

Farey Sequences  
Johanna Beltran y Diego Triviño  
2012

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Definición del problema</b>	<b>2</b>
2.1. Entrada . . . . .	4
2.2. Salida . . . . .	4
<b>3. Modelamiento matemático</b>	<b>4</b>
<b>4. Planteamiento de la solución</b>	<b>5</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>6</b>

## 1. Introducción

'Farey Sequences' es un problema de programación el cual encontramos en el juez virtual UVA con el número **10408**.

Este documento busca mostrar una de las tantas soluciones desde el enfoque matemático teniendo en cuenta que el objetivo es realizar la implementación de la solución del problema en cualquier lenguaje de programación con la ayuda de este documento.

Este problema puede ser resuelto utilizando la estrategia de 'divide y vencerás'.

Esta estrategia es una técnica de diseño de algoritmos la cual consiste en dividir de forma recurrente un problema en subproblemas más sencillos hasta que se encuentre un caso base.

Esta técnica consta fundamentalmente de los siguientes pasos:

1. Descomponer el problema a resolver en un cierto número de subproblemas más pequeños.
2. Resolver independientemente cada subproblema.
3. Combinar los resultados obtenidos para construir la solución del problema original.

## 2. Definición del problema

Para este problema se tiene en cuenta la **secuencia de Farey** de orden  $n$ ,  $F_n$ , es la secuencia de todas las fracciones propias con denominadores que no superen  $n$  junto con la fracción  $1/1$  y ordenadas ascendentemente; tanto el numerador como el denominador no deben tener factores comunes.

Por ejemplo, la secuencia de  $F_5$  es:

1	1	1	2	1	3	2	3	4	1
-, -, -, -, -, -, -, -, -, -.									
5	4	3	5	2	5	3	4	5	1

La solución del problema se encuentra en que para un determinado  $n$ , se debe encontrar la  $k$ -ésima fracción de la secuencia  $F_n$ .

Se deben tener en cuenta las siguientes restricciones para la solución del problema:

1. Para cada caso de prueba se debe ingresar dos números enteros  $n$  y  $k$ .
2. Para  $n$  y  $k$  se debe tener en cuenta que  $1 \leq n \leq 1000$  y  $k$  debe ser mas pequeño que la secuencia obtenida de  $F_n$ ; la longitud de  $F_n$  es de aproximadamente  $0,3039635 n^2$ .

## 2.1. Entrada

La entrada consiste en una secuencia de líneas que contienen dos números naturales  $n$  y  $k$ ,  $1 \leq n \leq 1000$  y  $k$  suficientemente pequeño tal que no es el  $k$ -ésimo término en  $F_n$ . (La longitud de  $F_n$  es de aproximadamente  $0,3039635 n^2$ ).

### *EJEMPLO*

```
5 5
5 1
5 9
5 10
117 348
288 10000
```

## 2.2. Salida

Para cada caso de prueba se debe imprimir una línea con la  $k$ -ésima fracción de  $F_n$ .

### *EJEMPLO ANTERIOR*

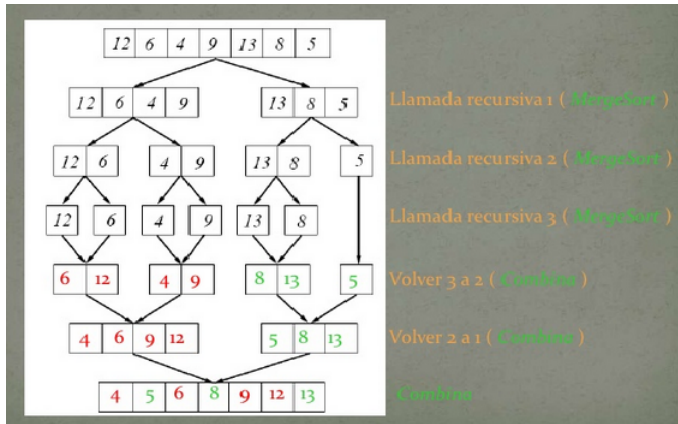
```
1/2
1/5
4/5
1/1
9/109
78/197
```

## 3. Modelamiento matemático

Dado dos números enteros positivos  $n$  y  $k$  se debe encontrar la fracción  $k$ -ésima de la secuencia ordenada  $F_n$ .

## 4. Planteamiento de la solución

Para este problema utilizaremos el algoritmo de ordenamiento **Mergesort** también llamado algoritmos de ordenamiento por mezcla el cual consiste en el ordenamiento externo estable basado en la técnica de divide y vencerás; el algoritmo trabaja de la siguiente forma:



1

1. Si la longitud de la lista es 0 ó 1, entonces ya está ordenada.
2. Dividir la lista desordenada en dos sublistas de aproximadamente la mitad del tamaño.
3. Ordenar cada sublista recursivamente aplicando el ordenamiento por mezcla.
4. Mezclar las dos sublistas en una sola lista ordenada.

Con este algoritmo de ordenamiento podemos ordenar de manera ascendente las fracciones de la secuencia  $F_n$  para así determinar la  $k$  -ésima fracción de cada caso de prueba dada.

---

<sup>1</sup><http://throwingcodes.blogspot.com/>

## 5. Conclusiones

1. Este algoritmo de ordenación es un ejemplo claro de que el método divide y vencerás es efectivo cuando tienes cantidades grandes de datos por trabajar y necesitas ahorrar tiempo y recursos.
2. Este algoritmo de ordenamiento tiene una complejidad de  $(n \log n)$  y requiere de un vector auxiliar para realizar el ordenamiento correctamente.