DHBW
Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Mannheim

Modul: Mathematik 1

Lehreinheit: Logik und Algebra

Dozent: Dr. Wolfgang Weiss (w.square.dhbw@gmail.com)

Klausur: Vorbereitung mit Übungsaufgaben und Musterlösungen in Lerngruppen und in der Vorlesung
Erlaubte Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen, Taschenrechner

Logik und Algebra Übungen: Elementare Logik

Aufgabe (1.1)

1. Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Und welche Aussagen sind wahr?
2. Wie kann ggf. überprüft werden, ob sie wahr oder falsch sind?

- Wellington ist die Hauptstadt von Neuseeland.
- Person B hat mehr als 50.000 Follower auf Instagram.
- Die Zahl 5 ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) von 50 und 60.
- Luft-Temperatur an Wetterstation X im Odenwald, 28.01.2021, 7:00 Uhr: 2°C
- Seit den 1970er Jahren findet ein globaler Klimawandel statt (z.B. im statistischen Mittel höhere Wintertemperaturen in Mitteleuropa)

Lösung (1.1)

- Wellington ist die Hauptstadt von Neuseeland.
  Aussage ist wahr, kann mit Atlas oder Wikipedia überprüft werden.
- Person B hat mehr als 50.000 Follower auf Instagram.
  Aussage, deren Wahrheitswert mit den Kontodaten von Instagram überprüfbar ist.
- Die Zahl 5 ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) von 50 und 60.
  Falsche Aussage, da 10 ein größerer gemeinsamer Teiler von 50 und 60 ist.
- Luft-Temperatur an Wetterstation X im Odenwald, 28.01.2021, 7:00 Uhr CET: 2°C
  Satz kann mit Hilfe der Protokolldaten der Wetterstation X überprüft werden und ist deshalb eine Aussage.
- Seit den 1970er Jahren findet ein globaler Klimawandel statt (z.B. im statistischen Mittel höhere Wintertemperaturen in Mitteleuropa).
  Aussage, die mit einer geographischen Definition von Klimawandel (mit Aussagen zur statistischen Verteilung von Temperatur- Niederschlagsmengen in verschiedenen Weltregionen) und Daten von Wetterstationen in diesen Regionen überprüft werden kann.

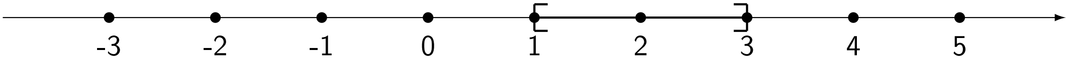
Logik und Algebra Übungen: Elementare Logik

Aufgabe (1.2)

1. Für welche Zahlen $p \in \mathbb{N}$ ist die Konjunktion von (p ist eine Primzahl) und $(10 < p < 15)$ wahr?
2. Nennen Sie bitte zwei Beispiele von Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Konjunktion $(-x \leq -1) \wedge (x \leq 3)$ wahr ist. Beschreiben Sie die Menge aller reellen Zahlen, die diese Konjunktion erfüllen, und skizzieren Sie das Ergebnis auf der reellen Zahlenachse.
3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Disjunktion $(x \leq 1) \vee (x > 0)$ gültig?
4. Geben Sie die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ an, für die gilt: $(n \geq 5) \oplus (n \leq 5)$

Lösung (1.2)

1. Für $p \in \mathbb{N}$ ist die Konjunktion $(p \text{ prim}) \wedge (10 < p < 15)$ gleichbedeutend mit
$$p = 11 \vee p = 13,$$
da nur ungerade Zahlen prim sind und sowohl 11 als auch 13 Primzahlen sind.
2. $(-x \leq -1) \wedge (x \leq 3)$: Beispiele sind 2 und 3, Ergebnismenge ist $[1, 3]$



3. Die Disjunktion $(x \leq 1) \vee (x > 0)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig, d.h. die Ergebnismenge ist $\mathbb{R}$.
4. $(n \geq 5) \oplus (n \leq 5)$ gilt für alle natürlichen Zahlen $n \neq 5$, da die Bedingungen $n \geq 5$ und $n \leq 5$ nicht gleichzeitig wahr sein dürfen, und da auf alle von 5 verschiedenen Zahlen genau eine der beiden Aussagen zutrifft.

Logik und Algebra Übungen: Elementare Logik

Aufgabe (1.3)

Beweisen Sie das Distributivgesetz für Aussagen mit Wahrheitswertetabellen:

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Aufgabe (1.4)

Sind die folgenden Äquivalenzen wahr?

1. Für $p \in \mathbb{N}$ gilt: $((p \text{ prim}) \wedge (10 < p < 15)) \Leftrightarrow (p = 13)$
2. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a \cdot b = 6) \Leftrightarrow ((a = 2 \wedge b = 3) \vee (a = 3 \wedge b = 2))$

Lösung (1.3)

Distributivgesetz: $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Die Wahrheitswerte der Spalten 5 und 8 stimmen überein, d.h. das Distributivgesetz ist gültig.

Lösung (1.4)

1. Die Aussage $((p \text{ prim}) \wedge (10 < p < 15)) \Leftrightarrow (p = 13)$ ist falsch:
   - Die rechte Seite ist hinreichend für die linke Seite (d.h., die Implikation von rechts nach links ist wahr), da für $p = 13$ die linke Aussage gilt.
   - Umgekehrt ist die rechte Seite aber nicht notwendig für die linke Seite (d.h., die Implikation von links nach rechts ist falsch): Gegenbeispiel $p = 11$.
2. Diese Aussage ist falsch: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist

$$(a \cdot b = 6) \Leftrightarrow ((a = 2 \wedge b = 3) \vee (a = 3 \wedge b = 2))$$

   - Die rechte Seite ist hinreichend für die linke Seite (d.h., die Implikation von rechts nach links ist wahr), da für die Paare $(a, b) = (2, 3)$ bzw. $(a', b') = (3, 2)$ die linke Aussage gilt.
   - Umgekehrt ist die rechte Seite aber nicht notwendig für die linke Seite (d.h., die Implikation von links nach rechts ist falsch): Gegenbeispiel $a = -2, b = -3$.

Aufgabe (1.5)

Wahrheit von Implikationen:

1. Ist (“Die Erde ist eine Scheibe“ $\Longrightarrow$ “Heute hat es in Mannheim geregnet“) wahr?
2. Ist (“Im Januar 2021 hat es jeden Tag geregnet“ $\Longrightarrow$ “Am 29.01.2021 hat es geregnet“) wahr? Ist die Umkehrung wahr?

Aufgabe (1.6)

Beweisen Sie, dass die Implikation transitiv ist, d.h. für Aussagen a, b, c gilt:

$$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

Lösung (1.5)

1. Ist (“Die Erde ist eine Scheibe“ $\Longrightarrow$ “Heute hat es in Mannheim geregnet“) wahr?
   Bei hinreichendem Kontext (Datum) kann der Satz “Heute hat es in Mannheim geregnet“ als Aussage betrachtet werden, die wahr oder falsch sein kann, da sie mit Daten von Wetterstationen verifiziert bzw. falsifiziert werden kann. Damit ist die Implikation wahr, da die Prämisse “Die Erde ist eine Scheibe“ stets falsch ist.
2. Ist (“Im Januar 2021 hat es jeden Tag geregnet“ $\Longrightarrow$ “Am 29.01.2021 hat es geregnet“) wahr? Ist die Umkehrung wahr?
   Mit hinreichender Kontextinformation ist die Implikation wahr und die Umkehrung (ohne Negationen) ist falsch.

Lösung (1.6)

Zu zeigen: $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Mit allen Wahrheitswerten in der letzten Spalte gleich 1 ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe (1.7)

Erläutern Sie die direkten und indirekten Beweise von Lemma (1.20). Veranschaulichen Sie dabei die Aussagen im Lemma und in den Beweisen mit konkreten Zahlenbeispielen (z.B. für die Aussage "m, n ungerade" mit den ganzen Zahlen $m = 11, n = 7$ und für "n gerade" mit $n = 6$).

Lösung (1.7)

Nach Lemma (1.20) gelten für $m, n \in \mathbb{Z}$:

1. Wenn m und n ungerade sind, dann ist auch mn ungerade.
2. Wenn n^2 ungerade ist, dann ist n ungerade.

Erläuterung der Beweise mit Zahlenbeispielen:

1. m, n ungerade $\Rightarrow$ Es existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2a + 1$ und $n = 2b + 1$, also

$$mn = (2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2\underbrace{(2ab + a + b)}_{c} + 1.$$

   Folglich ist für $c := 2ab + a + b$ das Produkt $mn = 2c + 1$ ungerade.
   Z.B. $m = 11, n = 7 : m = 2 \cdot 5 + 1, n = 2 \cdot 3 + 1, mn = 2(2 \cdot 5 \cdot 3 + 5 + 3) + 1 = 77$

2. Indirekter Beweis: Annahme, dass n gerade ist. Dann existiert $a \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2a$ und $n^2 = 4a^2 = 2(2a^2)$, d.h. die Zahl n^2 ist gerade. Also ist die Implikation (n ist gerade $\Rightarrow$ n^2 gerade) wahr und damit im Umkehrschluss die Behauptung.
   Z.B. $n = 6 = 2 \cdot 3 . n^2 = 2(2 \cdot 3^2) = 2(2 \cdot 9) = 2 \cdot 18 = 36$

Logik und Algebra Übungen: Elementare Logik

Aufgabe (1.8)

Gegeben die Aussageformen $p_1(x) : x < 3$ und $p_2(x) : x^2 \leq 9$.

- Bestimme die Negationen $\neg p_i, (i = 1, 2)$.
- Bestimme für die Variablenwerte $x = 3$ und $x = -3$ die Aussagen $p_i(3)$ und $p_i(-3)$ $(i = 1, 2)$. Welche dieser Aussagen sind wahr?
- Bestimme die Konjunktion $p_1 \wedge p_2$.
- Für welche $x \in \mathbb{Z}$ ist $(p_1 \wedge p_2)(x)$ wahr?

Lösung (1.8)

Gegeben die Aussageformen $p_1(x) : x < 3$ und $p_2(x) : x^2 \leq 9$.

- Negationen: $\neg p_1(x) : x \geq 3$ und $\neg p_2(x) : x^2 > 9$.
- Aussagen mit Variablenwerten $x = 3$ und $x = -3$:
  $p_1(3) : 3 < 3$ (nicht wahr)
  $p_1(-3) : -3 < 3$ (wahr)
  $p_2(3) : 3^2 \leq 9$ (wahr)
  $p_2(-3) : (-3)^2 \leq 9$ (wahr)
- Konjunktion: $p_1 \wedge p_2 : (x < 3) \wedge (x^2 \leq 9)$.
- $(p_1 \wedge p_2)(x)$ ist wahr für $x \in \{2, 1, 0, -1, -2, -3\}$.

Aufgabe (1.9)

1. Ist die folgende Aussage wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.
   "(Alle Zahlen in $\mathbb{Z}$, die sich durch 4 teilen lassen, lassen sich durch 2 teilen) oder (alle Zahlen in $\mathbb{Z}$, die sich durch 2 teilen lassen, lassen sich durch 4 teilen)"
2. Wie lautet die Negation der Aussage p? Formen Sie um, so daß keine explizite Negation mehr vorkommt:
   $$p: \ \forall a \in \mathbb{Z} \ \exists b \in \mathbb{Z} : a + b = 1$$
   Ist die Aussage p oder ihre Negation $\neg p$ wahr? Ist es möglich, ein Beispiel bzw. Gegenbeispiel für $\neg p$ anzugeben?
3. Wie lautet die Negation folgender Aussage?
   $$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Lösung (1.9)

1. Mit den Abkürzungen
   - a : Alle Zahlen in $\mathbb{Z}$, die sich durch 4 teilen lassen, lassen sich durch 2 teilen,
   - b : Alle Zahlen in $\mathbb{Z}$, die sich durch 2 teilen lassen, lassen sich durch 4 teilen,

   ist die gesuchte Aussage von der Form $a \vee b$.
   - a ist wahr, da für jede durch 4 teilbare Zahl $z \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $z = d \cdot 4$ und deshalb gilt $z = d \cdot 4 = d \cdot (2 \cdot 2) = (d \cdot 2) \cdot 2$. Damit ist 2 ein Teiler von z und a bewiesen.
   - Die Aussage b ist nicht wahr, z.B. ist 6 durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

   Wegen der Wahrheit von a ist auch $a \vee b$ wahr, d.h. auf die Wahrheit der Aussage b kommt es hier nicht an.

Lösung (1.9)

2. Die Negation der Aussage $p:\ \forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} : a + b = 1$ ist

$$\neg p : \exists a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z} : a + b \neq 1$$

Die Aussage p ist wahr, setze z.B. $b := 1 - a$. Damit ist die Negation $\neg p$ falsch und ein Beispiel ist nicht möglich. Für $\neg p$ läßt sich auch kein Gegenbeispiel angeben, da es eine Existenzaussage ist.

3. Schrittweise Umwandlung der Aussage durch "Negation in die Klammer ziehen":

$$\neg\left(\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon\right) \equiv \left(\exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon\right)$$

Logik und Algebra Übungen: Elementare Logik

Aufgabe (1.10)

1. Wenn in einer Schaltung das Element x_1 den Zustand "0" hat, dann hat das Element x_2 den Zustand "1".
   - x_2 hat den Zustand "0".
   - Was können Sie über den Zustand von x_1 schließen?
2. Sei x $\in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Aussage p:

$$\text{Wenn } -2 < x \text{ und } x \leq 2 \text{ dann folgt } x \leq 5.$$

   Die Aussage p hat die Form $a \Rightarrow b$ mit Aussagen a und b. Bilden Sie den Umkehrschluss (auch Kontraposition genannt), d.h. die zu p äquivalente Aussage $\neg b \Rightarrow \neg a$ (alternative Schreibweise: $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$).

Lösung (1.10)

1. Wenn in einer Schaltung das Element x_1 den Zustand "0" hat, dann hat das Element x_2 den Zustand "1".
   - x_2 hat den Zustand "0".
   - Dann kann das Element x_1 nicht den Zustand "0" haben (Kontraposition). Falls nur zwei Zustände möglich sind, hat x_1 den Zustand "1".
2. Mit den Aussagen $a : ((-2 < x) \wedge (x \leq 2))$ und $b : (x \leq 5)$ hat p die Form

$$a \Rightarrow b \equiv ((-2 < x) \wedge (x \leq 2)) \Rightarrow (x \leq 5)$$

   Der Umkehrschluss lautet:

$$\begin{aligned}
\overline{b} \Rightarrow \overline{a} \quad &\equiv \quad \overline{(x \leq 5)} \Rightarrow \overline{((-2 < x) \wedge (x \leq 2))}, \text{ nach Definition von } a, b \\
&\equiv \quad \overline{(x \leq 5)} \Rightarrow (\overline{(-2 < x)} \vee \overline{(x \leq 2)}), \text{ nach der De Morgan'schen Regel} \\
&\equiv \quad x > 5 \Rightarrow ((-2 \geq x) \vee (x > 2)), \text{ Umdrehen der Relationen } <, \leq
\end{aligned}$$

Aufgabe (1.11)

1. Bestimmen Sie die Konjunktion von “Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ teilt die Zahlen 30 und 42“ und “Jede Zahl, die 30 und 42 teilt, ist kleiner gleich d“.
2. Für welche Zahl $d \in \mathbb{Z}$ ist diese Konjunktion wahr?
3. Wie wird die Eigenschaft einer Zahl d in Abhängigkeit der Zahlen 30 und 42 genannt, die durch die Konjunktion in 1. beschrieben ist?

Lösung (1.11)

1. Konjunktion von "Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ teilt die Zahlen 30 und 42" und "Jede Zahl, die 30 und 42 teilt, ist kleiner gleich d":

$$((d \mid 30) \wedge (d \mid 42)) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} : (x \mid 30) \wedge (x \mid 42) \Rightarrow x \leq d)$$

2. Für $d = 6$ ist diese Konjunktion wahr.
3. Größter gemeinsamer Teiler: $d = \operatorname{ggT}(30, 42)$

Logik und Algebra Übungen: Mengenlehre

Aufgabe (2.1)

Beweisen Sie diese Aussagen, indem Sie für jedes (bzw. ein) Element der Teilmengen nachweisen, dass es (nicht) in der größeren Menge enthalten ist. Bei echten Teilmengen nennen Sie ein Element der Obermenge, das nicht in der Teilmenge enthalten ist.

1. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
2. $\{a, b\} \nsubseteq \{a, c, d\}$
3. $\{1, 2, 5\} \subset \mathbb{N}$:
4. Für $X = \{0, 1\}$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
5. Was ist $\mathcal{P}(\emptyset)$?
6. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (d.h., $\subseteq$ ist transitiv):
   Bitte Skizze mit Venn-Diagramm erstellen, um die Transitivität zu illustrieren.

Lösung (2.1)

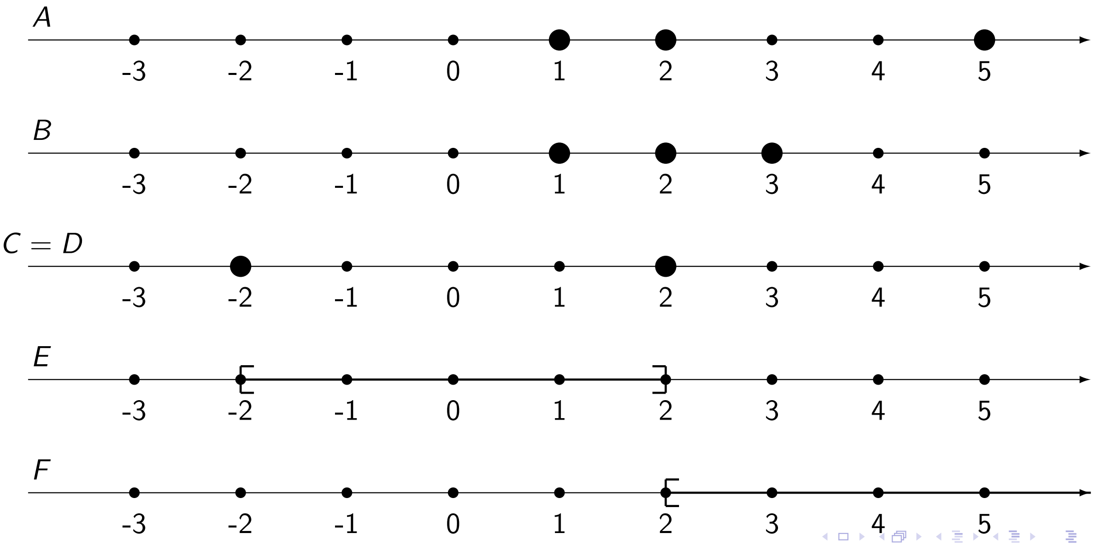
1. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$:
   Sei $x \in \{a, b\}$. Für $x = a$ und für $x = b$ gilt auch $x \in \{a, b, c\}$, damit ist die Teilmengenrelation bewiesen. ✓
2. $\{a, b\} \nsubseteq \{a, c, d\}$:
   $b \in \{a, b\}$ aber $b \notin \{a, c, d\}$. ✓
3. $\{1, 2, 5\} \subset \mathbb{N}$:
   Für alle $x \in \{1, 2, 5\}$ ist $x \in \mathbb{N}$, deshalb gilt $\{1, 2, 5\} \subseteq \mathbb{N}$. Aber $6 \in \mathbb{N}$ und $6 \notin \{1, 2, 5\}$, d.h. $\{1, 2, 5\} \neq \mathbb{N}$ und es liegt eine echte Teilmenge vor. ✓
4. Für $X = \{0, 1\}$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$:
   Die Mengen $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ sind alle möglichen Teilmengen von $\{0, 1\}$. ✓
5. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Zu beachten: $\mathcal{P}(\emptyset)$ besteht aus einem Element.
6. Skizze mit Venn-Diagramm für die Transitivität: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Aufgabe (2.2)

Skizzieren Sie folgende Mengen auf der reellen Zahlengerade:

1. $A = \{1, 2, 5\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$
4. $D = \{2, -2\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 \leq x) \wedge (x \leq 2)\} = [-2, 2]$
6. $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, \infty)$

Lösung (2.2)


A
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
B
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
C = D
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
E
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
F
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

Aufgabe (2.3)

Beweisen Sie folgende Aussagen über die Gleichheit von Mengen, indem Sie jeweils nachweisen, dass die Menge auf der linken Seite der Gleichung eine Teilmenge der Menge auf der rechten Seite ist und umgekehrt.

1. $\{1, 2, 5\} \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 5\}$
2. $\{1, 2, 5\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$
3. $\{1, 2, 5\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
4. $\{a, b, z\} \backslash \{a, x\} = \{b, z\}$

Lösung (2.3)

1. $\{1,2,5\} \cap \mathbb{N} = \{1,2,5\}$
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cap \mathbb{N} \subseteq \{1,2,5\}$
Nach Definition des Durchschnitts von Mengen ist jedes Element von $\{1,2,5\} \cap \mathbb{N}$ in $\{1,2,5\}$ enthalten (und in $\mathbb{N}$). Damit ist die Teilmengenbeziehung bewiesen. ✓
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cap \mathbb{N} \supseteq \{1,2,5\}$
Nach Definition ist jedes Element von $\{1,2,5\}$ eine natürliche Zahl und nach Definition des Durchschnitts von Mengen in $\{1,2,5\} \cap \mathbb{N}$ enthalten. ✓

2. $\{1,2,5\} \cup \{1,6\} = \{1,2,5,6\}$
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cup \{1,6\} \subseteq \{1,2,5,6\}$
Nach Definition der Vereinigung von Mengen ist jedes Element der linken Menge in $\{1,2,5\}$ oder $\{1,6\}$ und damit in $\{1,2,5,6\}$. ✓
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cup \{1,6\} \supseteq \{1,2,5,6\}$
Die Zahl 6 ist in $\{1,6\}$ enthalten und $1,2,5$ sind in $\{1,2,5\}$, d.h. jedes Element der rechten Seite ist in der linken Seite. ✓

Lösung (2.3)

3. $\{1,2,5\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cup \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$
Jedes Element von $\{1,2,5\}$ ist eine natürliche Zahl, d.h. in $\mathbb{N}$ enthalten. Nach Definition der Vereinigung ist jedes Element der linken Menge in $\mathbb{N}$. ✓
Zu zeigen: $\{1,2,5\} \cup \mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}$
Jedes Element der rechten Seite ist in $\mathbb{N}$ und damit nach Definition der Vereinigung in der linken Menge. ✓

4. $\{a,b,z\} \backslash \{a,x\} = \{b,z\}$
Zu zeigen: $\{a,b,z\} \backslash \{a,x\} \subseteq \{b,z\}$
Jedes Element der linken Seite ist ungleich a, da es nicht in $\{a,x\}$ enthalten ist. Damit kommen nur b und z in Frage. ✓
Zu zeigen: $\{a,b,z\} \backslash \{a,x\} \supseteq \{b,z\}$
Jedes Element der rechten Seite ist gleich b oder z. In beiden Fällen ist es in $\{a,b,z\}$, aber nicht in $\{a,x\}$ enthalten und damit in der linken Seite. ✓

Logik und Algebra Übungen: Mengenlehre

Aufgabe (2.4)

Begründen Sie die folgenden Gesetze für Mengenoperationen:

Idempotenzgesetz $A \cap A = A = A \cup A$

De Morgan‘sche Regel $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Assoziativgesetz $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Lösung (2.4)

- $A \cap A = A$:
  Zu zeigen: $A \cap A \subseteq A$
  Sei $x \in A \cap A$. Dann gilt nach Definition der Schnittmenge $(x \in A) \wedge (x \in A)$, folglich $x \in A$.
  Zu zeigen: $A \cap A \supseteq A$
  Sei $y \in A$. Dann gilt auch $(y \in A) \wedge (y \in A)$, demnach $y \in A \cap A$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:
  Nach Definition des Komplements gelten folgende Äquivalenzen, die die Behauptung beweisen:

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cap B} \quad & \Leftrightarrow \quad \neg(x \in A \cap B) \\
& \Leftrightarrow \quad \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) \\
& \Leftrightarrow \quad \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \text{ De Morgan‘sche Regeln für die Aussagenlogik} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (\overline{A} \cup \overline{B})
\end{aligned}
$$

Lösung (2.4)

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

  Zu zeigen: $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$
  Sei $x \in A \cup (B \cup C)$. Dann gilt nach Definition der Vereinigungsmenge $(x \in A) \vee (x \in B \cup C)$ bzw. $(x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$. Daraus folgt wegen des Assoziativgesetzes für das logische Oder (Logikgesetze, Satz 1.12): $((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C)$, d.h. nach Definition der Vereinigungsmenge $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$ und schließlich $x \in (A \cup B) \cup C$.

  Zu zeigen: $A \cup (B \cup C) \supseteq (A \cup B) \cup C$
  Sei $x \in (A \cup B) \cup C$. Dann gilt nach Definition der Vereinigungsmenge $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$ bzw. $((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C)$. Daraus folgt wegen des Assoziativgesetzes für das logische Oder: $(x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C))$, d.h. nach Definition der Vereinigungsmenge $(x \in A) \vee (x \in B \cup C)$ und schließlich $x \in A \cup (B \cup C)$.

Logik und Algebra Übungen: Mengenlehre

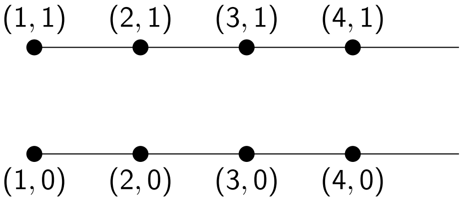
Aufgabe (2.5)

Berechnen Sie cartesische Produkte:

1. $\{a, b\} \times \{u, v\}$
2. $(\{a, b\} \times \{u, v\}) \times \{0, 1\}$
3. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ und $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ (mit Skizze)

Lösung (2.5)

1. $\{a, b\} \times \{u, v\} = \{(a, u), (a, v), (b, u), (b, v)\}$
2. $(\{a, b\} \times \{u, v\}) \times \{0, 1\} =$
   $\{((a, u), 0), ((a, v), 0), ((b, u), 0), ((b, v), 0), ((a, u), 1), ((a, v), 1), ((b, u), 1), ((b, v), 1)\}$
3. $\mathbb{N} \times \{0, 1\} = \{(n, k) \mid n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1\}\}$
   $\mathbb{R} \times \{0, 1\} = \{(x, k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \{0, 1\}\}$



Logik und Algebra Übungen: Mengenlehre

Aufgabe (2.6)

Bitte berechnen Sie die folgenden Operationen und Aussagen für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Der Betrag von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist definiert durch $|(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Addition von Vektoren: $(-1, 3) + (2, 0) \neq (1, 2)$
2. Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer Zahl: $2(-2, 1) = (-4, 2)$
3. Betrag (Länge) eines Vektors: $|(-1, 3)| = \sqrt{10}$
4. Einheitskreis:

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| = 1\}$$

5. Vergleich von Vektoren (bitte mit Skizze):
   - $(-3, -3) \leq (2, 0)$
   - $(1, 3) \not\leq (2, 0)$ und $(1, 3) \not\geq (2, 0)$, d.h. $(1, 3)$ und $(2, 0)$ sind unvergleichbar.

Lösung (2.6)

1. Addition: $(-1,3)+(2,0)=(-1+2,3+0)=(1,3)\neq(1,2)$
2. Skalarmultiplikation: $2(-2,1)=(2\cdot(-2),2\cdot 1)=(-4,2)$
3. Betrag: $|(-1,3)|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$
4. Einheitskreis:

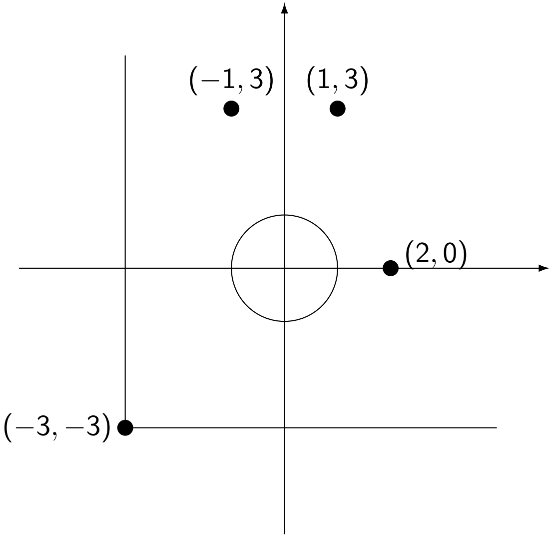
$$\left|\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

   Daraus folgt:

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|(x,y)|=1\}\checkmark$$

5. Vergleich: $-3\leq 2\wedge -3\leq 0\Rightarrow(-3,-3)\leq(2,0)$. ✓
   $3\not\leq 0\Rightarrow(1,3)\not\leq(2,0)$ und $1\not\geq 2\Rightarrow(1,3)\not\geq(2,0)$ ✓

Vektoren in der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$



Aufgabe (2.7)

1. Bitte skizzieren Sie die folgenden Menge in $\mathbb{R}^2$ (auch **Polyeder** genannt):

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + 4y \leq 16, x + y \leq 7, 2x - y \leq 8\}$$

   Bestimmen Sie dafür die Gleichungen der Geraden, die das Polyeder P begrenzen, und skizzieren Sie die Graphen dieser Geraden.

2. Bitte begründen Sie, ob der Punkt $(1, 1)$ zu P gehört oder nicht.
3. Bitte begründen Sie, ob der Punkt $(6, 2)$ zu P gehört oder nicht.

Lösung (2.7), 1/3

1. Gegeben: $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + 4y \leq 16, x + y \leq 7, 2x - y \leq 8\}$.
Folgende Geraden begrenzen P (Skizze s.u.):

- Die Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$.
- $x + 4y = 16 \Leftrightarrow f(x) := y = \frac{-1}{4}x + 4$
- $x + y = 7 \Leftrightarrow g(x) := y = -x + 7$
- $2x - y = 8 \Leftrightarrow h(x) := y = 2x - 8$

Für die Elemente von P gilt nach Definition, dass sie jeweils auf einer Seite dieser Geraden liegen, da statt des Gleichheitszeichens $\leq$ erfüllt ist. Deshalb ist P wie in der Skizze dargestellt der Durchschnitt der Halbebenen, die jeweils auf einer Seite der Geraden liegen, d.h. P ist die von den Geraden eingeschlossene Fläche.

Lösung (2.7), 2/3

2. Nach Skizze gehört der Punkt $(1, 1)$ zu P. Für einen rechnerischen Nachweis wird die Gültigkeit aller Ungleichungen nachgewiesen:

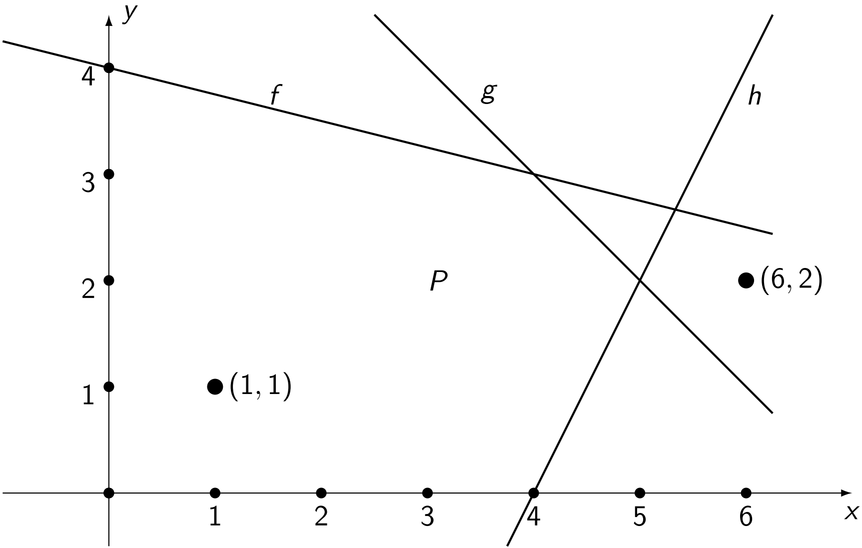
$$1 \geq 0, 1 \geq 0, 1 + 4 \cdot 1 = 5 \leq 16, 1 + 1 = 2 \leq 7, 2 \cdot 1 - 1 = 1 \leq 8$$

3. Nach Skizze gehört der Punkt $(6, 2)$ nicht zu P. Für einen rechnerischen Nachweis reicht es nachzuweisen, dass eine Ungleichung nicht erfüllt ist:

$$6 + 2 = 8 \not\leq 7$$

In anderen Worten: $(6, 2)$ liegt auf der anderen Seite der Geraden g. Statt g könnte man auch h verwenden, da $(6, 2)$ auf der anderen Seite der Geraden h liegt.

Lösung (2.7), 3/3



Logik und Algebra Übungen: Mengenlehre

Aufgabe (2.8)

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ gilt:

1. Für jedes $x \in X$ gibt es nur einen Bildpunkt $f(x)$.
2. Für $f(x) \in Y$ kann es mehrere Urbildpunkte geben.
3. Für $y \in Y$ muss es keinen Urbildpunkt geben.

- Nutzen Sie die erste Aussage, um zu beweisen:
  "Der Einheitskreis $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| = 1\}$ ist kein Graph einer Funktion."
- Verifizieren Sie Aussagen 2. und 3. für folgende Funktion durch Angabe von geeigneten Punkten $x, y \in \mathbb{R}$.
  1. $\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$
  2. Quadratische Funktionen, z.B. $g(x) = x^2 - 1$.

Lösung (2.8)

- Zu zeigen: “Der Einheitskreis U ist kein Graph einer Funktion.“
  Beweis: Für $x_0 = 0$ haben sowohl $(0, 1) \in U$ als auch $(0, -1) \in U$ die erste Koordinate x_0. Also ist U kein Funktionsgraph.
- 2. Für $f(x) \in Y$ kann es mehrere Urbildpunkte geben.
  3. Für $y \in Y$ muss es keinen Urbildpunkt geben.
  1. $f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$
     Zu 2: Für $0 = \lfloor 0 \rfloor$ gibt es mehrere Urbildpunkte außer 0, z.B. auch $x_1 = 0.5$.
     Zu 3: Für $y = 0.5$ gibt es keinen Urbildpunkt.
  2. Quadratische Funktionen, z.B. $g(x) = x^2 - 1$.
     Zu 2: Für $0 = g(1)$ gibt es außer $x_1 = 1$ auch den Urbildpunkt $x_2 = -1$.
     Zu 3: Für $y = -2$ gibt es keinen Urbildpunkt.

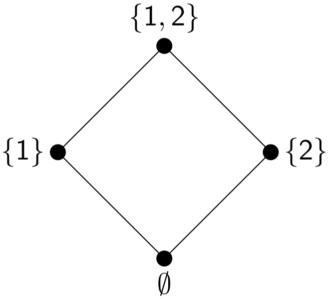
Logik und Algebra Übungen: Boolesche Algebren

Aufgabe (3.1)

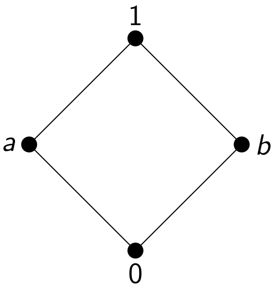
Berechnen Sie, ob diese Aussagen in der Boolesche Algebra $\mathcal{P}(\{1,2\}) = B_4$ wahr sind:

1. $a < 1$, $a \leq b$, $0 < b$, $0 < 0$, $1 \leq 1$
2. $a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$, $a \wedge 0 = a$, $0 \vee b = 1$, $0 \vee 1 = 1$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$



$B_4 = \{0, 1, a, b\}$



Lösung (3.1)

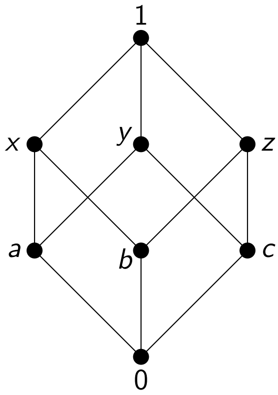
1. $a < 1$ (true),
   $a \leq b$ (false),
   $0 < b$ (true),
   $0 < 0$ (false),
   $1 \leq 1$ (true)
2. $a \vee b = 1$(true),
   $a \wedge b = 0$(true),
   $a \wedge 0 = a$(false),
   $0 \vee b = 1$(false),
   $0 \vee 1 = 1$(true)

Logik und Algebra Übungen: Boolesche Algebren

Aufgabe (3.2)

Berechnen Sie für die Boolesche Algebra $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = B_8$:

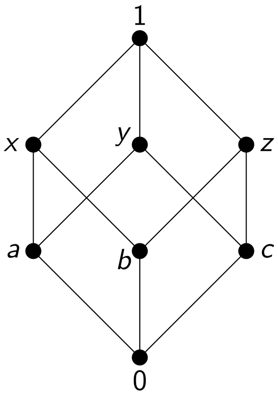
1. $a \vee b$ und $y \wedge z$
2. $a \vee (b \vee c)$ und $x \wedge (y \wedge z)$
3. $a \vee (y \wedge z)$ und $(a \wedge z) \vee (x \wedge z)$
4. $y \vee 0$ und $\overline{0}$
5. $\overline{a}$ und $\overline{y}$
6. $b \vee \overline{b}$ und $z \wedge \overline{z}$
7. $\overline{a \wedge y}$ und $\overline{a} \wedge \overline{c}$



Lösung (3.2)

Berechnung in $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = B_8$:

1. $a \vee b = x$ und $y \wedge z = c$
2. $a \vee (b \vee c) = a \vee z = 1$ und $x \wedge (y \wedge z) = x \wedge c = 0$
3. $a \vee (y \wedge z) = a \vee c = y$ und $(a \wedge z) \vee (x \wedge z) = 0 \vee b = b$
4. $y \vee 0 = y$ und $\overline{0} = 1$
5. $\overline{a} = z$ und $\overline{y} = b$
6. $b \vee \overline{b} = b \vee y = 1$ und $z \wedge \overline{z} = z \wedge a = 0$
7. $\overline{a \wedge y} = \overline{a} = z$ und $\overline{a} \wedge \overline{c} = z \wedge x = b$



Aufgabe (3.3, $>$ MVS)

In einer Booleschen Algebra B ist das Komplement jedes Elements $a \in B$ eindeutig bestimmt (s. Skript) und es gilt $\overline{\overline{a}} = a$.

1. Veranschaulichen Sie diese Aussage am Beispiel der Booleschen Algebren B_4 und B_8 (s.o.), indem Sie für folgende Elemente jeweils das einfache und das doppelte Komplement berechnen:

$$0, a, b \in B_4 \text{ und } 1, c, y \in B_8$$

2. Beweisen Sie die allgemeine Aussage und diskutieren Sie über den Beweis mit anderen Studierenden Ihrer Lerngruppe, indem Sie sich z.B. gegenseitig die Argumentation erklären.

Lösung (3.3)

- In B_4 gelten
$$\overline{0} = 1, \overline{a} = b, \overline{b} = a$$
und damit auch
$$\overline{\overline{0}} = 0, \overline{\overline{a}} = a, \overline{\overline{b}} = b.$$
- In B_8 gelten
$$\overline{1} = 0, \overline{c} = x, \overline{y} = b$$
und damit auch
$$\overline{\overline{1}} = 1, \overline{\overline{c}} = c, \overline{\overline{y}} = y.$$

Logik und Algebra Übungen: Boolesche Algebren

Aufgabe (3.4)

Welchen logischen Ausdrücken entsprechen die 2-stelligen Booleschen Funktionen f_6 und f_9?

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Lösung (3.4)

Logische Ausdrücke für die 2-stelligen Booleschen Funktionen f_6 und f_9:

$$\begin{aligned} f_6 &\equiv (x \oplus y) \text{ (exclusive or)} \\ f_9 &\equiv (x \Leftrightarrow y) \end{aligned}$$

Aufgabe (3.5)

Konstruieren Sie die Disjunktive Normalform für diese Funktion:

x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Lösung (3.5)

DNF

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \\ &= (x^0 y^0 z^0) \vee (x^0 y^1 z^1) \vee (x^1 y^0 z^0) \end{aligned}$$

Logik und Algebra Übungen: Boolesche Algebren

Aufgabe (3.6)

1. Konstruieren Sie die Disjunktive Normalform für diese Boolesche Funktion:

x	y	z	$h(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Vereinfachen Sie den Term von $h(x, y, z)$ mit dem Quine-McCluskey-Verfahren.
   2.1 Zusammenfassen von Konjunktionen mit Hilfe der Regeln für Boolesche Algebren
   2.2 Elimination von Konjunktionen, die für keine Kombination von Variablenwerten einen zusätzlichen Wert 1 erzeugen

Lösung (3.6)

DNF: $\underbrace{(x^0y^0z^1)}_{1.} \vee \underbrace{(x^0y^1z^0)}_{2.} \vee \underbrace{(x^0y^1z^1)}_{3.} \vee \underbrace{(x^1y^0z^0)}_{4.} \vee \underbrace{(x^1y^0z^1)}_{5.} \vee \underbrace{(x^1y^1z^1)}_{6.}$

Zusammenfassen von Konjunktionen

Nr. der zusammgefassten Konjunktionen	Konjunktion
1., 3.	x^0z^1
1., 5.	y^0z^1
2., 3.	x^0y^1
3., 6.	y^1z^1
4., 5.	x^1y^0
5., 6.	x^1z^1

Zwischenergebnis: $h(x, y, z) = x^0z^1 \vee y^0z^1 \vee x^0y^1 \vee y^1z^1 \vee x^1y^0 \vee x^1z^1$

Lösung (3.6)

Elimination von Konjunktionen, die keinen zusätzlichen Wert 1 erzeugen

x	y	z	$h(x,y,z)$	x^0z^1	y^0z^1	x^0y^1	y^1z^1	x^1y^0	x^1z^1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1

Es sind verschiedene Eliminationen möglich, die zu äquivalenten Ergebnissen führen:

$$
\begin{aligned}
h(x,y,z) &= x^0z^1 \vee x^0y^1 \vee y^1z^1 \vee x^1y^0 \\
&= y^0z^1 \vee x^0y^1 \vee y^1z^1 \vee x^1y^0 \\
&= y^0z^1 \vee x^0y^1 \vee x^1y^0 \vee x^1z^1
\end{aligned}
$$

Aufgabe (3.7, $>$ MVS)

Für den Nachweis von Satz (1.65) ist u.a. zu zeigen, dass $\{NOR\}$ funktional vollständig ist. Zeigen Sie bitte analog zum Beweis von (1.65), dass die Disjunktion sich mit NOR beschreiben läßt .

Lösung (3.7)

Analog zum Beweis von (1.65) wird folgende Notation verwendet:

$$NOR(x, y) := \overline{x \vee y}$$

Mit der De Morgan'schen Regel $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ läßt sich die Disjunktion mit *NOR* darstellen:

$$x \vee y = (x \vee y) \wedge 1 = \overline{(\overline{(x \vee y)} \vee \overline{1})} = \overline{(\overline{(x \vee y)} \vee 0)} = NOR(NOR(x, y), 0)$$

Zu beachten: Diese Argumentation kann auch aus dem Dualitätsprinzip für Boolesche Algebren hergeleitet werden.

Aufgabe (4.1)

1. Bitte vollziehen Sie in den Beispielen (1.67) und (1.69) alle Schritte der Beweise nach, die das Prinzip der vollständigen Induktion verwenden, und diskutieren diese Beispiele in Ihrer Lerngruppe.
2. Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Lösung (4.1)

Vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k = 1 = \frac{1}{2}1(1+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.
2. Induktionsschritt $n \to n+1$:
   Nach Induktionsannahme ist $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ wahr. Dann gilt auch:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \text{ Letzten Summanden abtrennen} \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \text{ Nach Induktionsannahme} \\
&= \frac{1}{2}(n(n+1) + 2(n+1)) \\
&= \frac{1}{2}((n+1)(n+2)) \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe (4.2)

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 + i} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Lösung (4.2)

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 + i} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Beweis:

1. Induktionsanfang: $n := 1$

   Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} \dfrac{1}{i^2 + i} = \dfrac{1}{1^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$

   Rechte Seite: $1 - \dfrac{1}{1+1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

   Linke Seite ist gleich rechte Seite der Gleichung ✓
2. Induktionsschritt $n \to n + 1$:

   Zu zeigen: Aussage gilt für $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{(n+1)} \frac{1}{i^2 + i} = 1 - \frac{1}{(n+1) + 1}$$

Lösung (4.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{(n+1)} \frac{1}{i^2+i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} && \text{Letzten Summanden abtrennen} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} && \text{Nach Induktionsannahme} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} \\
&= \frac{n+1-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{(n+1)+1} \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe (4.3, $>$ MVS)

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion:

$$\forall a \in \mathbb{N} \text{ mit a} > 1 : \text{(a-1) teilt } (a^n - 1)$$

Lösung (4.3)

Behauptung: $\forall a \in \mathbb{N}$ mit a > 1 : (a-1) teilt $(a^n - 1)$
Beweis:
Sei $a \in \mathbb{N} : a > 1$ beliebig aber fest.

1. Induktionsanfang: $n := 1$
   $a^1 - 1 = a - 1 = 1 \cdot (a - 1)$. ✓
2. Induktionsschritt $n \to n + 1$:
   Annahme für $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest) gilt (a-1) teilt $(a^n - 1)$
   Zu zeigen: Aussage gilt dann für n+1: (a-1) teilt $(a^{(n+1)} - 1)$
   Beweis:
   $(a^{(n+1)} - 1) = (a^{(n+1)} - a^n + a^n - 1) = a^n(a - 1) + (a^n - 1)$
   Nach Induktionsannahme gilt: (a-1) teilt $(a^n - 1)$. Damit teilt (a-1) beide Summanden und damit auch die Summe. ✓

Logik und Algebra Übungen: Relationen und Abbildungen

Aufgabe (5.1)

1. Begründen Sie, dass für $B_2 = \{0, 1\}$ gilt: ${B_2}^3 \neq B_2 \times {B_2}^2$
2. $S := \{s \mid s \text{ studiert an DHBW MA}\}$,
   $F := \{f \mid f \text{ Studiengang der DHBW MA}\}$,
   $R := \{(s, f) \in S \times F \mid s \text{ studiert Studiengang } f \text{ an DHBW MA}\}$,
   $T := \{(s, s') \in S^2 \mid s \text{ folgt } s' \text{ auf Twitter}\}$
   - Geben Sie mind. zwei Beispiele an für Studierende $s_1, s_2 \in S$ und zwei verschiedene (reale) Studiengänge $f_1, f_2 \in F$ mit $(s_1, f_1), (s_2, f_2) \in R$.
   - Begründen Sie, ob die Relation T reflexiv oder symmetrisch ist.

Lösung (5.1)

1. ${B_2}^3$ enthält z.B. das Element $a = (1, 1, 1)$ und $B_2 \times {B_2}^2$ enthält $b = (1, (1, 1))$. Wegen $a \neq b$ und $a \in {B_2}^3 \setminus B_2 \times {B_2}^2$ bzw. $b \in B_2 \times {B_2}^2 \setminus {B_2}^3$ folgt die Behauptung. ✓
2. - (s_1, IMBIT), International Management for Business and Information Technology (s_2, IW), Immobilien-Wirtschaft
   - Die Relation T ist nicht reflexiv, da man sich nicht selbst auf Twitter folgen kann. Außerdem ist T auch nicht symmetrisch, da nicht jede Person s allen ihren Followern (mit sTs') selbst folgt, d.h. aus sTs' folgt nicht immer $s'Ts$.

Aufgabe (5.2)

Uhrzeiten: Für Zeiten t_1, t_2 in Stunden sei $t_1 \sim t_2 :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : t_1 = t_2 + 24z$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $18 \sim 6$
- $11 \sim 23$
- $3 \sim 27$
- $24 \sim 49$
- $-3 \sim 21$

Lösung (5.2)

- $18 \sim 6 : 18 - 6 = 12 < 24 \Longrightarrow \text{false}$
- $11 \sim 23 : 23 - 11 = 12 < 24 \Longrightarrow \text{false}$
- $3 \sim 27 : 27 - 3 = 24 \Longrightarrow \text{true}$
- $24 \sim 49 : 49 - 2 \cdot 24 = 1 < 24 \Longrightarrow \text{false}$
- $-3 \sim 21 : 21 - (-3) = 24 \Longrightarrow \text{true}$

Aufgabe (5.3)

Uhrzeiten: Für Zeiten t_1, t_2 in Stunden sei

$$t_1 \sim t_2 :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : t_1 = t_2 + 24z.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $23 \sim 11$
- $3 \sim 26$
- $-4 \sim 20$
- $25 \sim 48$
- $73 \sim 2$

Lösung (5.3)

- $23 \sim 11 : 0 \neq 23 - 11 = 12 < 24 \Rightarrow \text{false}$
- $3 \sim 26 : 0 \neq 26 - 3 = 23 < 24 \Rightarrow \text{false}$
- $-4 \sim 20 : 0 \neq 20 - (-4) = 24 \Rightarrow \text{true}$
- $25 \sim 48 : 0 \neq 48 - 25 = 23 < 24 \Rightarrow \text{false}$
- $73 \sim 2 : 73 - 2 = 71 \wedge 0 \neq 71 - 48 = 23 < 24 \Rightarrow \text{false}$

Logik und Algebra Übungen: Relationen und Abbildungen

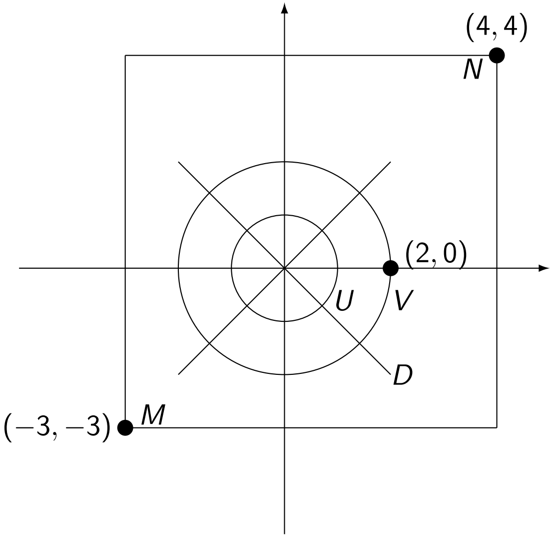
Aufgabe (5.4)

1. $\leq$ in $\mathbb{R}^2$: $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \leq (x',y') :\Longleftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$
   Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ folgende Mengen:
   - $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \geq (-3,-3)\}$
   - $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \leq (4,4)\}$
   - $M \cap N$

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
   - $(-2,-4) \leq (-3,-3)$
   - $(-2,-4) \geq (-3,-3)$

   Ist die folgende Implikation wahr? $(x,y) \not\leq (x',y') \Longrightarrow (x,y) \geq (x',y')$
2. Für $X = [-2,2] \subset \mathbb{R}$ zeichne $D := \{(x,y) \in X^2 \mid x^2 = y^2\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
3. Vektoren mit gleichem Betrag in $\mathbb{R}^2$: $(x,y)A(x',y') :\Leftrightarrow |(x,y)| = |(x',y')|$.
   Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ und begründen die geometrische Form:
   - $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y)A(0,1)\}$
   - $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y)A(2,0)\}$

Lösung (5.4)



Lösung (5.4)

1. Siehe Skizze für M, N und $M \cap N$.
   - $(-2, -4) \leq (-3, -3) : \neg(-2 \leq -3) \implies$ false
   - $(-2, -4) \geq (-3, -3) : \neg(-4 \geq -3) \implies$ false

   Damit ist diese Implikation falsch: $(x, y) \not\leq (x', y') \implies (x, y) \geq (x', y')$
   In anderen Worten: Je zwei Punkte der reellen Zahlenebene können unvergleichbar sein (im Unterschied zur Zahlengerade).
2. $D := \{(x, y) \in X^2 \mid x^2 = y^2\}$: Siehe Skizze
3. Siehe Skizze. Die Mengen U und V sind Kreise, da ihre Elemente jeweils denselben konstanten Abstand zum Ursprung haben.

Logik und Algebra Übungen: Relationen und Abbildungen

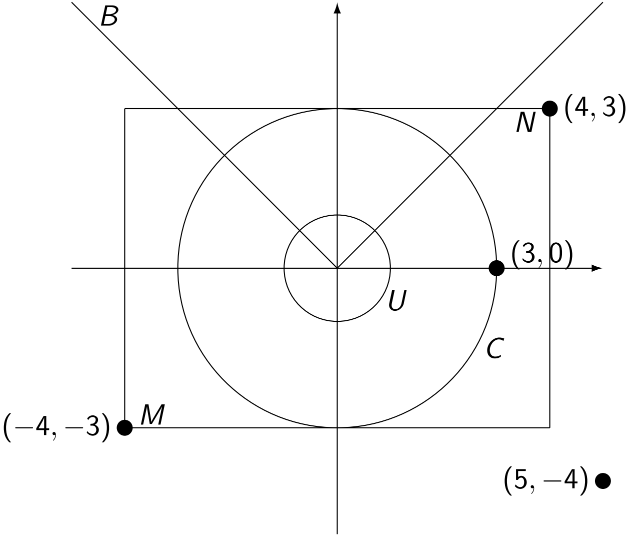
Aufgabe (5.5)

1. $\leq$ in $\mathbb{R}^2 : \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \leq (x',y') :\Longleftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$
   Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ folgende Mengen und Punkte:
   - $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \geq (-4,-3)\},\ N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \leq (4,3)\}$
   - $M \cap N$ und $M \cup N$.
   - Das kleinste Element von M.

   Ist die Aussage $(3,0) \in M \cap N \wedge (5,-4) \notin M \cup N$ wahr?
   Ist diese Aussage wahr? $(5,-4) \leq (-4,-3) \vee (5,-4) \geq (-4,-3)$
   Ist die folgende Implikation wahr? $(x,y) \not\leq (x',y') \Longrightarrow (x,y) \geq (x',y')$
2. Zeichne $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
3. Vektoren mit gleichem Betrag in $\mathbb{R}^2$: $(x,y)A(x',y') :\Leftrightarrow |(x,y)| = |(x',y')|$.
   Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^2$ und begründen die geometrische Form:

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)A(0,1)\},\ C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)A(3,0)\}$$

Lösung (5.5)



Lösung (5.5)

1. Siehe Skizze für M, N, $M \cap N$ und $M \cup N$.
   $(-4, -3)$ ist das kleinste Element von M.
   Die Aussage $(3, 0) \in M \cap N \wedge (5, -4) \notin M \cup N$ ist wahr, da $(3, 0)$ sowohl in M als auch in N liegt und da $(5, -4)$ weder in M noch in N liegt.
   - $(5, -4) \leq (-4, -3) : \neg(5 \leq -3) \Rightarrow \text{false}$
   - $(5, -4) \geq (-4, -3) : \neg(-4 \geq -3) \Rightarrow \text{false}$

   Damit ist die Aussage $(5, -4) \leq (-4, -3) \vee (5, -4) \geq (-4, -3)$ falsch.
   Folglich liefern die Punkte $(5, -4)$ und $(-4, -3)$ ein Gegenbeispiel gegen die Implikation $(x, y) \not\leq (x', y') \Longrightarrow (x, y) \geq (x', y')$, die demnach auch falsch ist.
   In anderen Worten: Je zwei Punkte der reellen Zahlenebene können unvergleichbar sein (im Unterschied zur Zahlengerade).
2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$ ist der Graph der Betragsfunktion $y = |x|$ (s.Skizze).
3. Siehe Skizze. Die Mengen U und C sind Kreise, da ihre Elemente jeweils denselben konstanten Abstand zum Ursprung haben.

Aufgabe (5.6, > MVS)

Define a data model (incl. entities/tables and relations between them) for a digital platform offering flights between various destinations:

- *CUSTOMERS* (Customers)
- *GEOCITY* (Destinations of locations)
- *CARRIERS* (Airlines)
- *PLANFLI* (Potential flights between destinations, incl. max. number of seats)
- *ACTFLI* (Actual flights including date, price and number of booked seats)
- *BOOKINGS* (Bookings of customers incl. order date)

Lösung (5.6)

- *CUSTOMERS* key: ID of customer, attributes: name, city, e-mail address
- *GEOCITY* key : name of city , attributes: longitude, latitude
- *CARRIERS* key : ID of carrier, attributes: name of carrier, currency of carrier
- *PLANFLI* key : ID of carrier, ID of connection, attributes: city-from, city-to, flight-time, departure-time
- *ACTFLI* key : ID of carrier, ID of connection, flight-date, attributes: price, currency, number-of-booked-seats
- *BOOKINGS* key : ID of carrier, ID of connection, flight-date, ID of booking, attributes: ID of customer, order-date

Lösung (5.6)

Some foreign key relations:

- $R_1 := \{(p, c) \in \mathit{PLANFLI} \times \mathit{CARRIERS} \mid p \text{ planned flight of carrier } c\}$
- $R_2 := \{(p, (f, t)) \in \mathit{PLANFLI} \times \mathit{GEOCITY}^2 \mid$
  p planned flight starts in city-from f and ends in city-to $t\}$
- $R_3 := \{(a, (c, o)) \in \mathit{ACTFLI} \times \mathit{PLANFLI} \mid$
  a actual flight of carrier c and connection $o\}$
- $R_4 := \{(b, (c, o, d)) \in \mathit{BOOKINGS} \times \mathit{ACTFLI} \mid$
  b booking at carrier c for connection o at date $d\}$
- $R_5 := \{(b, x) \in \mathit{BOOKINGS} \times \mathit{CUSTOMERS} \mid b \text{ booking of customer } x\}$

Aufgabe (5.7)

Bitte berechnen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1. $17 = 2 \mod 5$
2. $17 = -9 \mod 5$
3. $25 = 18 \mod 6$
4. $(38 + 22) = 6 \mod 9$

Aufgabe (5.8, $>$ MVS)

Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert ist.

Lösung (5.7)

1. $17 = 2 \mod 5 : 17 - 2 = 15 \land 5 \mid 15 \Rightarrow \text{true}$
2. $17 = -9 \mod 5 : 17 - (-9) = 26 \land \neg(5 \mid 26) \Rightarrow \text{false}$
3. $25 = 18 \mod 6 : 25 - 18 = 7 \land \neg(6 \mid 7) \Rightarrow \text{false}$
4. $(38 + 22) = 6 \mod 9 : (38 + 22) - 6 = 54 \land 9 \mid 54 \Rightarrow \text{true}$

Lösung (5.8)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: Die Relation $\equiv_n$ ist eine Äquivalenzrelation.

- Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $n \mid 0 = (a - a)$, d.h. $a \equiv_n a$ ✓
- Symmetrie: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \equiv_n b$.
  Dann gilt $n \mid (a - b)$, d.h. es existiert ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $(a - b) = qn$.
  Folglich ist $(b - a) = (-q)n$, und damit auch $n \mid (b - a)$, also $b \equiv_n a$. ✓
- Transitivität: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $a \equiv_n b$ sowie $b \equiv_n c$.
  Dann gelten $n \mid (a - b)$ und $n \mid (b - c)$, demnach existieren $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $(a - b) = qn$ und $(b - c) = rn$. Daraus folgt:

  $$(a - c) = (a - b) + (b - c) = qn + rn = (q + r)n$$

  Wegen $(q + r) \in \mathbb{Z}$ bedeutet das $n \mid (a - c)$ bzw. $a \equiv_n c$. ✓

Logik und Algebra Übungen: Relationen und Abbildungen

Aufgabe (5.9)

Gegeben sei die Relation R auf der Menge $A = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (1,0), (0,3), (3,0), (1,3), (3,1)\}$$

1. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
2. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von R.

Aufgabe (5.10, $>$ MVS)

Bestimmen Sie die Eigenschaften dieser Relationen:

1. Teilbarkeit: Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist $a \mid b :\Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} : b = q \cdot a$
2. $xSy :\Longleftrightarrow x$ ist Schwester von y
3. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} := \Delta_{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \subset \mathbb{R}^2$ (Identität oder Diagonale)
4. $R := \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (Allrelation)

Lösungen (5.10) und (5.9)

(5.9) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,1),(1,0),(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$

1. Zu zeigen: R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
   - R ist reflexiv, da alle Paare der Form (a, a) mit $a \in A$ zu R gehören.
   - R ist symmetrisch, da für jedes Paar der Form (a, b) mit $a, b \in A$ auch das Paar (b, a) zu R gehört.
   - R ist transitiv, da die Paare $(0,1),(1,3),(0,3)$ zu R gehören.

   Deshalb ist R eine Äquivalenzrelation.
2. Es gibt zwei Äquivalenzklassen: $[0] = \{0,1,3\}, [2] = \{2\}$

(5.10)

1. Teilbarkeit: Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv (damit Halbordnung)
2. $xSy :\Longleftrightarrow x$ ist Schwester von y: symmetrisch, transitiv
3. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (Identität): reflexiv, symmetrisch, transitiv (damit Äquivalenzrelation)
4. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (Allrelation): reflexiv, symmetrisch, transitiv (damit Äquivalenzrelation)

Aufgabe (5.11)

In einer Studie zur Nutzung sozialer Medien bei Studierenden wird die Häufigkeit der Verwendung sozialer Medien nach folgendem Schema in Clustern zusammengefasst:

Level	Anzahl Verwendung sozialer Medien pro Tag
Level 1	$0 - 1$
Level 2	$2 - 10$
Level 3	$11 - 30$
Level 4	> 30

Aufgabe (5.11), Teil 2

Eine Stichprobe (sample) S von 10 Studierenden enthält folgende Werte:

Studierende*r	Anzahl Verwendung sozialer Medien pro Tag
1	25
2	8
3	1
4	27
5	0
6	6
7	42
8	8
9	9
10	15

Aufgabe (5.11), Teil 3

Für eine statistische Auswertung werden die Werte von S entsprechend der o.g. Einteilung der Häufigkeiten mit einer Äquivalenzrelation $M \subseteq S \times S$ zusammengefasst:

$$M := \{(x, y) \in S \times S \mid x \text{ und } y \text{ haben denselben Häufigkeits-Level sozialer Medien}\}$$

Für ein Element $x \in S$ wird die Äquivalenzklasse von x bzgl. M mit $[x]$ bezeichnet.

1. Erstellen Sie eine Tabelle mit den Äquivalenzklassen von M und den Nummern der zugehörigen Studierenden nach folgendem Schema:

Level	Studierende*r (Nr.)
...	...
z.B. Level 4	z.B. 7
...	...

2. Welche Studierenden sind in der Äquivalenzklasse von Nr. 4?
3. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es?

Lösung (5.11)

1. Äquivalenzklassen von M und Nummern der zugehörigen Studierenden:

Level	Studierende*r (Nr.)
Level 1	3,5
Level 2	2,6,8,9
Level 3	1,4, 10
Level 4	7

2. $[4] = \{1, 4, 10\}$
3. Es gibt vier Äquivalenzklassen:
   - [1] (Level 3)
   - [2] (Level 2)
   - [3] (Level 1)
   - [7] (Level 4)

Aufgabe (5.12)

Welche Äquivalenzklassen werden bei der Einteilung der Bluthochdruckwerte nach WHO/ISH gebildet?

Lösung (5.12)

Vier Äquivalenzklassen (Cluster) bei der Einteilung der Bluthochdruckwerte nach WHO/ISH

1. Grad 0 (keine Hypertonie), < 140
2. Grad 1, $140 - 159$
3. Grad 2, $160 - 179$
4. Grad 3, ≥ 180

Aufgabe (5.13)

Sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2\}$

1. Zeigen Sie: E ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.
2. Stellen Sie die Äquivalenzklassen [0] dar, d.h. beschreiben Sie die Elemente der Menge [0].

Lösung (5.13)

1. Zu zeigen: E ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
   - Für x $\in \mathbb{R}$ gilt $x^4 - 4x^2 = x^4 - 4x^2$, also ist $(x, x) \in E$. ✓
   - Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in E$ ist $x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2$, also $y^4 - 4y^2 = x^4 - 4x^2$ und $(y, x) \in E$. ✓
   - Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in E$ und $(y, z) \in E$ gilt $x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2 = z^4 - 4z^2$, also ist $(x, z) \in E$. ✓

   Mit der Notation $xEy :\Leftrightarrow (x, y) \in E$ lassen sich diese Argumente so beschreiben:
   - Für x $\in \mathbb{R}$ gilt $x^4 - 4x^2 = x^4 - 4x^2$, also xEx. ✓
   - Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit xEy ist $x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2$, also $y^4 - 4y^2 = x^4 - 4x^2$ und yEx. ✓
   - Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit xEy und yEz gilt $x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2 = z^4 - 4z^2$, also xEz. ✓
2. Die Äquivalenzklasse [0] besteht aus den Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2).$$

   Also gilt $[0] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 = x^4 - 4x^2 = x^2(x - 2)(x + 2)\} = \{0, 2, -2\}$.

Aufgabe (5.14)

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2 \cdot x + 2$.
   Zeigen Sie, daß die Abbildung f injektiv ist.
2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$.
   Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion, d.h. die $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$.
   Zeigen Sie, daß die Abbildung g nicht injektiv ist.

Lösung (5.14)

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2 \cdot x + 2$.
   Für die Injektivität ist zu zeigen: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
   Beweis:
   Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $-2 \cdot x_1 + 2 = f(x_1) = f(x_2) = -2 \cdot x_2 + 2$.
   Also folgt $-2 \cdot x_1 = -2 \cdot x_2$ und damit $x_1 = x_2$, d.h. f ist injektiv.
   Alternative Lösung: f ist als lineare Funktion mit der Steigung -2 streng monoton fallend und deshalb injektiv.
2. Die Nullstellen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ sind Lösungen der Gleichung
   $$0 = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$
   Folglich gibt es zwei Nullstellen: $x_1 := 0, x_2 := -1$.
   Die Funktion g ist nicht injektiv, da $g(0) = g(-1)$, jedoch $0 \neq -1$.

Aufgabe (5.15, $>$ MVS)

1. Aus welchen Elementen besteht die Äquivalenzklasse von $3 \in \mathbb{R}$ bzgl. der Identitätsrelation auf $\mathbb{R}$?
$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
Was ist die Faktormenge der Identität $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$?
2. Was ist die Faktormenge der Allrelation $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$?

Lösung (5.15)

1. Für die Identitätsrelation auf $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} := \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

besteht die Äquivalenzklasse von $3 \in \mathbb{R}$ aus genau einem Element, d.h. $[3] = \{3\}$. Das gilt allgemein für jede reelle Zahl:

$$\forall x \in \mathbb{R} : [x] = \{x\}$$

Die Faktormenge der Identität $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ besteht also aus allen Singleton-Mengen. Mit Hilfe der bijektiven Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, x \mapsto [x]$ kann sie mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden. In anderen Worten: Durch f bzw. die Umkehrabbildung f^{-1} kann man ohne Informationsverlust zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}/\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ hin und her wechseln.

2. Die Faktormenge der Allrelation $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ besteht aus genau einem Element, da es nur genau eine Äquivalenzklasse gibt:

$$\mathbb{R}/\mathbb{R}^2 = \{[0]\}$$

Diese Faktormenge kann mit der Singleton-Menge $\{0\}$ identifiziert werden.

Logik und Algebra Übungen: Modulare Arithmetik

Aufgabe (6.1)

Bitte berechnen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1. $25 \mod 6 = 1$
2. $18 = 25 (\mod 6)$
3. $(101 + 234) \mod 5 = 2$
4. $4711 \mod 1024 = 615$

Lösung (6.1)

1. $25 \mod 6 = 1 : 6 \mid (25 - 1) \Rightarrow \text{true}$
2. $18 = 25(\mod 6) : (18 \text{ mod } 6 = 0) \wedge (25 \text{ mod } 6 = 1) \Rightarrow \text{false}$
3. $(101 + 234) \mod 5 = 2 : (101 + 234) = 335 \text{ mod } 5 = 0 \Rightarrow \text{false}$
   Alternative Rechnung:
   $(101 \mod 5 = 1) \wedge (234 \mod 5 = 4) \Rightarrow (101 + 234) \mod 5 = 1 + 4 \mod 5 = 0$
4. $4711 \mod 1024 = 615 : 4711/1024 = 4 \text{ Rest } 615 \Rightarrow \text{true}$

Logik und Algebra Übungen: Modulare Arithmetik

Aufgabe (6.2)

1. Stellen Sie die Kongruenzklasse $[5] \in \mathbb{Z}_6$ als Teilmenge der ganzen Zahlen (aufzählend oder beschreibend) dar.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_6$:
   2.1 $[1] + [5]$
   2.2 $[5] + [2]$
   2.3 $[4] + [3]$
   2.4 $[3] + [3]$
   2.5 $[2] + [5]$

Lösung (6.2)

1. Kongruenzklasse $[5] \in \mathbb{Z}_6$:

$$[5] = \{5, 11, -1, 17, -7, ...\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x = k \cdot 6 + 5\}$$

2. Berechnung in $\mathbb{Z}_6$:
   2.1 $[1] + [5] = [0]$
   2.2 $[5] + [2] = [1]$
   2.3 $[4] + [3] = [1]$
   2.4 $[3] + [3] = [0]$
   2.5 $[2] + [5] = [1]$

Aufgabe (6.3)

Bitte bestätigen oder widerlegen:

1. $\mathrm{ggT}(6, 9) = 2$
2. $\mathrm{ggT}(38, 10) = 2$
3. $\mathrm{ggT}(36, 54) = 9$

Lösung (6.3)

1. $\text{ggT}(6, 9) = 2 : \neg(2 \mid 9) \Rightarrow \text{false}$
2. $\text{ggT}(38, 10) = 2 : ((2 \mid 38) \wedge (2 \mid 10) \wedge (\text{ggt}(19, 5) = 1)) \Rightarrow \text{true}$
3. $\text{ggT}(36, 54) = 9 : ((9 \mid 36) \wedge (9 \mid 54) \wedge (\text{ggt}(4, 6) = 2)) \Rightarrow \text{false}$

Aufgabe (6.4)

Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\mathrm{ggT}(63, 217)$$

Lösung (6.4)

Berechnung mit dem Euklidischen Algorithmus: $\text{ggT}(63, 217)$

1. $r_0 := 217, r_1 := 63$
2. $r_2 := r_0 \mod r_1 = 217 \mod 63 = 28$ wegen $217 = 3 \cdot 63 + 28$
3. $r_3 := r_1 \mod r_2 = 63 \mod 28 = 7$ wegen $63 = 2 \cdot 28 + 7$
4. $r_4 := r_2 \mod r_3 = 28 \mod 7 = 0$ wegen $28 = 4 \cdot 7 + 0$
5. Ende der Rekursion, da $r_4 = 0$.

Ergebnis: $\text{ggT}(63, 217) = r_3 = 7$

Aufgabe (6.5)

Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\mathrm{ggT}(1024, 2076)$$

Lösung (6.5)

Berechnung mit dem Euklidischen Algorithmus: $\mathrm{ggT}(1024, 2076)$

1. $r_0 := 2076, r_1 := 1024$
2. $r_2 := r_0 \mod r_1 = 2076 \mod 1024 = 28$ wegen $2076 = 2 \cdot 1024 + 28$
3. $r_3 := r_1 \mod r_2 = 1024 \mod 28 = 16$ wegen $1024 = 36 \cdot 28 + 16$
4. $r_4 := r_2 \mod r_3 = 28 \mod 16 = 12$ wegen $28 = 1 \cdot 16 + 12$
5. $r_5 := r_3 \mod r_4 = 16 \mod 12 = 4$ wegen $16 = 1 \cdot 12 + 4$
6. $r_6 := r_4 \mod r_6 = 12 \mod 4 = 0$ wegen $12 = 3 \cdot 4 + 0$
7. Ende der Rekursion, da $r_6 = 0$.

Ergebnis: $\mathrm{ggT}(2076, 1024) = r_5 = 4$

Aufgabe (6.6)

Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_6$:

1. $[1] \cdot [5]$
2. $[5] \cdot [2]$
3. $[4] \cdot [3]$
4. $[3] \cdot [3]$
5. $[2] \cdot [5]$

Lösung (6.6)

Berechnung in $\mathbb{Z}_6$:

1. $[1] \cdot [5] = [5]$
2. $[5] \cdot [2] = [4]$
3. $[4] \cdot [3] = [0]$
4. $[3] \cdot [3] = [3]$
5. $[2] \cdot [5] = [4]$

Aufgabe (6.7)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- $10^k = 1 (\text{mod } 9)\ \forall k \in \mathbb{N}$
- $13 \cdot 15 = 1 \cdot 3 (\text{mod } 12)$
- $135^4 \bmod 12 = 9 \bmod 12$

Aufgabe (6.8)

Erstellen Sie die Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}_7$.

Lösung (6.7)

- $10^k = 1 (\text{mod } 9)\ \forall k \in \mathbb{N}$
  Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $10^k = 1^k (\text{mod } 9) = 1 (\text{mod } 9)$
- $13 \cdot 15 = 1 \cdot 3 (\text{mod } 12)$
  Das folgt direkt aus $13 = 1 (\text{mod } 12)$ und $15 = 3 (\text{mod } 12)$.
- $135^4 \bmod 12 = 9 \bmod 12$
  Es ist $135 = 11 \cdot 12 + 3$, d.h. $135 \bmod 12 = 3$.
  Damit gilt auch:
  $135^4 \bmod 12 = 3^4 \bmod 12 = (3 \cdot 27) \bmod 12 = (3 \cdot 3) \bmod 12 = 9 \bmod 12$

Lösung (6.8)

Multiplikationstabelle von $\mathbb{Z}_7$:

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[0]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[0]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[0]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[0]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Logik und Algebra Übungen: Modulare Arithmetik

Aufgabe (6.9)

1. Bestimmen Sie die additiven Inversen der Elemente von $\mathbb{Z}_7 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$.
2. Berechnen Sie: $(29 \cdot 9 + 48 \cdot 80) \mod 7$
3. Berechnen Sie: $13^4 \mod 11$
4. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_5$: $3^{15} \cdot 2$

Lösung (6.9)

1. Die additiven Inversen ergeben sich jeweils aus folgenden Gleichungen:

$$[0] = [0] + [0] = [1] + [6] = [2] + [5] = [3] + [4] = [4] + [3] = [5] + [2] = [6] + [1]$$

2.

$$\begin{aligned}(29 \cdot 9 + 48 \cdot 80) \mod 7 &= (1 \cdot 2 + 6 \cdot 3) \mod 7 \\ &= (2 + 18) \mod 7 \\ &= (2 + 4) \mod 7 \\ &= 6 \mod 7\end{aligned}$$

3. $13^4 \mod 11 = 2^4 \mod 11 = 16 \mod 11 = 5 \mod 11$
4. In $\mathbb{Z}_5$ gilt:

$$3^{15} \cdot 2 = (3^3)^5 \cdot 2 = 27^5 \cdot 2 = 2^5 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Aufgabe (6.10)

Welches $x \in \mathbb{Z}_{11}$ erfüllt diese Gleichung?

$$3 \cdot x = 5$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das multiplikative Inverse y von 3 und mulitplizieren Sie dann die Gleichung mit y.

Lösung (6.10)

Lösung der Gleichung in $\mathbb{Z}_{11}$:

$$3 \cdot x = 5$$

In $\mathbb{Z}_{11}$ gilt $4 \cdot 3 = 12 = 1$, d.h. $y = 4$ ist das multiplikative Inverse von 3.
Multiplikation der Gleichung mit y liefert:

$$\underbrace{4 \cdot 3}_{1} \cdot x = 4 \cdot 5 = 20 = 9$$

Lösung: $x = 9$

Aufgabe (6.11)

Lösen Sie die Gleichung in $\mathbb{Z}_7$:

$$4 \cdot x + 3 = 4$$

Hinweis: Analog zu den Grundrechenarten in $\mathbb{R}$ können Sie in $\mathbb{Z}_7$ durch Addition von additiven Inversen (entsprechend der Subtraktion) und anschließende Multiplikation mit multiplikativen Inversen (entsprechend der Division) die Variable x auf der linken Seite der Gleichung isolieren und damit berechnen.

Lösung (6.11)

Lösung der Gleichung in $\mathbb{Z}_7$:

$$4 \cdot x + 3 = 4$$

In $\mathbb{Z}_7$ ist 4 das eindeutige additive Inverse von 3 (wegen $4 + 3 = 7 \equiv 0 \mod 7$).
Addition von 4 auf beiden Seiten der Gleichung ergibt also:

$$4 \cdot x + \underbrace{3 + 4}_{0} = 4 + 4 = 1$$

Das eindeutige multiplikative Inverse von 4 ist 2 (wegen $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \mod 7$).
Multiplikation mit 2 auf beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$$\underbrace{2 \cdot 4}_{1} \cdot x = 2 \cdot 1 = 2$$

Lösung: $x = 2$

Aufgabe (6.12)

Berechnen Sie für das Buch “ABAP Objects“ von Horst Keller und Sascha Krüger die Prüfziffer am Ende der ISBN-10 mit den ersten Ziffern 3-934358-37.

Lösung (6.12)

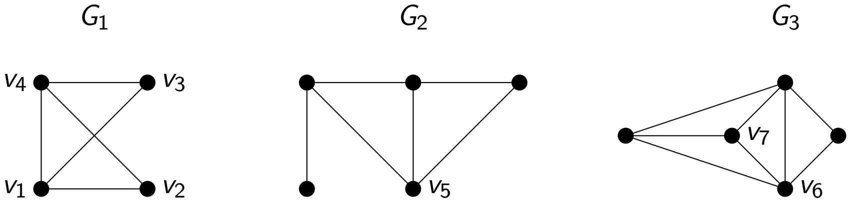
ISBN-10 mit den ersten Ziffern 3-934358-37:

$$
\begin{aligned}
&1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 7 \mod 11 \\
&= 3 + 18 + 9 + 16 + 15 + 30 + 56 + 24 + 63 \mod 11 \\
&= 3 + 7 + 9 + 5 + 4 + 8 + 1 + 2 + 8 \mod 11 \\
&= 47 \mod 11 \\
&= 3 \mod 11
\end{aligned}
$$

Logik und Algebra Übungen: Graphen und Bäume

Aufgabe (7.1)

1. Berechnen Sie für die Knoten v_i $(i = 1, \ldots, 7)$ in den folgenden Graphen jeweils den Grad $\deg(v_i)$.
2. Berechnen Sie für den Graph G_1 sowohl $\sum_{v \in V} \deg(v)$ als auch $|E|$ und weisen damit in diesem Fall die Gültigkeit der Formel $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E|$ nach.



Lösung (7.1)

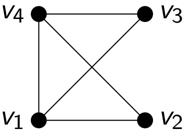
1. $G_1 : \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2, \deg(v_1) = \deg(v_4) = 3$
   $G_2 : \deg(v_5) = 3$
   $G_3 : \deg(v_6) = 4, \deg(v_7) = 3$
2. Für den Graph G_1 gilt $|E| = 5$ und daraus folgt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 3 + 2 + 2 + 3 = 10 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot |E|$$

Logik und Algebra Übungen: Graphen und Bäume

Aufgabe (7.2)

1. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix A_1 von Graph G_1:

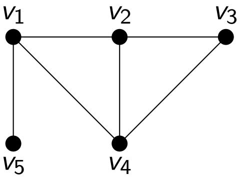


2. Bestimmen Sie Graph G_2 zur Adjazenzmatrix $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung (7.2)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Graph G_2 zur Adjazenzmatrix A_2:



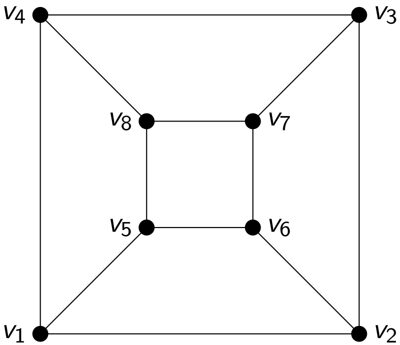
Aufgabe (7.3)

Welche Folgen von Knoten definieren ein (geschlossenen) Kantenzug, Weg oder Kreis?

$s_1 := (v_2, v_7, v_6, v_2), s_2 := (v_1, v_2, v_3, v_2, v_6)$

$s_3 := (v_1, v_2, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$

$s_4 := (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6), s_5 := (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_1)$



Lösung (7.3)

$s_1 := (v_2, v_7, v_6, v_2)$: v_2 und v_7 nicht benachbart, deshalb kein Kantenzug
$s_2 := (v_1, v_2, v_3, v_2, v_6)$: Kantenzug, aber kein Weg, da v_2 zweimal durchlaufen wird.
$s_3 := (v_1, v_2, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$: Geschlossener Kantenzug.
$s_4 := (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6)$: Jeder Knoten wird genau einmal durchlaufen, d.h. ein Weg.
$s_5 := (v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_1)$: Geschlossener Weg, d.h. ein Kreis.

Aufgabe (8.1)

Ist die Potenzmenge einer Menge X mit dem Durchschnitt als Operation eine Gruppe?

$$(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \cap)$$

Lösung (8.1)

Sei X eine Menge.

- Der Durchschnitt ist kommutativ und assoziativ, deshalb ist $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \cap)$ eine kommutative Halbgruppe.
- Die Teilmenge X ist neutrales Element bzgl. des Durchschnitts, da für jede andere Teilmenge $A \subseteq X$ gilt:
$$A \cap X = A$$
- Für eine nichtleere Menge X ist $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \cap)$ keine Gruppe, da keine Teilmenge $A \subset X$ ein inverses Element bzgl. des Durchschnitts hat: Wegen $A \subset X$ existiert ein $x \in X \setminus A$. Für alle Teilmengen $B \subseteq X$ gilt dann auch:
$$x \in X \setminus (A \cap B)$$
Folglich ist $A \cap B \neq X$ und B kann kein inverses Element von A sein.

Logik und Algebra Übungen: Gruppen, Ringe und Körper

Aufgabe (8.2)

Zeigen Sie: $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) := \{A \mid A = (a_{ij}) n \times n \text{ Matrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ ist kommutative Gruppe bzgl. Matrix-Addition und $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ist nicht-kommutative Halbgruppe mit neutralem Element bzgl. Matrix-Multiplikation:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix (identity matrix) ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation. Für die Matrixelemente $\delta_{i,j}$ von I_n gilt $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$.

$$I := I_n := (\delta_{i,j}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (8.2)

- Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz für die Matrix-Addition folgt unmittelbar aus dem Assoziativ- und Kommutativgesetz für die Addition reeller Zahlen, da jeweils an den entsprechenden Positionen der Matrix addiert wird.
- Das Assoziativgesetz für die Matrix-Multilplikation erfordert eine umfangreiche vollständige Induktion, dafür sei auf die Literatur verwiesen.
- Die Multiplikation ist nicht kommutativ: $B \cdot C \neq C \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Null-Matrix ist neutrales Element bzgl. Addition. Offensichtlich ist die Einheitsmatrix das neutrale Element der Multiplikation.
- Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ entsteht die inverse Matrix bzgl. Addition durch Multiplikation mit -1, d.h. $-A = (-a_{ij})$.
- $B \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ hat kein multiplikatives Inverses, also ist $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ keine Gruppe bzgl. Multiplikation.

Aufgabe (8.3)

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ (**General Linear Group**) ist mit der Matrix-Multiplikation eine Gruppe mit neutralem Element.
Welche der folgenden Matrizen gehören zu $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (8.3)

- Die Determinanten von A und B sind -1 bzw. 1, damit gehören beide Matrizen zu $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
- Bei C ist die letzte Zeile linear abhängig von der ersten, deshalb ist die Determinante von C gleich Null und C gehört nicht zu $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.
- Die Inverse einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist gleichzeitg das multiplikative inverse Element in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Aufgabe (8.4)

In der symmetrische Gruppe $S_6 := \{s \mid s : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 6\} \text{ bijektiv}\}$, sind folgende Permutationen einer Menge mit 6 Elementen gegeben:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie $s \circ t$ und $t \circ s$.
2. Ist S_6 kommutativ?
3. Beschreiben Sie das neutrale Element von S_6.
4. Wie kann man für $f \in S_6$ die inverse Permutation f^{-1} ermitteln? Testen Sie das gefundene Verfahren für

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung (8.4), 1/3

1. Berechnung von $s \circ t$ und $t \circ s$:

$$\begin{aligned} s \circ t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ t \circ s &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Wegen $s \circ t \neq t \circ s$ ist S_6 nicht kommutativ.
3. Das neutrale Element von S_6 ist die Identität:

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung (8.4), 2/3

Verfahren zur Ermittlung der inversen Permutation:

1. Vertauschung der ersten und zweiten Zeile
2. Optionaler Schritt (für bessere Lesbarkeit): Sortierung der ersten Zeile nach aufsteigenden Zahlen, gleichzeitig die darunter stehenden Zahlen mit verschieben.

Test für $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vertauschung der ersten und zweiten Zeile:

$$g = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Sortierung der ersten Zeile und die darunter stehenden Zahlen mit verschieben:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (8.4), 3/3

Für den Test, dass g die inverse Permutation von f ist, ist zu zeigen: $g \circ f = \mathrm{id}$.

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

Also ist g das inverse Element f^{-1} von f.