Modul: Mathematik 1

Lehreinheit: Logik und Algebra

Dozent: Dr. Wolfgang Weiss (w.square.dhbw@gmail.com)

Klausur: Vorbereitung mit Übungsaufgaben und Musterlösungen in Lerngruppen und in der Vorlesung
Erlaubte Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen, Taschenrechner

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.1)

Beweisen Sie das Distributivgesetz für Aussagen mit Wahrheitswertetabellen:

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.2)

Gegeben die Aussageformen $p_1(x) : x > -2$ und $p_2(x) : x^2 \leq 16$.

- Bestimme die Negationen $\neg p_i, (i = 1, 2)$.
- Bestimme für die Variablenwerte $x = 2$ und $x = -2$ die Aussagen $p_i(2)$ und $p_i(-2)$ $(i = 1, 2)$. Welche dieser Aussagen sind wahr?
- Bestimme die Konjunktion $p_1 \wedge p_2$.
- Für welche $x \in \mathbb{Z}$ ist $(p_1 \wedge p_2)(x)$ wahr?

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.3)

Skizzieren Sie folgende Mengen auf der reellen Zahlengerade:

1. $A = \{2, 4\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$
4. $D = \{3, -3\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (-1 \leq x) \wedge (x \leq 3)\} = [-1, 3]$
6. $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, \infty)$

Aufgabe (1.4)

Berechnen Sie cartesische Produkte:

1. $\{a, b\} \times \{u, v, w\}$
2. $\{a, b\} \times (\{u, v\} \times \{0, 1\})$

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.5)

Bitte berechnen Sie die folgenden Operationen und Aussagen für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Der Betrag von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist definiert durch $|(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Addition von Vektoren: $(2, -4) + (-3, 6)$
2. Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer Zahl: $-3(2, -4)$
3. Betrag (Länge) eines Vektors: $|(2, -1)|$
4. Einheitskreis:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| = 1\}$$

5. Vergleich von Vektoren (bitte mit Skizze):
   - $(-3, -3) \leq (2, 1)$
   - $(1, 3) \not\leq (2, 1)$ und $(1, 3) \not\geq (2, 1)$, d.h. $(1, 3)$ und $(2, 1)$ sind unvergleichbar.

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

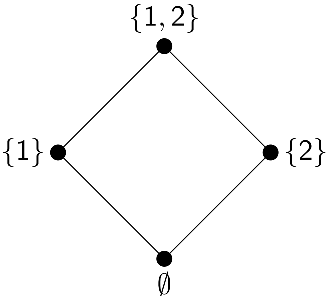
Aufgabe (1.6)

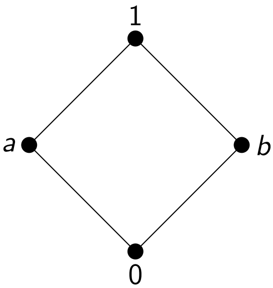
Berechnen Sie, ob diese Aussagen in der Boolesche Algebra $\mathcal{P}(\{1,2\}) = B_4$ wahr sind:

1. $a < 0$, $a \leq b$, $0 < a$, $0 < 1$, $1 < 1$
2. $a \wedge b = 1$, $a \vee b = 1$, $a \wedge 1 = a$, $0 \vee a = a$, $0 \vee b = 1$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$B_4 = \{0, 1, a, b\}$



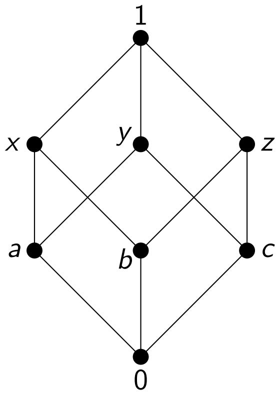


Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.7)

Berechnen Sie für die Boolesche Algebra $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = B_8$:

1. $x \vee z$
2. $a \vee (0 \vee x)$
3. $a \vee (b \wedge c)$
4. $y \vee 1$
5. $\overline{b}$
6. $c \vee \overline{c}$
7. $\overline{b \wedge y}$



Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.8)

Konstruieren Sie die Disjunktive Normalform für diese Funktion:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.9)

1. Konstruieren Sie die Disjunktive Normalform für diese Boolesche Funktion:

x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Vereinfachen Sie den Term von $g(x,y,z)$ mit dem Quine-McCluskey-Verfahren.
   2.1 Zusammenfassen von Konjunktionen mit Hilfe der Regeln für Boolesche Algebren
   2.2 Elimination von Konjunktionen, die für keine Kombination von Variablenwerten einen zusätzlichen Wert 1 erzeugen

Aufgabe (1.10)

Uhrzeiten: Für Zeiten t_1, t_2 in Stunden sei $t_1 \sim t_2 :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : t_1 = t_2 + 24z$. Bitte berechnen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

- $19 \sim 7$
- $3 \sim 15$
- $4 \sim 28$
- $24 \sim 47$
- $-5 \sim 19$

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.11)

1. Für $S = [-3, 3] \subset \mathbb{R}$ zeichne $G := \{(x, y) \in S^2 \mid y = -x\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
2. $\leq$ in $\mathbb{R}^2$: $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \leq (x', y') :\Longleftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$
   Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ folgende Mengen:
   - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \geq (-4, -3)\}$
   - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \leq (4, 3)\}$
   - $A \cap B$ und $A \cup B$

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
   - $(-4, -3)$ ist das kleinste Element von A, d.h. $\forall (x, y) \in A : (-4, -3) \leq (x, y)$
   - $(-4, 3) \leq (2, 0)$
   - $(-4, 3) \geq (2, 0)$

   Ist die folgende Implikation wahr? $(x, y) \not\leq (x', y') \Longrightarrow (x, y) \geq (x', y')$

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.12)

Bitte berechnen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1. $16 = 3 \mod 5$
2. $16 = -9 \mod 5$
3. $26 = 18 \mod 6$
4. $(36 + 22) = 2 \mod 7$

Aufgabe (1.13)

Bitte berechnen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1. $37 \mod 6 = 1$
2. $19 = 32(\mod 6)$
3. $(126 + 222) \mod 5 = 2$

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.14)

1. Stellen Sie die Kongruenzklasse $[7] \in \mathbb{Z}_8$ als Teilmenge der ganzen Zahlen (aufzählend oder beschreibend) dar.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_8$:
   2.1 $[1] + [7]$
   2.2 $[7] + [2]$
   2.3 $[6] + [5]$
   2.4 $[4] + [4]$
   2.5 $[2] + [7]$

Aufgabe (1.15)

Bitte bestätigen oder widerlegen:

1. $\mathrm{ggT}(8, 15) = 2$
2. $\mathrm{ggT}(34, 10) = 2$
3. $\mathrm{ggT}(12, 18) = 3$

Aufgabe (1.16)

Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\mathrm{ggT}(10, 38)$$

Aufgabe (1.17)

Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_8$:

1. $[1] \cdot [7]$
2. $[7] \cdot [2]$
3. $[4] \cdot [6]$
4. $[3] \cdot [3]$
5. $[2] \cdot [5]$

Aufgabe (1.18)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- $8^k = 1 (\text{mod } 7) \; \forall k \in \mathbb{N}$
- $12 \cdot 14 = 3 (\mod 11)$
- $135^5 \mod 11 = 1 \mod 11$

Aufgabe (1.19)

Erstellen Sie die Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}_{12}$.

Klausurvorbereitung – Teil 1: Berechnungen und Algorithmen

Aufgabe (1.20)

1. Bestimmen Sie die additiven Inversen der Elemente von $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$.
2. Berechnen Sie: $(26 \cdot 9 + 43 \cdot 80) \mod 6$
3. Berechnen Sie: $11^4 \mod 9$
4. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_6$: $[3]^{15} \cdot [2]$

Aufgabe (1.21)

Welches $x \in \mathbb{Z}_{11}$ erfüllt diese Gleichung?

$$[2] \cdot x = [5]$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das multiplikative Inverse y von [2] und mulitplizieren Sie dann die Gleichung mit y.

Aufgabe (1.22)

Lösen Sie die Gleichung in $\mathbb{Z}_7$:

$$[2] \cdot [x] + [5] = [4]$$

Hinweis: Analog zu den Grundrechenarten in $\mathbb{R}$ können Sie in $\mathbb{Z}_7$ durch Addition von additiven Inversen (entsprechend der Subtraktion) und anschließende Multiplikation mit multiplikativen Inversen (entsprechend der Division) die Variable $[x]$ auf der linken Seite der Gleichung isolieren und damit berechnen.

Aufgabe (1.23)

Graphentheorie, Übungsaufgabe (7.1): Berechnung des Grades von Knoten

Aufgabe (1.24)

Graphentheorie, Übungsaufgabe (7.2): Berechnung von Adjazenz-Matrizen und Graphen

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.1)

1. Für welche Zahlen $p \in \mathbb{N}$ ist die Konjunktion von (p ist eine Primzahl) und $(30 < p < 40)$ wahr?
2. Nennen Sie bitte zwei Beispiele von Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Disjunktion $(-x \geq -2) \vee (x \leq 0)$ wahr ist. Beschreiben Sie die Menge aller reellen Zahlen, die diese Disjunktion erfüllen, und skizzieren Sie das Ergebnis auf der reellen Zahlenachse.
3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Konjunktion $(x < 2) \wedge (x > -1)$ gültig?
4. Geben Sie die ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ an, für die gilt: $(z \geq 2) \oplus (z \leq 4)$

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.2)

Sind die folgenden Äquivalenzen wahr?

1. Für $p \in \mathbb{N}$ gilt: $((p \text{ prim}) \wedge (30 < p < 35)) \Leftrightarrow (p = 31)$
2. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt: $(x \cdot y = 15) \Leftrightarrow ((x = 3 \wedge y = 5) \vee (x = -3 \wedge y = -5))$

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.3)

Wahrheit von Implikationen:

1. Ist folgende Aussage wahr?

   $$(0 = 1) \implies \text{“Gestern lag die Höchsttemperatur in Heidelberg über 20 Grad Celsius“}$$

2. Ist (“Am 29.01.2021 hat es geregnet“ $\implies$ “Im Januar 2021 hat es jeden Tag geregnet“) wahr? Ist die Umkehrung wahr?

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.4)

1. Wenn in einem Elektrofahrzeug das Bauteil e_1 den Zustand "A" hat, dann hat das Bauteil e_2 den Zustand "1".
   - e_2 hat den Zustand "0".
   - Was können Sie über den Zustand von e_1 schließen?
2. Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Aussage p:

$$\text{Wenn } -2 \leq x \text{ und } x < 3 \text{ dann folgt } x \leq 4.$$

   Die Aussage p hat die Form $a \Rightarrow b$ mit Aussagen a und b. Bilden Sie den Umkehrschluss (auch Kontraposition genannt), d.h. die zu p äquivalente Aussage $\neg b \Rightarrow \neg a$ (alternative Schreibweise: $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$).

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.5)

Beweisen Sie diese Aussagen, indem Sie für jedes (bzw. ein) Element der Teilmengen nachweisen, dass es (nicht) in der größeren Menge enthalten ist. Bei echten Teilmengen nennen Sie ein Element der Obermenge, das nicht in der Teilmenge enthalten ist.

1. $\{m, n\} \subseteq \{k, l, m, n\}$
2. $\{m, n\} \not\subseteq \{k, l, m\}$
3. $\{1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 4, 5\}$

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.6)

In einer Studie zum Sport von Studierenden wird die Häufigkeit der sportlichen Aktivitäten nach folgendem Schema in Clustern zusammengefasst:

Level	Anzahl sportlicher Aktivitäten pro Monat
Level 1	$0 - 4$
Level 2	$5 - 8$
Level 3	$9 - 16$
Level 4	≥ 17

Aufgabe (2.6), Teil 2

Eine Stichprobe (sample) S von 12 Studierenden enthält folgende Werte:

Studierende*r	Anzahl sportlicher Aktivitäten pro Monat
1	25
2	9
3	1
4	27
5	0
6	10
7	18
8	15
9	11
10	13
11	3
12	16

Aufgabe (2.6), Teil 3

Für eine statistische Auswertung werden die Werte von S entsprechend der o.g. Einteilung der Häufigkeiten mit einer Äquivalenzrelation $A \subseteq S \times S$ zusammengefasst:

$$A := \{(x, y) \in S \times S \mid x \text{ und } y \text{ haben denselben Häufigkeits-Level sportlicher Aktivitäten}\}$$

Für ein Element $x \in S$ wird die Äquivalenzklasse von x bzgl. A mit $[x]$ bezeichnet.

1. Erstellen Sie eine Tabelle mit den Äquivalenzklassen von A und den Nummern der zugehörigen Studierenden nach folgendem Schema:

Level	Studierende*r (Nr.)
...	...
z.B. Level 3	z.B. 10
...	...

2. Welche Studierenden sind in der Äquivalenzklasse von Nr. 10?
3. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es?

Teil 2: Textaufgaben und Beweise

Aufgabe (2.7)

Begründen Sie, dass für $B_2 = \{0, 1\}$ gilt:

$$(B_2)^5 \neq (B_2)^3 \times (B_2)^2$$