第4章

4.3.

(1) 设 $X = ACBACEDC$，$Y = AFBECDA$　$Z = AFCGBDD$

$LCS(X, Z) = ABCD$

$LCS(X, Y) = ABCD$，$LCS(X, LCS(Y, Z)) = AD$

$\leftarrow$

(2) X: ACBACEDC　ACBACED　$X = X_1 X_2 X_3 \cdots X_i$　$X[1 \sim i]$

Y: AFBECDA $\Rightarrow$ AFBECD $\Rightarrow$ $Y = Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_j$

Z: AFCGBDD　AFCGBDD　$Z = Z_1 Z_2 Z_3 \cdots Z_k$

$X_v \,!= Y_v$

最优子结构：　$LCS(X, Y, Z) = R_1 R_2 \cdots R_i$

$R_1 R_2 \cdots R_{i-1}$

如果不是最优子结构

则存在 $R_1 R_2 \cdots R_k$，使 LCS

更长，矛盾

重复子问题：

X[1~i-1] Y[1~j] Z[1~k]

X[1~i] Y[1~j-1] Z[1~k]

X[1~i] Y[1~j] Z[1~k-1]

X[1~i-1] Y[1~j-1] Z[1~k]

X[1~i-1] Y[1~j] Z[1~k-1]

X[1~i] Y[1~j-1] Z[1~k-1]

X[1~i-1] Y[1~j-1] Z[1~j-1]

X[1~i-2] Y[1~j] Z[1~k]

X[1~i-1] Y[1~j-1] Z[1~k]

X[1~i-1] Y[1~j] Z[1~k-1]

X[1~i-2] Y[1~j-1] Z[1~k]

X[1~i-2] Y[1~j] Z[1~k-1]

X[1~i-1] Y[1~j-1] Z[1~k-1]

X[1~i-2] Y[1~j-1] Z[1~j-1]

重叠子问题

可以得到递归方程：

$$c[i,j,k]=\begin{cases} 0, & \text{if } i=0 \text{ or } j=0 \text{ or } k=0. \\ c[i-1,j-1,k-1]+1, & \text{if } i,j,k>0, \text{ and } x_i=y_i=z_i \\ \max\{c[i,j,k-1],c[i,j-1,k],c[i-1,j,k], \\ \quad c[i-1,j-1,k],c[i-1,j,k-1],c[i,j-1,k-1]\}. \end{cases}$$

DP数组. $DP[m,n,k]$

算法.

$DP[0,0,0]=0$.

$DP[i,0,0]=0$ $DP[0,j,0]=0$ $DP[0,0,k]=0$.

$DP[i,j,0]=0$ $DP[i,0,j]=0$ $DP[0,i,j]=0$.

```
for i=1 To m,
    for j=1 To m
        for k=1 To m.
            if xi == yi == zi
                c[i,j,k] = c[i-1,j-1,k-1]+1.
            else c[i,j,k]=
                max{c[i,j,k-1],c[i,j-1,k],c[i-1,j,k],
                    c[i-1,j-1,k],c[i-1,j,k-1],c[i,j-1,k-1]}.
```

时间复杂度 $O(n^3)$

空间复杂度 $O(n^3)$

4.4 A[0:n] 最长单调递增子序列

递归方程.

$$A[0:n] = \max\{A[0:n-1],\ |\cdots A[i]A[n]|\}.$$

dp[0] = 1

for i=1→n.

计算以i为结尾的单调递增长度 H.

$dp[i] = \max\{dp[i-1],\ H\}.$

记录结尾序号.

时间复杂度 $O(n^2)$

空间复杂度 $O(n)$

4.5 递归方程.

$$A[0:n] = \max\{A[0:n-1],\ |\cdots A[i]A[n]|\}.$$

dp[0] = 1

for i=1→n.

计算以i为结尾的最长递增子序列长度 H.

$dp[i] = \max\{dp[i-1],\ H\}.$

记录结尾序号.

时间复杂度 $O(n^2)$

空间复杂度 $O(n)$

4.6 $a_1\ a_2 \cdots a_n$　　3 4　5 6

总代价最大.

怎么证明优化子结构

$$A[1,n] = \max\{A[1,n-1]+a[n],\ A[1,n-2]+A[n-1,n]\}$$

$$dp[2] = \max\{dp[1] + a[2],\ dp[0] + a[1,2]\}$$

$$= \max\{a[1] + a[2],\ 0 + a1/a2\}.$$

$dp[0] = 0$

$dp[1] = a_1$

for $i = 2$ to n.

$$dp[i] = \max\{dp[i-1] + a[i],\ dp[i-2] + a[n-1\ n]\}$$

时间复杂度 $O(n)$

空间复杂度 $O(n)$

47