ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №2
"РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ"

Выполнила студентка
308 группы
Гришина Екатерина Дмитриевна

Москва 2022

Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \quad = \quad \Delta u, \quad 0 < x < \pi/3, \quad 0 < y < \pi/2, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\pi/3} = 0, \\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi/2} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos 3x \sin 4y \end{cases} \tag{1}$$

Аналитическое решение

Решим задачу аналитически, представляя решение в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} T_{nm}(t) u_{nm}(x,y), \tag{2}$$

где $u_{nm}(x,y)$ - собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta u_{nm} + \lambda_{nm} u_{nm} = 0, \\ \frac{\partial u_{nm}}{\partial x}\big|_{x=0} = \frac{\partial u_{nm}}{\partial x}\big|_{x=\pi/3} = 0, \\ u_{nm}\big|_{y=0} = u_{nm}\big|_{y=\pi/2} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решая задачу Штурма-Лиувилля, находим, что

$$\begin{cases} \lambda_{nm} = 9n^2 + 4m^2, \\ u_{nm} = \cos(3nx)\sin(2my), \end{cases} \tag{4}$$

где $m = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots$

Задача для временной части:

$$\begin{cases} T'_{nm}(t) + \lambda_{nm} T_{nm}(t) = 0, \\ T_{nm}(0) = \cos 3x \sin 4y, \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи Коши:

$$\phi_{nm} = \frac{1}{||u_{nm}||^2} \iint \Phi(x,y,t) u_{nm} dxdy \tag{6}$$

$$||u_{nm}||^2 = \frac{\pi^2}{24}(1 + \delta_{n0}) \tag{7}$$

$$\Phi(x,y,t) = \cos 3x \sin 4y \tag{8}$$

$$T_{nm} = \phi_{nm} e^{-\lambda_{nm} t} \tag{9}$$

В силу ортогональности собственных функций, соответствующих различным собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, получим:

$$\phi_{12} = 1; \quad \phi_{nm} = 0, \quad n \neq 1, \quad m \neq 2 \tag{10}$$

Полное аналитическое решение:

$$u(x, y, t) = e^{-25t} \cos 3x \sin 4y \tag{11}$$

Построение разностной схемы

Рассмотрим область $D = \{(x, y, t) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Для численного решения задачи методом конечных разностей введём разностную сетку $w_x = \{x_i = ih_x, i = 0, 1, \ldots, N_x, h_x = \frac{\pi}{3N_x}\}$, $w_y = \{y_j = jh_y, j = 0, 1, \ldots, N_y, h_y = \frac{\pi}{2N_y}\}$, $w_t = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \ldots, N_t, \tau = \frac{T}{N_t}\}$, $w_{xyt} = w_x \otimes w_y \otimes w_t$, где h_x, h_y, τ - шаги, а N_x, N_y, N_t - число узлов по осям координат x, y и времени t соответственно. Введём на этой сетке сеточную функцию $u_{ij}^k = u(x_i, y_j, t_k)$.

Введем разностную аппроксимацию оператора Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \to \Lambda_x u_{ij}^k + \Lambda_y u_{ij}^k = \Lambda u_{ij}^k, \tag{12}$$

$$\Lambda_x u_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_x^2}, \tag{13}$$

$$\Lambda_y u_{ij}^k = \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h_y^2}, \tag{14}$$

где Λ - «численный» оператор Лапласа.

Начальные условия и граничные условия Дирихле аппроксимируются точно, а для граничных условий Неймана введем аппроксимацию односторонней разностной производной:

$$\begin{cases} \frac{u_{1j}^k - u_{0j}^k}{h_x} = \frac{u_{N_x j}^k - u_{N_x - 1 j}^k}{h_x} = 0 \quad (\text{ГУ по } x), \\ u_{i0}^k = u_{iN_y}^k = 0 \quad (\text{ГУ по } y), \\ u_{ij}^0 = 0 \quad (\text{НУ}) \end{cases} \tag{15}$$

Метод переменных направлений, метод прогонки

Будем аппроксимировать уравнение и искать решение задачи (1) с помощью метода переменных направлений. Рассмотрим, например, переход с временного слоя t^k на слой t^{k+1}. Введём дополнительный временной слой $t^{k+\frac{1}{2}}$. Тогда используемый шаблон имеет вид:

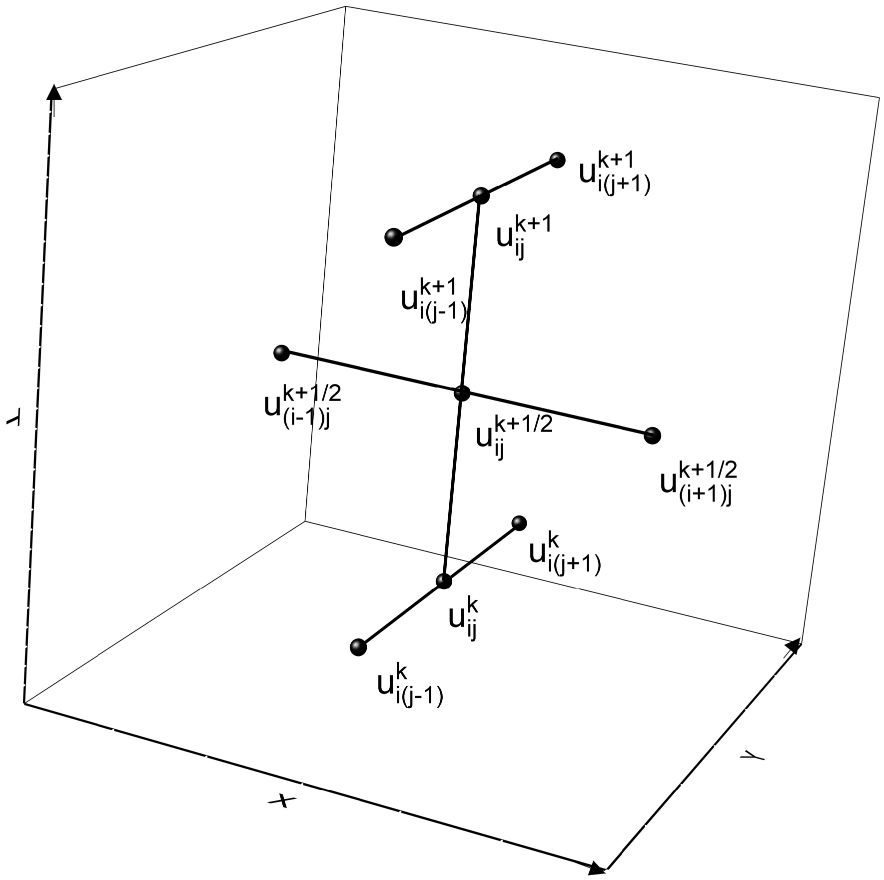

Рис. 1: Используемый шаблон.

При переходе со слоя t^k на слой $t^{k+\frac{1}{2}}$ при разностной аппроксимации оператора Лапласа вторую производную по x расписываем с помощью известных значений сеточной функции на слое t^k, а производная по y записывается с помощью неизвестных значений сеточной функции на слое $t^{k+\frac{1}{2}}$. Тогда разностная аппроксимация задачи для перехода между этими слоями имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-u_{ij}^{k}}{0.5\tau} = \frac{u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}}-2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{k}-2u_{ij}^{k}+u_{ij-1}^{k}}{h_y^2} \\ \frac{u_{1j}^{k+\frac{1}{2}}-u_{0j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x} = \frac{u_{N_xj}^{k+\frac{1}{2}}-u_{N_x-1j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0 \\ u_{i0}^{k+\frac{1}{2}} = u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Аналогично можно записать для перехода между слоями $t^{k+\frac{1}{2}}$ и t^{k+1}, только учитывая, что теперь по известным значениям(на слое $t^{k+\frac{1}{2}}$) считается производная по y, а производная по x расписывается через неизвестные значения сеточной функции:

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \frac{u_{(i+1)j}^{k+\frac{1}{2}}-2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+u_{(i-1)j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i(j+1)}^{k+1}-2u_{ij}^{k+1}+u_{i(j-1)}^{k+1}}{h_y^2} \\ \frac{u_{1j}^{k+1}-u_{0j}^{k+1}}{h_x} = \frac{u_{N_xj}^{k+1}-u_{N_x-1j}^{k+1}}{h_x} = 0 \\ u_{i0}^{k+1} = u_{iN_y}^{k+1} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Задачи ставятся при $i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1$(то есть не включая границы). Методом прогонки (описан далее) возможно решить при указанных i, j задачи, а далее можно с помощью соответствующих граничных условий вычислить значения на границе. Немного преобразуя аппроксимацию граничных условий Неймана, имеем для $i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y$:

$$\begin{cases} u_{i0}^k = u_{iN_y}^k = 0 \\ u_{1j}^k = u_{0j}^k \\ u_{N_xj}^k = u_{N_x-1j}^k \end{cases} \tag{18}$$

Немного упростим уравнение задачи (16), рассматривая его при фиксированном i и вводя обозначения

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{h_y^2}, \\ B = (\frac{2}{h_y^2} + \frac{1}{0.5\tau}), \\ C = -\frac{1}{h_y^2}, \\ F_j = \frac{u_{ij}^k}{0.5\tau} + \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_x^2} \end{cases} \tag{19}$$

Тогда уравнение примет вид

$$Au_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} + Bu_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + Cu_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} = F_j \tag{20}$$

Будем искать решение с помощью метода прогонки, представляя

$$u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_i u_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_j, \ j = 0, 1, \dots, N_y - 1 \tag{21}$$

Одно из граничных условий по y учтём, положив $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Подставляя выражение для $u_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}}$ через $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$, α_{j-1}, β_{j-1}, получим, что

$$u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{-A}{B + C\alpha_{j-1}} u_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{F_j - C\beta_{j-1}}{B + C\alpha_{j-1}} \tag{22}$$

Сравнивая коэффициенты в этом выражении и в $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_j u_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_j$, получаем рекуррентную формулу

$$\begin{cases} \alpha_j = \frac{-A}{B + C\alpha_{j-1}} \\ \beta_j = \frac{F_j - C\beta_{j-1}}{B + C\alpha_{j-1}} \end{cases} \tag{23}$$

В ходе прямой прогонки по рекуррентной формуле посчитаем α_j, β_j при $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$. Учитывая граничное условие по y при $j = N_y$, получаем, что $u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} = 0$. Используя это значение и вычисленные α_j, β_j, рассчитаем в ходе обратной прогонки $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$. Таким образом мы найдём значения сеточной функции на дополнительном слое при $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$. Для $i = 0, N_x$ вычисление сеточной функции производится так, как указано в (18).

Для перехода с дополнительного слоя на слой t^{k+1} (задача (17) рассматриваем значения сеточной функции при фиксированном j и аналогично вводим обозначения

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{h_x^2}, \\ B = (\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{0.5\tau}), \\ C = -\frac{1}{h_x^2}, \\ F_i = \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} + \frac{u_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + u_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_y^2} \end{cases} \tag{24}$$

Уравнение задачи (17) примет вид

$$Au_{i+1j}^{k+1} + Bu_{ij}^{k+1} + Cu_{i-1j}^{k+1} = F_i \tag{25}$$

Ищем решение в виде $u_{ij}^{k+1} = \alpha_i u_{i+1j}^{k+1} + \beta_i,\ i = 0, 1, \dots, N_x - 1$. Тогда, аналогично задаче (16), получаем рекуррентную формулу для коэффициентов

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{-A}{B + C\alpha_{i-1}} \\ \beta_i = \frac{F_i - C\beta_{i-1}}{B + C\alpha_{i-1}} \end{cases} \tag{26}$$

Учитывая граничное условие при $i = 0$, можем положить $\alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 0$. С помощью этого в ходе прямой прогонки вычислим $\alpha_i,\ \beta_i$. Для $i = N_x - 1$, учитывая граничное условие при $i = N_x$, можем записать $u_{N_x-1j}^{k+1} = \alpha_{N_x-1} u_{N_xj}^{k+1} + \beta_{N_x-1} = u_{N_xj}^{k+1}$, из чего следует, что $u_{N_xj}^{k+1} = \frac{\beta_{N_x-1}}{1-\alpha_{N_x-1}}$. В ходе обратной прогонки вычислим u_{ij}^{k+1}. Таким образом мы получили значения сеточной функции на слое t^{k+1} при $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$. При $j = 0, N_y$ получим значения сеточной функции, учитывая граничные условия (18). Таким образом, мы описали переход с временного слоя t^k на t^{k+1} с помощью метода переменных направлений, который и применяется в данной работе.

Численное решение

Написание программы производилось на языке Python, построение графиков было произведено с помощью библиотеки matplotlib. Код программы приведён в приложении. Конкретные значения параметров, использованные при моделировании: $N_x = N_y = 200, T = 0.1, N_t = 1000 (\tau = 0.0001)$. В качестве результатов приведём профили в некоторые моменты времени.

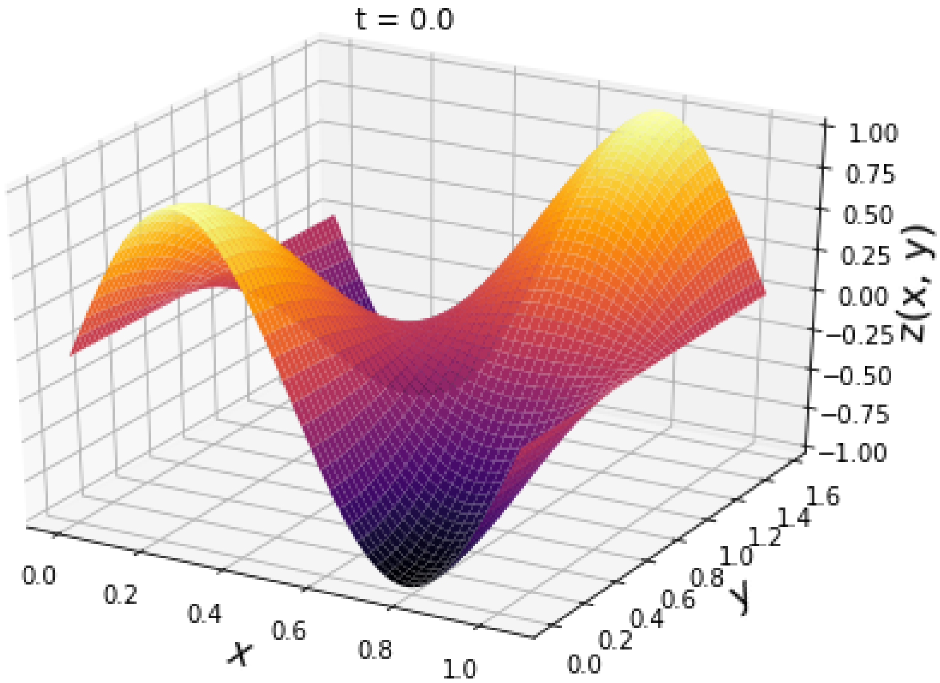

Рис. 2: Численное решение в t=0.

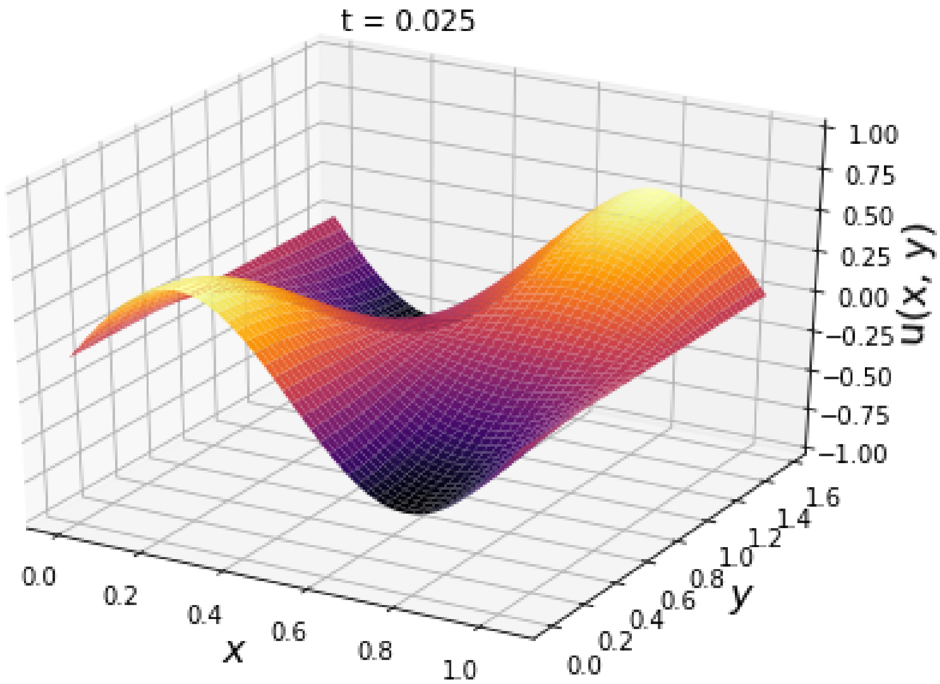

Рис. 3: Численное решение в t=0.025.

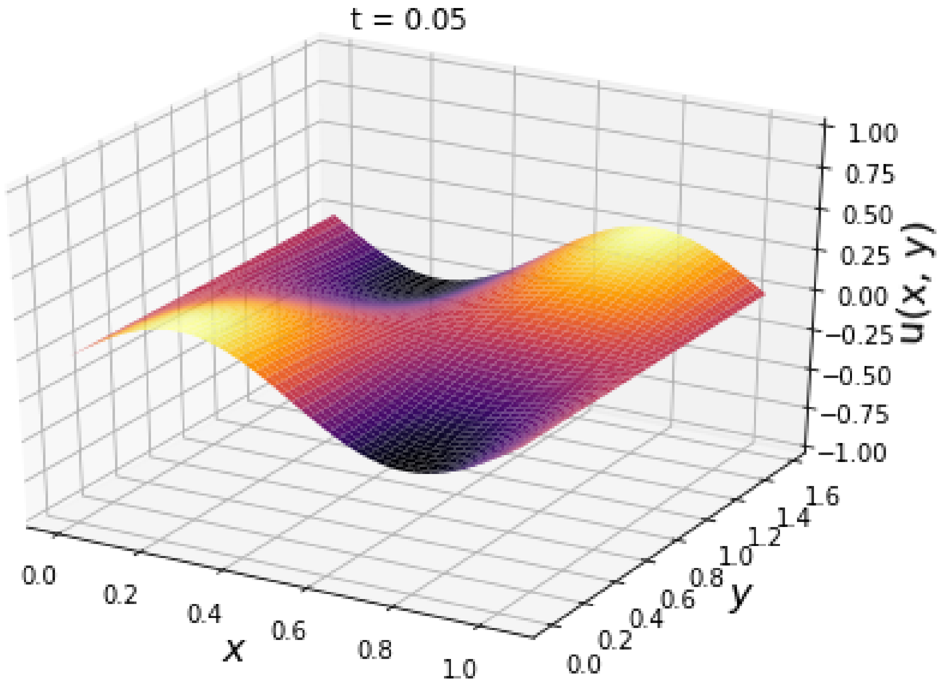

Рис. 4: Численное решение в t=0.05.

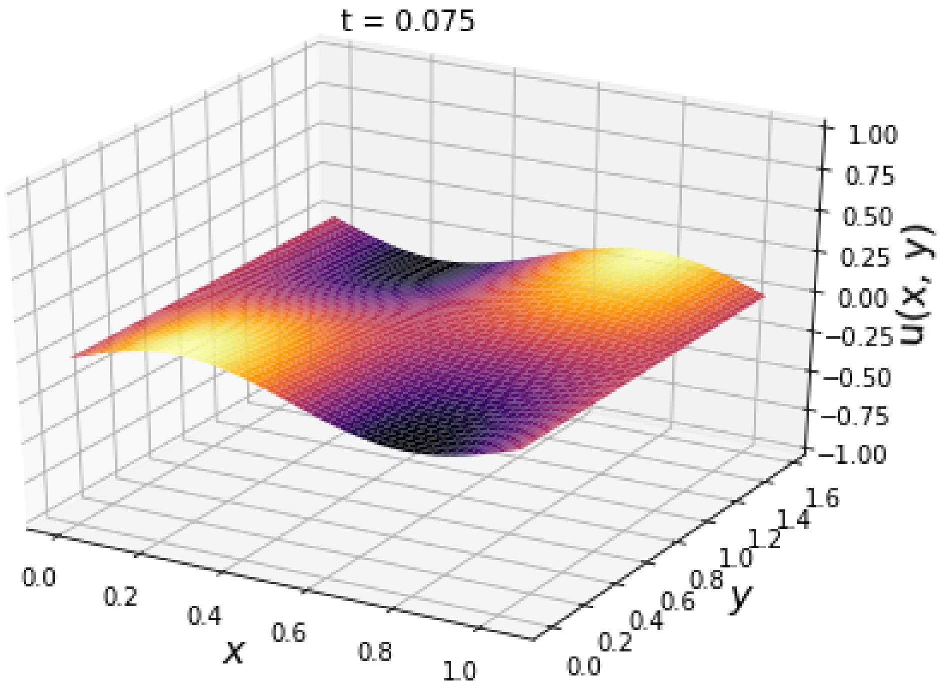

Рис. 5: Численное решение в t=0.075.

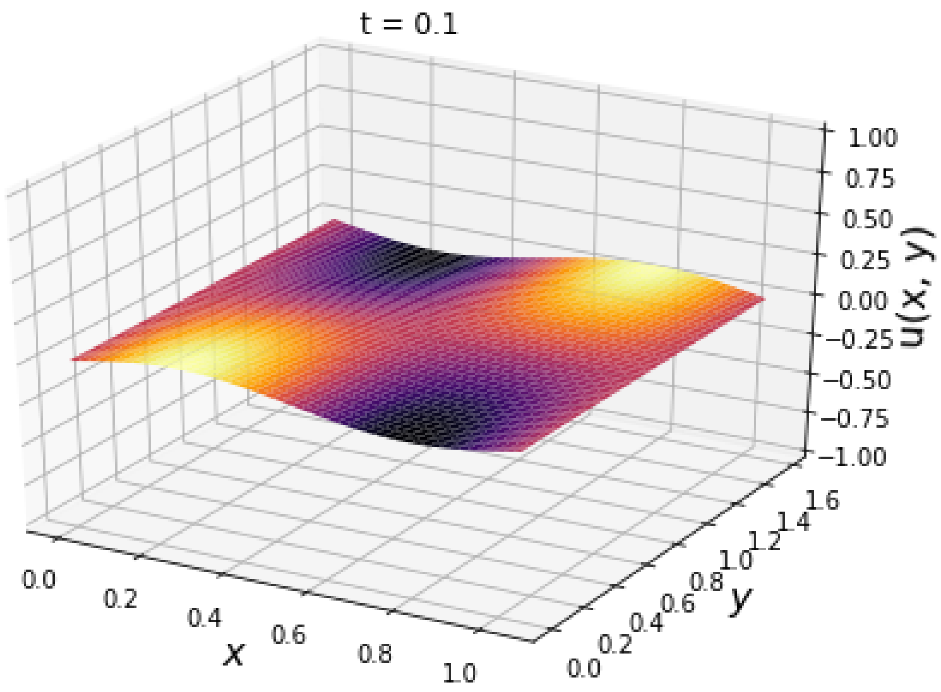

Рис. 6: Численное решение в t=0.1.

Аналитическое решение

Приведем также аналитичсекое решение задачи.

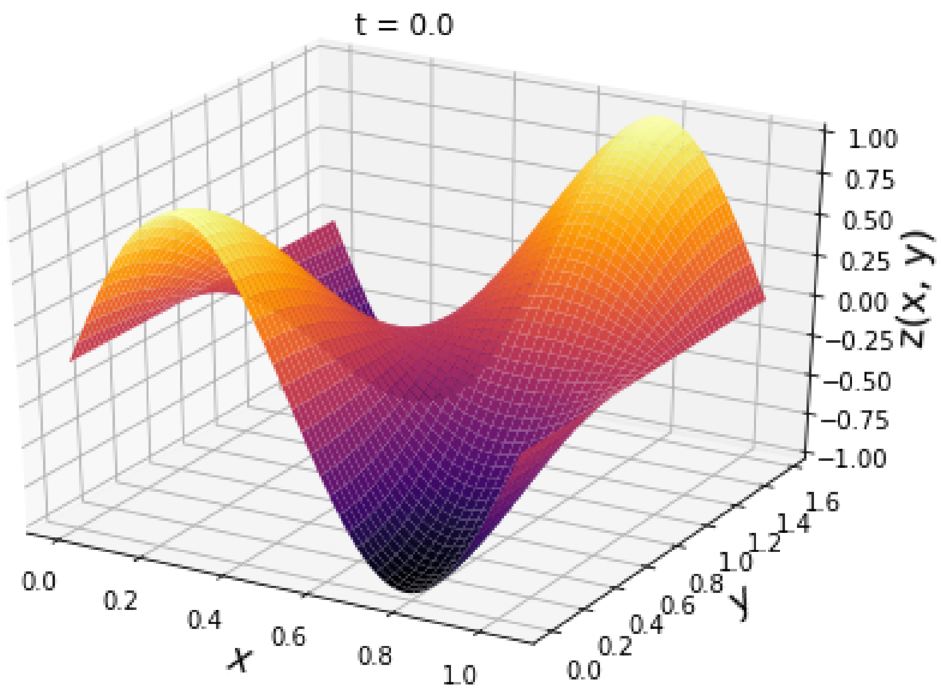

Рис. 7: Аналитическое решение в t=0.

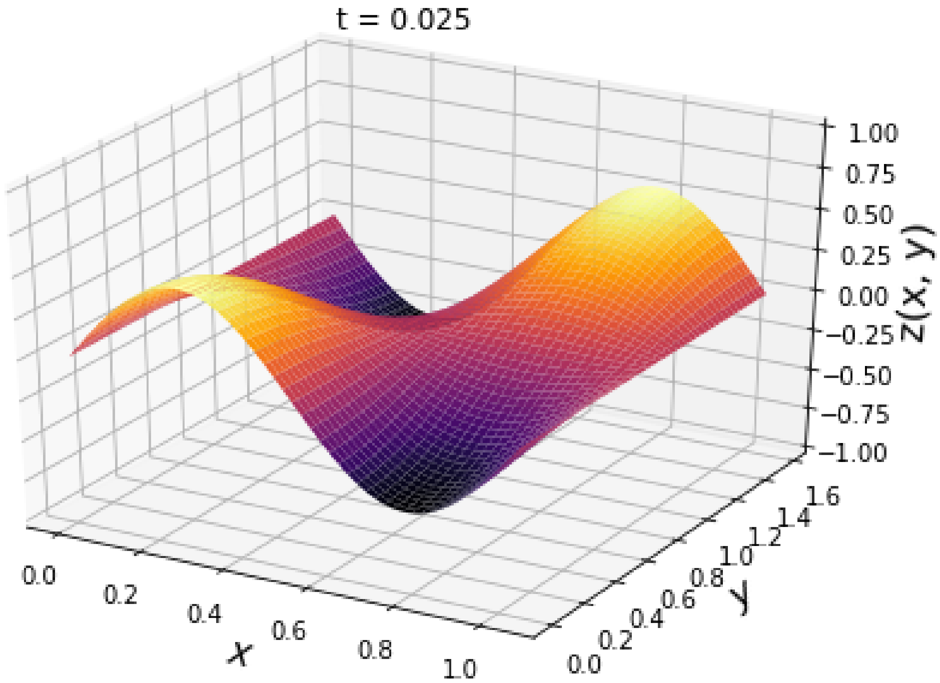

Рис. 8: Аналитическое решение в t=0.025.

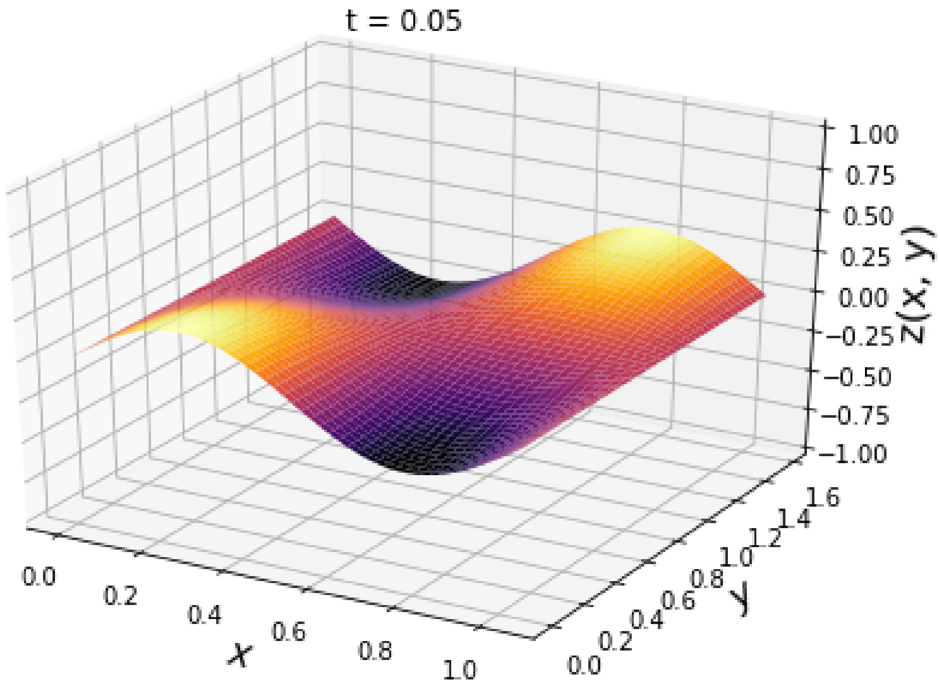

Рис. 9: Аналитическое решение в t=0.5.

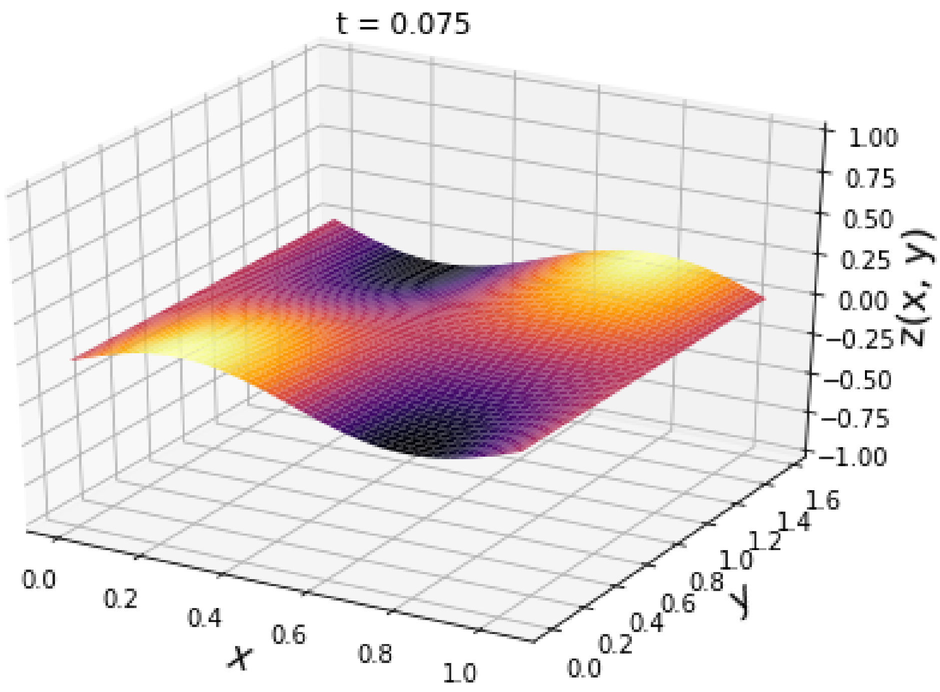

Рис. 10: Аналитическое в t=0.75.

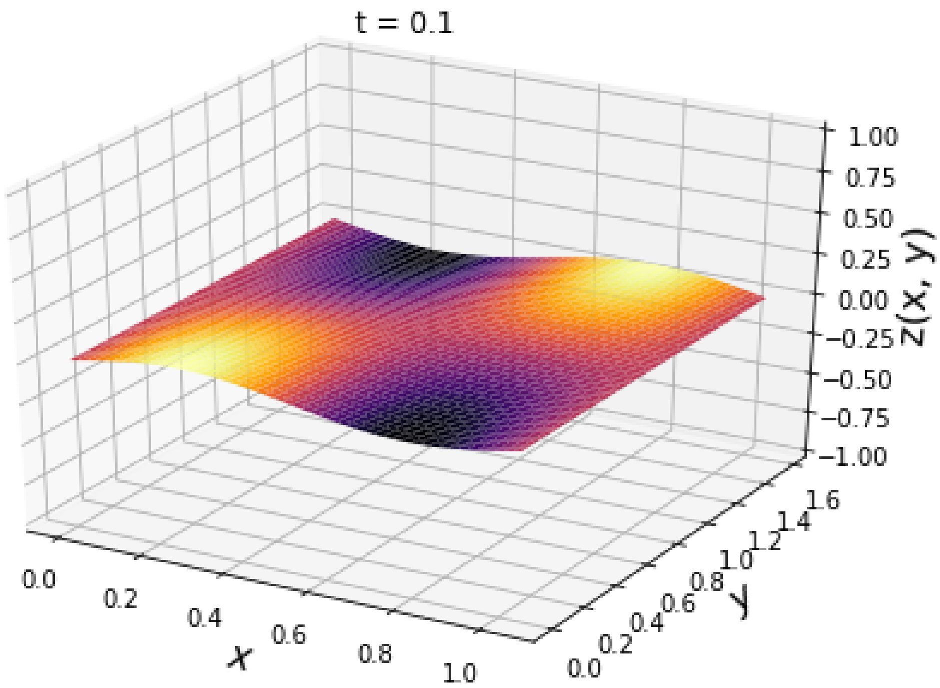

Рис. 11: Аналитическое решение в t=1.

Верификация результатов

Для верификации результатов сравним численное(в этом разделе сеточная функция обозначена как u_{ij}^k) и аналитическое(его значение в узлах разностной сетки в этом разделе обозначено как U_{ij}^k) решения в разные моменты времени. Будем на каждом временном слое, кроме начального(то есть при $k = 1, 2, \ldots, N_t$) подсчитывать максимальную относительную разность между решениями $\delta^k = \max_{\substack{i=1,\ldots,N_x-1 \\ j=1,\ldots,N_y-1}}(\frac{|u_{ij}^k - U_{ij}^k|}{|u_{ij}^k|})$. Приведём полученные значения δ в разные моменты времени.

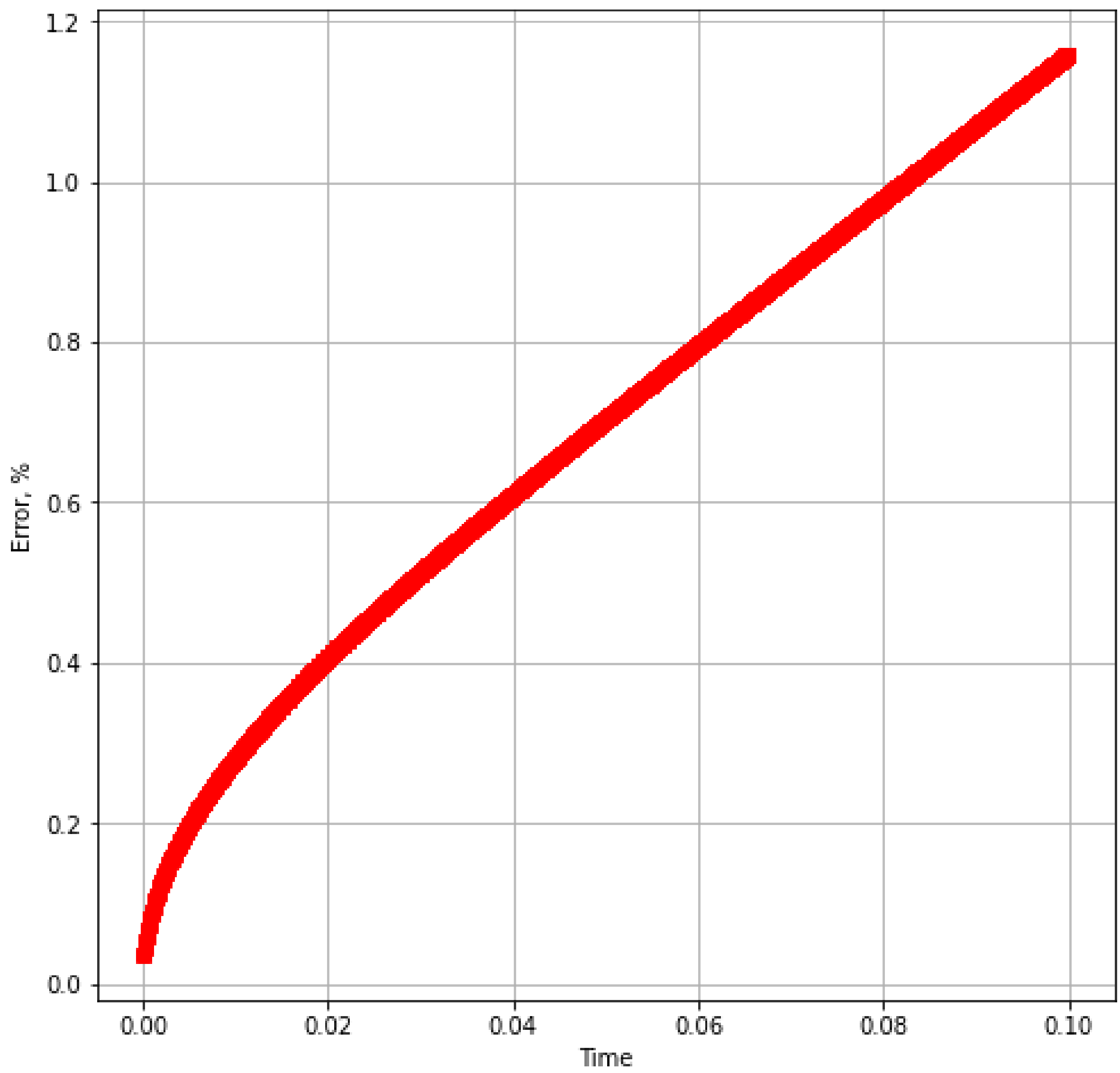

Рис. 12: Максимальная относительная разность на интервале $t \in (0; 0.1)$

Также приведем представление разности численного и аналитического решений в момент t = 0.025.

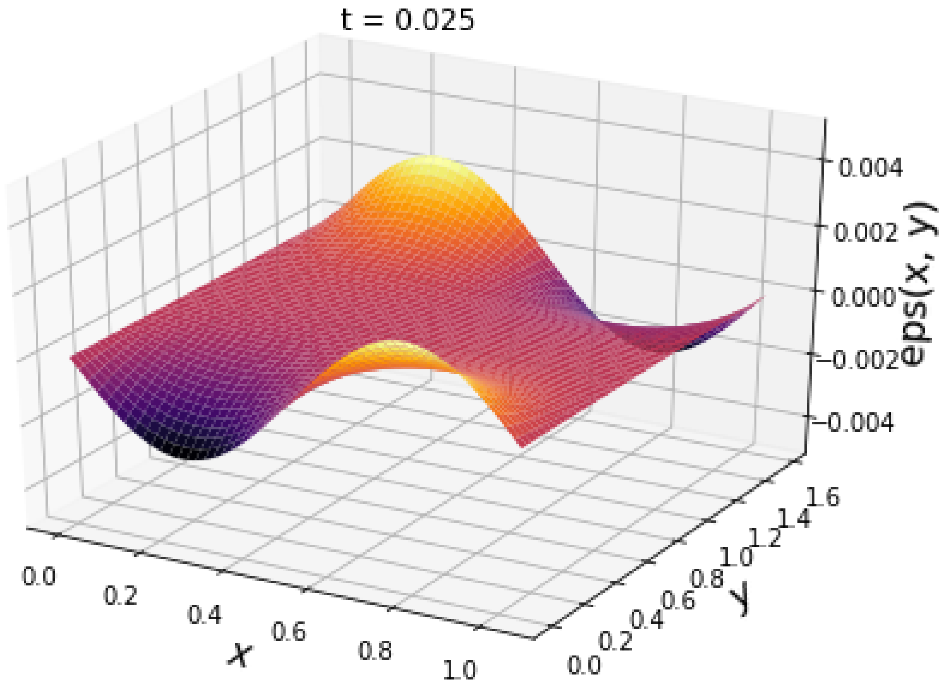

Рис. 13: Невязка при $t = 0.025$.

Заключение

Поставленную задачу можно решить как численно (используя метод переменных направлений и метод прогонки), так и аналитически. Сравнение с аналитическим решением показало, что максимальная относительная ошибка составила 1.16% , что говорит о допустимости такого численного решения. На границах области невязка достигает б**о**льшего значения, это особенность данного численного метода.

Приложение: код программы

Полный код программы можно найти по ссылке:
https://colab.research.google.com/drive/1bQeQ0y-zTUszHKwX7utpgnvexwJbHwi6?usp=sharing

Литература

[1] Курс лекций «Основы математического моделирования», Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., 2012 год.

[2] «Набор и вёрстка в системе LATEX», С.М. Львовский, 2003 год.