HIT CS&E

第二章 数学基础

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提纲

2.1 计算复杂性函数的阶
2.2 标准符号和通用函数
2.3 和式的估计与界限
2.4 递归方程
* Master定理的证明

HIT CS&E

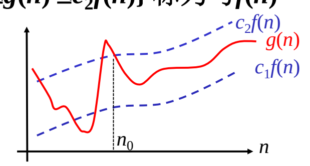
2.1 计算复杂性函数的阶

2.1.1 同阶函数集合
2.1.2 低阶函数集合
2.1.3 高阶函数集合
2.1.4 严格低阶函数集合
2.1.5 严格高阶函数集合
2.1.6 函数阶的性质

HIT CS&E

2.1.1 同阶函数集合

定义2.1.1 (同阶函数集合) $\Theta(f(n))=\{g(n) \mid \exists c_1, c_2>0, n_0, \forall n>n_0, c_1 f(n) \le g(n) \le c_2 f(n)\}$ 称为与$f(n)$同阶的函数集合。



- 若$g(n)\in\Theta(f(n))$, 则称$g(n)$与$f(n)$同阶
- $g(n)\in\Theta(f(n))$常记为 $g(n) = \Theta(f(n))$
- $f(n)$是极限非负的，否则$\Theta(f(n))$定义为空集
  即：$f(n)$在n充分大之后必取非负值

HIT CS&E

Example

例1 证明: $f(n)=an^2+bn+c=\Theta(n^2)$ $(a>0)$

证明: 令$c_1=a/4$, $c_2=7a/4$, $n_0=2\cdot\max\{|b|/a, \sqrt{|c|/a}\}$
则，$n>n_0$后有 $c_1n^2 \le an^2+bn+c \le c_2n^2$

$an^2+bn+c \le c_2n^2$

$\Leftrightarrow an^2+bn+c \le an^2+(a/2)n^2 + (a/4)n^2$

$\Leftrightarrow 0 \le an/2[n-2b/a]+(a/4)(n^2-4c/a)$

$an^2+bn+c \ge c_1n^2$

$\Leftrightarrow an^2+bn+c \ge (a/4)n^2$

$\Leftrightarrow an/2[n+2b/a]+(a/4)(n^2+4c/a) \ge 0$

HIT CS&E

Example

例2 证明: $6n^3 \ne \Theta(n^2)$

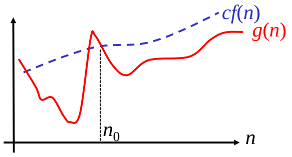
反证. 如果存在$c_1,c_2>0$，n_0使得当$n\ge n_0$时，有
$c_1n^2 \le 6n^3 \le c_2n^2$
于是，当$n>c_2/6$时，必有
$n \le c_2/6$
这与n的取值范围矛盾。

例3 对于任意常数$c>0$有 $c=\Theta(n^0)=\Theta(1)$

取$c_1=c/2$, $c_2=3c/2$, $n_0=1$, 则$n>n_0$后有
$c_1n^0 \le c \le c_2n^0$

2.1.2 低阶函数集合

定义2.1.2 (低阶函数集) $O(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0, \forall n>n_0 \text{有} 0 \le g(n) \le cf(n)\}$ 称为比$f(n)$低阶的函数集合



- 若$g(n) \in O(f(n))$, 则称$f(n)$是g(n)的上界
- $g(n) \in O(f(n))$常记为 $g(n) = O(f(n))$
- 如果$f(n)=O(n^k)$, 则称$f(n)$是**多项式有界的**

Example

例1 $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

$\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$

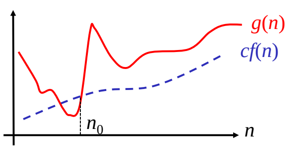
例2 证明: $n=O(n^2)$

证明：令$c=1, n_0=1$,

则$n \ge n_0$后, 恒有 $0 \le n \le cn^2$

2.1.3 高阶函数集合

定义2.1.3 (高阶函数集) $\Omega(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0, \forall n>n_0 \text{有} 0 \le cf(n) \le g(n)\}$ 称为比$f(n)$高阶的函数集合



- 若$g(n) \in \Omega(f(n))$, 则称$f(n)$是g(n)的下界
- $g(n) \in \Omega(f(n))$常记为 $g(n) = \Omega(f(n))$

定理2.1 $f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=O(g(n))$且$f(n)=\Omega(g(n))$

证明：$\Rightarrow$. 由$f(n)=\Theta(g(n))$知，$\exists c_1, c_2>0, n_0>0$, 当$n \ge n_0$时

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

易知 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$

$\Leftarrow$. 由$f(n)=\Omega(g(n))$知，$\exists c_1>0, n_1>0$, 当$n \ge n_1$时

$c_1 g(n) \le f(n)$

由$f(n)=O(g(n))$知，$\exists c_2>0, n_2>0$, 当$n \ge n_2$时

$f(n) \le c_2 g(n)$

取$n_0=\max\{n_1, n_2\}>0$, 当$n \ge n_0$时

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

即：$f(n)=\Theta(g(n))$

例 $p(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i = \Theta(n^d) \quad (a_d>0)$

证明：$\sum_{i=0}^{d} a_i n^i \le (d+1)\max_{i=0}^{d}\{a_i\} n^i \quad \Rightarrow p(n)=O(n^d)$

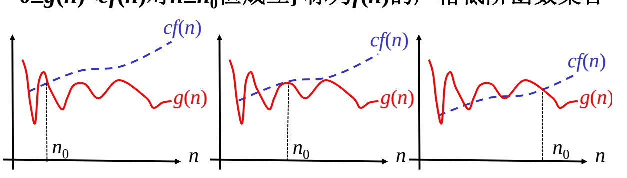
取n_0是 $\frac{a_d}{2}n^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^i = 0$ 的最大根，则$n \ge n_0$时

$p(n)= \frac{a_d}{2}n^d + (\frac{a_d}{2}n^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^i) \ge \frac{a_d}{2}n^d$

$\Rightarrow p(n)=\Omega(n^d)$

2.1.4 严格低阶函数集合

定义2.1.4 (严格低阶函数集) $o(f(n))=\{g(n) \mid \forall c>0, \exists n_0, 0 \le g(n) < cf(n) \text{对} n \ge n_0 \text{恒成立}\}$ 称为$f(n)$的严格低阶函数集合



c逐步变小时，n_0相应地变化

- 若$g(n) \in o(f(n))$, 则称$f(n)$是g(n)的严格上界
- $g(n) \in o(f(n))$常记为 $g(n)=o(f(n))$

HIT CS&E

例1 证明：$2n = o(n^2)$

证明：对$\forall c>0$, 欲使$2n<cn^2$必有$2/c<n$

于是，$\forall c>0$, 取$n_0=2/c$,当$n\ge n_0$必有$2n<n^2$

例2 证明：$2n^2 \ne o(n^2)$

证明：当$c=1$时,对$\forall n_0$, $2n^2<cn^2$在$n\ge n_0$都不成立

HIT CS&E

命题2.1. $f(n)=o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$

证明：$f(n)=o(g(n))$

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0$,使得 $0\le f(n)<cg(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0$,使得 $0\le \frac{f(n)}{g(n)}<c$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$ 且$f(n)\ge 0, g(n)>0$

HIT CS&E

2.1.5 严格高阶函数集合

定义2.1.4 (严格高阶函数集) $\omega(f(n))=\{g(n)|\forall c>0, \exists n_0, 0\le cf(n)<g(n)$对$n\ge n_0$恒成立$\}$ 称为$f(n)$的严格高阶函数集合

$\forall c>0, \exists n_0, 0\le cf(n)<g(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0, 0\le f(n)<(1/c)g(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0, 0\le f(n)<cg(n)$对$n\ge n_0$恒成立

命题2.2 $g(n)=\omega(f(n)) \Leftrightarrow f(n)=o(g(n))$

命题2.3. $g(n)=\omega(f(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\infty$

HIT CS&E

Example

例1 证明：$n^2/2 = \omega(n)$

证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/2}{n}=\infty$

例2 证明：$n^2/2 \ne \omega(n^2)$

证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/2}{n^2}\ne\infty$

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质

A.传递性

(a) $f(n)=\Theta(g(n)) \wedge g(n)=\Theta(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Theta(h(n))$

(b) $f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$

(c) $f(n)=\Omega(g(n)) \wedge g(n)=\Omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$

(d) $f(n)=o(g(n)) \wedge g(n)=o(h(n)) \Rightarrow f(n)=o(h(n))$

(e) $f(n)=\omega(g(n)) \wedge g(n)=\omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\omega(h(n))$

证明：利用定义易得（练习）。

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质(续)

B.自反性

(a) $f(n)=\Theta(f(n))$

(b) $f(n)=O(f(n))$

(c) $f(n)=\Omega(f(n))$

C.对称性

(a) $f(n)=\Theta(g(n))$ iff $g(n)=\Theta(f(n))$

D.反对称性

(a) $f(n)=O(g(n))$ iff $g(n)=\Omega(f(n))$

(b) $f(n)=o(g(n))$ iff $g(n)=\omega(f(n))$

HIT CS&E

注意

!

- 并非所有函数都是可比的
- 存在函数$f(n),g(n)$ 使得：$f(n)\neq O(g(n))$
  $f(n)\neq\Omega(g(n))$
  - 例如，$f(n)=n$　$g(n)=n^{1+\sin n}$

HIT CS&E

2.2 标准符号和通用函数

- Floor和 Ceiling 函数
- 多项式

HIT CS&E

2.2.1 Floor和ceiling

定义2.2.1 (Floor和Ceiling) $\forall x\in \mathbf{R}$

$\lfloor x\rfloor$表示小于或等于x的最大整数

$\lceil x\rceil$表示大于或等于x的最小整数

命题2.2.1 $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x\leq\lceil x\rceil<x+1$

命题2.2.2 $\lfloor k+x\rfloor=k+\lfloor x\rfloor$，$\lceil k+x\rceil=k+\lceil x\rceil$

命题2.2.3 $\lfloor n/2\rfloor+\lceil n/2\rceil=n$对任意整数$n$成立

证．若$n=2k$，则$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=k$，$\lfloor n/2\rfloor=k$．于是 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\lfloor n/2\rfloor=2k=n$

若 n=2k+1，则$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\lfloor n/2\rfloor=k+1+k=2k+1=n$．

HIT CS&E

命题2.2.4 设n,a,b是任意整数，$ab\neq 0$, 则

(1) $\lceil\lceil n/a\rceil/b\rceil=\lceil n/ab\rceil$

(2) $\lfloor\lfloor n/a\rfloor/b\rfloor=\lfloor n/ab\rfloor$

证明：(1) 若$n=kab$，则 $\left\lceil\frac{n/a}{b}\right\rceil=\left\lceil\frac{kb}{b}\right\rceil=k=\left\lceil\frac{kab}{ab}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{ab}\right\rceil$

若$n=kab+\alpha$ $(0<\alpha<ab)$，则

右端$=\left\lceil\frac{n}{ab}\right\rceil=\left\lceil k+\frac{\alpha}{ab}\right\rceil=k+\left\lceil\frac{\alpha}{ab}\right\rceil=k+1$

由于 $\left\lceil\frac{n}{a}\right\rceil=\left\lceil kb+\frac{\alpha}{a}\right\rceil=kb+\left\lceil\frac{\alpha}{a}\right\rceil$　　$0<\left\lceil\frac{\alpha}{a}\right\rceil\leq b$

所以 $\left\lceil\frac{n}{a}\right\rceil\Big/b=k+\left\lceil\frac{\alpha}{a}\right\rceil\Big/b$　　$0<\left\lceil\frac{\alpha}{a}\right\rceil\Big/b\leq 1$

左端$=\lceil\lceil n/a\rceil/b\rceil=k+1$

(2) 类似于(1)的证明

HIT CS&E

2.3 和式的估计与界限

1. 线性和

命题2.3.1 $\sum_{k=1}^{n}(ca_k+b_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

命题2.3.2 $\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k))=\Theta(\sum_{k=1}^{n}f(k))$

证明：对n做数学归纳

$n=1$时, 左端$=\Theta(f(1))=$右端, 结论成立

假设$n\leq m$时, 结论成立(归纳假设)

$$\sum_{k=1}^{m+1}\Theta(f(k))=\sum_{k=1}^{m}\Theta(f(k))+\Theta(f(m+1))$$
$$=\Theta(\sum_{k=1}^{m}f(k))+\Theta(f(m+1))$$
$$=\Theta(\sum_{k=1}^{m+1}f(k))$$

HIT CS&E

2. 级数

命题2.3.3 $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}=\Theta(n^2)$

命题2.3.4 $\sum_{k=1}^{n}x^k=1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$　$(x\neq 1)$

$\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$　$(|x|<1)$

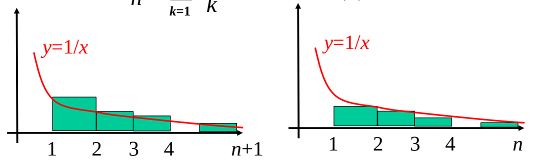
命题2.3.5 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

命题2.3.6 $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=a_0-a_n$

命题2.3.7 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n}$

命题2.3.8 $\lg(\prod_{k=1}^{n}a_k)=\sum_{k=1}^{n}\lg a_k$

命题2.3.9 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + O(1)$



$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n})$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < 1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx = 1+\ln n$

$\ln n < H_n < 1+\ln n$

3. 和的界限

例1 证明：$\sum_{k=1}^{n} 3^k = O(3^n)$

证明：$\sum_{k=1}^{n} 3^k = (3^{n+1}-1)/(3-1) = (3/2)3^n-1/2$

$< (3/2)3^n$

$= O(3^n)$

例2 错误证明：$\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$

证明：$n=1$时，左端=1=$O(1)$=右端

假设结论在$n\le m$时成立

$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1) = O(m) + (m+1) = O(m+1)$

错在哪里？

- 证明过程中$O(m)$中隐藏的“常数”随n变化而变化
- 欲证结论，须证明
  对于某个常数$c>0$，$\sum_{k=1}^{n} k \le cn$

直接求和的界限

命题2.3.10 (缩放法) $n\cdot\min_k\{a_k\} \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le n\cdot\max_k\{a_k\}$

例1 $\sum_{k=1}^{n} k \le n\times\max\{1,2,\ldots,n\} = n^2$

命题2.3.11 (分裂法) 设$A\subseteq[n]$, $a_i\ge 0$, 则 $\sum_{k=1}^{n} a_k \ge \sum_{k\in A} a_k$

例2 $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k$

$\ge \sum_{k=n/2+1}^{n} k$ (分裂法)

$\ge (n/2)\times(n/2)$ (缩放法)

$= n^2/4$

直接求和的界限

命题2.3.12 设对于所有$k\ge 0$, $a_{k+1}/a_k\le r<1$,则$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \frac{a_0}{1-r}$

证明：$a_1/a_0\le r \Rightarrow a_1\le a_0 r$

$a_2/a_1\le r \Rightarrow a_2\le a_1 r \le a_0 r^2$

$a_3/a_2\le r \Rightarrow a_3\le a_2 r \le a_0 r^3$

… … … … …

$a_k/a_{k-1}\le r \Rightarrow a_k\le a_{k-1} r \le a_0 r^k$ $\qquad k\ge 0$

$\sum_{k=0}^{n} a_k \le a_0\cdot\sum_{k=0}^{n} r^k < a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a_0}{1-r}$

例3 求 $\sum_{k=1}^{n} (k/3^k)$ 的上界

解：$\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \frac{2}{3}<1$ $\therefore \sum_{k=1}^{n} (k/3^k) \le \frac{1/3}{1-2/3} = 1$

例4 求 $\sum_{k=1}^{n} (k^2/2^k)$ 的上界

解：$\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \le \frac{8}{9}<1$ $\qquad k\ge 3$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} (k^2/2^k) \le 1/2+1+\frac{9/8}{1-8/9} = 93/8$

HIT CS&E

2.4 递归方程

- 递归方程：递归方程是使用小的输入值来描述一个函数的方程或不等式.
- 递归方程例：Merge-sort算法的复杂性方程

T(n)=θ(1)　　if n=1

T(n)=2T(n/2)+θ(n)　if n>1.

T(n)的解是θ($n$log$n$)

HIT CS&E

求解递归方程的三个主要方法

- 迭代方法:
  - 把方程转化为一个和式
  - 然后用估计和的方法来求解.
- 替换方法:
  - 先猜测方程的解,
  - 然后用数学归纳法证明.
- Master方法:
  - 求解型为$T(n)=aT(n/b)+f(n)$的递归方程

HIT CS&E

2.4.1 迭代方法

方法：

循环地展开递归方程，
把递归方程转化为和式，
然后可使用求和技术解之

HIT CS&E

例1. $T(n)=2T(n/2)+cn$

$=2^2T(n/2^2)+cn+cn$

$=2^3T(n/2^3)+cn+cn+cn$

$=\ldots$

$=2^kT(n/2^k)+knc$

$=2^kT(1)+knc$　　　　$n=2^k$

$=nT(1)+cn\log n$

$=\Theta(n\log n)$

例2

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n+3T\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor\right) \\
&= n+3\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/16 \right\rfloor\right)\right) \\
&= n+3\left(\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/64 \right\rfloor\right)\right)\right) \\
&= n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+9\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor+27T\left(\left\lfloor n/64 \right\rfloor\right) \\
&= n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^i T\left(\left\lfloor n/4^i \right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{令} \frac{n}{4^i}=1 \Rightarrow 4^i=n \Rightarrow i=\log_4 n}$

$$
\begin{aligned}
&= n+3\left\lfloor n/4 \right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^{\log_4 n}T\left(\left\lfloor 1 \right\rfloor\right) \\
&\le \sum_{i=0}^{\log_4 n} 3^i \, n/4^i + \mathrm{O}(n) \le n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = n\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n = O(n)
\end{aligned}
$$

HIT CS&E

2.4.2 替换法

方法：

1. 变量代换, 将方程转换成已知方程
2. 先根据方程的形式猜测解
   然后用数学归纳法证明

变量代换

例1. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

令$n=m+34$,则

$T(m+34)=2T(m/2+34)+m+34$

令$T(m+34)=S(m)$,则

$S(m)=2S(m/2)+m+34$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(n\log n)$

例2. $T(n)=2T(n^{1/2})+\log n$

令$n=2^m$,则

$T(2^m)=2T(2^{m/2})+m$

令$T(2^m)=S(m)$,则

$S(m)=2S(m/2)+m$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(\log n \log\log n)$

先猜后证

例3. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

由于 $n/2$ 与$n/2+17$ 在n充分大之后相近

故猜$T(n/2) \approx T(n/2+17)$ 在n充分大后成立

故

$T(n) \approx 2T(n/2)+n$

故原始方程的解$T(n)=\Theta(n\log n)$

再用数学归纳法证明

猜测方法 I：

猜测上下界，减少不确定性范围

例4. $T(n)=2T(n/2)+n$

解.首先证明$T(n)=\Omega(n)$, $T(n)=O(n^2)$

然后逐渐降低上界、提高下界

$\Omega(n)$的一个高阶函数是$n\log n$

$O(n^2)$的一个低阶函数是$n\log n$

细微差别的处理

- 问题：猜测正确，数学归纳法的归纳步似乎证不出来
- 解决方法:从猜测结论中减去一个低阶项，可能方法就能用了

例5. $T(n) = T(\lfloor n/2\rfloor) + T(\lceil n/2\rceil)+1$

解一.猜测$T(n)=O(n)$，往证$T(n)\le cn$

证: $T(n) \le c\lfloor n/2\rfloor+ c\lceil n/2\rceil+1 = cn+1 \ne cn$

常数c固定时无法得出$T(n) \le cn$

解二.猜测$T(n)=O(n)$，往证$T(n)\le cn-b$

证：假设$m<n$时$T(m)\le cm-b$

$T(n) = T(\lfloor n/2\rfloor)+ T(\lceil n/2\rceil)+1$

$\le c\lfloor n/2\rfloor -b+c\lceil n/2\rceil -b+1$

$= cn-b +(1-b)$

$\le cn-b$ （只要$b\ge 1$）

避免陷阱

例6. $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

解.猜测$T(n) = O(n)$，下面用数学归纳法证明$T(n) \le cn$

证: $T(n) \le 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \le cn+n = O(n)$　　错！！！

错在哪里？

- 过早使用$O(n)$记号而掉进陷阱
- $O(n)$记号要在证明$T(n) \le cn$后才能使用
- 由$T(n) \le cn+n$ 无法得出 $T(n) \le cn$
- 因为$cn+n \le cn$ 对任意非负常数均不成立

2.4.3 Master method

目的

求解型如 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$的方程

- $a \ge 1, b>1$是常数
- $f(n)$是正函数

方法

记住三种情况，不用纸笔即可求解上述方程

Master 定理

定理2.4.1 (Master定理) 设$a \ge 1, b>1$是常数, $f(n)$是函数,$T(n)$是定义在非负整数集上的函数且 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$. $T(n)$可如下求解

(1) $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$是常数, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

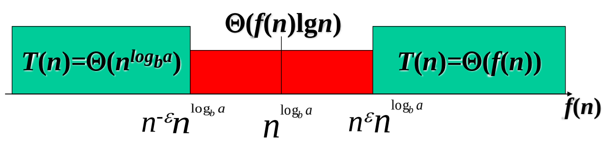
(2) $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$是常数, 且存在常数$c<1$使得$af(n/b)<cf(n)$对充分大的n成立，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

直观理解

$f(n)$的阶与$n^{\log_b a}$的阶相比较，会出现三种情况

- $n^{\log_b a}$的阶较高，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$
- $f(n)$的阶较高，则$T(n)=\Theta(f(n))$
- 二者同阶，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$



对于红色部分，Master定理无能为力

注意

为了应用Master定理

- $n^{\log_b a}$的阶较高时，需要高出一个多项式

  即：存在常数$\varepsilon>0$使得 $f(n) = O\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}}\right)$

- $f(n)$的阶较高时，需要高出一个多项式

  即：存在常数$\varepsilon>0$使得 $f(n) = \Omega(n^{\varepsilon}\cdot n^{\log_b a})$

Master定理的使用

例1. $T(n) = 9T(n/3) + n$

解. $a=9$, $b=3$, $f(n)=n$, $n^{\log_b a} = n^2$

因 $f(n) = n = O(n^{\log_b a-1})$, $\varepsilon=1$

∴ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$

例2. $T(n) = T(2n/3) + 1$

解. $a=1$, $b=3/2$, $f(n)=1$, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$

因 $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_b a})$

∴ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n) = \Theta(\log n)$

Master定理的使用(续)

例3. $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$

解. $a=3$, $b=4$, $f(n)=n\log n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}=n^{0.793}$

因 $f(n) = n\log n = \Omega(n^{\log_b a+1-\log_b a})$, $\varepsilon=1-\log_b a$

又 $af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \le (3/4)n\log n$, $c=3/4$

∴ $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

例4. $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

解. $a=2$, $b=2$, $f(n)=n\log n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2}=n$, $f(n)=\omega(n)$

又 $f(n)=n\log n=o(n^{\log_b a+\varepsilon})$ $\forall\ \varepsilon>0$

∴ Master定理不适用于求解该方程

Master定理的证明

引理 1: 设 $a\ge1$, $b>1$, $n=b^k$, k 是正整数，则方程

$$T(n)=\begin{cases}\theta(1) & if\quad n=1\\ aT(n/b)+f(n) & if\quad n=b^i\end{cases}$$

的解为:

$$T(n)=\theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

证明:
$$\begin{aligned}T(n)&=f(n)+aT(n/b)\\&=f(n)+af(n/b)+a^2T(n/b^2)\\&=f(n)+af(n/b)+a^2f(n/b^2)+a^3T(n/b^3)+\dots\\&\quad+a^{\log_b n-1}f(n/b^{\log_b n-1})+a^{\log_b n}T(n/b^{\log_b n})\end{aligned}$$

由于 $a^{\log_b n}=n^{\log_b a}$，$a^{\log_b n}T(n/b^{\log_b n})=a^{\log_b n}T(1)=\theta(n^{\log_b n})$．于是

$$T(n)=\theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j).$$

Master定理的证明(续)

引理 2: 设 $a\ge1$, $b>1$, $n=b^k$, k 是正整数，$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$，则

(1) if $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ for $\varepsilon>0$，则 $g(n)=O(n^{\log_b a})$

(2) if $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$, then $g(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$

(3) if $af(n/b)\le cf(n)$ for some $0<c<1$ and all $n\ge b$, then $g(n)=\theta(f(n))$.

引理2的证明

(1) if $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ for $\varepsilon>0$，则 $g(n)=O(n^{\log_b a})$

证明: (1)
$$\begin{aligned}g(n)&=O\Big(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j\big(\frac{n}{b^j}\big)^{\log_b a-\varepsilon}\Big)\\&=n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\Big(\frac{ab^\varepsilon}{b^{\log_b a}}\Big)^j\\&=n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}(b^\varepsilon)^j\\&=n^{\log_b a-\varepsilon}\Big(\frac{b^{\varepsilon\log_b n}-1}{b^\varepsilon-1}\Big)\\&=n^{\log_b a-\varepsilon}\Big(\frac{n^\varepsilon-1}{b^\varepsilon-1}\Big)\\&=n^{\log_b a-\varepsilon}O(n^\varepsilon)=O(n^{\log_b a})\end{aligned}$$

引理2的证明（续）

(2) if $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$, then $g(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$

证明:

(2) 由于 $f(n/b^j)=\theta((n/b^j)^{\log_b a})$，$g(n)=\theta\Big(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j\big(\frac{n}{b^j}\big)^{\log_b a}\Big)$.

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j\Big(\frac{n}{b^j}\Big)^{\log_b a}=n^{\log_b a}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\Big(\frac{a}{b^{\log_b a}}\Big)^j=n^{\log_b a}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}1=n^{\log_b a}\log_b n$$

$$\Rightarrow g(n)=\theta(n^{\log_b a}\log_b n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n).$$

(3) if $af(n/b)\le cf(n)$ for some $0<c<1$ and all $n\ge b$, then $g(n)=\theta(f(n))$.

(3) g(n)中的所有项皆为正．由于对于 $0<c<1$ 和 all $n\ge b$,

$af(n/b)\le cf(n)$,

$af(\frac{n}{b^2})\le cf(\frac{n}{b})$,

$af(\frac{n}{b^3})\le cf(\frac{n}{b^2})$,

…

$af(\frac{n}{b^j})\le cf(\frac{n}{b^{j-1}})$

我们有 $a^j f(n/b)\cdots \cancel{f(n/b^{j-1})}f(n/b^j)\le c^j f(n)f(n/b)\cdots \cancel{f(n/b^{j-1})}$

$$\Rightarrow a^j f(\frac{n}{b^j})\le c^j f(n)$$

于是,

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})\le\sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n)\le f(n)\sum_{j=0}^{\infty}c^j=f(n)\Big(\frac{1}{1-c}\Big)=\theta(f(n))$$

Master定理的证明(续)

引理 3: $a\ge 1$, $b>1$, $n=b^k$, k 为正整数，则

$$T(n)=\begin{cases}\theta(1) & if \quad n=1\\ aT(n/b)+f(n) & if \quad n=b^k\end{cases}$$

的解为:

(1) if $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ for some $\varepsilon>0$, then $T(n)=\theta(n^{\log_b a})$

(2) if $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$, then $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$

(3) if $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ for some $\varepsilon>0$, and if

$af(n/b)\le cf(n)$ for some 0<c<1 and all 充分大的 n, then $T(n)=\theta(f(n))$

引理3的证明

证明: (1) 由引理 1 和引理 2:

$T(n)=\theta(n^{\log_b a})+O(n^{\log_b a})=\theta(n^{\log_b a})$

(2) $T(n)=\theta(n^{\log_b a})+\theta(n^{\log_b a}\lg n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$

(3) $T(n)=\theta(n^{\log_b a})+\theta(f(n))=\theta(f(n))$

Master定理的证明(续)

当 **n** 不是 **b** 的幂时

思想: 当 $T(n)$单调递增（单调递减类似）

- $aT(\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor)+f(n)\le aT(\frac{n}{b})+f(n)\le aT(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil)+f(n)$
- 求$T(n)=aT(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil)+f(n)$的上界、$T(n)=aT(\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor)+f(n)$的下界

  可得到 $T(n)$的界限。
- 求$T(n)=aT(\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor)+f(n)$的下界类似于求$T(n)=aT(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil)+f(n)$的上界，所以我们只求$T(n)=aT(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil)+f(n)$的上界

Master定理的证明(续)

- 方法仍然是循环展开$T(n)=aT(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil)+f(n)$
- 需要处理序列：

n

$\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil$

$\left\lceil\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil/b\right\rceil$

$\left\lceil\left\lceil\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil/b\right\rceil/b\right\rceil$

…

Master定理的证明(续)

定义：$n_i=\begin{cases}n & if \quad i=0\\ \lceil n_{i-1}/b\rceil & if \quad i>0\end{cases}$

引理 4. $n_0\le n$，$n_1\le\frac{n}{b}+1$，$n_2\le\frac{n}{b^2}+\frac{1}{b}+1$，$n_3\le\frac{n}{b^3}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}+1$，…，$n_i\le\frac{n}{b^i}+\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{b^j}\le\frac{n}{b^i}+\frac{b}{b-1}$。

证：由$\lceil x\rceil\le x+1$可证。

Master定理的证明(续)

引理 5：当$i=\lfloor\log_b n\rfloor$时，$n_i\le b+\frac{b}{b-1}=O(1)$

证：由于$n_i\le\frac{n}{b^i}+\frac{b}{b-1}$，我们有

$$n_{\lfloor\log_b n\rfloor}\le\frac{n}{b^{\lfloor\log_b n\rfloor}}+\frac{b}{b-1}\le\frac{n}{b^{(\log_b n)-1}}+\frac{b}{b-1}=b+\frac{b}{b-1}=O(1)。$$

HIT CS&E

Master定理的证明(续)

引理 **6:** $T(n)=aT(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil)+f(n)\le \theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n\rfloor-1} a^j f(n_j)$

证: $$\begin{aligned} T(n)&=f(n_0)+aT(n_1)=f(n_0)+af(n_1)+a^2f(n_2)\\ &\le f(n_0)+af(n_1)+a^2f(n_2)+\ldots+a^{\lfloor \log_b n\rfloor-1}f(n_{\lfloor \log_b n\rfloor-1})\\ &\quad +a^{\lfloor \log_b n\rfloor}T(n_{\lfloor \log_b n\rfloor})\\ &=\theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n\rfloor-1} a^j f(n_j)\end{aligned}$$

HIT CS&E

Master定理的证明(续)

引理 7: $g(n)=\sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n\rfloor-1} a^j f(n_j)$ 可以界限如下:

（1） If $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ for $\varepsilon>0$, $g(n)=O(n^{\log_b a})$.

（2） If $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$, then $g(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)$.

（3） If $af(\lceil n/b\rceil)\le cf(n)$ for 0<c<1 and all 充分大的 n, then $g(n)=\theta(f(n))$.

HIT CS&E

引理7的证明

证明:（3）由 $af(\lceil n/b\rceil)\le cf(n)$ 有:

$$af(\left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil)\le cf(n)\Leftrightarrow af(n_1)\le cf(n_0)$$

$$af(\left\lceil \left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil \Big/ b\right\rceil)\le cf(\left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil)\Leftrightarrow af(n_2)\le cf(n_1)$$

$$\ldots$$

$$af(\left\lceil \ldots \left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil \Big/ b \;\ldots\right\rceil)\le cf(\left\lceil \ldots \left\lceil \frac{n}{b}\right\rceil \;\ldots\right\rceil)\Leftrightarrow af(n_j)\le cf(n_{j-1})$$

$$\Rightarrow a^j f(n_1)\cdots f(n_{j-1})f(n_j)\le c^j f(n_0)f(n_1)\cdots f(n_{j-1})$$

$$\Rightarrow a^j f(n_j)\le c^j f(n_0)=c^j f(n)$$

证明的其余部分与引理 2 的（3）的证明类似。

HIT CS&E

引理7的证明

（2）只要证明 $f(n_j)=O(n^{\log_b a}\big/ a^j)=O((\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$，即可用引理 2 的（2）的证明完成本证明。

$$j\le \lfloor \log_b n\rfloor \Rightarrow b^j\le b^{\lfloor \log_b n\rfloor}=b^{\log_b n-\delta}=n\cdot\frac{1}{b^\delta}\quad (0\le\delta<1)$$

$$\Rightarrow \frac{b^j}{n}\le\frac{1}{b^\delta}<1\ (\because b>1)\Rightarrow b^j\big/ n<1。$$

由于 $f(n)=\boldsymbol{\theta}(n^{\log_b a})$， $\exists c>0$， 使对于充分大的 n_j，

$$\begin{aligned} f(n_j)\le cn_j^{\log_b a}&\le c(\frac{n}{b^j}+\frac{b}{b-1})^{\log_b a}\\ &=c(\frac{n}{b^j})^{\log_b a}(1+\frac{b^j}{n}\cdot\frac{b}{b-1})^{\log_b a}\\ &\le c(\frac{n^{\log_b a}}{a^j})(1+\frac{b}{b+1})^{\log_b a} \qquad (\because \frac{b^j}{n}<1)\\ &\le O(\frac{n^{\log_b a}}{a^j}) \qquad (\because c(1+\frac{b}{b+1})^{\log_b a}\text{是常数})\end{aligned}$$

于是（2）被证明。

HIT CS&E

引理7的证明

(1) 只要证明 $f(n_j)=O((\frac{n}{b^j})^{\log_b a-\varepsilon})$，则本证明的其余部分与引理 2 的（1）相同。类似（2）可证明 $f(n_j)=O((\frac{n}{b^j})^{\log_b a-\varepsilon})$。

至此，我们完成了 **Master** 定理的证明。