BICOLOREAR

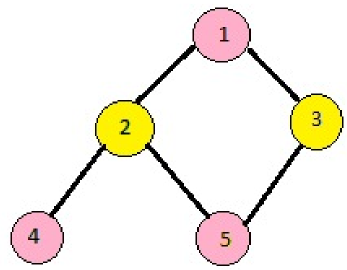
Sara Chica, Rodrigo Gualtero

29 de Septiembre, 2012

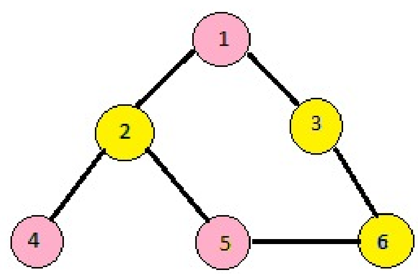
Índice

1. Introducción

Este es un problema de la UVA, identificado con el código *10004*, en el cual se desea saber si un grafo ingresado es o no bicoloreable.
Un Grafo es *bicoloreable* si se pueden pintar todos sus nodos solamente con dos colores, es decir, si no existen dos nodos adyacentes con el mismo color; en caso contrario, es un nodo *No Bicoloreable*.
A continuación se presentan 2 ejemplos de nodos:



Ejemplo 1: Nodo Bicoloreable



Ejemplo 2: Nodo No Bicoloreable

2. Definición del problema

Para este problema se suponen 3 cosas:

1. Un nodo no tiene una conexión consigo mismo.
2. El grafo es no dirigido, es decir que, para todos los nodos, si a está conectado con b, no necesariamente implica que b lo esté con a.
3. El grafo es conexo.

2.1. Entrada

Como primer lugar entra un valor que determina el número de nodos, este debe ser entre 0 y 200.

Seguido a esto entra un número, el cual indica la cantidad de conexiones. Finalmente entran todas las conexiones con formato «a b».

2.2. Salida

Si es bicoloreable imprime «Bicoloreable», de lo contrario, imprime «No bicoloreable».

3. Modelamiento matemático

Sea G un grafo, $G(V, L)$, donde

V es el conjunto de nodos del grafo,

$$V = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

y L es el conjunto de todas las conexiones,

$$L = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), ..., (a_1, a_n), (a_2, a_3), (a_2, a_4), ..., (a_{n-1}, a_n)\}$$

El grafo es conexo si, para un par de nodos del grafo, existe una sucesión de arcos que permitan ir de uno a otro y devolverse.
El grafo es no dirigido si $(a, b) \Rightarrow (b, a)$.
No existe una conexión tal que (a, a); es decir $(a, a) \notin L$

Una matriz de adyacencia es una matriz cuadrada que se utiliza para representar las conexiones de un grafo, en donde 0 implica que no hay ninguna conexión, y 1 implica que existe una conexión. La matriz para este ejercicio cumple con las siguientes propiedades:

1. Es simétrica, por lo tanto es igual a su transpuesta, $M^T = M$; es decir, que
$$(\forall_{i,j} | 0 \leq i \leq n \wedge 0 \leq j \leq n \wedge i \neq j : M_{ij} = M_{ji})$$

2. Todos los elementos de su diagonal principal son 0, ya que ningún nodo de la matriz tiene conexión consigo mismo,
$$(\forall_{i,j} | i = j : M_{ij} = 0)$$

Utilizando el gráfico del *ejemplo 1* , se tiene la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Planteamiento de la Solución

Para determinar la solución del problema se debe saber que un nodo es no bicoloreable siempre y cuando 2 nodos adyacentes a el tienen diferente color.

$$NoBicoloreable \equiv (\exists a, b, c | a, b, c \in V : (a, b) \wedge (b, c) \wedge (a, c))$$

Es decir si un nodo a tiene como nodos adyacentes b y c, donde b es azul y c rojo, entonces automáticamente el grafo es no bicoloreable, ya que a, con cualquier color que tome, queda con el mismo color de alguno de sus nodos adyacentes.

Para solucionar el problema es importante tener en cuenta que se usa una matriz de adyacencia para saber las diferentes conexiones que existen, además de esto a medida que se va llenando la matriz con las diferentes conexiones que entran se le va asignando color a los nodos, revisando sus nodos adyacentes, de esta forma en caso de que estos tengan diferentes colores se sabe que el nodo es no bicoloreable.

5. Conclusiones

1. La mejor manera de modelar el grafo en este caso es una matriz de adyacencia, ya que teniendo las conexiones almacenadas se logra de manera más eficientes saber cuales nodos son o no bicoloreables.

2. Se hace más eficiente la solución si a medida que se van ingresando las diferentes conexiones se va mirando si puede o no ser bicoloreable.