ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №1
"РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА"

Выполнила студентка
308 группы
Гришина Екатерина Дмитриевна

Москва 2022

Постановка задачи

Используя схему бегущего счёта и итерационные методы, решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, \\ u(x,0) = -x, \\ u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Исследование характеристик

Найдём характеристики уравнения для исследования решения на наличие ударной волны. Характеристики удовлетворяют соотношению $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+u^2}$. Наклон характеристик определяется либо начальными, либо граничными условиями в зависимости от того, через какой из слоёв $t = 0$ или $x = 0$ проходит характеристика.

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt = -\int\limits_{x_0}^{x} (1+u^2)dx \tag{2}$$

$$t - t_0 = -(1+u^2)(x - x_0) \tag{3}$$

Воспользуемся начальными и граничными условиями и получим семейства кривых:

1) $t_0 = 0, u = -x$

$$t = -(1+x_0^2)(x - x_0) \tag{4}$$

2) $x_0 = 0, u = 0$

$$t = -x + t_0 \tag{5}$$

Построим характеристики.

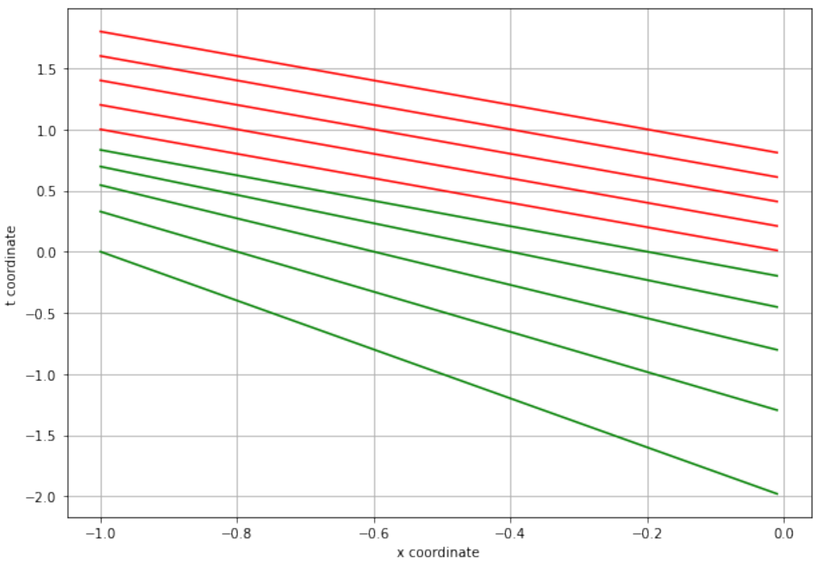

Рис. 1: Зеленые прямые - первое семейство характеристик, красные - второе.

Имеем два семейства характеристик, которые, как видно из графика проекций на (x, t), не пересекаются на отрезке $x \in [0, 1]$. Значит, ударной волны нет, и, следовательно, неоднозначности решения также нет.

Разностная схема

Рассмотрим область $D = \{(x, t) : -1 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Для численного решения задачи методом конечных разностей введём разностную сетку $w_x = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N, h = -\frac{1}{N}\}$, $w_t = \{t_j = j\tau, n = 0, 1, \ldots, M, \tau = \frac{T}{M}\}$ $w_{xt} = w_x \otimes w_t$, где h,τ - шаги, а N,M - число узлов по осям координаты и времени соответственно.

Перепишем уравнение задачи (1) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(\operatorname{arctg} u)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

Введём сеточную функцию $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Воспользуемся четырехточечным шаблоном вида

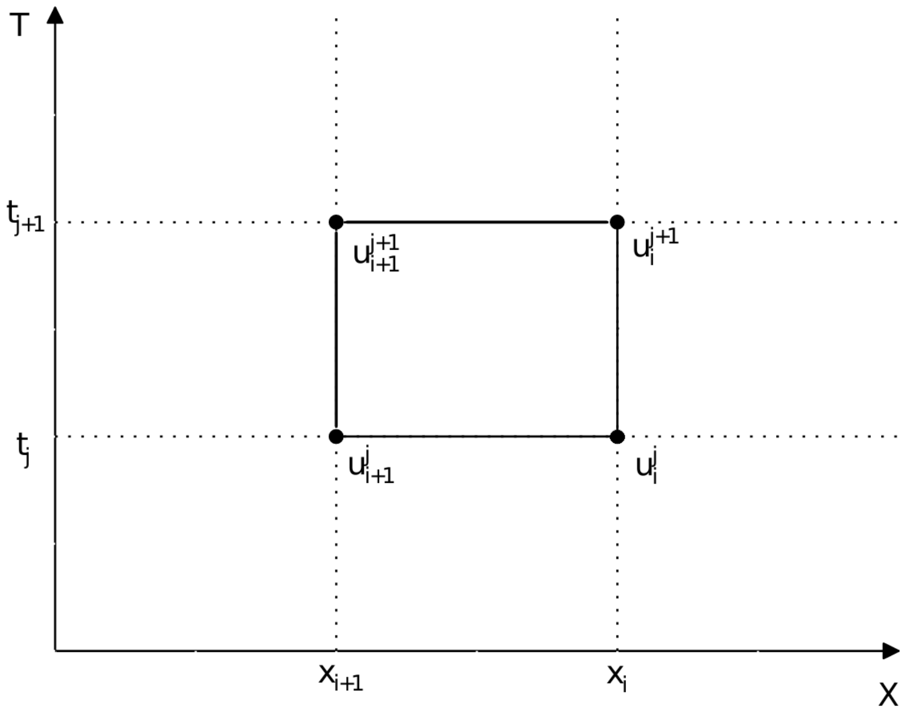

Рис. 2: Шаблон используемой схемы.

Это - неявная и абсолютно устойчивая схема. Разностная аппроксимация задачи принимает вид

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j + u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{2\tau} - \frac{\operatorname{arctg} u_{i+1}^j - \operatorname{arctg} u_i^j + \operatorname{arctg} u_{i+1}^{j+1} - \operatorname{arctg} u_i^{j+1}}{2h} = 0 \\ u_i^0 = -x_i \\ u_0^j = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Получаем нелинейное уравнение на u_i^{j+1} уравнение в задаче (7). Будем решать его методом Ньютона: запишем функцию, нуль которой необходимо найти, и её производную:

$$\begin{cases} f(u_{i+1}^{j+1}) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j + u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{2\tau} - \frac{\operatorname{arctg} u_{i+1}^j - \operatorname{arctg} u_i^j + \operatorname{arctg} u_{i+1}^{j+1} - \operatorname{arctg} u_i^{j+1}}{2h} \\ f'(u_{i+1}^{j+1}) = \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2h(1+(u_{i+1}^{j+1})^2)} \end{cases} \tag{8}$$

Суть метода Ньютона заключается в итерационной последовательности

$$(u_{i+1}^{j+1})^{(s+1)} = (u_{i+1}^{j+1})^{(s)} - \frac{f(u_{i+1}^{j+1})^{(s)}}{f'(u_{i+1}^{j+1})^{(s)}} \tag{9}$$

Вычисления продолжаются до достижения заранее заданной точности, то есть до момента, когда оказывается выполненным условие

$$|(u_{i+1}^{j+1})^{(s+1)} - (u_{i+1}^{j+1})^{(s)}| \leqslant \varepsilon, \tag{10}$$

где ε задаётся заранее.

Численное решение

Написание программы производилось на языке Python, графики построены с помощью библиотеки matplotlib. Значения параметров, использованные при моделировании: $N = M = 100, \quad T = 1, \quad \varepsilon = 10^{-5}$. В качестве результатов приведём зависимости u(x) при некоторых t.

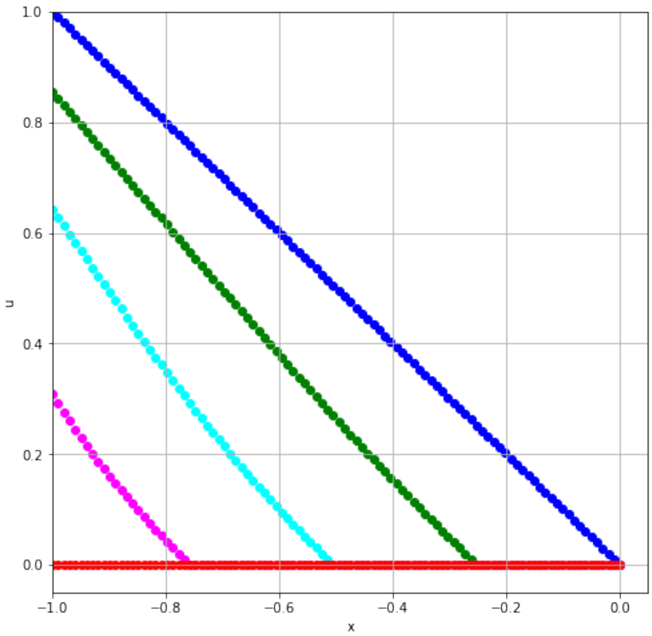

Рис. 3: Временные срезы для разных моментов времени: $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$,$t = 0.75$, $t = 1$.

Верификация результатов

Для проверки результатов воспользуемся методом сгущения сетки: будем итерационно увеличивать число шагов по обеим осям, так, что число шагов по обеим осям на s-й итерации увеличение числа узлов в два раза больше, чем на s-1, и вычислять относительную разность решений этих 2 соседних итераций в разные моменты времени и в разных точках. В нашем случае число шагов увеличивалось от 100 до 3200, всего было 6 итераций(100, 200, 400, 800, 1600, 3200 шагов) и 5 пар соседних итераций, для которых можно посчитать относительную разность решений.

Графически представим значения максимальной относительной разности для разного числа шагов:

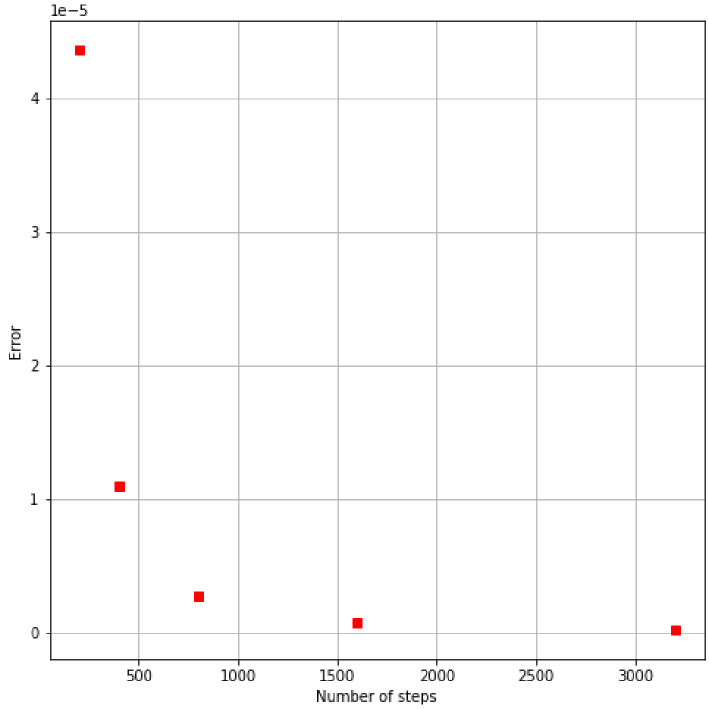

Рис. 4: Максимальное значение относительной разности решений при различном числе шагов (максимум ищется при $-1 < x < 0, \quad 0 < t \leqslant 1$).

Как можно заметить из графика, при увеличении числа шагов максимальное значение относительной разности решений на соседних итерациях уменьшается.

Заключение

В данной работе было проведено численное решение начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения переноса с использованием схемы бегущего счёта и итерационных методов.

Перед численными расчётами было проведено исследование характеристик, которое обнаружило отсутствие ударной волны и однозначность решения внутри рассматриваемой области. Для поиска решения использовался метод конечных разностей, была введена равномерная разностная сетка в области $D = \{(x,t) : -1 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Для вычислений использовался шаблон неявной абсолютно устойчивой четырехточечной схемы, приближённое вычисление неизвестного значения сеточной функции проводилось итерационным методом Ньютона(точность $\varepsilon = 10^{-5}$).

Программная реализация схемы была произведена на языке Python, графическое представление результатов было произведено с помощью библиотеки matplotlib. Число шагов по осям было выбрано $M, N = 100$, ограничение по времени $T = 1$, шаги по координатной и временной осям соответственно $h = -0.01, \tau = 0.01$.

После построения решения была произведена проверка результатов с помощью метода сгущения сетки, в которой итерационно увеличивалось число шагов сетки(при переходе с s-й итерации(увеличения шага) на s+1-ю число шагов по каждой из осей увеличивалось в 2 раза). Из приведённых значений максимальной относительной разности решений между двумя соседними итерациями можно заметить, что при увеличении шага решения на соседних итерациях всё меньше отличаются друг от друга, максимум разницы между ними стремится к 0. Получаемые приближённые решения стремятся к какому-то единственному решению, что согласуется с тем, что при отсутствии ударной волны решение определяется однозначно, то есть представленная схема выдаёт приемлемые результаты.

Приложение: код программы

Полный код программы можно найти по ссылке: `https://colab.research.google.com/drive/1fMsukE9MgA-lOQe36uILuKSWfjMTJ74g?usp=sharing`

Литература

[1] Курс лекций «Основы математического моделирования», Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., 2012 год.

[2] «Набор и вёрстка в системе LATEX», С.М. Львовский, 2003 год.