第2章

2.1

证明：

$o(g(n))=\{f(n)\mid$ 任意 $c>0$，存在 n_1，$0\le cg(n)<f(n)$ 对 $n>n_1$ 恒成立$\}$

$\omega(g(n))=\{f(n)\mid$ 任意 $c>0$，存在 n_2，$0\le f(n)<cg(n)$ 对 $n>n_2$ 恒成立$\}$

取 $n'=\max\{n_1,n_2\}$，

$\forall c>0$，$n\ge n'$ 时，

$f(n)<cg(n)$，$f(n)>cg(n)$ 成立，

矛盾

故得.

2.2

2.3 证明

$$\log n! = \sum_{i=1}^{n}\log i \le \sum_{i=1}^{n}\log n = n\log n,$$

$$\log n! = O(n\log n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log i \ge \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log n \ge \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\log\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\log n - \frac{n}{2}\log 2$$

对 $n>4$ 有：

$$\frac{n}{2}\log n - \frac{n}{2}\log 2 > \frac{1}{4}n\log n \text{ 恒成立}$$

故 $\log n! = \Omega(n\log n)$

由此可得

$$\log n! = \Theta\log n$$

2.4

$$T(n)=T\left(\frac{3}{10}n\right)+5n=T\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot n\right)+5n+5n=\dots=T(1)+5n\log n$$
$$=\Theta(\log n).$$

2.5 $T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$

$= T(\lceil \frac{n}{4} \rceil) + 2$

$= \cdots$

$= T(\lceil \frac{n}{2^k} \rceil) + k.$

$k = \log_2 n$

故 $T(n) = T(1) + \log n = \Theta(\log n)$

2.6

2.7

2.8

2.9. $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}.$

由 master 定理.

$T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log n)$