1554 Multiplicative Functions

Diego Alfonso Prieto Torres - Sebastian Camilo Martinez Reyes

18 de noviembre de 2012

Índice

1. Introducción **1**

2. Definición del Problema **2**
2.1. Objetivos 2
2.2. Precondición 2
2.3. Poscondición 2

3. Modelo de Solución **3**
3.1. Definición de Conceptos 3
3.2. Estrategia de Solución 3

4. Conclusiones **4**

1. Introducción

Este documento es una guia de solución dirigida a los estudiantes para el enunciado #1554 Multiplicative functions del juez virtual TIMUS, se recomienda a los lectores hacer una previa revisión del enunciado del problema asi como una revisión de los siguientes temas relacionados con la teoría de numeros:

-Definición de funciones
- Definición de coprimo
- Algoritmo de la division, Maximo común divisor

-Grupos Abelianos
- Unidad de multiplicación ó función $E(n)$
- Grupo de restos módulo n Z/nZ.

2. Definición del Problema

2.1. Objetivos

Los objetivos del programa con respecto al enunciado son:

- Determinar el conjunto imagen de la funcion $G(n)$ a partir del conjutno imagen de la funcion $F(x)$.
- Cada uno de los valores de recorrido de la funcion $G(n)$ debe pertenecer al conjunto de los $Z/2007Z$ que es el grupo de restos modulo 2007.

2.2. Precondición

La entrada del programa como se mencionó anteriormente en la sección de objetivos consta de un valor entero n y una secuencia de n- elementos que representan el conjunto imagen de la función $F(n)$, el programa sera probado con una serie de casos donde el valor de n estara entre1 $\leq n \leq 10^4$. ademas cada uno de los elementos del conjunto imagen de $F(x)$ estaran entre 0≤F(n)≤ 2006.

2.3. Poscondición

la salida debe ser el conjunto imagen de $G(n)$ que debe contener n elementos los cuales deben estar en el rango de 0≤G(n)≤ 2006.

3. Modelo de Solución

3.1. Definición de Conceptos

Sea $F(n)$ una función multiplicativa que cumple la propiedad de que $F(1) = 1$ y para cualquier a y b coprimos ($gcd(a, b) = 1$), entonces. $F(ab) = F(a)F(b)$.

La función $E(n)$ definida como:

$$E(n) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \\ \\ 0 & si \quad 1 < n \end{cases}$$

se define una nueva función multiplicativa llamada $(F * G)(n)$ asi :

$(F * G)(n) = \sum_{d/n} F(d)G(n/d)$.

donde $(F * G)(n)$ esta en terminos de la sumatoria de el producto entre $F(d)G(n/d)$ para d un divisor positivo de n.

la tarea sera encontrar el conjunto imagen de la función $G(n)$que es la inversa de $F(n)$. la funcion $G(n)$:Z→Z/2007Z.

Se dice que $G(n)$ es inversa de $F(n)$ sií $(F * G)(n) = (G * F)(n) = E(n)$.

3.2. Estrategia de Solución

Para Determinar el valor de $G(n)$ para$1 \leq n < \infty$, basta con tomar la siguiente igualdad $(F * G)(n) = E(n)$, asi definiremos la siguiente función:

$G(n)$: Z→Z/2007Z

$$\text{G(n)=}\begin{cases} \text{1/F(1)} & si \quad n = 1 \\ \\ (-\sum_{d/n} F(d)G(n/d))/F(1). & si \quad 1 < d \leq n \end{cases}$$

lo que nos da una idea de implementación recursiva, como se podra observar en el codigo fuente incluido en este directorio.Es aconsejable conservar los valores obtenidos de las imagenes de la función $G(n)$ con el objeto de eliminar los recalculos resultando en una mejora considerable en el tiempo de ejecución.

4. Conclusiones

Este tipo de enunciados nos permiten evidenciar como la formalización de los problemas se ve reflejada directamente en el codigo fuente de nuestros programas y es la piedra angular en la implementación de nuestro algoritmo ademas nos permite observar como es posible trasladar elementos del lenguaje de las matematicas y manifestarlos en resultados por medio de un programa como lo es la transformación de un elemento de los enteros al grupo Z/nZ entre otras operaciones.