HIT CS&E

第八章　随机算法

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提要

HIT CS&E

参考文献

- 《算法设计与分析》
  - 第9章
- 《**Randomized Algorithms**》
  Rajeev Motwani and Prabhakar, Raghavan, Cambridge University Press
- 《课件》
  - 第8章

HIT CS&E

8.1 *Introduction to Randomized Algorithms*

- 随机算法的基本概念
- 随机算法的分类
- 随机算法的性能分析方法

HIT CS&E

随机算法的基本概念

- 什么是随机算法
  - 随机算法是一种使用概率和统计方法在其执行过程中对于下一计算步骤作出随机选择的算法
- 随机算法的优越性
  - 对于有些问题：算法简单
  - 对于有些问题：时间复杂性低
  - 对于有些问题：同时兼有简单和时间复杂性低
- 随机算法的随机性
  - 对于同一实例的多次执行，效果可能完全不同
  - 时间复杂性的一个随机变量
  - 解的正确性和准确性也是随机的

HIT CS&E

随机算法的分类

- 随机数值算法
  - 主要用于数值问题求解
  - 算法的输出往往是近似解
  - 近似解的精确度与算法执行时间成正比
- Monte Carlo算法
  - 主要用于求解需要准确解的问题
  - 算法可能给出错误解
  - 获得精确解概率与算法执行时间成正比

HIT CS&E

- **Las Vegas**算法
  - 一旦找到一个解, 该解一定是正确的
  - 找到解的概率与算法执行时间成正比
  - 增加对问题反复求解次数，可是求解无效的概率任意小
- **Sherwood**算法
  - 一定能够求得一个正确解
  - 确定算法的最坏与平均复杂性差别大时，加入随机性, 即得到**Sherwood**算法
  - 消除最坏行为与特定实例的联系

HIT CS&E

随机算法的性能分析

- **随机算法分析的特征**
  - 仅依赖于随机选择, 不依赖于输入的分布
  - 确定算法的平均复杂性分析:
    依赖于输入的分布
  - 对于每个输入都要考虑算法的概率统计性能
- **随机算法分析的目标**
  - 平均时间复杂性: 时间复杂性随机变量的均值
  - 获得正确解的概率
  - 获得优化解的概率
  - 解的精确度估计

HIT CS&E

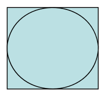
8.2 数值随机算法

- 计算π值
- 计算定积分

HIT CS&E

计算π值

- 数学基础
  - 设有一个半径为*r*的圆及其外切四边形



  - 向正方形随机地投掷n个点, 设k个点落入圆内
  - 投掷点落入圆内的概率为 $(\pi r^2)/(4r^2)=\pi/4$.
  - 用k/n逼近$\pi/4$, 即$k/n\approx\pi/4$, 于是$\pi\approx(4k)/n$.
  - 我们可以令$r=1$用投掷n个点的方法计算π

- 算法

1. $K=0$;
2. **For** i=1 **To** n **Do**
3. 随机地产生四边形中的一点(x, y);
4. **If** $x^2+y^2\leq 1$ **Then** $k=k+1$;
5. **Return** $(4k)/n$

- 时间复杂性=$O(n)$
  - 不是输入的大小, 而是随机样本的大小
- 解的精确度
  - 随着随机样本大小n增加而增加

问题：样本数n和精度之间能建立关联关系吗？

HIT CS&E

计算定积分

- 问题
  - 计算积分 $\int_a^b g(x)dx$
- 数学基础
  - 令$f(x)$是区间$[a, b]$上的一组独立、同分布的随机变量$\{\xi_i\}$的任意密度函数
  - 令$g^*(x)=g(x)/f(x)$, 则$\{g^*(\xi_i)\}$是密度为$f(x)$的随机变量集合, 而且

$$E(g^*(\xi_i))=\int_a^b g^*(x)f(x)dx=\int_a^b g(x)dx=I$$

$$E(g^*(\xi_i)) = \int_a^b g^*(x)f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = I$$

- 由强大数定律 $\Pr\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g^*(\xi_i) = I\right) = 1$
- 我们可以用 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g^*(\xi_i)\right)$ 来近似计算 ***I***
- 令 ***f(x)=1/(b-a)*** $a \le x \le b$
- 索求积分可以由如下 ***I'*** 来近似计算 ***I***

$$I' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g^*(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)/f(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b-a)g(\xi_i)$$

HIT CS&E

- 算法
  1. ***I=0;***
  2. **For** ***i=1*** **To** ***n***
  3. 随机产生 **[*a, b*]** 中点 ***x;***
  4. ***I=I+g(x);***
  5. **Return** ***(b-a)*I/n***
- 时间复杂性= ***O(n)***
  - 不是输入的大小, 而是随机样本的大小
- 解的精确度
  - 随着随机样本大小 ***n*** 增加而增加

问题：样本数 ***n*** 和精度之间能建立关联关系吗？

HIT CS&E

8.3 随机选择算法

- 问题的定义
- 随机算法
- 算法的性能分析
- **Las Vegas**算法

HIT CS&E

问题的定义

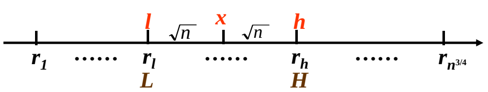
- 输入: ***S*** $=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
  整数 ***k***, $1 \le k \le n$.
- 输出: ***S*** 中第 ***k*** 个最小元素.

记号
  Rank(*Q, t*) =集合 ***Q*** 中的元素 ***t*** 的 **rank**
  (第 ***k*** 小元素的 **rank** 是 ***k***)
  min(*Q, i*) = 集合 ***Q*** 中第 ***i*** 个最小元素.

HIT CS&E

随机算法

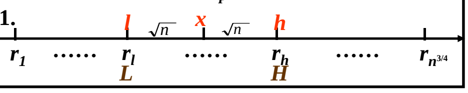
- 基本思想
  - 从 ***S*** 中随机地抽取 $n^{3/4}$ 个样本存入 ***R***, 排序 ***R***
  - ***S*** 中第 ***k*** 最小元素可能成为 ***R*** 中 $x=kn^{3/4}/n$ 最小元素
  - 为了解决误差问题, 我们考察区间 $[x-n^{1/2}, x+n^{1/2}]$



  - 把 ***S*** 中属于 **[*L, H*]** 数据存入 ***P***
  - 在 ***P*** 中查找 ***min(S, k)***

LAZYSELECT(*S, k*)

1. ***R***=独立、均匀、可放回地从 ***S*** 随机选取的 $n^{3/4}$ 元素;
2. 在 ***O(n)*** 时间内排序 ***R***;
3. $x=(k/n)n^{3/4}$; /* $(k/n)n^{3/4}=kn^{-1/4}$ */
4. $l=\max\{\lfloor x-\sqrt{n}\rfloor, 0\}$; $h=\min\{\lceil x+\sqrt{n}\rceil, n^{3/4}\}$;
5. ***L=min(R, l)***; ***H=min(R, h)***;
6. L_p=***Rank(S,L)***, H_p=***Rank(S,H)***; /* ***L*** 和 ***H*** 与 ***S*** 元素比较*/
7. ***P***=$\{y \in S \mid L \le y \le H\}$;
8. **If** ***min(S, k)*** $\in$ ***P*** **and** $|P| \le 4n^{3/4}+1$
   /* ***max(S, k)*** $\in$ ***P*** 可由 $L_p \le k \le H_p$ 确定 */
9. **Then** 排序 ***P***, ***min(S, k)=min(P, (k-L_p))***, 算法结束;
10. **ELSE** goto 1.



HIT CS&E

算法的性能分析

- 数学基础
  - 数学期望
    - 离散随机变量X的数学期望$E[X]=\sum_i i\times P(X=i)$
    - 若$f(x)$是定义在整数集上的实数值函数, 则 $E[f(X)]=\sum_i f(i)\times P(X=i)$.
  - Markov不等式
    - $P(Y\geq t)\leq E[Y]/t$, 其中Y为非负随机变量, $t>0$.

HIT CS&E

- 方差的性质与Chebyshev不等式
  - 方差$\sigma_x^2=E[(X-\mu_x)^2]$, μ_x为随机变量X的数学期望
  - σ_x称为标准差
  - Chebyshev不等式: $P(|X-\mu_x|>t\sigma_x)\leq 1/t^2$
  - 如果随机变量X满足$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, 则 $\sigma_x^2=p(1-p)$.
  - 若$X=\sum_{1\leq i\leq n}X_i$, $\sigma_x^2=\sum_{1\leq i\leq n}\sigma_{x_i}^2$, X_i是独立随机变量
  - 若随机变量X_i满足$P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$, 则 $\sigma_x^2=np(1-p)$.

HIT CS&E

- 算法的性能分析

定理. 算法执行1-9步一遍就可求出$min(S,k)$的概率是$1-O(n^{-1/4})$, 即算法需要$O(n)$次比较就可求出$min(S,k)$的概率是$1-O(n^{-1/4})$.

证明. 若算法执行1-9一遍可求出$min(S, k)$, 则第6步需$2n$次比较, 其他步需$O(n)$次比较, 总需$O(n)$次比较.

往证算法执行1-9一遍可求出$min(S, k)$的概率是$1-O(n^{-1/4})$.

算法执行1-9一遍可求出$min(S, k)$的条件是:

(1). $min(S, k)$在L和H之间即P包含$min(S, k)$,

(2). $|P|\leq 4n^{3/4}+1$.

我们首先来计算上述两个条件失败的概率.

A. 计算条件(1)不成立的概率

条件(1)不成立当且仅当$L>min(S, k)$或$H<min(S, k)$.

令$X_i=1$如果第i个随机样本$\leq min(S, k)$, 否则$X_i=0$.

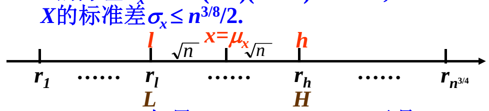
于是, $P(X_i=1)=k/n$, $P(X_i=0)=1-k/n$.

令 $X=\sum_{1\leq i\leq n^{3/4}}X_i$ 是R中小于等于$min(S, k)$ 的样本数. 我们有

X的数学期望$\mu_x=n^{3/4}k/n=kn^{-1/4}$,

X的方差$\sigma_x^2=n^{3/4}(k/n)(1-k/n)\leq n^{3/4}/4$,

X的标准差$\sigma_x\leq n^{3/8}/2$.



如果$L>min(S, k)$, $X<l$. 如果$H<min(S, k)$, $X\geq h$. 于是

$P(L>min(S, k))=P(X<l)=P(X<\mu_x-n^{1/2})=P(|X-\mu_x|>n^{1/2})$,

$P(H<min(S, k))=P(X\geq h)=P(X>h)+P(X=h)=P(|X-\mu_x|\geq n^{1/2})+(n^{3/4}+1)^{-1}$.

应用Chebyshev不等式, 又由$2n^{1/8}\sigma_x\leq n^{1/2}$, 我们有

$P(|X-\mu_x|>n^{1/2})\leq P(|X-\mu_x|>2n^{1/8}\sigma_x)\leq 1/(2n^{1/8})^2=O(n^{-1/4})$. 于是

$P(L>min(S, k))=P(H<min(S, k))=O(n^{-1/4})$.

B. 计算P包含$min(S, k)$但$|P|\leq 4n^{3/4}+1$不成立的概率

令$k_l=\min\{0, k-2n^{3/4}\}$, $k_h=\max\{k+2n^{3/4}, n\}$.

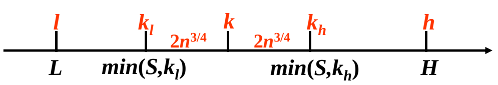
“P包含$min(S, k)$但$|P|\leq 4n^{3/4}+1$不成立” 发生当且仅当 $L<min(S, k_l)$或$H>min(S, k_h)$.

类似与上面A中的分析,

$P(L<min(S, k_l))=P(H>min(S, k_h))=O(n^{-1/4})$.

由A和B, “算法执行1-9一遍就可以求出$min(S, k)$”不成立的概率是$O(n^{-1/4})$.

即, “算法执行1-9一遍就可以求出$min(S, k)$”的概率是$1-O(n^{-1/4})$.



HIT CS&E

Las Vegas算法

Las Vegas算法(随机算法类 LV Algorithm)

- 算法不会产生不正确的解
- 算法一旦得到问题的解，则该解是正确的
- 算法得到解的概率$p>0$
- 但算法运行过程可能不能产生问题的解
- 反复运行算法，运行时间不确定，最终可以得到问题的解
- 找到正确解需要运行算法的遍数与p相关(后续章节)
- 如：LazySelect算法1-9步可视为一个LV算法
  - ➢ 一旦找到返回解，该元素就是目标元素
  - ➢ 它运行一遍可能无法找到解
  - ➢ 反复运行，最终必然得到问题的解
- 一般用来刻画Yes-No型问题的随机算法

HIT CS&E

实验2

- 比较3种中位数选择算法的性能
  - 算法1：排序后选择
  - 算法2：确定型中位数线性时间选择
    《算法设计与分析》第3章
  - 算法3：中位数选择随机算法
- 实验内容
  - 实现3种算法
  - 数据集寻找或生成
  - 运行时间比较，比较准确度（如何衡量）？
  - 扩展性比较
  - 以恰当、准确、规范地表述实验结果

HIT CS&E

8.4 素数测试随机算法

- 问题的定义
- 随机算法设计
- 算法的性能分析
- 蒙特卡罗算法
- 简单的概率放大
- 蒙特卡罗 Vs 拉斯维加斯

HIT CS&E

问题的定义

- 输入
  - 一个正整数N
- 输出
  - N是否素数

HIT CS&E

随机算法的设计

- 基本思想
  - 对N进行m次测试
  - 如果有一次测试成功, 则回答N是合数
  - 如果m次测试均失败, 则回答N是素数
  - 回答N是合数时, 答案百分之百正确
  - 回答N是素数时, 答案正确的概率是$1\text{-}2^{-m}$

- 随机算法

1. 随机地选择m个数$\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, 满足
   $1 \le b_1, b_2, \ldots, b_m \le N$;
2. For i=1 To m Do
3. If $W(b_i)$成立 Then Return (N是合数);
4. Return (N是素数)

$W(b_i)$定义如下:

(1) $b_i^{N-1} \neq 1 \bmod N$, 或

(2) $\exists j[(N\text{-}1)/2^j = k$是整数, $1 < (b_i^k$与N的最大公因子$) < N]$.

HIT CS&E

例1. 给定N=12. 选择测试数集{2, 3, 7}

测试 2: $2^{12-1} = 2048 \neq 1 \bmod 12$, $W(2)$成立.

N是合数.

HIT CS&E

例2. 给定N=11,选择测试数集{2, 5, 7}

测试 2: 2^{11-1} = 1024 = 1 mod 11,

测试 5: 5^{11-1} = 9765625 = 1 mod 11,

测试 7: 7^{11-1} = 282475249 = 1 mod 11,

结论: 11可能是素数

答案正确的概率为$1-2^{-3}$

HIT CS&E

算法性能的分析

定理1. (1) 如果对于任意$1\le b<N$, $W(b)$成立, 则N是合数.

(2) 如果N是合数, 则$(N-1)/2\le|\{b \mid 1\le b<N, W(b)\}|$

*(1)说明算法是正确的.

*(2)说明, 如果N是合数, 则至少一半b($b<N$)使$W(b)$成立

定理2. 算法的回答"N是素数"正确的概率是$1-2^{-m}$.

HIT CS&E

蒙特卡罗算法

蒙特卡罗算法(随机算法类 Monte Carlo Algorithm)

- 用于刻画Yes-No型计算问题
- 运行时间是固定的
- 算法得到正确解的概率$p>0$
- 算法得到错误解的概率$1-p>0$
- 单面错误蒙特卡罗算法 (MC1算法)
  - 算法输出*Yes*-结论可靠
  - 算法输出No-结论可能是错的
- 如: N是合数吗?
  - Yes-可靠
  - No-发生错误的可能性不超过2^{-m}
- 双面错误蒙特卡罗算法 (MC2算法)
  - 算法输出*Yes*-结论可能是错的
  - 算法输出No-结论可能是错的

HIT CS&E

MC1算法的成功率放大

MC1算法的成功率放大

- 用于刻画Yes-No型计算问题
- 运行时间是固定的
  - Answer = Yes, 算法总输出*Yes*
  - Answer = No, Pr[算法输出No]≥ε
- 重复运行t次 $t=O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\delta})$
  - 如果t次均输出Yes, 则最终输出Yes
  - 如果有一次输出no，则最终输出no
  - Pr[算法犯错] = Pr[answer =no但输出Yes]

    $\le(1-\varepsilon)^t$

    $\le\delta$
- 算法犯错的概率可以减小到任意指定的值δ
- 可以建立重复遍数t与ε, δ之间的关系

HIT

MC2算法的成功率放大

MC2算法的成功率放大

- 用于刻画Yes-No型计算问题
- 运行时间是固定的
  - Answer = Yes, Pr[算法输出*Yes*] ≥ 1/2+ε
  - Answer = No, Pr[算法输出No] ≥ 1/2+ε
- 重复运行t次 $t=O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$
  - 输出占多数的答案

Pr[恰有i次答案是正确的]=$\binom{t}{i}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^i\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^{t-i}$

Pr[算法最终犯错] = Pr[正确次数≤$t/2$]

$$=\sum_{i=0}^{\lfloor t/2\rfloor}\binom{t}{i}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^i\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^{t-i}\le\sum_{i=0}^{\lfloor t/2\rfloor}\binom{t}{i}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^{t/2}\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^{t/2}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\epsilon^2\right)^{t/2}\sum_{i=0}^{\lfloor t/2\rfloor}\binom{t}{i}\le\left(\frac{1}{4}-\epsilon^2\right)^{t/2}2^t=(1-4\epsilon^2)^{t/2}=\delta$$

HIT

MC2算法的成功率放大

- 用于刻画Yes-No型计算问题
- 运行时间是固定的
  - Answer = Yes, Pr[算法输出*Yes*] ≥ 1/2+ε
  - Answer = No, Pr[算法输出No] ≥ 1/2+ε
- 重复运行t次
  - 输出占多数的答案

Pr[恰有i次答案是正确的]=$\binom{t}{i}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^i\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^{t-i}$

Pr[算法最终犯错] = Pr[正确次数≤$t/2$] ≤δ

$t=O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\delta})$

- 算法犯错的概率可以减小到任意指定的值δ
- 可以建立重复遍数t与ε, δ之间的关系

HIT CS&E

蒙特卡罗 Vs 拉斯维加斯

两大类随机算法

Monte Carlo

- 运行时间固定
- 是否正确是随机的

Las Vegas

- 运行时间是随机的
- 得到的解是正确的
- 也可能得不到解

HIT CS&E

由Las Vegas算法构造MC1算法

Tail Bound:
Pr[$X>t$] < ε

算法$B(x)$
1. 调用$A(x)$运行$aT(n)$步
2. 若$A(x)$获得解，则返回该解
3. 否则返回0

单面错误

Las Vegas算法→蒙特卡罗算法
- A是一个Las Vegas算法
  - 最坏期望运行时间$T(n)$
  - 得到的解是正确解
- B是一个蒙特卡罗算法
  - 固定的运行时间$aT(n)$
  - 如果得到解，则解是正确的
  - 可能返回错误解

Pr[$B(x)$未获正确解]
=Pr[$A(x)$>$aT(n)$]

$$< \frac{A(x)\text{的期望运行时间}}{aT(n)} = \frac{T(n)}{aT(n)} = \frac{1}{a}$$

HIT CS&E

8.5 随机排序算法

- 问题的定义
- 随机算法
- 算法性能的分析
- 舍伍德算法

HIT CS&E

问题的定义

- 输入
  - $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- 输出
  - 排序的S

HIT CS&E

随机算法

- 基本思想
  - 采用随机抽样的方法确定集合的划分点
  - 把集合划分为两个子集合
  - 分别递归地在每个子集合上使用随机排序算法

HIT CS&E

- 算法
  1. 均匀等可能地在S中随机抽取一个样本y;
  2. $\forall x\in S$与y比较, 把S划分为如下两个集合:
     $S_1=\{ x \mid x\in S, x<y \}$, $S_2=\{ x \mid x\in S, x>y \}$;
  3. 递归地排序S_1和S_2;
  4. 顺序输出排序的S_1, y, S_2;

HIT CS&E

算法性能的分析

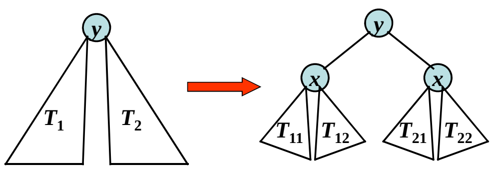
- 基本概念
  - $S_{(i)}$表示S中阶为i的元素
    例如，$S_{(1)}$和$S_{(n)}$分别是最小和最大元素
  - 随机变量X_{ij}定义如下：
    $X_{ij}=1$如果$S_{(i)}$和$S_{(j)}$在运行中被比较，否则为0
  - X_{ij}是$S_{(i)}$和$S_{(j)}$的比较次数
  - 算法的比较次数为$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}X_{ij}$
  - 算法的平均复杂性为$E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}E[X_{ij}]$

HIT CS&E

- 计算$E[X_{ij}]$
  - 设p_{ij}为$S_{(i)}$和$S_{(j)}$在运行中比较的概率，则
    $E[X_{ij}]=p_{ij}\times 1+(1-p_{ij})\times 0=p_{ij}$

关键问题成为求解p_{ij}

- 求解P_{ij}
  - 我们可以用树表示算法的计算过程



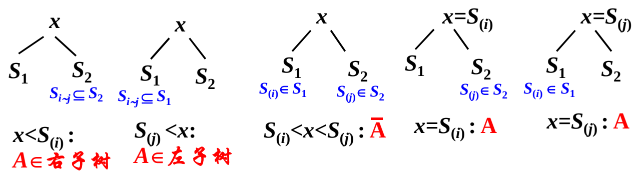
  - 我们可以观察到如下事实：
    - 一个子树的根必须与其子树的所有节点比较
    - 不同子树中的节点不可能比较
    - 任意两个节点至多比较一次

HIT CS&E

计算p_{ij}

$S_{i\sim j}=\{S_{(i)}, S_{(i+1)}, S_{(i+2)},\ldots,S_{(j)}\}$

A: $X_{ij}=1$——$S_{(i)}$与$S_{(j)}$在算法运行过程中发生比较(随机事件)



B: 算法首次选中S_{ij}中的元素作为划分元素
可能在不同位置发生，但必然发生

$\Pr[A|B] = 2/(j-i+1)$

$\Pr[A] = \sum_\alpha \Pr[A|B_\alpha]\Pr[B_\alpha] = [2/(j-i+1)]\sum_\alpha \Pr[B_\alpha] = 2/(j-i+1)$

HIT CS&E

综上所述

$$E[T(n)] = E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}E[X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1}\frac{2}{k} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 2n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=O(n\log n)$$

定理. 随机排序算法的期望时间复杂性为$O(n\log n)$

HIT CS&E

舍伍德算法

舍伍德算法(随机算法类 Sherwood Algorithm)

- 确定型算法的随机化
- 消除算法在最好实例和最坏实例间差别
- 如：QuickSort算法也可以确定性地选择划分元素
  - ➢ 最好时间复杂度为$O(n\log n)$
  - ➢ 最坏时间复杂度为$O(n^2)$
  - ➢ 随机选择划分元素后，期望时间复杂度为$O(n\log n)$
  - ➢ 先设计了确定型算法，随机化之后才得QuickSort
- 舍伍德算法总能得到问题的正确解

HIT CS&E

8.6 最小割随机算法

- 问题定义
- 随机算法
- 算法性能的分析
- 成功概率放大技术

HIT CS&E

问题定义

- 输入:
  - 无向多重连通图*G*
- 输出
  - 一个**Min-Cut**

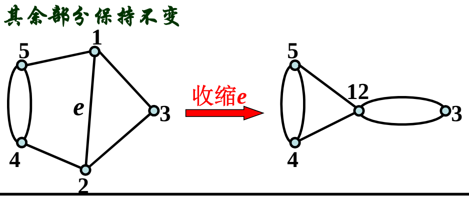
- 图*G*的一个*Cut*是一组边, 从*G*中删除这个*Cut*将导致两个或多个连通分量
- *Cut*的大小是其边数, 多重边重复计算
- 最小*Cut*是具有最少边的*Cut*

HIT CS&E

随机算法

- **基本概念**
  - *Cut*可以视为节点集的划分$V=(C, V-C)$, *Cut*是所有*G*中连接*C*和*V-C*的边集合.
  - 图*G*的边(x, y)的*contraction*:
    - 用新节点代替节点*x*和*y*或边(x, y),
    - $\forall v \in V$, 用边(v, z)代替边(x, v)或(y, v),
    - *G*的其余部分保持不变

例如:



HIT CS&E

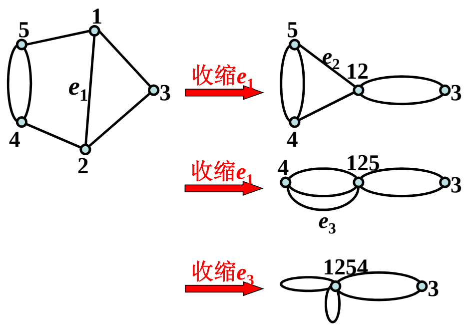
- 我们用$G/(x, y)$表示*G*的边(x, y)的收缩
- 边集合$F \subseteq G$收缩记作G/F
- 图G/F的节点集合表示为V/F
- 图G/F的节点集合表示为E/F

HIT CS&E

- 随机算法**CONTRACTION**

1. $H=G$;
2. **While** $|H(V)| > 2$ **Do**
3. 随机地从$H(E)$中选择一条边(x, y);
4. $F=F \cup \{(x, y)\}$;
5. $H=H/(x, y)$;
6. *Cut*=连接*H*中两个元节点的*G*的所有边.

例



Cut={(1,3), (2, 3)}

HIT CS&E

算法的性能分析

定理1. 如果算法的输入是具有n个节点的多重图, 则算法的时间复杂性为$O(n^2)$.

证明. 一次边收缩需要$O(n)$时间.

至多进行$O(n)$次收缩.

于是, 算法时间复杂性为$O(n^2)$.

注意:

我们仅证明了在$O(n^2)$时间内算法能够求出一个Cut, 但是这个Cut不一定是优化的.

HIT CS&E

引理1. 如果k是min-cut的大小, 则G至少有$kn/2$条边.

证. 如果$|G(E)|<kn/2$, 则存在一个度小于k的节点p.

删除与p相关连的k条, 把G划分为两个连通分量, 其一是仅包含p.

于是, 与p相关连的边集合是一个cut.

但是这个cut的大小$<k$, 与min-cut大小为k矛盾.

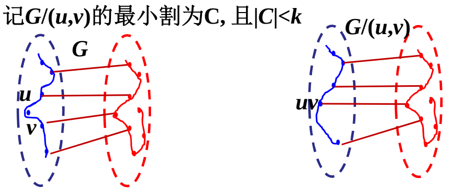
引理2. 算法输出的cut是连接两个剩余节点的没有被收缩过的边.

证. 从算法定义可以看到, 算法输出的cut是连接两个剩余节点的没有被收缩的边的集合.

HIT CS&E

引理3. 设图G的min-cut的大小为k, 则$G/(u,v)$是G收缩边(u,v)后得到的图。如果(u,v)不是最小割中的边，则$G/(u,v)$的最小割至少为k.

证. 反证法. 记$G/(u,v)$的最小割为C, 且$|C|<k$



从$G/(u,v)$删除C中的边, 得到两个顶点子集V_1,V_2, $uv\in V_2$

从G删除C中的边, 得顶点子集V_1=,$V_3=V_2-\{uv\}\cup\{u,v\}$

C也是G的割，且$|C|<k$。矛盾

定理2. 设C是一个min-cut, 其大小为k. 在算法结束时, C中无边被收缩过的概率大于$2/n^2$.

证. A_i表示第i步没有选中C的边, $1\le i\le n-2$.

在第1步, 选中的边在C中的概率至多为$k/(kn/2)=2/n$, 即

$\Pr(A_1)\ge 1-2/n$.

在第2步, 若A_1发生, 则至少有$k(n-1)/2$条边(每次收缩减少一个节点), 选中C中边的概率为$2/(n-1)$, 即

$\Pr(A_2|A_1)\ge 1-2/(n-1)$.

在第i步, 若A_1至A_{i-1}发生, 则有$n-i+1$个节点, 即至少有$k(n-i+1)/2$条边, 于是

$\Pr(A_i|\cap_{1\le j\le i-1}A_j)\ge 1-2/(n-i+1)$

最后我们有

$\Pr(\cap_{1\le i\le n-2}A_i)\ge\Pi_{1\le i\le n-2}(1-2/(n-i+1))=2/n(n-1)>2/n^2$

HIT CS&E

放大成功率：简单重复

算法Amplify

1. $S=E$
2. For i=1 to n^2 Do
3. S_i = CONTRACTION(G);
4. If $|S|>|S_i|$ Then S= S_i;
5. Return S

推论1. 算法Amplify的运行时间为$O(n^4)$，它不能发现一个min-cut的概率为

$$\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2}<\frac{1}{e}$$

HIT CS&E

算法Amplify

1. $S=E$
2. For i=1 to n^2 Do
3. S_i = CONTRACTION(G);
4. If $|S|>|S_i|$ Then S= S_i;
5. Return S

这有意义吗?

最小割问题的精确算法的时间复杂度是多少? $O(n^3)$

造成这种现象的原因是什么呢? 获得正确解的概率太低

怎么才能提高获得正确解的概率呢?

HIT CS&E

成功率低下的原因

严格单调递减

$$\Pr[\text{CONTRACT成功}] \geq \frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\,\frac{1}{3} \geq \frac{1}{n^2}$$

最后一次收缩未选中最小割中的边的概率

......

第3次收缩未选中最小割中的边的概率

第2次收缩未选中最小割中的边的概率

第1次收缩未选中最小割中的边的概率

HIT CS&E

成功率放大：重复关键操作

图的规模较小
选中最小割中边概率较小

调用精确算法

$$\Pr[\text{CONTRACT成功}] \geq \frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{3}{5}\,\frac{2}{4}\,\frac{1}{3} \geq \frac{1}{n^2}$$

随机收缩

图的规模较大
不会选中最小割中的边的概率较大

HIT CS&E

算法DetRan

1. While $|V| > d(n)$ Do　　　　　$//d(n)=n^{2/3}$
2. 　　随机选择一条边进行收缩；
3. 调用精确算法求得最小割S；
5. Return S

第2步每次时间复杂度为$O(n)$　　　　执行$n-d(n)$遍

第3步每次时间复杂度为$O(d^3(n))$

总时间为$O(n^2)+O(d^3(n))$

结论：取$d(n)=n^{2/3}$, 算法DetRan的时间复杂度为$O(n^2)$

HIT CS&E

算法DetRan

1. While $|V| > d(n)$ Do
2. 　　随机选择一条边进行收缩；
3. 调用精确算法求得最小割S；
5. Return S

$$\Pr[\text{DetRan获得最小割}] \geq \frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{d(n)+1}{d(n)+3}\,\frac{d(n)}{d(n)+2}\,\frac{d(n)-1}{d(n)+1}$$

$$= \frac{d(n)}{n}\,\frac{d(n)-1}{n-1} \approx \frac{n^{4/3}}{n^2} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

$d(n) = n^{2/3}$

HIT CS&E

算法Amplify2

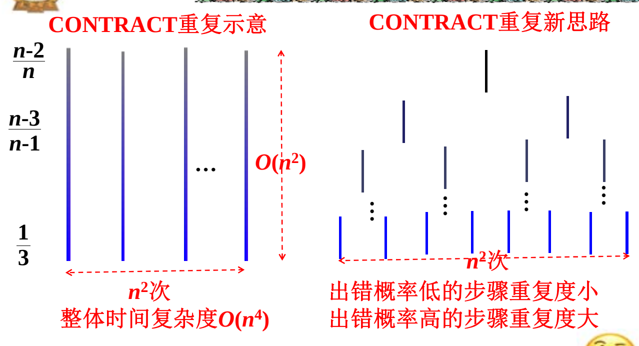
1. $S=E$
2. For $i=1$ to $n^{2/3}$ Do
3. 　S_i = DetRan(G);
4. 　If $|S|>|S_i|$ Then $S= S_i$;
5. Return S

$$\Pr[\text{Amplify2未得最小割}] \leq \left[1-\frac{1}{n^{2/3}}\right]^{n^{2/3}} \approx e^{-1}$$

结论：独立运行DetRan算法$n^{2/3}$遍, 时间复杂度为$O(n^{8/3})$
找到最小割的概率至少为$1-e^{-1}$

HIT CS&E

成功率放大：关键操作重复策略



怎么才能实现这种想法呢?

算法RepTree(G)　　　　//顶点个数记为n

1. If $n\le 6$ Then 用确定型算法求最小割S,返回
2. $h=\lceil n-n/2^{1/2}\rceil$;
3. 随机独立收缩G中n-h条边得图G_1;　　$O(n^2)$
4. 随机独立收缩G中n-h条边得图G_2;　　$O(n^2)$
5. S_1= RepTree(G_1);
6. S_2 = RepTree(G_2);
7. Return $min(S_1, S_2)$;

$T(n) = 2T(n/2^{1/2})+O(n^2)$

$T(n) = O(n^2\log n)$

算法RepTree(G)　　　　//顶点个数记为n

1. If $n\le 6$ Then 用确定型算法求最小割S,返回
2. $h=\lceil n-n/2^{1/2}\rceil$;
3. 随机独立收缩G中n-h条边得图G_1;
4. 随机独立收缩G中n-h条边得图G_2;
5. S_1= RepTree(G_1);
6. S_2 = RepTree(G_2);
7. Return $min(S_1, S_2)$;

$$\Pr[G_1\text{仍含最小割}]\ge \frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{h+1}{h+3}\,\frac{h}{h+2}\,\frac{h-1}{h+1} = \frac{h(h-1)}{n(n-1)}\ge 1/2$$

RepTree获得正确解的概率

Pr(n) = 算法在规模为n的图上获得正确解的概率

Pr($n/2^{1/2}$) = 算法在G_1上获得正确解的概率| G_1含最小割

Pr($n/2^{1/2}$) = 算法在G_2上获得正确解的概率| G_2含最小割

Pr[G_1,G_2均不包含最小割] ≤ (1-1/2)(1-1/2)= 1/4

Pr[算法找不到正确解|G_1,G_2含最小割]

≤Pr[未找到正确解|G_1含最小割]· Pr[未找到正确解|G_2含最小割]

=[1-Pr($n/2^{1/2}$)]^2

Pr(n) = 1- Pr[算法无法获得正确解的概率]

≥3/4- [1-Pr($n/2^{1/2}$)]^2

解得：Pr(n)= Ω(1/ log$n$)

结论

结论：算法RepTree的时间复杂度为$O(n^2\log n)$

找到最小割的概率至少为Ω(1/ log$n$)

重复运行RepTree算法log$n$遍的时间开销为$O(n^2\log^2 n)$，找到正确解的概率为1-e^{-1}

重复运行RepTree算法$\log^2 n$遍的时间开销为$O(n^2\log^3 n)$，找到正确解的概率接近于1

8.7 附录—概率基础

概率空间

样本空间Ω：所有基本事件（也称为样本）构成的集合

事件集合Σ：Ω的一个子集称为一个事件

(K1): ∅,Ω ∈ Σ　　∅-不可能事件,Ω-必然事件

(K2): ∪,∩,\下Σ封闭　　Σ是σ-代数

概率测度Pr: Σ→R 取非负值

(K3): Pr(Ω)=1

(K4): $A\cap B=\varnothing \Rightarrow \Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)$

(K5*): $A_1\supset A_2\supset\ldots$且$\cap_n A_n=\varnothing \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\Pr(A_n)=0$

HIT CS&E

事件：

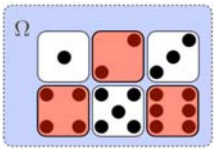
谓词$\mathcal{E}$

集合 $A=\{x\in\Omega|\mathcal{E}(x)\}$

概率：

$\Pr[\mathcal{E}] \quad = \quad \Pr[A]$

$\vee$	$\Leftrightarrow$	$\cup$
$\wedge$		$\cap$
$\neg$		$\Omega\ \backslash$
$\Rightarrow$		$\subseteq$



$\mathcal{E}$ = 掷出偶数点

$\Pr[\mathcal{E}]$

$= \Pr[⚁\vee⚃\vee⚅]$

$= \Pr[⚁]+\Pr[⚃]+\Pr[⚅]$

HIT CS&E

(K1): $\varnothing,\Omega\in\Sigma$

(K2): $\cup,\cap,\backslash$下Σ封闭

(K3): $\Pr(\Omega)=1$

(K4): $A\cap B=\varnothing\Rightarrow \Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)$

$\Pr[\neg\mathcal{E}] = 1-\Pr[\mathcal{E}]$ $\quad\neg\mathcal{E}\vee\mathcal{E}=\Omega \Rightarrow \Pr[\neg\mathcal{E}]+\Pr[\mathcal{E}]=1$

$\mathcal{E}_1\Rightarrow\mathcal{E}_2$, 则 $\Pr[\mathcal{E}_1]\le\Pr[\mathcal{E}_2]$ $\quad\Pr[\mathcal{E}_2]=\Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2\wedge\neg\mathcal{E}_1]$

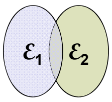
$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]-\Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$

HIT CS&E

$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]-\Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$

$\Pr[\mathcal{E}_1] = \Pr[\mathcal{E}_1\wedge\neg(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)] + \Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$

$\Pr[\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_2\wedge\neg(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)] + \Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$



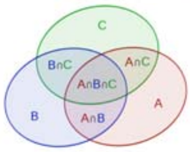
$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1\wedge\neg(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)] + \Pr[\mathcal{E}_2\wedge\neg(\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2)] + \Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$

将前两式带入第三式，消除无关项，即得结论

HIT CS&E

$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]-\Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$ 容斥原理

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$

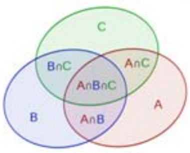


$$\left|\bigcup_{1\le i\le n} S_i\right| = \sum_{i=1}^n |S_i| - \sum_{A\in\binom{[n]}{2}}\left|\bigcap_{i\in A} S_i\right| + \sum_{A\in\binom{[n]}{3}}\left|\bigcap_{i\in A} S_i\right| - \sum_{A\in\binom{[n]}{4}}\left|\bigcap_{i\in A} S_i\right| \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{A\in\binom{[n]}{k}}\left|\bigcap_{i\in A} S_i\right| + \cdots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^n S_i\right|.$$

HIT CS&E

$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]-\Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$ 容斥原理

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$



$$\Pr\left[\bigvee_{1\le i\le n}\mathcal{E}_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[\mathcal{E}_i] - \sum_{A\in\binom{[n]}{2}}\Pr\left[\bigwedge_{i\in A}\mathcal{E}_i\right] + \sum_{A\in\binom{[n]}{3}}\Pr\left[\bigwedge_{i\in A}\mathcal{E}_i\right] - \sum_{A\in\binom{[n]}{4}}\Pr\left[\bigwedge_{i\in A}\mathcal{E}_i\right] \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{A\in\binom{[n]}{k}}\Pr\left[\bigwedge_{i\in A}\mathcal{E}_i\right] + \cdots + (-1)^{n-1}\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^n\mathcal{E}_i\right].$$

HIT CS&E

合并界限(The Union Bound)

$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] = \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]-\Pr[\mathcal{E}_1\wedge\mathcal{E}_2]$

$\Downarrow$

$\Pr[\mathcal{E}_1\vee\mathcal{E}_2] \le \Pr[\mathcal{E}_1]+\Pr[\mathcal{E}_2]$

$\Downarrow$ 数学归纳

$$\Pr\left[\bigvee_{1\le i\le n}\mathcal{E}_i\right] \le \sum_{i=1}^n \Pr[\mathcal{E}_i]$$

适用于任何依赖关系！

HIT CS&E

合并界限(续)

$$\Pr\left[\bigvee_{1\le i\le n} \mathcal{E}_i\right] \le \sum_{i=1}^{n} \Pr[\mathcal{E}_i]$$

$\Pr[GOOD_1] = 1- \varepsilon_1$

$\Pr[GOOD_2] = 1- \varepsilon_2$

$\cancel{\Pr[GOOD_1 \wedge GOOD_2] =}$

$\cancel{\Pr[GOOD_1]\cdot\Pr[GOOD_2]}$

二者可能不是独立的

$\Pr[GOOD_1 \wedge GOOD_2]$

$= 1 - \Pr[BAD_1 \vee BAD_2]$

$\ge 1 - (\Pr[BAD_1]+\Pr[BAD_2])$ 使用过程中涉及误差累积

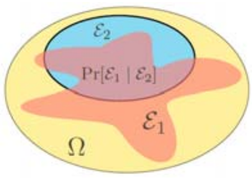
$= 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

HIT CS&E

条件概率

定义. "在随机事件$\mathcal{E}_2$发生的条件下$\mathcal{E}_1$发生"的条件概率定义为

$$\Pr[\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_2] = \frac{\Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2]}{\Pr[\mathcal{E}_2]}$$



如果$\mathcal{E}_1$和$\mathcal{E}_2$是独立的

$$\Pr[\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_2] = \frac{\Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2]}{\Pr[\mathcal{E}_2]} = \frac{\Pr[\mathcal{E}_1]\Pr[\mathcal{E}_2]}{\Pr[\mathcal{E}_2]} = \Pr[\mathcal{E}_1]$$

HIT CS&E

条件概率链

$$\Pr[\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_2] = \frac{\Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2]}{\Pr[\mathcal{E}_2]} \Longrightarrow \Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2]=\Pr[\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_2]\cdot\Pr[\mathcal{E}_2]$$

$\Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_n]$

$= \Pr[(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-1}) \wedge \mathcal{E}_n]$

$= \Pr[\mathcal{E}_n \mid \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-1}] \cdot \Pr[\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-1}]$

$= \dots\dots$ （在$\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-1}$重复上述过程）

$= \Pr[\mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2] \cdot \dots \cdot \Pr[\mathcal{E}_n \mid \mathcal{E}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_{n-1}]$

对任意$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$有：$\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\right] = \prod_{k=1}^{n} \Pr\left[\mathcal{E}_k \mid \bigwedge_{i<k} \mathcal{E}_i\right]$

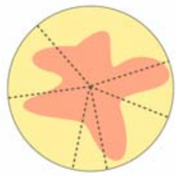
HIT CS&E

全概率公式

若Ω被划分为$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$（即$\mathcal{E}_i \wedge \mathcal{E}_j = \varnothing$, $\vee_i \mathcal{E}_i = \Omega$），则

$$\Pr[\mathcal{E}] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[\mathcal{E} \mid \mathcal{E}_i] \cdot \Pr[\mathcal{E}_i]$$

对任意$\mathcal{E}$成立



全概率公式常用于分情况讨论事件的概率

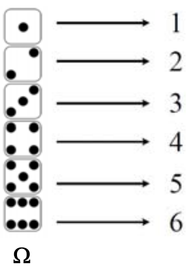
HIT CS&E

随机变量

概率空间：$(\Omega, \Sigma, \Pr)$

随机变量*X*：一个函数$X: \Omega \to R$

投掷结果是一个随机变量



HIT CS&E

随机变量

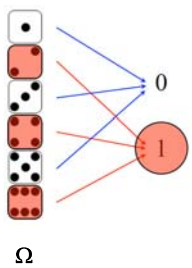
概率空间：$(\Omega, \Sigma, \Pr)$

随机变量*X*：一个函数$X: \Omega \to R$

事件"$X=x$"即"$\{s \in \Omega \mid X(s)=x\}$"

$\Pr[X=x] = \Pr[\{s \in \Omega \mid X(s)=x\}]$

投掷结果的奇偶是一个随机变量



HIT CS&E

随机变量的独立性

定义. 随机变量X和Y是独立的，如果

$\Pr[X=x \wedge Y=y] = \Pr[X=x] \cdot \Pr[Y=y]$

对任意x,y成立

随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$是相互独立的，如果

$\Pr[\wedge_{i\in I} (X_i=x_i)] = \prod_{i\in I} \Pr[X_i=x_i]$

对任意$I \subseteq [n]$和任意x_i $(i\in I)$均成立

HIT CS&E

随机变量的数学期望

定义. 离散随机变量X的数学期望定义为

$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr[X=x]$

其中x取遍X的值域

期望的线性性质

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}[X_i]$$

HIT CS&E

期望的线性性质

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}[X_i]$$

证明：

$E[X+Y] = \sum_x \sum_y (x+y)\Pr[X=x \wedge Y=y]$

$$= \sum_x \sum_y x \Pr[X=x \wedge Y=y] + \sum_x \sum_y y \Pr[X=x \wedge Y=y]$$

$$= \sum_x x \sum_y \Pr[X=x \wedge Y=y] + \sum_y y \sum_x \Pr[X=x \wedge Y=y]$$

$$= \sum_x x \Pr[X=x] + \sum_y y \Pr[Y=y]$$

全概率公式

$$= \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

HIT CS&E

期望的线性性质

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}[X_i]$$

证明：

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$E[cX] = \sum_x x\Pr[cX=x]$

$$= c \sum_x \frac{x}{c} \Pr\left[X = \frac{x}{c}\right]$$

$= c \sum_{x'} x'\Pr[X=x']$

$$= c\mathrm{E}[X]$$

HIT CS&E

期望的线性性质

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}[X_i]$$

证明：

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$E[cX] = cE[X]$

在此基础上，对n做数学归纳，得出结论

注：证明过程未涉及变量间是否独立
线性性质对任何依赖关系都成立

HIT CS&E

线性性质的应用实例

猴子在打字机上随机连续地敲出一个长度为10亿的字符串
这个字符串中“proof”平均出现多少次呢？

$X_i=1$ —— “proof”出现在位置i

$X_i=0$ —— “proof”未出现在位置i

$X=\sum_i X_i$ —— “proof”出现的总次数

$\Pr[X_i=1] = 1/26^5$

$\Pr[X_i=0] = 1- 1/26^5$

$E[X_i] = 1/26^5$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{10^9-4} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10^9-4} E[X_i] = (10^9-4)E[X_1] = (10^9-4)/26^5 \approx 84$$

HIT CS&E

Markov不等式

对于任意非负随机变量X,

$$\Pr[X\ge t] \le \frac{E[X]}{t}$$

对任意t>0成立

证明： $\Pr[X\ge t] = \int_t^{+\infty}\Pr[X=x]dx$

$= \int_t^{+\infty} 1\cdot\Pr[X=x]dx$

$\le \int_t^{+\infty} \frac{x}{t}\cdot\Pr[X=x]dx$

$= \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} x\cdot\Pr[X=x]dx$

$\le \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} x\cdot\Pr[X=x]dx$

$= \frac{E[X]}{t}$

HIT CS&E

Markov不等式

对于任意非负随机变量X,

$$\Pr[X\ge t] \le \frac{E[X]}{t}$$

对任意t>0成立

推广

对任意随机变量X和非负函数h: $X\to R^+$

$$\Pr[h(X)\ge t] \le \frac{E[h(X)]}{t}$$

对任意t>0成立

HIT CS&E

方差

定义. 离散随机变量X的方差定义为

$$Var[X] = E[(X-E[X])^2]$$

方差的算术平方根称为X的标准差，记为$\delta[X]$

$$\delta[X] = (Var[X])^{1/2}$$

$Var[X] = E[(X-E[X])^2]$

$= E[X^2-2X\cdot E[X] + (E[X])^2]$

$= E[X^2] -2E[X\cdot E[X]] + E[(E[X])^2]$

$= E[X^2] -2E[X]\cdot E[X] + (E[X])^2$

$= E[X^2] - (E[X])^2$

HIT CS&E

二项分布的方差

定义.若随机变量X满足

$\Pr[X=1] = p$ $\quad\Pr[X=0] = 1-p$

则称X服从两点分布

$E[X] = 1\cdot\Pr[X=1] + 0\cdot\Pr[X=0] = p$

$Var[X] = E[(X-E(X))^2]$

$= (1-p)^2\cdot\Pr[X=1] + (0-p)^2\cdot\Pr[X=0]$

$= (1-p)^2\cdot p + p^2\cdot(1-p)$

$= p(1-p)$

HIT CS&E

Chebyshev不等式

对任意随机变量X,

$$\Pr[\,|X-E[X]|\ge t\,] \le \frac{Var[X]}{t^2}$$

对任意t>0成立

证明：令 $Y=(X-E[X])^2$, Y是非负随机变量

$|X-E[X]|\ge t \iff Y\ge t^2$

对Y和t^2运用Markov不等式即得结论

HIT CS&E

对任意随机变量X,

$$\Pr[\,|X-E[X]|\ge t\,] \le \frac{Var[X]}{t^2}$$

对任意t>0成立

$t' = t\cdot\delta[X]$

$(\delta[X])^2=Var[X]$

对任意随机变量X,

$$\Pr[\,|X-E[X]|\ge t\cdot\delta[X]\,] \le \frac{1}{t^2}$$

对任意t>0成立

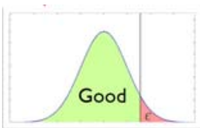
HIT CS&E

尾概率界(Tail Bound)

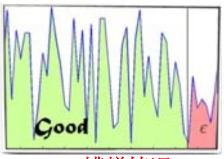
Tail Bound:
Pr[$X>t$] < ε

很多分析任务要求给出尾概率的界限

如：
（1）随机算法运行时间超过阈值的概率
（2）某种代价（如最大负载）
（3）极端情况出现的概率



理想情况



糟糕情况

HIT CS&E

尾概率界(Tail Bound)

Tail Bound:
Pr[$X>t$] < ε

分析手段1：
计数并计算概率
涉及大量计算
涉及计算方法的有效性

将n个球放进n个箱子：

Pr[第一个箱子内球个数 > t]

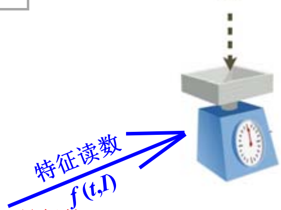
$$\le \binom{n}{t}\left(\frac{1}{n}\right)^t = \frac{n!}{t!(n-t)!n^t} = \frac{1}{t!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-t+1)}{n^t} = \frac{1}{t!}\cdot\prod_{i=0}^{t-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \le \frac{1}{t!} \le \left(\frac{e}{t}\right)^t$$

HIT CS&E

尾概率界(Tail Bound)

Tail Bound:
Pr[$X>t$] < ε

X服从分布$\mathscr{D}$



分析手段2：
将尾概率的计算归结
为分析X某种特征I

Pr[$X>t$] < $f(t,I)$

分析工具：
Markov不等式(仅知$E[X]$是紧的)
Chebyshev不等式
Chernoff界 (待讲)
其他概率不等式 (待讲)

HIT CS&E

尾概率界(Tail Bound)

Tail Bound:
Pr[$X>t$] < ε

分析手段2：
将尾概率的计算归结
为分析X某种特征I

将n个球放进n个箱子：
X_i=1 第i个球落入第一个箱子
X_i=0 第i个球未落入第一个箱子
$X=\sum_i X_i$ 第一个箱子中球总数
$\Pr[X_i=1]=1/n$ $\Pr[X_i=0]=1-1/n$
$E[X_i]=1/n$
$E[X]=\sum_i E[X_i]=1$

Pr[第一个箱子内球个数 > t]
$=\Pr[X>t]$
$\le E[X]/t$
$=1/t$

你试试Chebyshev不等式呢？