1 Динамическое программирование

Решение каждой задачи должно состоять из следующих частей:

- Вычисляемые функции
- Нвчальные значения функций
- Порядок вычисления функций
- Как найти ответ

1.1. В одном здании крышу поддерживают n металлических балок, стоящих в ряд. Сторож Петрович давно хочет сдать их в металлолом, но он опасается, что если спилить две подряд стоящие балки, то что-нибуть сломается. Вес i-й балки равен a_i. Сколько металлолома может безопасно сдать Петрович? Время $O(n)$.

1.2. Задано уравнение вида A + B = C, где A, B и C — неотрицательные целые числа длины n, в десятичной записи которых некоторые цифры заменены знаками вопроса. Например: ?2 + 34 = 4?. Требуется подставить вместо знаков вопроса цифры, чтобы это равенство стало верным. Время $O(n)$.

1.3. У Васи есть калькулятор, который умеет выполнять три операции: прибавить 1, умножить на 2 и умножить на 3. Какое наименьшее число операций необходимо для того, чтобы получить из числа 1 число n. Время $O(n)$.

1.4. Коля сочиняет специфическую музыку. В работе он использует только m нот, причем две последовательные ноты отличаются ровно на 1. Сколько различных композиций из n нот он может сочинить? Время $O(nm)$.

1.5. Огромному человекоподобному роботу опять нужно дойти из клетки $(0, 0)$ в клетку (n, m). На этот раз он не очень торопится, поэтому ему не обязательно идти кратчайшим путем, но при этом он хочет сделать не более k шагов. Найдите число способов сделать это. Время $O(nmk)$.

1.6. В очереди за концерт Стаса Михайлова стоит n женщин. Чтобы увеличить скорость движения очереди, две подряд идущие женщины могут договориться, и та, что идет раньше в очереди купит два билета: на себя и на следующую за ней. Женщина i тратит a_i секунд на покупку одного билета и b_i секунд на покупку двух билетов. За какое минимальное время все смогут купить билеты? Время $O(n)$.

1.7. У Пети есть n книг, отсортированных по названию. Книга i имеет высоту h_i. Петя хочет сложить книги в шкаф в отсортированном порядке: первые несколько книг стоят на первой полке, следующие несколько на второй, и т.д. На каждую полку помешается не более m книг. Высота полки равна высоте максимальной книге на полке. Помогите Пете распределить книги по полкам так, чтобы суммарная высота полок была минимальной. Время $O(nm)$

1.8. Петя и Вася играют в игру: в ряд выложены n карточек, на i-й карточке написано число a_i. За один ход можно взять одну, две или три карты с конца ряда. Игра заканчивается, когда нет больше карт. Выигрыввет тот, у кого в конце игры сумма чисел на картах максимальна. Кто выиграет при правильной игре? Время $O(n)$

1.9. Деревня Гадюкино представляет собой n домов, расположенных вдоль прямой дороги. Координата i-го дома a_i. Компания «интернет в каждый дом» хочет поставить в деревне несколько вайфай-точек, покрывающих все дома. Точка с радиусом покрытия r стоит $A + Br^2$ рублей. Найдите минимальную стоимость необходимых точек. Время $O(n^2)$.

2 Динамическое программирование 2

2.1. Дана последовательность, найдите максимальную по длине подпоследовательность, из последовательных чисел (например, 5, 6, 7, 8). Время $O(n)$.

2.2. Дана последовательность, найдите максимальную по длине подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией. Время $O(n^2)$ (придумайте сначала за n^3, а потом ускорьте).

2.3. Даны две **перестановки** чисел от 1 до n. Найдите их наибольшую общую возрастающую подпоследовательность (да, одновременно и общую, и возрастающую). Время $O(n^2)$.

2.4. Депутаты приняли закон, по которому все имена, которые даются детям, должны соответствовать шаблону, соответствующему региону. Шаблон состоит из букв, а так же символов «`?`» и «`*`». Символ «`?`» можно заменить на одну любую букву, символ «`*`» — на любую строку (в том числе пустую). Проверьте, что строка соответствует шаблону. Время $O(nm)$ (n и m — длина строки и шаблона).

2.5. Тяжело, когда ~~законы принимают идиоты~~ родители ребенка прописаны в разных регионах, ведь тогда имя ребенка должно соответствовать сразу двум шаблонам. Найдите самое короткое подходящее имя или скажите, что такого нет. Время $O(nm)$ (n и m — длины шаблонов).

2.6. Монтажнику Василию нужно сменить вывеску на здании. Вывеска состоит из n огромных букв. За один час работы Василий может либо убрать одну букву, либо вставить букву между какими-то двумя, либо заменить одну букву на другую. Посчитайте, за сколько часов Василий сможет заменить вывеску на нужную. Время работы $O(nm)$ (n и m — длина начальной и конечной строки).

2.7. Дана последовательность из n круглых, квадратных и фигурных скобок. Удалите минимальное число скобок, чтобы получилась правильная скобочная последовательность. Время $O(n^3)$.

2.8. Дан набор из n отрезков (l_i, r_i), нужно выбрать как можно больше отрезков так, чтобы они были вложены друг в друга (то есть, для любой пары отрезков $l_i < l_j < r_j < r_i$). Время $O(n \log n)$.

2.9. Вам нужно распилить бревно длины L на несколько частей. Точки распила уже отмечены, всего есть n точек, расстояние от левого конца до i-й точки распила a_i. Лесопилка за один раз может сделать один распил, при этом стоимость равна длине бревна, которое нужно распилить. В каком порядке нужно делать распилы, чтобы суммарная стоимость была минимальна? Время $O(n^3)$.

2.10. Чтобы сжать длинную строку, используется следующий формат: строка `D(X)` означает, что строку `X` надо повторить `D` раз. Такие конструкции могут вкладываться друг в друга, например «`3(2(A)2(B))C`» разжимается в «`AABBAABBAABBC`». Для данной строки длины n найдите самое короткое представление в таком виде. Время $O(n^3)$.

2.11. Пете нужно посчитать произведение n матриц. Матрица i имеет размер $a_i \times a_{i+1}$. Как вы знаете, чтобы посчитать произведение матриц $a \times b$ и $b \times c$, нужно сделать примерно abc действий. Помогите Пете выполнить все умножения в таком порядке, чтобы суммарное число действий было минимально. Время $O(n^3)$.

3 Динамическое программирование 3

3.1. Как изменится задача об оптимальной аппликатуре, если играют не на пианино, а на гитаре (скрипке, балалайке)?

3.2. Петя и Вася выиграли на олимпиаде $2n$ призов, суммарной стоимостью r. Они хотят разделить их между собой так, чтобы каждому досталось по n призов, а разница в суммарной стоимости была минимальна. Время $O(n^2r)$.

3.3. У мага есть n заклинаний и m единиц маны. Заклининие i тратит c_i маны и наносит врагу урон d_i. Убейте монстра с h здоровьем, потратив как можно меньше маны. Время $O(nm)$.

3.4. Коля решает задачу о рюкзаке со слитками жадным алгоритмом, он работает так. Пусть сейчас уже взяты некоторые слитки, и их суммарный вес равен T, тогда на следующем шаге алгоритма Коля возьмет слиток максимального веса среди тех, для которых $T + w_i \leq S$. Если таких нет, то алгоритм заканчивает работу. Приведите тест, на котором этот алгорим работает плохо, то есть отношение полученного им ответа к правильному ответу минимально.

4 Динамическое программирование 4

В этих заданиях время работы не указано специально, придумайте сами. Чем быстрее получится, тем лучше.

4.1. Как изменится задача о паркете, если доски имеют размер 3×1?

4.2. Как изменится задача о паркете, если кроме досок 2×1 можно использовать уголки 2×2 (квадрат без одной клетки)?

4.3. Дана таблица $n \times m$, каждая клетка которой может быть окрашена в один из двух цветов: белый или черный. Симпатичным узором называется такая раскраска, при которой не существует квадрата 2×2, в котором все клетки одного цвета. Даны n и m. Требуется найти количество симпатичных узоров для соответствующей таблицы.

4.4. Дана шахматная доска $n \times m$, некоторые клетки которой удалены. Поставить на доску максимальное число королей так, чтобы они не били друг друга.

4.5. Та же задача, но про коней.

4.6. Та же задача, но про слонов.

4.7. Та же задача, но про ладей.

4.8. Та же задача, но про ферзей.

4.9. В одной игре есть n героев, у каждого есть три параметра: сила, ловкость и интеллект, выражающиеся целыми числами от 1 до m. Пете нужно выбрать команду из k героев. Он считает, что для того, чтобы команда была более сбалансированной, нужно, чтобы произведение суммарной силы, суммарной ловкости и суммарного интеллекта было максимально. Помогите Пете составить команду.

4.10. Есть n вещей, вес i-й вещи w_i. Нужно перевезти их все на грузовиках с грузоподъемностью S. Найти минимальное число грузовиков, которое понадобится.

4.11. Даны n точек на плоскости, покрыть их k кругами радиуса R, минимизировать R.

4.12. У доктора Хауса есть n вариантов, чем может болеть пациент. Он может сделать m разных анализов, анализ i дает положительный результат, если $a_{ij} = 1$, где j — номер болезни пациента. Хаус хочет сделать минимальное число анализов, так чтобы гарантированно поставить диагноз.

5 Жадные алгоритмы

5.1. Есть n металлических пластин и две кислоты. Известно, что i-ю пластину первая кислота разъедает за время a_i, а вторая — за время b_i. Разъедание происходит равномерно по толщине. Нужно сделать из этих пластин перегородку между двумя кислотами. В каком порядке их нужно расставить?

5.2. Есть расписание из n лекций в виде пар b_i, e_i. Начальник по БЖД хочет устроить тринировку противопожарной безопасности. Для этого ему нужно несколько раз за день объявить пожарную тревогу, так, чтобы во время каждой лекции прозвучала хотя бы одна из них. Найдите минимальное число тревог, которые нужно устроить.

5.3. Опять есть n лекций, но всего одна аудитория. Нужно провести в ней как можно больше лекций.

5.4. Петя едет из Питера в Москву на машине. По пути ему встретятся n заправок, для каждой известно ее положение и стоимость литра бензина. Также известно, сколько бензина тратит машина на километр пути. Нужно доехать, потратив минимальную сумму.

5.5. Та же задача, но на этот раз Петя едет на велосипеде. За день он может проехать не более S километров. Вместо заправок его интересуют гостиницы, в которых можно переночевать. Для каждой гостиницы известно положение и стоимость ночи.

5.6. Есть n вражеских юнитов на прямой дороге. Одна бомба уничтожает всех юнитов в радиусе r. Сколько бомб нужно сбросить?

5.7. По данному числу n найдите максимальное число k, для которого n можно представить как сумму k различных натуральных слагаемых.

6 Минимальное остовное дерево

6.1. На болоте находятся n кочек. Легушонку нужно допрыгать от кочки 1 до кочки n. Он маленький и ему тяжело прыгать на большое расстояние. Найдите минимальное d такое, что есть путь, в котором все прыжки не больше d.

6.2. Вам нужно передать с одного компьютера на другой n файлов. Каждый файл — это битовый вектор размера m. Файл можно переслать либо просто как последовательность битов, либо как diff с другим файлом, уже пересланным ранее. В первом случае нужно будет передать m бит, во втором — $A + B \times d$ бит, где d — число различающихся битов, A и B — некоторые константы. Найдите минимальное число битов, которое нужно передать.

6.3. В стране n городов и $n - 1$ дорога. Однако дороги не образуют дерево, как можно было бы подумать. Вместо этого они образуют k компонент связности. Нужно перестроить $k-1$ дорогу (то есть убрать $k - 1$ и построить другие $k - 1$), так, чтобы получилось дерево. Из всех таких способов нужно выбрать такой, чтобы суммарная длина дорог была минимальна.

6.4. Есть n городов. Можно соединить два города дорогой, потратив $A \times len$ денег, где len — длина дороги, а можно построить в городе аэропорт, потратив B денег. Нужно за минимальное число денег соединить все города (чтобы от каждого до каждого можно было добраться с помощью дорог и самолетов).

6.5. Пусть в графе есть ребра одинакового веса. Тогда в нем может быть несколько минимальных остовных деревьев. Докажите, что любое из них может быть построено алгортмом Прима.

6.6. То же с алгоритмом Краскала.

6.7. Найти число различных минимальных остовных деревьев в данном графе.

7 Обход в ширину, обход в глубину

7.1. Проверьте, что заданный граф является двудольным.

7.2. Инспектору нужно проверить состояние дорог в городе, для этого он хочет проехать по каждой дороге в каждую сторону (все дороги двусторонние). Постройте кратчайший путь.

7.3. Правда ли, что если в графе существует путь из u в v и время выхода из вершины u больше, чем время выхода из вершины v, то u является предком v в дереве обхода в глубину?

7.4. Приведите пример дерева кратчайших путей в графе, которое не может быть получено алгоритмом поиска в ширину, вне зависимости от порядка выбора вершин.

7.5. Может ли в лесе обхода в глубину получиться дерево из одной вершины, если у этой вершины есть и входящие и исходящие ребра?

7.6. Правда ли, что для топологической сортировки графа можно сортировать не по убыванию времени выхода, а наоборот, по возрастанию времени входа?

7.7. Запустим алгоритм построения топологической сортировки на графе с циклами. Правда ли, что он минимизирует число ребер, ведущих справа налево?

7.8. Проверьте, что в данном графе есть только один способ построить топологическую сортировку.

7.9. Постройте лексографически минимальную топологическую сортировку (если представлять топологическую сортировку как последовательность номеров вершин).

7.10. Постройте в заданном ацикличном графе гамильтонов путь (если не знаете, что это, загуглите), или скажите, что его нет.

7.11. Есть фигура из клеточек на плоскости. Проверьте, есть ли в ней цикл из клеточек (то есть, простой цикл из клеток, в котором каждые две соседние клетки имеют общую сторону).

8 Компоненты сильной связности, мосты, точки сочленения, эйлеров цикл

8.1. Дан граф. Добавьте в него минимальное число ребер, чтобы он стал эйлеровым.

8.2. Петя складывает цепочки из слов, где каждое следующее слово начинается на ту же букву, на которую закончилось предыдущее. Задан словарь. Можно ли собрать цепочку, используя все слова из него по одному разу?

8.3. Дан ориентированный граф. Сколько ребер нужно добавить в него, чтобы он стал сильно связным?

8.4. Дан неориентированный граф. Сколько ребер нужно добавить в него, чтобы в нем не осталось мостов?

8.5. Вася любит слова из трех букв. Но не все, а только некоторые n. Он хочет выписать строку, в которой бы встречались все его любимые слова. Например, если он любит слова «ром», «она», «сон» и «мир» , он может выписать строку «миромсона». Помогите ему построить строку минимальной длины.

8.6. Дан ориентированный граф. Постройте граф, с таким же множеством вершин и минимальным числом ребер, чтобы его конденсация совпадала с конденсацией данного графа.

8.7. В городе n перекрестков, соединенных m односторонними дорогами. Нужно установить в городе несколько пунктов быстрого реагирования. Установить пункт на перекрестке i стоит c_i рублей. Сколько денег нужно потратить, чтобы до каждого перекрестка можно было бы доехать хотя бы из одного построенного пункта?

8.8. Может ли быть такое, что в связном неориентированном графе удаление любой вершины делает его несвязным? Может ли быть такое, что в сильно связном ориентированном графе удаление любой вершины делает его не сильно связным?

8.9. Дан неориентированный связный граф. Можно ли (и как?) ориентировать его ребра так, чтобы получился сильно связный граф?

8.10. Дан ориентированный граф. Найдите в нем цикл нечетной длины.

8.11. Дан неориентированный граф, в котором $2k$ вершин нечетной степени. Разбейте эти вершины на k пар и соедините вершины в каждой паре путем так, чтобы полученные пути не имели общих ребер.

9 2-SAT и смежные задачи

9.1. Есть n переменных, каждая из которых может принимать значения от 1 до k и m следствий вида $x_i = a \Rightarrow x_j = b$. Найдите значения, которые могут принимать переменные.

9.2. Дан неориентированный граф из n вершин и m рёбер. Каждое из рёбер графа изначально покрашено либо в красный, либо в синий цвет. За один ход разрешается выбрать произвольную вершину, и изменить цвета всех инцидентных ей рёбер, то есть все красные рёбра, заканчивающиеся в этой вершине, становятся синими, и наоборот, все синие становятся красными.

Найдите кратчайшую последовательность ходов, после выполнения которой все рёбра графа будут покрашены в один цвет.

9.3. Дан граф, нужно раскрасить его вершины в три цвета так, чтобы никакие две вершины, соединенные ребром не были одного цвета. Чтобы было интереснее, для каждой вершины задан цвет, в который ее запрещено красить.

9.4. Модифицируйте алгоритм решения 2-SAT таким образом, чтобы из всех возможных выдавался ответ, в котором число переменных, равных 1, максимально.

9.5. Модифицируйте алгоритм решения 2-SAT таким образом, чтобы из всех возможных выдавался лексикографически минимальный ответ (то есть последовательность из значений x_1, x_2, ..., x_n была лексографически минимальной).

9.6. Найдите следующее в лексикографическом порядке решение 2-SAT.

9.7. Есть n различных целых чисел: p_1, p_2, ..., p_n и константы a и b. Нужно разделить все числа на два множества, A и B, чтобы выполнялись условия: Если число x принадлежит множеству A, то число $a - x$ также должно принадлежать множеству A. Если число x принадлежит множеству B, то число $b - x$ также должно принадлежать множеству B.

9.8. Есть n городов, образующих кольцо — пары городов с номерами i и $i + 1$, а так же n и 1 соединены дорогами. Нужно построить m новых дорог, для каждой дороги известно какие города она должна соединять. Каждая дорога будет представлять собой непрерывную линию, находящуюся внутри, либо снаружи кольца. Дороги не должны иметь общих точек (кроме концов). Можно ли построить дороги? Если возможно, то какие дороги должны находиться внутри кольца, а какие снаружи?

9.9. Есть n булевых переменных и m утверждений вида $x_i = x_j$ или $x_i \neq x_j$. Найдите решение, в котором разница между числом переменных, равных 0 и числом переменных, равных 1, минимальна.

10 Кратчайшие пути

10.1. Дан граф, веса ребер равны 0 или 1. Найти кратчайший путь. Время $O(E)$.

10.2. Дан граф, веса ребер равны 1 или 2. Найти кратчайший путь. Время $O(E)$.

10.3. Дан граф, веса ребер — целые числа от 1 до k. Найти кратчайший путь. Время $O(E + kV)$.

10.4. Пусть вес пути — это не сумма весов ребер, а максимум. Модифицируйте алгоритм Дейкстры. Для каких еще функций работает алгоритм Дейкстры?

10.5. Пусть вес пути — это минимум из весов ребер. Как найти кратчайший путь?

10.6. Приведите пример графа с отрицательными рёбрами, на котором алгоритм Дейкстры работает неверно.

10.7. Приведите пример графа, на котором алгоритм Дейкстры делает $\Omega(E)$ успешных релаксаций.

10.8. Как найти все вершины, вес пути до которых может быть сколь угодно малым?

10.9. Приведите пример графа, на котором алгоритм Форда–Беллмана делает $\Omega(VE)$ успешных релаксаций.

10.10. Как модифицировать алгоритм нахождения потенциалов так, чтобы он работал в случае, если не все вершины достижимы из s?

10.11. Петя перепутал и написал алгоритм Флойда так:
`for i: for j: for k: d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j])`.
Постройте тест, на котором получившийся алгоритм работает неверно.

10.12. Как модифицировать алгоритм нахождения потенциалов так, чтобы он работал в случае, если не все вершины достижимы из s?

10.13. Модифицируйте алгоритм Флойда, чтобы найти в графе отрицательный цикл.

11 Строки: хеши

11.1. Бордером строки называется строка, которая является одновременно ее префиксом и суффиксом. Периодом строки s называется число p, такое что для всех допустимых i выполнено $s[i+p] = s[i]$. Докажите, что если у строки длины n есть border длины k, то у нее есть период $n - k$.

11.2. Докажите, что если у строки есть периоды p и q, причем $p+q \leq n$, то $\gcd(p, q)$ также является периодом этой строки.

11.3. Что будет, если в предыдущем задании убрать условие $p + q \leq n$?

11.4. Даны строки s и t. Можно ли в строке s удалить некоторые буквы так, чтобы получилась строка t?

11.5. Будем говорить, что строки a и b эквивалентны, если выполняется хотя бы одно из утверждений:

- Они равны.

- Если разделить строку a на две одинаковые по длине половины a_1 и a_2, а строку b — на две одинаковые по длине половины b_1 и b_2, то окажется, что верно одно из двух:
  - a_1 эквивалентно b_1, а a_2 эквивалентно b_2
  - a_1 эквивалентно b_2, а a_2 эквивалентно b_1

Даны две строки, проверьте, эквивалентны ли они. $O(n \log n)$.

В следующих заданиях предположим, что коллизий хеш-функции не бывает (то есть, если хеш-функции строк равны, то можно считать, что строки равны)

11.6. Дана строка. Надо отвечать на запросы: является ли заданная подстрока палиндромом? $O(\log n)$ на запрос.

11.7. Дана строка. Надо отвечать на запросы: являются ли две заданные строки анаграммами? $O(\log n)$ на запрос.

11.8. Дана строка. Найти все ее периоды. $O(n)$.

11.9. Дана строка. Надо отвечать на запросы: найти длину наибольшего общего префикса для двух заданных суффиксов. $O(\log n)$ на запрос.

11.10. Дана строка. Надо отвечать на запросы: для заданных двух подстрок, какая является меньшей лексикографически? $O(\log n)$ на запрос.

11.11. Даны две строки. Найдите их наибольшую общую подстроку. $O(n \log n)$.

11.12. Дана строка. Найти максимальную по длине строку, которая является ее префиксом, суффиксом, а так же встречается в середине строки. $O(n \log n)$.

12 Строки: префикс-функция, Z-функция

Задания надо решать без хешей

12.1. Дана строка. Найти все ее периоды. $O(n)$.

12.2. Дана строка. Найти все ее префиксы, которые являются палиндромами. $O(n)$.

12.3. Дана строка. Найти максимальную по длине строку, которая является ее префиксом, суффиксом, а так же встречается в середине строки. $O(n)$.

12.4. Дана строка. Для каждого ее префикса посчитайте, сколько раз он встречается в строке как подстрока. $O(n)$.

12.5. Постройте строку с заданной префикс-функцией. $O(n)$.

12.6. Постройте строку с заданной Z-функцией. $O(n)$.

12.7. Постройте Z-функцию по префикс-функции, не восстанавливая строку. $O(n)$.

12.8. Постройте префикс-функцию по Z-функции, не восстанавливая строку. $O(n)$.

12.9. Две последовательности чисел назовем эквивалентными, если одну можно получить из другой добавлением одного числа ко всем элементам (например, последовательности (3, 6, 4) и (7, 10, 8)). Даны массивы A и B, найдите массиве A все подмассивы, эквивалентные B. $O(n)$.

12.10. Даны строки S и T, найдите в S подстроки, отличающиеся от T одной буквой. $O(n)$.