
- 典型应用 （管理图的连通分支）
  - 找出图的连通分支
  - Krusal算法中维护生成树产生过程中的连通分支

HIT CS&E

并查集的直接实现为链表



每个集合维护为一个链表

- **head**: 链表头指针
- **tail** :链表尾指针
- **rep** :指向代表元素
- **Make-Set**: O(1)
- **Find**(x) : O(1)
- **Union**(x,y): O($|s_x|$)

HIT CS&E

并查集链表实现的性能分析

考虑并查集上 如下特定的操作序列的代价

- 开始阶段执行n个MAKE-SET 操作的总代价$O(n)$
- 后跟n-1个 UNION操作的总代价O(n^2)

Union(x_1,x_2)	代价O(1)
Union(x_2,x_3)	代价O(2)
Union(x_3,x_4)	代价O(3)
…	
Union(x_{n-1},x_n)	代价O(n-1)

- 总共执行执行2n-1次操作的总代价为O(n^2)
- 从平摊效果看，每个操作的开销为$O(n)$

说明链表实现方式是很“蹩脚”，如何提高效率？

HIT CS&E

并查集链表实现的一种简单改进

考虑并查集链表实现的如下改进，效果会怎么样？

- 每个链表表头记录集合（或）链表中元素的个数
- Union操作时将较短链表链接到较长链表

结果

在改进后的并查集上执行由Make_set, Find和Union操作构成的长度为m+n的操作序列（其中Make_Set操作有m个），则该操作序列的时间复杂度为$O(m+n\log n)$

为什么？

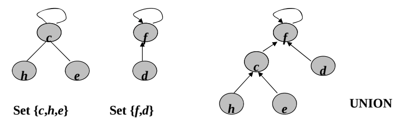
- 考虑每个元素的rep指针被修改的次数 (总共n个元素)
- 每个元素至多参与logn次并，因为并操作使链表长度至少倍增
- 所有Union操作一起至多$n$logn次修改rep指针

HIT CS&E

并查集的森林实现

并查集三种操作

- 每个集合表示为一棵有根树
- 树根是代表元素
- 每个结点的指针指向其父结点，根结点指向自身

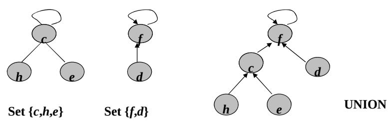


HIT CS&E

并查集的直接森林实现

并查集可以实现为森林

- MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的一棵树 $O(1)$
- UNION(x,y) : 将x作为y的孩子 $O(1)$
- FIND(x) : 从结点x沿父指针访问直到树根 $O(T_x)$
- n次合并操作可能得到深度为n的树（简单路径）
- 在此极端情况下，Find(x)的最坏时间复杂性为$O(n)$
- n次Find操作的时间复杂度可能达到$O(n^2)$

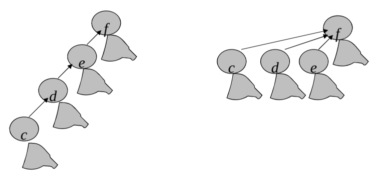


HIT CS&E

改进策略之路径压缩

执行Find(x)时

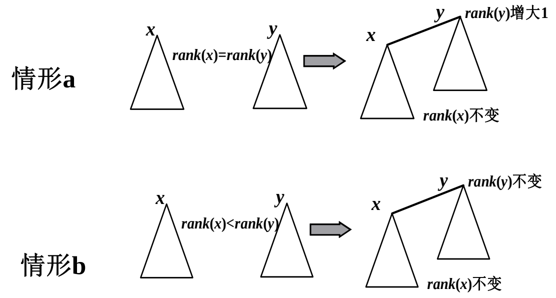
- 修改x到根结点r的路径上的所有结点的指针，使其指向根结点r
- 路径压缩增加了执行单次Find操作的时间开销
- 树中的路径长度大幅度降低，为后续Find操作节省了时间



改进策略之按秩合并

根据以下规则，维护每个结点的秩

- **MakeSet(*x*)操作执行时定义结点*x*的秩为0**
- **Find操作不改变任意顶点的秩**
- **Union(*x*,*y*) 分两种情况修改结点的秩：**
  - 情形a：**rank(x)=rank(y)**。此时，令*x*指向*y*且*y*是并集的代表元素，**rank(*y*)**增加1，**rank(*x*)**不变（其他结点的秩也保持不变）
  - 情形b：**rank(x)<rank(y)**。此时，令*x*指向*y*且*y*是并集的代表元素，**rank(y)**和**rank(*x*)**保持不变（其他结点的秩也保持不变）



并查集操作算法

UNION(x,y)
1. LINK(FIND(*x*),FIND(*y*))

MAKE-SET(x)
1. rank[*x*]←0
2. p[*x*]←*x*

FIND(*x*)
1. Q←∅
2. While *x*≠ p[*x*] Do
3. 将*x*插入*Q*;
4. *x*← *p*[*x*];
5. For ∀*y*∈*Q* do
6. *p*[*y*] ← *x*;
7. 输出*x*

LINK(*x*,*y*)
1. if rank[*x*]>rank[*y*] then
2. *p*[*y*] ←*x*
3. else *p*[*x*] ←*y*
4. if rank[*x*]=rank[*y*] then
5. rank[*y*] ← rank[*y*] +1

并查集的性能

在并查集上执行**m**个操作的时间复杂度为**O(*mα*(*n*))**

- ***n*是Make_Set操作的个数**
- ***α*(*n*)≤4，对于绝大多数应用成立**
- **近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的**

欲得上述结果，需要

- 讨论一个增长缓慢的函数-阿克曼函数的逆函数
- 讨论秩的性质
- 证明上述时间复杂度

阿克曼函数

阿克曼函数是定义在**k≥0, j≥1**上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果}k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果}k\ge 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=2j+1$
- $A_2(j)=2^{j+1}(j+1)-1$
- $A_k(j)$是一个“急速”增长的函数

$A_0(1)=1+1=2$

$A_1(1)= 2*1+1=3$

$A_2(1)= 2^{1+1}(1+1)-1= 7$

$A_3(1)=A_2^{(1+1)}(1)=A_2^{(2)}(1)=A_2(A_2(1))=A_2(7)=2^{7+1}(7+1)-1=2047$

$A_4(1)=A_3^{(2)}(1)=A_3(A_3(1)) =A_3(2047)=A_2^{(2048)}(2047)$

$>> A_2(2047) =2^{2048}.2048-1 >2^{2048} =(2^4)^{512} =(16)^{512}>10^{80}$

阿克曼函数的逆函数

阿克曼函数的逆函数定义定义为

$$\alpha(n)=\min \{k \mid A_k(1)\ge n\}$$

由于阿克曼函数急速增长，需要$\alpha(n)$缓慢增长

$\alpha(n)$≤4在人类实践认知范围总成立

n	0≤n≤2	n=3	4≤n≤7	8≤n≤2047	2048≤n≤A_4(1)	...
$\alpha(n)$	0	1	2	3	4	...

HIT CS&E

秩的性质

引理1.对于含有n个结点的并查集，秩具有如下性质：

(1) 如果$x \neq p(x)$，则$rank(x) < rank(p(x))$

(2) $rank(x)$的初始值为0，逐步递增直到x不再是集合的代表元素，此后保持不变

(3)对于任意x, $rank(p(x))$是在操作过程中单调递增

(4)$rank(x) \leq n-1$对任意结点成立

证明.根据秩的定义和并查集上的操作算法可得

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- 直观上
  - $Level(x)$是阿克曼函数的最大级,使得该函数在自变量$rank(x)$上的函数值不超过$rank(p(x))$;
  - $Iter(x)$是$Level(x)$级阿克曼函数在$rank(x)$上迭代的最大次数，使得迭代结果不超过$rank(p(x))$

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(1)

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \geq A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \leq rank(p(x))\}$$

- $0 \leq Level(x) < \alpha(n)$, 且$Level(x)$随时间递增
  - $0 \leq Level(x)$，因为$rank(p(x)) \geq rank(x)+1 = A_0(rank(x))$
  - $Level(x) < \alpha(n)$，因为$A_{\alpha(n)}(rank(x)) \geq A_{\alpha(n)}(1) \geq n > rank(p(x))$
- $1 \leq Iter(x) \leq rank(x)$, 且只要$Level(x)$不变则$Iter(x)$不变或增大
  - $1 \leq Iter(x)$，因为$rank(p(x)) \geq A_{Level(x)}(rank(x)) = A^{(1)}_{Level(x)}(rank(x))$
  - $Iter(x) \leq rank(x)$，因为 $A^{(rank(x)+1)}_{Level(x)}(rank(x)) = A_{Level(x)+1}(rank(x)) > rank(p(x))$
  - 由于$rank(p[x])$随时间单调递增，仅当$Level(x)$增大时$Iter(x)$减小
  - 换言之， 只要$Level(x)$不变则$Iter(x)$不变或增大

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(2)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

- $0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n)rank(x)$
  - 若x是树根，显然
  - 若x不是树根，则
  - $\phi_q(x) = [\alpha(n) - Level(x)]rank(x) - Iter(x)$
    $\geq [\alpha(n) - (\alpha(n)-1)]rank(x) - rank(x)$
    $= 0$
  - $\phi_q(x) = [\alpha(n) - Level(x)]rank(x) - Iter(x)$
    $\leq [\alpha(n) - (0)]rank(x) - 0$
    $= \alpha(n)rank(x)$

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(3)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

- 若x不是树根，第$q+1$个操作是Union或Find，则$\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)$
  - $rank(x)$和$\alpha(n)$不变
  - 若$rank(x)=0$,由$Iter(x) \leq rank(x)$可知，论断成立
  - 若$rank(x) \geq 1$，（$Level(x)$单调递增）
    - $Level(x)$保持不变，$Iter(x)$增大， $\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)-1$
    - $Level(x)$增大，$Iter(x)$不变或减小，
      $[\alpha(n)-Level(x)]rank(x)$至少减小$rank(x)$
      $Iter(x)$至多减小$rank(x)-1$，因为$Iter(x) < rank(x)$
      $\phi_{q+1}(x) \leq \phi_q(x)-1$

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(4)

定义并查集在q个操作之后的势能ϕ_q为

$$\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$$

- $\phi_q \geq 0$恒成立，因为$0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n)rank(x)$对任意$x$成立
- 并查集上任意操作序列的总平摊代价≥总实际代价

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(5)

势能$\phi_q=\Sigma_x\,\phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Make_Set操作的平摊代价为$O(1)$

Make_Set(y):

- 实际代价为$O(1)$
- 势能的增量为**0**
  - ➢ 新增一棵以y为树根的树，y的势能为**0**
  - ➢ 不改变其他树的结构和**rank**，其他结点的势能不变

并查集性能的平摊分析(6)

势能$\phi_q=\Sigma_x\,\phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - ➢ 不妨设合并后，y是z的父结点
  - ➢ 操作仅可能改变**rank(y)**
  - ➢ 势能发生变化的结点只能是y，z和操作之前y的子结点w
    - ◆w不是树根，必有$\phi_{q+1}(w)\le\phi_q(w)$（参照前面的性质）
    - ◆z的势能不会增加
      - 操作前，z是树根，故$\phi_q(z)=\alpha(n)$rank(z)
      - 操作后，rank(z)不变，且$0\le\phi_{q+1}(z)\le\alpha(n)$rank($z$)
    - ◆y的势能至多增大$\alpha(n)$
      - 操作前，y是树根，故$\phi_q(y)=\alpha(n)$rank(y)
      - 操作时，rank(y)增大1或保持不变
      - 操作后，y仍是树根，$\phi_{q+1}(y)\le\phi_q(y)+\alpha(n)$

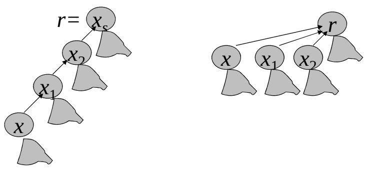
并查集性能的平摊分析(7)

势能$\phi_q=\Sigma_x\,\phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- $x=x_0,x_1,\ldots,x_{s-1}$的势能不会增加
  因为它们不是树根，故$\phi_{q+1}(x_i)\le\phi_q(x_i)$（前面的结论）
- 树根r的势能不会发生变化
  rank(r)未发生变化

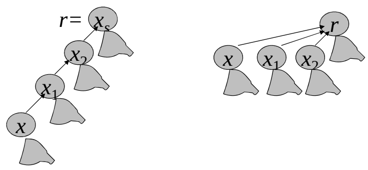
并查集性能的平摊分析(8)

势能$\phi_q=\Sigma_x\,\phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- 平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
  路径$x,x_1,\ldots,x_s$上至少有s-[$\alpha(n)$+2]个结点的势能至少减小1（参见讲义）

HIT CS&E

结论

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- Make_Set操作的平摊代价为O(1)
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- n是Make_Set操作的个数，亦即并查集管理的数据对象的个数
- $\alpha(n)\le 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的