Курс лекций по ОДУ (Часть II)

В. В. Басов

математико-механический факультет СПбГУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ 2016 год

Годовой Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читаемый на протяжении ряда лет на мат.-мех. факультете Санкт-Петербургского государственного университета студентам второго курса по специальностям прикладная математика, математическое обеспечение ЭВМ, механика и астрономия.

ГЛАВА V
Линейные системы

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Объект изучения.

В параграфе 5 главы III было введено понятие линейной системы $y' = P(x)y + q(x)$ доказаны теоремы о существовании, единственности и продолжимости ее решений в области $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$ при условии, что элементы матрицы $P(x)$ и компоненты вектора $q(x)$, называемого неоднородностью системы, непрерывны на (a,b).

В этом параграфе будут изучаться вещественная ЛОС

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + ... + p_{1n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + ... + p_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{5.1}$$

или $y' = P(x)y$, где матрица $P = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ непрерывна на (a,b).

Любое решение ЛОС (5.1) — это непрерывно дифференцируемая на интервале (a,b) n-мерная вектор функция $y = \varphi(x)$, для которой выполняется тождество $\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} P(x)\varphi(x)$.

При этом решения ЛОС (5.1) образуют линейное пространство, т. е. если $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x)$ — решения (5.1), то для $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$ линейная комбинация $\alpha_1\varphi^{(1)}(x) + \alpha_2\varphi^{(2)}(x)$ также является решением.

Замечание 1. В дальнейшем для удобства любую матрицу будем обозначать заглавной буквой, а любой вектор — прописной.

2^0. Линейная зависимость и независимость решений.

Рассмотрим k произвольных вектор функций $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$, заданных на интервале (a,b). Они линейно зависимы на (a,b), если существует такой постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$, что

$$\alpha_1\psi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k\psi^{(k)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

А если это тождество справедливо только при $\alpha = 0$, то вектор функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$ линейно независимы на (a,b).

Очевидно, что если в какой-либо точке $x_0 \in (a,b)$ постоянные векторы $\psi^{(1)}(x_0),\ldots,\psi^{(k)}(x_0)$ — линейно независимы, то функции $\psi^{(1)}(x),\ldots,\psi^{(k)}(x)$ линейно независимы на (a,b) (от противного).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. А именно, если для $\forall\, x_0 \in (a,b)$ векторы $\psi^{(1)}(x_0),\ldots,\psi^{(k)}(x_0)$ линейно зависимы, то функции $\psi^{(1)}(x),\ldots,\psi^{(k)}(x)$ не обязательно линейно зависимы.

Например, функции $\psi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $\psi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$ поточечно линейно зависимы для каждого $x \in \mathbb{R}^1$, но при разных x линейная комбинация $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ обращается в нуль при разных α_1 и α_2.

Однако для решений системы (5.1) обратное утверждение верно.

Теорема (о линейной зависимости решений ЛОС). *Предположим, что $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(k)}(x)$ — решения системы (5.1) и имеется такая точка $x_0 \in (a,b)$, в которой векторы $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(k)}(x_0)$ линейно зависимы. Тогда вектор функции $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(k)}(x)$ линейно зависимы на (a,b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию найдутся $x_0 \in (a,b)$ и $\alpha^0 = (\alpha_1^0,\ldots,\alpha_k^0) \neq 0$ такие, что $\alpha_1^0\varphi^{(1)}(x_0) + \ldots + \alpha_k^0\varphi^{(k)}(x_0) = 0$. Тогда в силу линейности пространства решений функция $\varphi(x) = \alpha_1^0\varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k^0\varphi^{(k)}(x)$ будет решением системы (5.1) на (a,b), причем $\varphi(x_0) = 0$. Но тривиальное решение ЛОС $y(x) \equiv 0$ имеет те же начальные данные. Значит по теореме единственности $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. $\alpha_1^0\varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k^0\varphi^{(k)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$ с $\alpha^0 \neq 0$. $\square$

3^0. Определитель Вронского (ОВ).

Пусть $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ — произвольные решения системы (5.1), определенные на (a,b). Составим из них квадратную матрицу

$$\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n,$$

т. е. столбцами матрицы $\Phi(x)$ являются решения системы (5.1).

Df. *Функция $W(x) = \det\Phi(x)$ называется определителем Вронского (ОВ), построенном на решениях $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ ЛОС (5.1).*

Теорема (о связи между линейной зависимостью решений и ОВ). *Для того чтобы решения $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ ЛОС (5.1) были линейно зависимы на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы построенный на них определитель Вронского $W(x)$ обращался в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть решения $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ ЛОС линейно зависимы на (a,b), т. е. $\exists\,\alpha^0\neq 0:$ $\alpha_1^0\varphi^{(1)}(x)+\ldots+\alpha_n^0\varphi^{(n)}(x)\overset{(a,b)}{\equiv}0$ или линейная однородная алгебраическая система $\Phi(x)\alpha=0$ имеет нетривиальное решение α^0 для $\forall\,x\in(a,b)$. Тогда $W(x_0)=0$ для $\forall\,x_0\in(a,b)$ (доказали больше).

Необходимость. Пусть $W(x_0)=0$. Тогда $\exists\,\alpha^0\neq 0:\ \Phi(x_0)\alpha^0=0$ или $\alpha_1^0\varphi^{(1)}(x_0)+\ldots+\alpha_n^0\varphi^{(n)}(x_0)=0$, т. е. линейно зависимы векторы $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(n)}(x_0)$, а значит, по теореме о линейной зависимости решений ЛОС вектор функции $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(k)}(x)$ линейно зависимы на (a,b). $\square$

Следствие 1. *Для того чтобы n решений системы (5.1) были линейно независимы на (a,b), необходимо и достаточно чтобы ОВ $W(x)$ не обращался в нуль хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$.*

Доказательство следствия в обе стороны — от противного.

4^0. Фундаментальная система решений (ФСР), формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений (ФСР) называют любые n линейно независимых на (a,b) решений $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ системы (5.1). Составленную из ФСР матрицу $\Phi(x)=\{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n$ называют фундаментальной матрицей (ФМ).*

Таким образом, столбцами ФМ являются решения системы (5.1), линейно независимые на (a,b).

Из следствия 1 вытекает, что решения $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ ЛОС образуют ФСР, если $\exists\,x_0\in(a,b)$, что векторы $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(n)}(x_0)$ линейно независимы, т. е. $W(x_0)=\det\Phi(x_0)\neq 0$.

Следующее простое утверждение названо теоремой в связи с важностью его осознания.

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОС (5.1) существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о будет проведено конструктивно, т. е. будет заключаться в непосредственном построении ФСР.

Выберем произвольным образом неособую постоянную матрицу $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и точку $x_0\in(a,b)$.

По теореме существования для $\forall j = \overline{1,n}$ существует решение $y = \varphi^{(j)}(x)$ с начальными данными $x_0,\ a_{1j}, \ldots, a_{nj}$.

Возникшие таким образом решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ЛОС (5.1) линейно независимы на (a,b), поскольку $W(x_0) = \det A \neq 0$. $\square$

Df. *ФМ* $\Phi(x)$ *называется нормированной в точке* $x_0 \in (a,b)$, *если* $\Phi(x_0) = E$.

Теорема (об общем решении ЛОС). *Пусть* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *— фундаментальная система решений, тогда непрерывная вектор функция* $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n) = c_1\varphi^{(1)}(x) + \ldots + c_n\varphi^{(n)}(x)$ *является общим решением ЛОС (5.1) в области* $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку линейная комбинация решений ЛОС (5.1) есть решение, то для любого постоянного вещественного вектора $c = (c_1, \ldots, c_n)$ функция $y = \varphi(x,c)$ из условия теоремы будет решением системы (5.1) на интервале (a,b).

Выберем произвольные начальные данные x_0, y^0 из области G, т. е. $x_0 \in (a,b)$, $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$, и подставляем их в формулу $y = \varphi(x,c)$, получая линейную алгебраическую систему

$$y^0 = c_1\varphi^{(1)}(x_0) + \ldots + c_n\varphi^{(n)}(x_0) \quad \text{или} \quad \Phi(x_0)c = y^0$$

относительно вектора c, у которой определитель матрицы $\Phi(x_0)$ отличен от нуля не зависимости от выбора x_0, так как $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ и $\det\Phi(x) = W(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a,b)$.

Следовательно линейная алгебраическая система имеет единственное решение $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)$ и функция $y = \varphi(x, c^0)$ — это решение задачи Коши ЛОС (5.1) с начальными данными x_0, y^0, определенное на интервале (a,b). $\square$

Очевидно, что в векторной записи общее решение ЛОС имеет вид:

$$y = \Phi(x)c.$$

5^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Хотя ЛОС (5.1) предполагается вещественной, она вполне может иметь комплексные решения, которые могут входить в ФСР.

Но интерес, естественно, представляют вещественные ФСР.

Покажем, что от комплексной ФСР ЛОС (5.1) так же, как и от комплексной ФСР ЛОУ (4.3), всегда можно перейти к вещественной.

Для этого используем очевидные свойства комплексных решений системы (5.1) с вещественной матрицей $P(x)$.

А именно, если вектор функция $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ — решение (5.1), то вещественные функции $u(x)$, $v(x)$ наряду с функцией $\overline{y}(x) = u(x) - \mathrm{i}v(x)$ являются решениями ЛОС, причем комплексно-сопряженные решения $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ линейно независимы на (a,b).

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОС). *Пусть набор* $\Theta_1 = \{\varphi^{(1)}(x), \overline{\varphi}^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(l)}(x), \overline{\varphi}^{(l)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, *где* $\varphi^{(j)} = u^{(j)} + \mathrm{i}v^{(j)}$ $(j = \overline{1,l})$, $\varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(1)}$ *вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОС (5.1). Тогда набор* $\Theta_2 = \{u^{(1)}(x), v^{(1)}(x), \ldots, u^{(l)}(x), v^{(1)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ *является вещественной фундаментальной системой решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку набор Θ_1 — это ФСР, построенный по нему определитель Вронского $W_1(x) \ne 0$.

Набор Θ_2 состоит из n вещественных решений. Остается установить их линейную независимость, т. е. доказать, что построенный по ним определитель Вронского $W_2(x) \ne 0$ для $\forall\, x \in (a,b)$.

Имеет место следующая цепочка равенств, основанная на свойствах определителей: $0 \ne W_1(x) = |u^{(1)} + \mathrm{i}v^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| =$
$|u^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| + \mathrm{i}\,|v^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| =$
$|u^{(1)}, u^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| - \mathrm{i}\,|u^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| + \mathrm{i}\,|v^{(1)}, u^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| +$
$|v^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| = -2\mathrm{i}\,|u^{(1)}, v^{(1)}, u^{(2)} + \mathrm{i}v^{(2)}, u^{(2)} - \mathrm{i}v^{(2)} \ldots, \varphi^{(n)}| =$
$(-2\mathrm{i})^l\,|u^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, u^{(l)}, v^{(l)}, \varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| = (-2\mathrm{i})^{2l} W_2(x)$. $\square$

$\mathbf{6^0}$. Формула Лиувилля.

Оказывается, что вычислить определитель Вронского удается, даже не зная ФСР, по которой он строится. Достаточно только задать начальные данные для решений, входящих в ФСР, или $W(x_0)$.

Пусть $\Phi(x) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n$ — ФМ ЛОС (5.1) на (a,b). Тогда ОВ $W(x) = \det \Phi(x) \ne 0$ для $\forall\, x \in (a,b)$.

Для $\forall\, i = \overline{1,n}$ ОВ $W(x)$ разложим по элементам i-й строки:

$$W(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\varphi_i^{(j)}(x),$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\varphi_i^{(j)}$.

Это позволяет рассматривать $W(x)$ как сложную функцию, т. е. как функцию от элементов матрицы $\Phi(x)$, которые, в свою очередь, являются функциями x.

Поэтому $\partial W(\varphi_1^{(1)},\dots,\varphi_1^{(n)},\dots,\varphi_n^{(1)},\dots,\varphi_n^{(n)})/\partial\varphi_i^{(j)} = A_{ij}(x)$.

С другой стороны, для $\forall\, j=\overline{1,n}$ решение $y=\varphi^{(j)}(x)$ ЛОС (5.1) по определению удовлетворяет тождеству ${\varphi^{(j)}}'(x) \equiv P(x)\varphi^{(j)}(x)$ или покомпонентно: ${\varphi_i^{(j)}}'(x) \equiv \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)\varphi_k^{(j)}$ $(i=\overline{1,n})$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$W'(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W}{\partial\varphi_i^{(j)}}{\varphi_i^{(j)}}' = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\sum_{k=1}^n p_{ik}\varphi_k^{(j)} = \sum_{i,k=1}^n p_{ik}\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_k^{(j)}.$$

Но произведение элемента одной строки на алгебраическое дополнение элемента другой строки равно нулю, т. е. $\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_{kj}=0$, если $i\neq k$. Следовательно

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n p_{ii}(x)\sum_{j=1}^n A_{ij}(x)\varphi_i^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n p_{ii}(x)W(x).$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя по s от x_0 до x, получаем формулу Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(\int_{x_0}^x Tr\,P(s)\,ds\Big),$$

в которой $Tr\,P$ — это след матрицы P.

Таким образом, если задать $\Phi(x_0)$ — начальные данные для фундаментальной системы решений, то по формуле Лиувилля, не зная самих решений выбранной ФСР, можно на всем интервале (a,b) в явном виде вычислить $W(x)=\det\Phi(x)$, который зависит только от диагональных элементов матрицы $P(x)$ системы (5.1).

7^0. Матричные уравнения.

В этом пункте дадим ответы на два простых, но очень важных вопроса: как из одной фундаментальной матрицы получить другую и как связаны между собой любые две фундаментальные матрицы?

Но сначала напомним правила дифференцирования матриц.

Положим $\Phi(x)=\{\varphi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, тогда $\Phi'(x)=\{\varphi'_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$.

Кроме того, поскольку $\Phi(x)\Psi(x)=\{\sum_{k=1}^n\varphi_{ik}(x)\psi_{kj}(x)\}_{i,j=1}^n$, то $(\Phi(x)\Psi(x))'=\{\sum_{k=1}^n(\varphi'_{ik}(x)\psi_{kj}(x)+\varphi_{ik}(x)\psi'_{kj}(x)\}_{i,j=1}^n=\Phi'\Psi+\Phi\Psi'$.

Пусть $\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)$ — любые n решений системы (5.1), а $\Phi=(\varphi^{(1)},\ldots,\varphi^{(n)})$ — матрица, столбцами которой являются эти решения. Тогда $\Phi'(x)=\{{\varphi_i^{(j)}}'(x)\}_{i,j=1}^n=\{\sum_{k=1}^n p_{ik}(x)\varphi_k^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n=P(x)\Psi(x)$, а значит, матрица $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta'=P(x)\Theta, \tag{5.1^m}$$

где $\Theta=\Theta(x)$ — это матрица размерности $n\times n$.

Df. *Матрица $\Phi(x)$, удовлетворяющая матричному уравнению (5.1^m), называется матричным решением системы (5.1).*

Теорема (о связи между фундаментальными матрицами ЛОС). *Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1), тогда*

1) для любой постоянной квадратной матрицы C матрица $\Psi(x)=\Phi(x)C$ является решением уравнения (5.1^m), причем если $\det C\neq 0$, то $\Psi(x)$ – фундаментальная матрица;

2) для любого матричного решения $\Psi(x)$ системы (5.1) найдется такая постоянная квадратная матрица C, что $\Psi(x)=\Phi(x)C$, причем если $\Psi(x)$ — ФМ, то матрица C — неособая.

Доказательство.

1) Дифференцируя матрицу $\Psi(x)$, получаем

$$\Psi'=(\Phi C)'=\Phi'C+\Phi C'=(P\Phi)C+0=P(\Phi C)=P\Psi.$$

Следовательно $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (5.1^m) и $\det\Psi\neq 0$, если $\det C\neq 0$.

2) Поскольку определитель любой ФМ отличен от нуля, можно ввести матрицу $C(x)=\Phi^{-1}(x)\Psi(x)$.

Покажем, что $C(x)$ — постоянная матрица.

Имеем $\Phi C=\Psi$. Дифференцируя это равенство по x, получаем $\Phi'C+\Phi C'=\Psi'$, или $P\Phi C+\Phi C'=P\Psi=P\Phi C$, откуда $\Phi C'=0$.

Домножим слева на Φ^{-1}, тогда $C'=0$ и $C(x)$ — постоянна.

Если Ψ — неособая, то и матрица $C=\Phi^{-1}\Psi$ — неособая. □

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. Объект изучения и постановка задачи.

Итак, в § 1 была изучена ЛОС (5.1) $y' = P(x)y$ с непрерывной на интервале (a, b) матрицей $P(x)$. Было сделано следующее:

доказано существование и единственность решения с произвольными начальными данными $x_0 \in (a, b)$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и его продолжимость на весь интервал (a, b);

доказано существование n линейно независимых на интервале (a, b) решений ЛОС (5.1), называемых фундаментальной системой решений (ФСР), и возможность овеществления любой ФСР;

установлена простая структура общего решения, которым является линейная комбинация решений из любой ФСР;

выведена формула Лиувилля, позволяющая вычислять определитель Вронского (ОВ) $W(x)$, являющийся определителем фундаментальной матрицы, столбцы которой образуют решения ФСР, через коэффициенты $p_{11}(x), \ldots, p_{nn}(x)$ исходной ЛОС.

Однако, не существует методов, позволяющих решить ЛОС (5.1) в явном виде, т. е. не удается вывести формулы, определяющие n линейно независимых решений произвольной системы (5.1) непосредственно через элементы матрицы $P(x)$, используя только элементарные функции.

Однако имеется важнейший класс систем (5.1), любую систему из которого всегда можно проинтегрировать, — это класс линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.

Займемся решением такой задачи.

Рассмотрим ЛОС порядка n с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay \qquad (5.1^c),$$

где вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — постоянная матрица.

Поскольку постоянная матрица непрерывна на всей вещественной оси, по теореме о продолжимости ЛОС любое решение системы (5.1^c) продолжимо на $\mathbb{R}^1$.

Для того чтобы выписать ФСР системы (5.1^c), потребуется ряд результатов из теории матриц, связанных с подобными матрицами, жордановой матрицей, матричными многочленами и аналитическими функциями от матриц.

2^0 Подобные матрицы.

Первым шагом на пути решения системы (5.1^c) является естественная попытка максимально ее упростить при помощи обратимой линейной замены переменных с постоянной квадратной матрицей S.

Поэтому сделаем в системе (5.1^c) замену

$$y = Sz \qquad (\det S \neq 0),$$

в результате которой $Sz' = ASz$ или

$$z' = Bz \qquad (B = S^{-1}AS).$$

Df. *Матрицы A и B, связанные соотношением $B = S^{-1}AS$, называются подобными матрицами, что обозначается так: $A \sim B$.*

Таким образом линейная неособая замена преобразует матрицу коэффициентов системы (5.1^c) в подобную и наиболее простую матрицу для системы (5.1^c) придется искать среди подобных матриц.

Напомним, что множество постоянных $n \times n$ матриц образует некоммутативное кольцо с единицей по умножению.

Нейтральный элемент кольца "единица" представлен единичной матрицей E, а некоммутативность означает, что, вообще говоря, $AB \neq BA$. Именно поэтому при умножении матричного выражения на какую-либо матрицу надо указывать слева или справа это действие будет производиться (аналогично при вынесении из ...).

Приведем четыре свойства подобных матриц.

1) Эквивалентность.

Утверждение 1. *Отношение подобия является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Очевидным образом для подобных матриц выполняются при свойства отношения эквивалентности: $A \sim A$ — рефлексивность, $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ — симметричность, $A \sim B$ и $B \sim C \;\Rightarrow\; A \sim C$ — транзитивность. $\square$

2) Полиномы от матриц.

Df. Функция $P_m(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_mA^m=\sum_{k=0}^m a_kA^k$ называется полином степени m от матрицы A.

Утверждение 2. *Пусть* $B=S^{-1}AS$, *тогда* $P(B)=S^{-1}P(A)S$.

Доказательство. $P(B)=\sum_{k=0}^m a_kB^k=\sum_{k=0}^m a_k(S^{-1}AS)^k$. Но $(S^{-1}AS)^k=\underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\ldots(S^{-1}AS)}_{k}=S^{-1}A^kS$, так как $S^{-1}S=E$. Вынося из каждого слагаемого суммы матрицу S^{-1} влево, а матрицу S вправо, получаем:

$P(B)=\sum_{k=0}^m a_kS^{-1}A^kS=S^{-1}(\sum_{k=0}^m a_kA^k)S=S^{-1}P(A)S.$ $\square$

3) Характеристический полином матрицы.

Df. *Функция* $f_A(\lambda)=det(A-\lambda E)$ *называется характеристическим полином матрицы* A.

Непосредственно из определения определителя матрицы вытекает, что $f_A(\lambda)=(-\lambda)^n+c_1(-\lambda)^{n-1}+\ldots+c_n$, причем $c_1=\operatorname{Tr}A$, $c_n=\det A$. Кроме того, нули характеристического полинома $f_A(\lambda)$ — это собственные числа матрицы A.

Утверждение 3. *Если* $A\sim B$, *то* $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $B=S^{-1}AS$, тогда

$\det(B-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}ES)=\det(S^{-1}(A-\lambda E)S)=\det(S^{-1})\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det S=\det(A-\lambda E).$ $\square$

Следовательно $\operatorname{Tr}A=\operatorname{Tr}B$, $\det A=\det B$.

4) Жорданова форма матрицы.

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу $J=\operatorname{diag}\{J_0,\ldots,J_q\}$, у которой $J_0=\operatorname{diag}\{\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(p)}\}$ — чисто-диагональная матрица, для $\forall\,\nu=\overline{1,q}$ матрица $J_\nu=\begin{pmatrix}\lambda_\nu & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_\nu & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_\nu & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_\nu\end{pmatrix}_{r_\nu\times r_\nu\quad(r_\nu\geq 2)}$

или $J_\nu=\lambda_\nu E+Z_\nu$, причем $Z_\nu=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}_{r_\nu\times r_\nu}$ —

это нильпотентная матрица, а значит, Z_ν^2 имеет все нули, кроме единичной второй наддиагонали, и т. д. Наконец, $Z_\nu^{r_\nu-1}$ сохраняет единственную единицу в правом верхнем углу, а Z_ν в степени r_ν и в больших степенях — это нулевые матрицы.

Df. *Матрица J указанной структуры называется жордановой или жордановой формой.*

Утверждение 4 (теорема Жордана). *Любая матрица A подобна некоторой жордановой форме J, т. е. $\exists\, S:\ J = S^{-1}AS$.*

Поскольку собственные числа у подобных матриц совпадают, то

$$c_1 = TrA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad c_n = \det A = \prod_{i=0}^{n} \lambda_i,$$

где c_1 и c_n — коэффициенты характеристического полинома $f_A(\lambda)$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матриц A и J.

3^0. **Матричные степенные ряды.**

Рассмотрим бесконечную последовательность матриц $\{A_k\}_{k=1}^\infty$, в которой $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^n$, а элементы $a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{R}^1$ (или $\in \mathbb{C}$).

Df. *Матричная последовательность $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ имеет предел $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, если для $\forall\, i,j = \overline{1,n}$ элементы $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ при $k \to \infty$.*

Таким образом сходимость последовательности матриц означает поэлементную сходимость.

Пусть степенной ряд скалярного аргумента $\mathfrak{F}_x = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ абсолютно сходится при $|x| < \rho$, причем ρ — радиус сходимости $\mathfrak{F}_x$.

Рассмотрим бесконечный степенной ряд от матрицы A:

$$\mathfrak{F}_A = \sum\nolimits_{k=0}^\infty a_k A^k = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots\,,$$

тогда матрица $S_m(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$ — это его m-я частичная сумма.

Df. *Матричный степенной ряд $\mathfrak{F}_A$ сходится, если сходится последовательность его частичных сумм, т. е. $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_m(A) = F(A)$, называемый суммой ряда $\mathfrak{F}_A$. В этом случае пишут $\mathfrak{F}_A = F(A)$.*

Замечание 2. К сожалению, в случае сходимости матричного степенного ряда $\mathfrak{F}_A$, как правило, $F(A) \neq \{F(a_{ij})\}_{i,j=1}^n$.

Задачу нахождения суммы $\mathfrak{F}_A$ будем решать поэтапно.

1) Пусть J — жорданова форма матрицы A, тогда найдется неособая матрица S, что $J = S^{-1}AS$ или $A = SJS^{-1}$.

С учетом утверждения 2 имеем:

$S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k (SJS^{-1})^k = S(\sum_{k=0}^{m} a_k J^k)S^{-1} = S\, S_m(J)\, S^{-1}$.

Следовательно, $F(A)$ существует одновременно с $F(J)$ и, если они существуют, то $F(A) = SF(J)S^{-1}$.

2) По определению $J = \operatorname{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_q\}$. С учетом того, что все суммы конечны, имеем:

$S_m(J) = \sum_{k=0}^{m} a_k (\operatorname{diag}\{J_0, \ldots, J_q\})^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \operatorname{diag}\{J_0^k, \ldots, J_q^k\} = \operatorname{diag}\{\, \sum_{k=0}^{m} a_k J_0^k, \ldots, \sum_{k=0}^{m} a_k J_q^k\,\} = \operatorname{diag}\{S_m(J_0), \ldots, S_m(J_q)\}$.

Поэтому $F(J)$ существует одновременно с $F(J_0), \ldots, F(J_q)$ и, если все они существуют, $F(J) = \operatorname{diag}\{F(J_0), \ldots, F(J_q)\}$.

3) Матрица $J_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}\}$ — диагональная. Поэтому матрица $F(J_0) = \operatorname{diag}\{F(\lambda_0^{(1)}), \ldots, F(\lambda_0^{(p)})\}$, если все собственные числа $\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}$ попадают в круг сходимости абсолютно сходящегося степенного ряда $\mathfrak{F}_x$. Иначе $F(J_0)$ не существует.

4) Матрица $J_\nu = \lambda_\nu E + Z_\nu$ — двухдиагональная и имеет размерность $r_\nu \times r_\nu \quad (r_\nu \geq 2, \quad \nu = \overline{1,q})$.

По определению $S_m(J_\nu) = \sum_{k=0}^{m} a_k (\lambda_\nu E + Z_\nu)^k$.

Поскольку матрицы E и Z_ν коммутируют, то $(\lambda_\nu E + Z_\nu)^k$ можно разложить по формуле бинома: $(\lambda_\nu E + Z_\nu)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda_\nu^{k-j} Z_\nu^j$.

Но матрица Z_ν нильпотентна, поэтому для всякого k последняя сумма содержит не более чем r_ν слагаемых $(Z_\nu^{r_\nu} = 0)$, т. е.

$$(\lambda_\nu E + Z_\nu)^k = \lambda_\nu^k E + k\lambda_\nu^{k-1} Z_\nu + \ldots + C_k^{r_\nu - 1} \lambda_\nu^{k - r_\nu + 1} Z_\nu^{r_\nu - 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_\nu^k & \dfrac{k}{1!}\lambda_\nu^{k-1} & \ldots & \dfrac{k(k-1)\ldots(k-r_\nu+2)}{(r_\nu-1)!}\lambda_\nu^{k-r_\nu+1} \\ 0 & \lambda_\nu^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{k}{1!}\lambda_\nu^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_\nu^k \end{pmatrix},$$

поскольку $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!} = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j!}$.

Положим $c_k^{(j)} = k(k-1)\ldots(k-j+1)$.

В результате $S_m(J_\nu) =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_\nu^k & \frac{1}{1!}\sum_{k=0}^{m} a_k k\lambda_\nu^{k-1} & \dots & \frac{1}{(r_\nu-1)!}\sum_{k=0}^{m} a_k c_k^{(r_\nu-1)}\lambda_\nu^{k-r_\nu+1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_\nu^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!}\sum_{k=0}^{m} k a_k\lambda_\nu^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_\nu^k \end{pmatrix}.$$

В полученном равенстве перейдем к пределу при $m\to\infty$.

Если $|\lambda_\nu| < \rho$ для $\forall\,\nu = \overline{1,q}$, где ρ — радиус сходимости ряда $\mathfrak{F}_x$, то предел существует и

$$F(J_\nu) = \begin{pmatrix} F(\lambda_\nu) & \frac{1}{1!}F'(\lambda_\nu) & \dots & \frac{1}{(r_\nu-1)!}F^{(r_\nu-1)}(\lambda_\nu) \\ 0 & F(\lambda_\nu) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!}F'(\lambda_\nu) \\ 0 & 0 & \dots & F(\lambda_\nu) \end{pmatrix}_{r_\nu\times r_\nu}.$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема (об аналитических функциях от матриц). *Предположим, что* $\mathfrak{F}_x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *— абсолютно сходящийся при* $|x| < \rho$ *степенной ряд, и пусть* A *— произвольная постоянная* $n\times n$ *матрица, все собственные числа которой по модулю меньше чем* ρ. *Тогда матричный степенной ряд* $\mathfrak{F}_A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ *сходится и его сумма* $F(A) = SF(J)S^{-1}$, *где* J *— жорданова форма матрицы* A, *а постоянная матрица* S *такова, что* $J = S^{-1}AS$. *Матрица* $F(J) = \operatorname{diag}\{F(J_0), F(J_1), \dots, F(J_q)\}$ *является верхнетреугольной с главной диагональю, образованной значениями функции* F *от собственных чисел* $\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(p)}, \lambda_1$ *кратности* $r_1, \dots, \lambda_q$ *кратности* r_q *матриц* J *или* A $(p+r_1+\ldots+r_q = n,\ \ r_\nu \geq 2,\ \ p,q \geq 0)$.

4^0. Экспонента и логарифм матрицы.

а) Определим экспоненту матрицы следующим образом.

Df. $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$.

Ряд e^λ сходится при всех λ, поэтому все собственные числа матрицы A попадают в круг сходимости ($\rho = +\infty$).

Таким образом e^A определена для любой матрицы A и ее определитель, равный произведению экспонент от собственных чисел A, отличен от нуля.

Отметим также, что $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$.

б) Вспомним сначала, как определяется логарифм комплексной переменной.

Для $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ по определению функция $\operatorname{Ln} z$ такова, что $e^{\operatorname{Ln} z} = z$. Тогда $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$, где многозначная функция $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Тем самым, для каждого k получаем свою ветвь аргумента и действительно $e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|} e^{\mathrm{i} \arg z} e^{2\pi k \mathrm{i}} = |z| e^{\mathrm{i} \arg z} = z$.

Кроме того, степенной ряд $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} z^k$ сходится, если $|z| < 1$.

Определим логарифм неособой матрицы аналогичным образом.

Df. *Матрица* $\operatorname{Ln} A$ *называется логарифмом матрицы* A, *если* $\det A \neq 0$ *и* $e^{\operatorname{Ln} A} = A$.

Докажем существование $\operatorname{Ln} A$, поэтапно упрощая матрицу A, как это делалось в предыдущем пункте.

Пусть $A = SJS^{-1}$, где J — жорданова форма A, и допустим, что $\operatorname{Ln} J$ существует. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} A = S \operatorname{Ln} J S^{-1}.$$

В самом деле, с учетом п. $3^0, 1)$ $\quad e^{S \operatorname{Ln} J S^{-1}} = S e^{\operatorname{Ln} J} S^{-1} = SJS^{-1}$.

Пусть $J = \operatorname{diag}\{J_0, \dots, J_q\}$, и допустим, что существуют матрицы $\operatorname{Ln} J_0, \dots, \operatorname{Ln} J_q$. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} J_0, \dots, \operatorname{Ln} J_q\},$$

так как с учетом п. $3^0, 2)$ $\quad e^{\operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} J_0, \dots, \operatorname{Ln} J_q\}} = \operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln} J_0}, \dots, e^{\operatorname{Ln} J_q}\}$.

Пусть $J_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}\}$ и $\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)} \neq 0$. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} J_0 = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}\},$$

поскольку $e^{\operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}\}} = \operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}}, \ldots, e^{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}}\} = J_0$.

Пусть $J_\nu = \lambda_\nu E + Z$, где $\nu = \overline{1,q}$, $\lambda_\nu \neq 0$, матрицы E, Z имеют размерность $r_\nu \geq 2$, коммутируют и Z нильпотентна.

В сложившейся ситуации можно воспользоваться формулой логарифма произведения, записав матрицу J_ν в виде произведения двух матриц: $J_\nu = \lambda_\nu E(E + \lambda_\nu^{-1} Z)$. Тогда

$$\operatorname{Ln} J_\nu = \operatorname{Ln}\lambda_\nu E + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}\lambda_\nu^{-k}Z^k \qquad (\nu = \overline{1,q}).$$

Убедимся в этом.

Вопрос о сходимости разложения функции $\operatorname{Ln}(E + \lambda_\nu^{-1}Z)$ в степенной ряд по аналогии с $\operatorname{Ln}(1+z)$ не стоит, поскольку этот ряд конечен в силу нильпотентности Z, и определяется он однозначно.

Далее, $e^{\operatorname{Ln}(1+z)} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} l!^{-1}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}z^k\Big)^l = 1 + z$.

Поэтому $e^{\operatorname{Ln} J_\nu} = e^{\operatorname{Ln}\lambda_\nu E} e^{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}\lambda_\nu^{-k}Z^k} = \lambda_\nu E(E + \lambda_\nu^{-1}Z)$, так как после подстановки ряда $\operatorname{Ln}(E + \lambda_\nu^{-1}Z)$ в разложение экспоненты и переразложения полученного ряда по степеням матрицы Z коэффициенты, стоящие при этих степенях, вычисляются по тем же формулам, что и $e^{\operatorname{Ln}(1+z)}$.

В результате при условии, что все собственные числа жордановой формы J матрицы A отличны от нуля, построена многозначная функция $\operatorname{Ln} J$ — это блочно-диагональная верхнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоят логарифмы собственных чисел, у которых можно выбирать произвольную ветвь, но одну и ту же для каждого блока $\operatorname{Ln} J_\nu$, при этом наддиагональные элементы определяются однозначно.

Кроме того, блочно-диагональная структура у матриц J и $\operatorname{Ln} J$ совпадает, а значит, элементарные делители их собственных чисел имеют одни и те же кратности.

5^0. ФМ ЛОС с постоянными коэффициентами.

Ознакомившись в предыдущих пунктах с аналитическими функциями от матриц, вернемся к системе (5.1^c) $y' = Ay$ для того, чтобы в явном виде выписать ее общее решение.

Теорема (о фундаментальной матрице ЛОС с постоянными коэффициентами). *Матрица* e^{Ax} *является ФМ для системы* (5.1^c).

Доказательство. Продифференцируем сначала произвольную квадратную матрицу $\Psi(x)$. По определению производной

$$\Psi'(x) = \{\psi'_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n} = \{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\psi_{ij}(x+\Delta x) - \psi_{ij}(x)}{\Delta x}\ \}_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{\frac{1}{\Delta x}(\psi_{ij}(x+\Delta x) - \psi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(\Psi(x+\Delta x)-\Psi(x)).$$

Вычислим производную e^{Ax}, учитывая, что $e^{A(x+\Delta x)} = e^{A\Delta x}e^{Ax}$:

$$(e^{Ax})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(e^{A(x+\Delta x)} - e^{Ax})) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(e^{A\Delta x} - E)e^{Ax}.$$

Но экспонента любой квадратной матрицы (см. пример 1) раскладывается в сходящийся степенной ряд, поэтому $(e^{A\Delta x} - E)/\Delta x = (A\Delta x + A^2\Delta x^2/2! + \ldots)/\Delta x \to A$ при $\Delta x \to 0$.

В итоге матрица e^{Ax} для $\forall x \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет матричному уравнению (5.1^m), т.е. $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ и $\det e^{Ax} \neq 0$. $\square$

Следствие 2. *Общее решение ЛОС* (5_1^c) *имеет вид* $\varphi(x,c) = e^{Ax}c$, *где* $c = (c_1,\ldots,c_n)$ — *произвольный постоянный вектор.*

6^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.

Разберемся, как выглядит произвольный элемент произвольной фундаментальной матрицы ЛОС с постоянными коэффициентами, для чего сначала упростим фундаментальную матрицу e^{Ax}.

Пусть J — жорданова форма A. Тогда $J = S^{-1}AS$, $A = SJS^{-1}$.

Учитывая свойства степенных рядов от подобных матриц, имеем: $e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = Se^{Jx}S^{-1}$ или $e^{Ax}S = Se^{Jx}$.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами ЛОС $e^{Ax}S$ — это ФМ, следовательно Se^{Jx} — также ФМ и структурно ее элементы не отличаются от элементов матрицы e^{Ax}.

Итак, рассмотрим матрицу $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)) = Se^{Jx}$, в которой $S = (s^{(1)},\ldots,s^{(n)})$, $s^{(j)}$ — постоянные векторы, а матрица $e^{Jx} = \operatorname{diag}\{e^{J_0x},\ldots,e^{J_qx}\}$.

Тогда

$$(\varphi^{(1)}(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)) = (s^{(1)},\dots,s^{(n)})\cdot\begin{pmatrix} e^{J_0x} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{J_1x} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e^{J_qx}\end{pmatrix},$$

где $e^{J_0x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0^{(1)}x} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_0^{(2)}x} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_0^{(p)}x}\end{pmatrix}_{p\times p}$,

$$e^{J_1x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1x} & xe^{\lambda_1x} & \dots & \dfrac{x^{r_1-1}}{(r_1-1)!}e^{\lambda_1x}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & xe^{\lambda_1x}\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1x}\end{pmatrix}_{r_1\times r_1\ (r_1\geq 2)}$$

и $e^{J_2x},\dots,e^{J_qx}$ аналогичны e^{J_1x}.

Согласно определению произведения матриц j-й столбец $\varphi^{(j)}(x)$ из левой части равенства равен сумме произведений i-й компоненты j-го столбца матрицы e^{Jx} на i-й столбец $s^{(i)}$ матрицы S из правой части равенства $(i,j=\overline{1,n})$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)}(x) = s^{(1)}e^{\lambda_0^{(1)}x},\dots,\varphi^{(p)}(x) = s^{(p)}e^{\lambda_0^{(p)}x};\\
&\varphi^{(p+1)}(x) = s^{(p+1)}e^{\lambda_1x},\ \varphi^{(p+2)}(x) = (s^{(p+1)}x + s^{(p+2)})e^{\lambda_1x},\dots,\\
&\varphi^{(p+r_1)}(x) = (s^{(p+1)}x^{r_1-1}/(r_1-1)! + \ldots + s^{(p+r_1-1)}x + s^{(p+r_1)})e^{\lambda_1x};\\
&\varphi^{(p+r_1+1)}(x) = s^{(p+r_1+1)}e^{\lambda_2x},\dots .
\end{aligned}$$

т. е. любой элемент фундаментальной матрицы $\Phi = Se^{Jx}$ имеет вид:

$$\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_kx},$$

где $p_{ij}(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $n-1$, а λ_k — одно из собственных чисел матрицы A.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами ЛОС произвольная фундаментальная матрица $\Psi(x) = \Phi(x)C$, поэтому любой ее элемент — это линейная комбинация произведений многочленов ограниченной степени на экспоненты собственных чисел A, умноженных на x.

Что касается нахождения постоянной матрицы S, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, то из равенства $AS = SJ$ или $A \cdot (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) = (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) \cdot \operatorname{diag}\{J_0, \ldots, J_q\}$ получаем: $As^{(1)} = \lambda_0^{(1)} s^{(1)}, \ldots, As^{(p)} = \lambda_0^{(p)} s^{(p)}$;
$As^{(p+1)} = \lambda_1 s^{(p+1)}$, $As^{(p+2)} = \lambda_1 s^{(p+2)} + s^{(p+1)}$ и т. д.

При этом необходимо следить, чтобы вычисляемый набор векторов $s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}$ оказался линейно независимым.

7^0. **Оценка фундаментальной матрицы на бесконечности.**

Df. *Пусть* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, *тогда* $\|A\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \{|a_{ij}|\}$ *называется нормой матрицы* A.

Легко проверить, что введенная таким образом норма матрицы удовлетворяет всем трем свойствам из определения функции норма:

1) $\|A\| \geq 0, \quad A = 0 \ \Leftrightarrow \ \|A\| = 0$;
2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
3) $\|AB\| \leq n \cdot \|A\| \cdot \|B\|$.

Однако, следует иметь в виду, что введенная таким образом норма матрицы не является согласованной с используемой нами нормой вектора ($\|a\| = \max_{i=\overline{1,n}} |a_i|$). У согласованных норм в третьем свойстве множитель при произведении равняется единице.

Теорема (об оценке нормы фундаментальной матрицы на положительной полуоси). *Пусть* $\lambda_* = \max\{\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n\}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* A *системы* (5.1^c), *тогда для* $\forall\, \lambda_0 > \lambda_*$ *и для любой ФМ* $\Phi(x)$ *этой системы*

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^1 \ \ \exists\, K > 0 : \ \forall\, x \in [x_0, +\infty) \ \Rightarrow \ \|\Phi(x)\| \leq K e^{\lambda_0 x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (5.1^c) имеет ФМ e^{Ax}.

Если $\Psi(x)$ — другая фундаментальная матрица этой системы, то по теореме о связи между фундаментальными матрицами существует постоянная неособая матрица C такая, что $\Psi(x) = e^{Ax} C$.

Имеем: $\|\Psi(x)\| \leq n \|C\| \cdot \|e^{Ax}\|$. Поэтому достаточно доказать теорему, например, для фундаментальной матрицы $\Phi(x) = S e^{Jx}$.

Как было установлено, любой элемент матрицы $\Phi(x)$ имеет вид $\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x) e^{\lambda_k x}$ $(i, j = 1 \ldots, n)$, причем степень многочленов p_{ij} ограничена. Оценим $p_{ij}(x) e^{\lambda_k x}$ на промежутке $[x_0, +\infty)$.

Пусть $\varepsilon_0 = \lambda_0 - \lambda_* > 0$, тогда $\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n \le \lambda_0 - \varepsilon_0$. Отсюда

$$|\varphi_i^{(j)}(x)| = |p_{ij}(x)e^{(\operatorname{Re}\lambda_k + \mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k)x}| \le |p_{ij}(x)|e^{\lambda_0 x}e^{-\varepsilon_0 x}|e^{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k x}|.$$

Но $|e^{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k x}| = 1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}|p_{ij}(x)|e^{-\varepsilon_0 x} = 0$, поэтому найдется такое $K_0 > 0$, что $\|\Phi(x)\| = \max_{i,j=\overline{1,n}}|\varphi_i^{(j)}(x)| \le K_0 e^{\lambda_0 x}$ для $\forall x \ge x_0$. $\Box$

Следствие 3. *Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то* $\lim\limits_{x\to+\infty}\|\Phi(x)\| = 0$, *где* $\Phi(x)$ *— произвольная ФМ системы* (5.1^c).

Действительно, в этом случае λ_0 можно выбрать отрицательным.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (ТЕОРИЯ ФЛОКЕ)

1^0. Объект изучения.

В предыдущих параграфах исследовалась произвольная линейная однородная система (5.1) $y' = P(x)y$ с непрерывной на интервале (a, b) матрицей $P(x)$, а также ее важнейший частный случай — ЛОС с постоянными коэффициентами (5.1^c) $y' = Ay$, чье общее решение удается найти в явном виде.

Рассмотрим еще один важный частный случай ЛОС (5.1) — линейную однородную систему с периодическими коэффициентами

$$y' = A(x)y, \tag{5.1^p}$$

в которой $A(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}^1$ ω-периодическая матрица, т. е. $\exists\,\omega > 0:\ \forall x \in \mathbb{R}^1 \ \Rightarrow\ A(x+\omega) = A(x)$.

Иными словами, любой элемент $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ является непрерывной ω-периодической функцией на вещественной оси.

2^0. Матрица монодромии.

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1^p).

Положим $\Psi(x) = \Phi(x+\omega)$ и подставим ее в систему (5.1^p) :

$$\Psi'(x) = \frac{d\Phi(x+\omega)}{dx} = \frac{d\Phi(x+\omega)}{d(x+\omega)} = A(x+\omega)\Phi(x+\omega) = A(x)\Psi(x).$$

Таким образом, $\Psi(x)$ удовлетворяет матричной системе (5.1^m) и $\det\Phi(x+\omega) \ne 0$, а значит, для $\forall\,x \in \mathbb{R}^1$ матрица $\Psi(x)$ — неособая.

Следовательно, $\Psi(x)$ наряду с $\Phi(x)$ является ФМ.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица M, что $\Psi(x) = \Phi(x)M$.

Df. *Постоянная матрица* M *с* $\det M \neq 0$, *удовлетворяющая уравнению* $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, *называется матрицей монодромии фундаментальной матрицы* $\Phi(x)$.

3^0. **Вид фундаментальной матрицы системы** (5.1^p).

Оказывается, что любая фундаментальная матрица ЛОС с периодическими коэффициентами, хотя и не может быть найдена в явном виде, но имеет определенную структуру.

Теорема (о структуре фундаментальной матрицы ЛОС с периодическими коэффициентами). *Любая ФМ* $\Phi(x)$ *системы* (5.1^p) *может быть записана в виде*

$$\Phi(x) = P(x)e^{Rx},$$

где $P(x)$ *—* ω*-периодическая, а* R *— постоянная матрица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — матрица монодромии произвольной фундаментальной матрицы $\Phi(x)$ системы (5.1^p). т. е. $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$ и M — неособая, а значит, все ее собственные числа отличны от нуля.

Положим

$$R = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, M, \quad P(x) = \Phi(x)e^{-Rx}.$$

Тем самым, по определению логарифма матрицы $M = e^{R\omega}$.

Остается показать, что $P(x)$ — ω-периодическая матрица.

Имеем:

$$P(x+\omega) = \Phi(x+\omega)e^{-R(x+\omega)} = \Phi(x)Me^{-R\omega}e^{-Rx} = \Phi(x)e^{-Rx} = P(x)$$

для $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$. $\square$

4^0. **Мультипликаторы.**

Пусть M и M_1 — матрицы монодромии фундаментальных матриц $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ соответственно.

К сожалению, каждая из них является характеристикой только своей фундаментальной матрицы, а не характеристикой системы. Установим, что общего имеется у всех матриц монодромии.

Имеем: $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)\cdot M_1$.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица S, что $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$.

Тогда $\Phi_1(x+\omega) = \Phi(x+\omega)S = \Phi(x)MS$. С другой стороны $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)M_1 = \Phi(x)SM_1$. Поэтому $MS = SM_1$.

Утверждение 4. *Если $\Phi(x), \Phi_1(x)$ — произвольные ФМ системы (5.1^p) и $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$, то их матрицы монодромии M, M_1 подобны, т. е.*

$$M_1 = S^{-1}MS.$$

Df. *Собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ любой матрицы монодромии ЛОС (5.1^p) называются мультипликаторами.*

Таким образом, мультипликаторы, будучи инвариантами подобных матриц, являются уже характеристикой самой системы (5.1^p).

Теорема (о характеристическом свойстве мультипликаторов). *Число μ является мультипликатором системы (5.1^p) тогда и только тогда, когда существует решение $y = \varphi(x)$ системы (5.1^p) такое, что $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\mu$.*

Доказательство. Пусть μ — мультипликатор системы, а $\Phi(x)$ — ее фундаментальная матрица. Тогда $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$.

Существует неособая постоянная матрица S такая, что матрица $J = S^{-1}MS$ — жорданова с собственными числами $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$ является фундаментальной матрицей.

Согласно утверждению 4 J — матрица монодромии для $\Phi_1(x)$: $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)J$. Или, если $\Phi_1(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$, то

$$(\varphi^{(1)}(x+\omega), \ldots, \varphi^{(n)}(x+\omega)) =$$

$$(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(1)}(x)) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \sigma_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i = 0$ $(i = \overline{1, n-1})$, если $\mu_i \neq \mu_i + 1$.

По условию теоремы найдется j такое, что $\mu = \mu_j$, а потому найдется k такое, что в k-ом столбце матрицы J единственным ненулевым элементом будет μ_j. Но тогда $\varphi^{(k)}(x+\omega) = \varphi^{(k)}(x)\mu_j$.

Предположим теперь, что существует решение $y = \varphi(x)$ такое, что $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\mu$, и построим фундаментальную матрицу $\Phi(x) = (\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$, имеющую матрицу монодромии $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Имеем: $(\varphi(x+\omega), \varphi^{(2)}(x+\omega), \ldots, \varphi^{(n)}(x+\omega)) =$

$$(\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)m_{11} + \varphi^{(2)}(x)m_{21} + \ldots + \varphi^{(n)}(x)m_{n1} = \varphi(x)\mu$ или $\varphi(x)(m_{11} - \mu) + \varphi^{(2)}(x)m_{21} + \ldots + \varphi^{(n)}(x)m_{n1} = 0$.

Но векторы $\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ линейно независимы на $\mathbb{R}^1$, поэтому $\mu = m_{11}$, $m_{21}, \ldots, m_{n1} = 0$. В результате μ — собственное число матрицы монодромии M, а значит, мультипликатор. $\square$

Следствие 4. *Система* (5.1^p) *имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее мультипликаторов равен единице.*

Пусть $\Phi_0(x)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (5.1^p) при $x_0 = 0$, т. е. $\Phi_0(0) = E$, тогда $\Phi_0(\omega) = EM = M$ — матрица монодромии для $\Phi_0(x)$.

По формуле Лиувилля $\det \Phi_0(x) = \exp\Big\{ \int_0^x \operatorname{Tr} A(s)\, ds \Big\}$, поэтому произведение мультипликаторов

$$\mu_1 \ldots \mu_n = \exp\Big\{ \int_0^\omega \operatorname{Tr} A(s)\, ds \Big\}.$$

Пример 3. Рассмотрим периодическое ЛОУ второго порядка

$$\ddot{y} + p(x)y = 0,$$

в котором $p(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}^1$ ω-периодическая функция.

После стандартной замены $y = y_1$, $\dot{y} = y_2$ оно равносильно ЛОС $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -p(x)y_1 \end{cases}$ с $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$, след которой равен нулю.

Следовательно произведение мультипликаторов $\mu_1\mu_2 = 1$.

5^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.

Пусть $\Phi(x) = P(x)e^{Rx}$ — произвольная ФМ системы (5.1^p), тогда $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, $R = \omega^{-1}\operatorname{Ln} M$.

Пусть $J = S^{-1}RS$ — жорданова форма матрицы R, тогда по доказанному выше $\Phi(x) = P(x)Se^{Jx}S^{-1}$ или

$$\Phi_1(x) = P_1(x) \cdot e^{Jx},$$

где матрица $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$ — фундаментальная, а матрица $P_1(x) = P(x)S$ — ω-периодическая.

Пусть M_1 — матрица монодромии для Φ_1, тогда $J = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, M_1$, кроме того, $M_1 = S^{-1}MS$ согласно утверждению 4.

Если $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — мультипликаторы M_1, то по теореме о логарифме матрицы $\lambda_1 = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\,\mu_1, \ldots, \lambda_n = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\,\mu_n$ — собственные числа матрицы J или подобной ее матрицы R.

Df. *Собственные числа матрицы R называются характеристическими показателями ЛОС* (5^p).

Важно, что вещественные части характеристических показателей определены однозначно.

Пусть $\Phi_1(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$, $P_1(x) = (p^{(1)}(x), \ldots, p^{(n)}(x))$, причем все векторы $p^{(j)}(x)$ — ω-периодические.

Тогда, как и для ЛОС с постоянными коэффициентами, из равенства $(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = (p^{(1)}(x), \ldots, p^{(n)}(x)) \cdot e^{Jx}$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)} = p^{(1)}(x)e^{\lambda_0^{(1)}x}, \ldots, \varphi^{(p)}(x) = p^{(p)}(x)e^{\lambda_0^{(p)}x};\\
&\varphi^{(p+1)} = p^{(p+1)}(x)e^{\lambda_1 x},\ \varphi^{(p+2)}(x) = (p^{(p+1)}(x)x + p^{(p+2)}(x))e^{\lambda_1 x}, \ldots,\\
&\varphi^{(p+r_1)} = (p^{(p+1)}(x)x^{r_1-1}/(r_1-1)! + \ldots + p^{(p+r_1-1)}(x)x +\\
&\qquad\qquad p^{(p+r_1)}(x))e^{\lambda_1 x}; \quad \varphi^{(p+r_1+1)} = s^{(p+r_1+1)}e^{\lambda_2 x}, \ldots,
\end{aligned}$$

т. е. любой элемент ФМ $\Phi(x) = Se^{Jx}$ имеет вид:

$$\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_k x},$$

где $p_{ij}(x)$ — многочлен от x степени, не превосходящей $n-1$, с коэффициентами, являющимися ω-периодическими функциями x, а λ_k — один из характеристических показателей системы.

Отсюда следует, что если все $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, то при $x \to +\infty$ все решения решения системы (5^p) стремятся к нулю, а если $\exists\, \mathrm{Re}\,\lambda_{k_0} = 0$, а остальные строго отрицательны, то ограниченность фундаментальных матриц зависит от структуры матрицы J.

6^0. **Приводимость периодических ЛОС.**

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5^p), тогда $P(x) = \Phi(x)e^{-Rx}$ — это неособая периодичная матрица.

Сделаем линейную обратимую ω-периодическую замену

$$y = P(x)z, \tag{5.2}$$

которая преобразует систему (5^p) в систему $P'z + Pz' = APz$ или

$$z' = (P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x))z.$$

Вычислим полученную матрицу. Имеем: $P^{-1}(x) = e^{Rx}\Phi^{-1}(x)$, $P'(x) = \Phi'(x)e^{-Rx} + \Phi(x)(-R)e^{-Rx} = A(x)\Phi e^{-Rx} - \Phi(x)Re^{-Rx}$.

Поэтому $P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x) = e^{Rx}\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi e^{-Rx} - e^{Rx}\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi(x)e^{-Rx} + e^{Rx}\Phi^{-1}(x)\Phi(x)Re^{-Rx} = e^{Rx}Re^{-Rx} = R$, так как матрицы R и e^{Rx} коммутируют.

Таким образом из периодичной системы (5^p) заменой (5.2) удалось получить ЛОС с постоянными коэффициентами

$$z' = Rz. \tag{5.3}$$

чьи собственные числа, очевидно, являются характеристическими показателями ω-периодической системы (5^p).

Df. *Линейная система, коэффициенты которой не постоянны, называется приводимой, если существует линейная неособая замена, преобразующая ее в систему с постоянными коэффициентами.*

Если в системе (5^p) матрица $A(x)$ вещественна, естественно, хотелось бы получить систему (5.3), т. е. ее матрицу R, также вещественной, но этого удается достичь далеко не всегда.

В самом деле, фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ в системе (5^p) всегда можно выбрать вещественной. а значит, и матрицу монодромии M тоже. Но матрица $R = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, M$ вещественна, если только все ее мультипликаторы $\mu_1, \ldots, \mu_n$ положительны. Если же среди мультипликаторов найдется хотя бы один комплексный или отрицательный, то $\mathrm{Ln}\, M$, очевидно, будет комплексной матрицей.

Однако, если предположить, что все мультипликаторы вещественны (и отличны от нуля), т. е. допустить отрицательные мультипликаторы, то, пожертвовав качеством замены (5.2) и сделав ее 2ω-периодический, можно всегда получить вещественную матрицу R.

Действительно, всегда можно считать, что ω-периодическая матрица $A(x)$ системы (5^p) имеет период 2ω. Тогда для $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$ матрица $\Phi(x+2\omega) = \Phi(x+\omega)M = \Phi(x)M^2$. Но матрица M^2 имеет положительные мультипликаторы и ее логарифм вещественен.

Таким образом, существует линейная обратимая вещественная замена с 2ω-периодическими коэффициентами, преобразующая систему с ω-периодическими коэффициентами (5^p) в вещественную систему (5.3) с постоянными коэффициентами.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Формула общего решения ЛНС.

Рассмотрим линейную неоднородную систему (3.14) из § 5 Гл. III

$$y' = P(x)y + q(x), \tag{5.4}$$

в которой матрица $P(x)$ неоднородность $q(x)$ непрерывны на (a,b).

Пусть $y = \psi(x)$ — какое-либо частное решение системы (5.4), т. е. $\psi'(x) = P(x)\psi(x) + q(x)$ для $\forall\, x \in (a,b)$.

Сделаем замену $y = z + \psi(x)$. Дифференцируя ее в силу системы (5.4), получаем $z' + \psi'(x) = P(x)z + P(x)\psi(x) + q(x)$ или ЛОС

$$z' = P(x)z. \tag{5.5}$$

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.5), тогда по теореме об общем решении ЛОС $z = \Phi(x)c$ — общее решение (5.5) (c — произвольный постоянный вектор), поэтому общее решение ЛНС (5.4) имеет вид:

$$y = \Phi(x)c + \psi(x).$$

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.

Зная фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ линейной однородной системы, частное решение $y = \psi(x)$ линейной неоднородной системы всегда можно найти в квадратурах, т. е. с точностью до неберущихся интегралов, методом вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНС). *Пусть $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ — это фундаментальная матрица ЛОС (5.5), тогда частное решение ЛНС (5.4) может быть найдено в квадратурах от функций $\varphi_i^{(j)}(x)$, $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ $(i,j = \overline{1,n})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частное решение $y = \psi(x)$ системы (5.4) будем искать, варьируя произвольную постоянную — вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ — в формуле общего решения $z = \Phi(x)c$ линейной однородной системы. Положим

$$\psi(x) = \Phi(x)c(x),$$

где $c(x)$ – непрерывно дифференцируемая на (a, b) вектор функция.

Подставим $\psi(x)$ в систему (5.4): $\Phi' c + \Phi c' = P\Phi c + q$.

Но ФМ $\Phi(x)$ удовлетворяет матричной системе (5.1^m), а значит, $\Phi'(x) = P(x)\Phi(x)$. Поэтому $\Phi c' = q$ или $c' = \Phi^{-1}(x)q(x)$.

Для $\forall\, x, x_0 \in (a, b)$ проинтегрируем полученное равенство по s от x_0 до x, находя вектор функцию $c(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$, а вместе с ней и частное решение ЛНС (5.4):

$$\psi(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \quad \square$$

В результате общее решение системы (5.4) имеет вид:

$$y\,(x) = \Phi(x)c + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$$

где Φ — ФМ линейной однородной системы (5.5).

3^0. **Общее решение ЛНС с постоянными коэффициентами.**

Рассмотрим систему

$$y' = Ay + q(x), \tag{5.6}$$

в которой матрица A постоянна, а неоднородность $q(x) \in C((a, b))$.

По теореме о фундаментальной матрице ЛОС с постоянными коэффициентами матрица $\Phi(x) = e^{Ax}$ является фундаментальной для системы (5.1^c) $y' = Ay$, а $\Phi^{-1}(x) = e^{-Ax}$. Поэтому

$$y(x) = e^{Ax}c + e^{Ax} \int_{x_0}^{x} e^{-As}q(s)\,ds$$

— формула общего решения ЛНС (5.6).

Для любых начальных данных $x_0 \in (a, b)$ и $y^0 \in \mathbb{R}^n$ формула

$$y = e^{A(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)}q(s)\,ds \qquad (c = e^{-Ax_0}y^0)$$

задает решение задачи Коши с выбранными начальными данными на интервале (a, b) и называется формулой Коши.

Г Л А В А VI
Автономные системы

§ 1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ И ТРАЕКТОРИЙ

1^0. Объект изучения.

Df. *Нормальная система (3.1) $y' = f(x,y)$ называется автономной, если ее правая часть не зависит от независимой переменной x, т. е. система имеет вид $y' = f(y)$. В противном случае система (3.1) — неавтономная.*

Автономную систему обычно сразу записывают так, как это принято в механике (см. систему (3.1_m)) :

$$\dot{x} = X(x), \tag{6.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, и предполагают, что вектор функция $X(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица локально по x в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме о существовании и единственности решений нормальных систем из Гл. 3, § 3, п. 2 область $G = \mathbb{R}^1 \times D$ — это область существования и единственности решений автономной системы, т. е. для любых начальных данных $t_0 \in \mathbb{R}^1$, $x^0 \in D$ существует и единственно решение задачи Коши системы (6.1) с выбранными начальными данными, которое определено на отрезке Пеано $P_h(t_0, x^0)$.

2^0. Механическая интерпретация автономных систем.

Как было отмечено в Гл. 3, § 1, п. 5, в механике независимая переменная t трактуется как время, а решение $x = \varphi(t)$ системы (6.1), определенное на максимальном интервале существования I_{max}, — как движение материальной точки в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Тогда вектор функция $X(x)$ задает вектор скорости материальной точки $x = \varphi(t)$, который у автономных систем не зависит от времени и непрерывно изменяется с изменением x.

Таким образом автономная система индуцирует непрерывное векторное поле $X(x)$ в области D фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

И обратно: любая вектор функция $V(x) \in C(D)$ задает автономную систему $\dot{x} = V(x)$, для которой V является полем скоростей.

Кривая $\gamma = \{(t,x)\,|\,x = \varphi(t),\ t \in I_{max}\}$, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется интегральной кривой движения $x = \varphi(t)$ и является графиком функции $x = \varphi(t)$.

Кривая $L = \{x\,|\,x = \varphi(t),\ t \in I_{max}\}$, лежащая в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется траекторией движения $x = \varphi(t)$ и является проекцией интегральной кривой γ вдоль оси времени на фазовое пространство.

В этом случае говорят, движение $x = \varphi(t)$ порождает или параметризует траекторию L.

3^0. Инвариантность решений относительно сдвигов по t.

Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — это решение задачи Коши системы (6.1) с начальными данными t_0, p, определенное на интервале (a,b), т. е. $\dot\varphi(t,t_0,p) \overset{(a,b)}{\equiv} X(\varphi(t,t_0,p))$.

Лемма (об инвариантности решений относительно сдвигов по t). *Пусть $x = \varphi(t,t_0,p)$ — решение системы (6.1) на интервале (a,b), тогда для $\forall\tau \in \mathbb{R}^1$ вектор функция $\psi(t) = \varphi(t+\tau,t_0,p)$ также является решением системы (6.1) для $\forall\, t \in (a-\tau, b-\tau)$.*

Доказательство.

$$\frac{d\,\psi(t)}{dt} = \frac{d\,\varphi(t+\tau,t_0,p))}{d(t+\tau)} \overset{(a-\tau,b-\tau)}{\equiv} X(\varphi(t+\tau,t_0,p)) = X(\psi(t)).\ \square$$

Естественно, доказательство основано на единственном отличии автономной системы от нормальной: система (6.1) не меняется при сдвиге независимой переменной t на любую константу τ, поскольку правая часть X системы не зависит от t.

Следствие 1. *Пусть $x = \varphi(t,t_0,p)$ — решение системы (6.1) на интервале (a,b), тогда*

$$\forall\tau \in \mathbb{R}^1: \quad \varphi(t+\tau,t_0+\tau,p) \overset{(a,b)}{\equiv} \varphi(t,t_0,p). \tag{6.2}$$

Доказательство. Возьмем в качестве начальных данных $t_0+\tau$ и p. Это сделать возможно, так как область $G = \mathbb{R}^1 \times D$.

Рассмотрим решение $x = \varphi(t,t_0+\tau,p)$ с выбранными начальными данными. По лемме решением системы (6.1) будет также вектор функция $x = \varphi(t+\tau,t_0+\tau,p)$.

Но при $t = t_0$ решения $x = \varphi(t,t_0,p)$ и $x = \varphi(t+\tau,t_0+\tau,p)$ попадают в одну и ту же точку $p \in D$. Следовательно по теореме единственности эти решения совпадают на (a,b). $\square$

4^0. Групповое свойство решений.

Положим $\varphi(t,p)=\varphi(t,0,p)$, т. е. будем для краткости опускать второй аргумент решения, если $t_0=0$.

Рассмотрим решение $x=\varphi(t,t_0,p)$ системы (6.1).

Выберем в следствии 1 константу $\tau=-t_0$. Тогда согласно (6.2)

$$\varphi(t,t_0,p)=\varphi(t-t_0,t_0-t_0,p)=\varphi(t-t_0,p).$$

Формально это означает, что в автономных системах начальное данное по времени можно вносить в первый аргумент решения в виде аддитивной постоянной, а фактически — что положение движущейся материальной точки определяется точкой старта p и временем движения $t-t_0$, но не зависит от времени старта.

Иными словами, стартуя из точки p в момент времени t_0, в момент t материальная точка окажется там же, где будет в случае старта в момент времени 0 за время движения $t-t_0$.

Пусть решение $x=\varphi(t-t_0,p)$ определено на $I_{max}=(\alpha,\beta)$.

Выберем произвольный момент времени $t_1\in(\alpha,\beta)$ и положим $q=\varphi(t_1-t_0,p)$.

Рассмотрим решение $x=\varphi(t-t_1,q)$. При $t=t_1$ оно наряду с решением $x=\varphi(t-t_0,p)$ попадает в точку q. Следовательно по теореме единственности эти решения совпадают:

$$\forall\, t_1\in(\alpha,\beta):\quad \varphi(t-t_0,p)\overset{(\alpha,\beta)}{\equiv}\varphi(t-t_1,\varphi(t_1-t_0,p)). \tag{6.3}$$

Полученное тождество называется групповым свойством решений автономной системы.

5^0. Особые точки и циклы.

Среди множества всех траекторий автономной системы имеются два типа, занимающие особое место — это точки покоя и циклы.

Df. *Если для $\forall\, t\in\mathbb{R}^1$ движение $\varphi(t,p)=p$, то точка p, являющаяся траекторией этого движения, называется точкой покоя, а также особой точкой или положением равновесия системы (6.1).*

Выделим очевидное, но очень важное утверждение.

Утверждение. *Точка $p\in D$ является точкой покоя тогда и только тогда, когда в системе (6.1) $X(p)=0$.*

Df. *Точка* $p \in D$ *называется обыкновенной или неособой, если* $X(p) \neq 0$.

Df. *Если* $\exists\, \omega > 0$, *что для* $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$ *движение* $\varphi(t,p) = \varphi(t+\omega, p)$, *то замкнутая кривая* l, *являющаяся траекторией этого движения, называется циклом.*

Таким образом точка покоя порождается постоянным движением системы (6.1), а цикл — ω-периодическим. И множество точек покоя совпадает с множеством нулей непрерывной вектор функции $X(x)$.

6^0. Система для траекторий в окрестности обыкновенной точки.

Возьмем произвольную обыкновенную точку $p \in D$. Тогда вектор $X(p) \neq 0$. Пусть, например, $X_1(p) \neq 0$.

Поскольку функция $X_1(x)$ непрерывна, существует окрестность $U_p: \;\; p \in U_p \subset D$, в которой $X_1(x) \neq 0$.

Для $\forall\, x \in U_p$ поделим на первое все последующие уравнения системы (6.1), получая нормальную систему порядка $n-1$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, \ldots, x_n)}{X_1(x_1, \ldots, x_n)}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n(x_1, \ldots, x_n)}{X_1(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{6.4}$$

в которой роль независимой играет переменная x_1.

Очевидно, что правая часть системы (6.4) определена и непрерывна в области U_p.

Убедимся, что дуги траекторий автономной системы (6.1), лежащие в области U_p, являются интегральными кривыми системы (6.4).

Для $\forall\, q \in U_p$ рассмотрим решение (6.1) $x = \varphi(t,q)$, определенное на интервале (α_q, β_q) таком, что $\varphi(t,q) \in U_p$ для $\forall\, t \in (\alpha_q, \beta_q)$.

Чтобы получить формулу дуги траектории этого решения, лежащую в U_p, надо в векторном равенстве $x = \varphi(t,q)$ избавиться от t.

Подставляя $\varphi(t,q)$ в первое уравнение системы (6.1), получаем: $\dot{\varphi}_1(t,q) \overset{(\alpha_q,\beta_q)}{\equiv} X_1(\varphi(t,q)) \neq 0$ по определению U_p. Поэтому скалярная функция $x_1 = \varphi_1(t,q)$ монотонна по t на (α_q, β_q). Обозначим через (u,v) ее область изменения, а через $t = \varphi_1^{-1}(x_1, q)$ — функцию, обратную к $\varphi_1(t,q)$, определенную для $\forall\, x_1 \in (u,v)$.

Тогда функции $x_k = \psi_k(x_1)$ $(k = \overline{2,n})$, где $\psi_k = \varphi_k(\varphi_1^{-1}(x_1,q), q)$, задают дугу траектории движения $x = \varphi(t,q)$, лежащую в U_p.

Убедимся, что траектория $x_k = \psi_k(x_1)$ является решением системы (6.4) на (u, v) с начальными данными $x_1 = q_1$, $\psi_k(q_1) = q_k$.

Имеем: $\dfrac{d\psi_k(x_1)}{dx_1} = \dfrac{d\varphi_k(\varphi_1^{-1}(x_1, q), q)}{d\varphi_1(t, q)} = \dfrac{d\varphi_k(t, q)}{dt}\,\dfrac{dt}{d\varphi_1(t, q)} =$
$\dfrac{X_k(\varphi_1(t, q), \ldots \varphi_n(t, q))}{X_1(\varphi_1(t, q), \ldots \varphi_n(t, q))} = \dfrac{X_k(x_1, \psi_2(x_1) \ldots, \psi_n(x_1))}{X_1(x_1, \psi_2(x_1) \ldots, \psi_n(x_1))}$
для $\forall\, k = \overline{2, n}$, что и требовалось доказать.

Df. *Система (6.4) называется системой для траекторий автономной системы (6.1).*

7^0. Свойства и типы траекторий.

Основное геометрическое отличие траекторий автономных и неавтономных систем заключается в том, что траектории неавтономных систем могут как пересекаться, так и самопересекаться, а траектории автономных систем не могут.

Теорема (о поведении и типах траекторий автономных систем). *Траектории автономных систем не пересекаются и бывают трех типов: 1) точка покоя p, 2) цикл l, 3) незамкнутая траектория L без самопересечений (гомеоморфный образ прямой).*

Доказательство.

1) Пусть точка $p \in D$ — особая, т. е. движение $\varphi(t, p) \equiv p$.

Допустим, что существуют движение $x = \psi(t - t_0, q)$ с $q \neq p$ и момент времени t_1 такие, что $\psi(t_1 - t_0, q) = p$. Но $\varphi(t_1 - t_0, p) = p$. Поэтому по теореме единственности движения φ и ψ совпадают, что невозможно. Следовательно движение $x = \psi(t - t_0, q)$ не может достичь точки покоя за конечное время.

2) Допустим теперь, что точка p — обыкновенная, а траектория l движения $x = \varphi(t, p)$ $(\varphi(0, p) = p,\ I_{max} = (\alpha, \beta))$ имеет самопересечение, т. е. в системе (6.1) $X(p) \neq 0$ и $\exists \tau > 0 :\ \ \varphi(\tau, p) = p$.

Рассмотрим непрерывную функцию $h(t) = \varphi(t, p) - p$ при $t > 0$.

По определению решения $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \stackrel{(\alpha,\beta)}{\equiv} X(\varphi(t, p))$. В частности, $d\varphi(0)/dt = X(p) \neq 0$. Поэтому $\exists\, \theta > 0$, что $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \theta)$.

Не более чем счетное множество нулей функции $h(t)$ замкнуто, не пусто, так как в нем содержится τ, и ограничено снизу числом θ. Следовательно оно имеет минимальный элемент, обозначим его ω.

В результате $\varphi(t,p) \neq p$ при $t \in (0,\omega)$ и $\varphi(\omega,p) = \varphi(0,p) = p$.

Применим групповое свойство решений. Согласно тождеству (6.3) с $t_0 = 0$, $t_1 = \omega$ для $\forall\, t \in (\alpha,\beta)$ имеем:

$$\varphi(t,p) = \varphi(t-\omega, \varphi(\omega,p)) = \varphi(t-\omega,p).$$

Таким образом в случае самопересечения движение $x = \varphi(t,p)$ — ω-периодическое и определено для $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$, а его траектория l — замкнутая кривая, называемая циклом.

3) Остается доказать, что различные траектории не могут пересекаться или касаться друг друга.

В п. 6 было показано, что в некоторой окрестности U_p произвольной обыкновенной точки $p \in D$ траектория L движения $\varphi(t,p)$ может быть записана в виде $x_k = \psi_k(x_1)$ $(x_1 \in (u,v),\ k = \overline{2,n})$ и удовлетворяет системе для траекторий (6.4), а значит, кривая $\gamma = \{(x_1, \psi_2(x_1), \ldots, \psi_n(x_1)) \,|\, x_1 \in (u,v)\}$ является интегральной кривой системы (6.4) в области U_p.

Покажем, что система (6.4) удовлетворяет в U_p условию Липшица локально по $x_2, \ldots, x_n$.

По условию в исходной автономной системе (6.1) правая часть $X(x) \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(D)$ и, в частности, $X(x) \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(U_p)$. Это значит, что для $\forall\, q \in U_p$ существуют окрестность U_q такая, что $q \in U_q$, $\overline{U}_q \subset U_p$, и глобальная константа Липшица $L = L(\overline{U}_q)$ такая, что с учетом определения нормы вектора

$$\forall\, \tilde{x}, \hat{x} \in U_q : \quad |X_i(\hat{x}) - X_i(\tilde{x})| \leq L \max_{j=\overline{1,n}} |\hat{x}_j - \tilde{x}_j| \quad (i = \overline{1,n}).$$

Пусть $M = \max\limits_{x \in \overline{U}_q} \|X(x)\|, \quad m = \min\limits_{x \in \overline{U}_q} |X_1(x)| > 0.$

Константа m положительна, так как $X_1(x) \neq 0$ в окрестности U_p и, будучи непрерывной, достигает минимума на компакте $\overline{U}_q$.

Для $\forall\, \tilde{x}, \hat{x} \in U_q$ оценим приращения правых частей системы (6.4).

Для $\forall\, k = \overline{2,n}$ имеем:

$$\left| \frac{X_k(\hat{x})}{X_1(\hat{x})} - \frac{X_k(\tilde{x})}{X_1(\tilde{x})} \right| = \frac{|X_1(\tilde{x}) X_k(\hat{x}) - X_1(\hat{x}) X_k(\tilde{x})|}{|X_1(\hat{x})| |X_1(\tilde{x})|} \leq$$

$$\leq m^{-2} (|X_1(\tilde{x}) X_k(\hat{x}) - X_1(\tilde{x}) X_k(\tilde{x})| + |X_1(\tilde{x}) X_k(\tilde{x}) - X_1(\hat{x}) X_k(\tilde{x})|) \leq$$

$$\leq m^{-2} M (|X_k(\hat{x}) - X_k(\tilde{x})| + |X_1(\tilde{x}) - X_1(\hat{x})|) \leq 2m^{-2} M L \|\hat{x} - \tilde{x}\|.$$

При этом в полученной цепочке неравенств ничего не изменится, если ограничиться рассмотрением $\tilde{x}$, $\hat{x}$ из U_q, у которых $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1$. Поэтому $\dfrac{X_k(x)}{X_1(x)} \in \mathrm{Lip}^{gl}_{x_2,\dots,x_n}(U_q)$ с константой Липшица $2m^{-2}ML$.

По теореме существования и единственности для нормальных систем интегральные кривые неавтономной системы (6.4), являющиеся траекториями автономной системы (6.1) в некоторой окрестности произвольной точки $p \in D$, не могут касаться и пересекаться. $\square$

§ 2. A- И Ω-ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

$\mathbf{1^0}$. Определение и свойства предельных множеств.

Одним из основных объектов изучения в качественной теории ОДУ являются точки, вблизи которых счетное число раз проходит траектория автономной системы, неограниченно приближаясь к ним с ростом или убыванием времени.

Df. *Пусть траектория движения $x = \varphi(t - t_0, p)$ системы (6.1) определена при всех $t \le t_0$, тогда точка q называется ее α- предельной точкой, если существует последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $t_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ и $\varphi(t_k - t_0, p) \to q$.*

Df. *Пусть траектория движения $x = \varphi(t - t_0, p)$ системы (6.1) определена при всех $t \ge t_0$, тогда точка q называется ее ω- предельной точкой, если существует последовательность моментов времени $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ и $\varphi(t_k - t_0, p) \to q$.*

Df. *Множество α-предельных точек траектории движения $x = \varphi(t - t_0, p)$ системы (6.1) называется A-предельным множеством, а множество ω-предельных точек — Ω-предельным множеством.*

Для вывода одного из свойств произвольного A- или Ω- предельного множества потребуется определение α- или ω-предельной точки, сделанное не на языке "последовательностей".

Лемма (о характеристическом свойстве предельных точек). *Для того чтобы точка q была ω-предельной точкой траектории движения $x = \varphi(t - t_0, p)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0 \quad \exists t^* > T : \quad \|\varphi(t^* - t_0, p) - q\| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) ($\Rightarrow$) Пусть q — ω-предельная точка $x=\varphi(t-t_0,p)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. По определению $\exists\, t_k\to+\infty$ и $\exists\, K>0$ такие, что $\forall\, k>K:\ \|\varphi(t_k-t_0,p)-q\|<\varepsilon$. Но тогда $\forall\, T>0$ найдется такое k^*, при котором $t_{k^*}>T$.

Положив $t^*=t_{k^*}$, получим неравенство (6.5).

2) ($\Leftarrow$) Предположим, что для точки q выполняется (6.5). Возьмем две произвольные последовательности: $\varepsilon_k\to 0$ и $T_k\to+\infty$ при $k\to\infty$. Тогда $\forall\, k\geq 1$ в силу (6.5) $\exists\, t_k^*>T_k:\ \|\varphi(t_k^*-t_0,p)-q\|<\varepsilon_k$.

Покажем, что $\{t_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ — искомая последовательность моментов времени. Действительно, $\forall\, T>0$ и $\forall\,\varepsilon>0$ найдется такое $K>0$, что $\forall\, k>K$, во-первых, $T_k>T$, во-вторых, $\varepsilon_k<\varepsilon$. При таких k тогда $t_k^*>T$ и $\|\varphi(t_k^*-t_0,p)-q\|<\varepsilon$, а значит, $t_k^*\to+\infty$ и $\varphi(t_k^*-t_0,p)\to q$ при $k\to\infty$. $\square$

Аналогичная лемма справедлива для α-предельных точек.

Теорема (о свойствах Ω-предельных множеств). *Ω-предельное множество любой траектории системы (6.1) замкнуто и инвариантно, т. е. содержит все свои предельные точки и состоит из целых траекторий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Замкнутость. Пусть последовательность точек $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ принадлежит Ω-предельному множеству траектории движения $x=\varphi(t-t_0,p)$, определенного на промежутке $[t_0,+\infty)$, и такова, что $q_j\to q$ при $j\to\infty$.

Покажем, что $q\in\Omega$. Зафиксируем произвольные $\varepsilon>0$, $T>0$.

Из сходимости q_j к q вытекает, что $\exists\, j_0$: $\|q_{j_0}-q\|<\varepsilon/2$.

Поскольку точка q_{j_0} является ω-предельной, по лемме о характеристическом свойстве $\exists\, t^*>T$ такое, что $\|\varphi(t^*-t_0,p)-q_{j_0}\|<\varepsilon/2$.

В результате по неравенству треугольника $\|\varphi(t^*-t_0,p)-q\|\leq\|\varphi(t^*-t_0,p)-q_{j_0}\|+\|q_{j_0}-q\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, и q является ω-предельной точкой траектории движения $x=\varphi(t-t_0,p)$.

2) Инвариантность. Пусть q — произвольная точка из Ω- предельного множества траектории движения $x=\varphi(t-t_0,p)$.

Покажем, что вся траектория движения $x=\varphi(t,q)$ $(\varphi(0,q)=q)$ системы (6.1) состоит из ω-предельных точек, т. е. для $\forall\, t_*\in I_{\max}$ точка $\varphi(t_*,q)$ является ω-предельной точкой траектории движения $x=\varphi(t-t_0,p)$.

По теореме об интегральной непрерывности

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ \ \forall\,\tilde q:\ \|\tilde q-q\|<\delta\ \Rightarrow\ \|\varphi(t_*,\tilde q)-\varphi(t_*,q)\|<\varepsilon. \quad (6.6)$$

Здесь для решения $x=\varphi(t,q)$ в теореме выбираются $[a,b]=[0,t_*]$, $x_0=t_0=0$, $y^0=\tilde q$, а параметр μ вообще отсутствует.

Поскольку точка q — ω-предельная, для найденного δ

$$\exists\,t_k\to+\infty\ \text{ при }\ k\to\infty,\ \exists\,K>0:\ \ \forall\,k>K\ \Rightarrow\ \|\tilde q_k-q\|<\delta,$$

где $\tilde q_k=\varphi(t_k-t_0,p)$.

Выбирая теперь в (6.6) $\tilde q=\tilde q_k$, получаем:

$$\|\varphi(t_*,\varphi(t_k-t_0,p))-\varphi(t_*,q)\|<\varepsilon.$$

Но по групповому свойству (6.3) с $t=t_*+t_k$ и $t_1=t_k$

$$\varphi(t_*,\varphi(t_k-t_0,p))=\varphi(\tilde t_k-t_0,p)\quad(\tilde t_k=t_k+t_*\to+\infty\ \text{ при }\ k\to\infty).$$

В результате $\|\varphi(\tilde t_k-t_0,p)-\varphi(t_*,q)\|<\varepsilon$, а значит, по определению точка $\varphi(t_*,q)\in\Omega$. $\square$

Аналогичная теорема справедлива для A-предельных множеств.

2^0. Свойства предельных множеств траекторий, устойчивых по Лагранжу.

Как A-, так и Ω-предельное множество траектории движения $x=\varphi(t-t_0,p)$ может оказаться пустым, например, когда при неограниченном убывании или возрастании времени $\|\varphi(t-t_0,p)\|\to\infty$.

Противоречия с доказанной выше теоремой не возникает, так как пустое множество по определению как открыто, так и замкнуто.

Выделим, в связи с этим, важный класс траекторий, предельные множества которых будут обладать дополнительными свойствами: они окажутся непустыми и связными.

Df. *Траектория движения* $x=\varphi(t-t_0,p)$ *системы (6.1), определенного на* $I_{\max}=(\alpha,\beta)$, *называется положительно устойчивой по Лагранжу, если в фазовом пространстве можно указать такой компакт* $\overline{H}_+$, *что* $\varphi(t-t_0,p)\in\overline{H}_+$ *для* $\forall\,t\in[t_0,\beta)$, *и называется отрицательно устойчивой по Лагранжу, если существует компакт* $\overline{H}_-\subset D$ *такой, что* $\varphi(t-t_0,p)\in\overline{H}_-$ *для* $\forall\,t\in(\alpha,t_0]$.

Замечание 1. Непосредственно из определения вытекает, что любое движение, порождающее положительно устойчивую по Лагранжу траекторию, определено при всех $t \geq t_0$, т. е. $\beta = +\infty$, так как интегральная кривая не может покинуть компакт по фазовым переменным. А любое движение, порождающее отрицательно устойчивую по Лагранжу траекторию, определено при всех $t \leq t_0$.

Теорема (о свойствах Ω-предельных множеств траекторий, положительно устойчивых по Лагранжу). *Ω-предельное множество любой положительно устойчивой по Лагранжу траектории системы (6.1) не пусто и связно.*

Доказательство.

1) Наличие ω-предельных точек. Рассмотрим произвольную положительно устойчивую по Лагранжу траекторию, порождаемую движением $x = \varphi(t - t_0, p)$.

Положим $q_k = \varphi(t_k - t_0, p)$, где $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность моментов времени, стремящаяся к бесконечности. Тогда по определению $\exists \overline{H}: \ q_k \in \overline{H}$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Следовательно из последовательности $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность индексов $k_i \to \infty$, что $q_{k_i} \to q_0$ при $i \to \infty$, причем $t_{k_i} \to +\infty$, так как $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Тем самым, q_0 по определению является ω-предельной точкой траектории движения $x = \varphi(t - t_0, p)$.

2) Связность. Допустим, что Ω-предельное множество положительно устойчивой по Лагранжу траектории, порождаемой движением $x = \varphi(t - t_0, p)$, не связно. Тогда его можно разбить на две непустых замкнутых непересекающихся компоненты связности Ω_1 и Ω_2. И пусть расстояние между ними равно $4d$ $(d > 0)$.

Рассмотрим $V_d(\Omega_1)$ и $V_d(\Omega_2)$ — d-окрестности множеств Ω_1 и Ω_2, расстояние между которыми равно $2d$. Очевидно, что точки, лежащие вне этих окрестностей, не могут принадлежать ни Ω_1, ни Ω_2, а значит, оказаться ω-предельными.

Поскольку Ω_1 и Ω_2 состоят из ω-предельных точек одной и той же траектории $x = \varphi(t - t_0, p)$, существуют последовательности $t'_k \to +\infty$ и $t''_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ такие, что $\varphi(t'_k - t_0, p) \in V_d(\Omega_1)$, а $\varphi(t''_k - t_0, p) \in V_d(\Omega_2)$.

Выкидывая "лишние" моменты времени из последовательностей, добьемся, чтобы точки t'_k и t''_k чередовались: $t'_1 < t''_1 < t'_2 < t''_2 \ldots$.

Тогда для $\forall\, k$ найдется $t_k \in (t'_k, t''_k)$, что $\varphi(t_k - t_0, p) \notin V_d(\Omega_j)$ $(j = 1, 2)$. При этом последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Но точки $\varphi(t_k - t_0, p)$ принадлежат некоторому компакту $\overline{H} \subset D$, так как $\varphi(t - t_0, p)$ положительно устойчива по Лагранжу. Поэтому существует подпоследовательность индексов $k_i \to \infty$ при $i \to \infty$ такая что $\varphi(t_{k_i} - t_0, p) \to q \in \overline{H}$.

По определению q является ω-предельной точкой траектории движения $x = \varphi(t - t_0, p)$, а таковой она быть не может, поскольку по построению не попадает даже в d-окрестность Ω. $\square$

Аналогичная теорема справедлива для A-предельных множеств.

3^0. Фазовый портрет одной автономной системы.

В качестве примера рассмотрим двумерную автономную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1), \tag{6.7}$$

в которой $x = (x_1, x_2)$, начало координат $x = 0$ является особой точкой, а фазовое пространство $D = \mathbb{R}^2$.

Выберем начальный момент времени $t_0 = 0$, тогда, как обычно, $x = x(t, p)$ — это движение с начальными данными $0, p_1, p_2$.

Проинтегрируем систему (6.7) и построим ее "фазовый портрет". Для этого удобно сделать полярную замену переменных

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$$

Дифференцируя ее в силу системы (6.7), получаем равенства

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi} = \dot{x} = -r\sin\varphi + r(r^2 - 1)\cos\varphi, \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi} = \dot{x} = \quad r\cos\varphi + r(r^2 - 1)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Домножая сначала первое из них на $\cos\varphi$, второе на $\sin\varphi$, а затем — первое на $-\sin\varphi$, второе на $\cos\varphi$ и оба раза складывая с сокращением на r, перейдем к системе в полярных координатах

$$\dot{r} = r(r^2 - 1), \quad \dot{\varphi} = 1. \tag{6.8}$$

Движение $x = x(t, p)$ в переменных r, φ примет вид:

$$r = r(t, r_0, \varphi_0), \quad \varphi = \varphi(t, r_0, \varphi_0) \quad (r(0) = r_0,\, \varphi(0) = \varphi_0),$$

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(p_1/p_2) + \pi k_0$, $r_0 = (p_1^2 + p_2^2)^{1/2} \geq 0$ $(\operatorname{arctg}\infty = \pi/2)$.

Из второго уравнения системы находим: $\varphi(t, r_0, \varphi_0) = t + \varphi_0$, а значит, полярный угол монотонно возрастает с ростом времени.

Правая часть первого уравнения равна нулю при $r = 0$ и $r = 1$.

Движение $r(t) \equiv 0$ параметризует точку покоя системы (6.8). Поскольку траектории автономных систем не пересекаются, параметризация $r(t, r_0, \varphi_0)$ любой другой траектории не меняет знак. Поэтому используются только параметризации с $r(t, r_0, \varphi_0) > 0$, что само по себе очевидно, если рассматривать систему (6.8) не самостоятельно, а как полученную в результате полярной замены.

Траектория движения $r(t, 1, \varphi_0) \equiv 1$, $\varphi(t, 1, \varphi_0) = t + \varphi_0$ замкнута — это единичная окружность, называемая циклом.

Ее A- и Ω-предельные множества совпадают с ней самой, и она делит плоскость на две области $r < 1$ и $r > 1$. Поэтому другие траектории системы (6.8), не имея возможности пересекаться, лежат либо в одной области, либо в другой.

Проинтегрируем первое уравнение системы (6.8).

Разделяя переменные, получаем: $\displaystyle\int \frac{dr}{r(r^2-1)} = \int dt + C$, или $\dfrac{1}{2}\ln|r+1| + \dfrac{1}{2}\ln|r-1| - \ln r = t + \dfrac{1}{2}\ln c$, или $\ln\dfrac{r^2-1}{cr^2} = 2t$, откуда

$$r^2 - 1 = ce^{2t}r^2.$$

Решая задачу Коши с начальными данными $0, r_0, \varphi_0$ $(\varphi_0 \in \mathbb{R}^1$, $r_0 \in (0,1) \cup (1, +\infty))$, получаем формулу любого движения, траектория которого не совпадает с точкой покоя и циклом:

$$r(t, r_0, \varphi_0) = (1 - c_0 e^{2t})^{-1/2}, \quad \varphi(t, r_0, \varphi_0) = \varphi_0 + t, \tag{6.9}$$

где $c_0 = (r_0^2 - 1)r_0^{-2}$, и $c_0 < 0$ при $r_0 \in (0,1)$, $c_0 \in (0,1)$ при $r_0 > 1$.

Имеют место две возможности.

1) $0 < r_0 < 1$. Тогда в (6.9) $r(t, r_0, \varphi_0) \to 1$ при $t \to -\infty$ и $r(t, r_0, \varphi_0) \to 0$ при $t \to +\infty$.

В результате любая траектория, лежащая внутри цикла, представляет собой спираль, которая с ростом t и $\varphi(t, r_0, \varphi_0)$ от $-\infty$ до $+\infty$ скручивается внутрь с единичной окружности, являющейся ее A-предельным множеством, и наматывается на особую точку $r = 0$, являющуюся ее Ω-предельным множеством.

2) $r_0 > 1$. Тогда при убывании t от нуля до $-\infty$ функция $r(t, r_0, \varphi_0)$ в (6.9) убывает и $r(t, r_0, \varphi_0) \to 1$ при $t \to -\infty$.

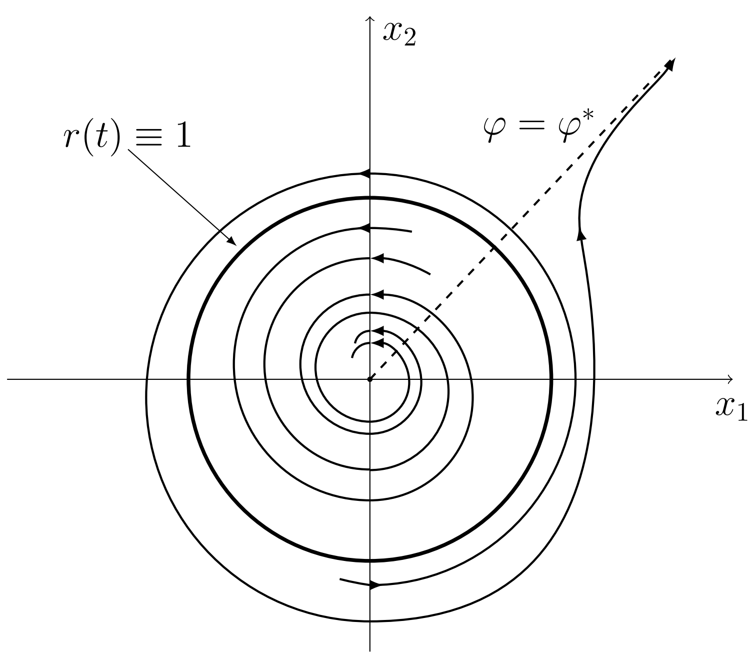
Тем самым, любая траектория, лежащая вне цикла, при $t \le 0$ представляет собой спираль, которая с ростом t от $-\infty$ до нуля ($\varphi(t, r_0, \varphi_0)$ от от $-\infty$ до φ_0) скручивается наружу с единичной окружности, являющейся ее A-предельным множеством.

Однако при дальнейшем возрастании t (от нуля) знаменатель $r(t, r_0, \varphi_0)$ начинает стремиться к нулю, поскольку $c_0 \in (0, 1)$.

Действительно, неравенство $1 - c_0 e^{2t} > 0$ равносильно неравенству $t < t_* = \ln c_0^{-1/2}$. Поэтому в (6.9) функция $\varphi(t, r_0, \varphi_0) < \varphi_0 + t_*$, а $r(t, r_0, \varphi_0) \to \infty$ при $t \to t_* -$.

В результате с ростом t от нуля до t_* ($\varphi(t, r_0, \varphi_0)$ от φ_0 до $\varphi_0 + t_*$) траектория, сделав еще определенное число витков вокруг цикла, устремляется к бесконечности вдоль луча $\varphi_* = (\varphi_0 + t_*) \bmod 2\pi$, являющегося ее асимптотой. И у любой такой траектории $\Omega = \emptyset$.

В подобной ситуации замкнутую траекторию $r = 1$ называют неустойчивым предельным циклом, с ростом времени все траектории как наружные, так и внутренние, с нее сматываются.



Обычно стрелками на траекториях принято обозначать направление движения материальной точки с возрастанием времени.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1^0. Классификация Пуанкаре.

Рассмотрим двумерную вещественную автономную систему

$$\dot{y} = Ay \tag{6.10}$$

в которой $y = (y_1, y_2)$, A — вещественная постоянная 2×2 матрица с $\det A \neq 0$, а значит, ее собственные числа λ_1, λ_2 отличны от нуля.

Разумеется, систему (6.10) легко проинтегрировать, т. е. выписать в общем виде ее общее решение. При этом любое решение $y = y(t)$ системы (6.10) определено для $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$, ее фазовое пространство совпадает с $\mathbb{R}^2$, а траектории $(y_1(t), y_2(t))$ не пересекаются и заполняют всю плоскость.

Поставим задачу нарисовать в фазовой плоскости все траекторий системы (6.10) и разбить их на топологические эквивалентные классы в зависимости от поведения в окрестности особой точки $y = 0$.

Для этого сначала упростим систему (6.10).

Хорошо известно, что существует постоянная неособая матрица S такая, что линейная замена

$$y = Sz \quad (\det S \neq 0) \tag{6.11}$$

сводит (6.10) к системе

$$\dot{z} = Jz, \tag{6.12}$$

где $z = (z_1, z_2)$, а $J = S^{-1}AS$ — жорданова форма матрицы A.

Замена (6.11) осуществляет поворот координатных осей с растяжением вдоль одной и сжатием вдоль другой, что не оказывает влияния на топологическое расположение траекторий.

В зависимости от значений собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ подобных матриц A и S, нарисуем фазовые портреты траекторий системы (6.12), осуществив, тем самым, классификацию Пуанкаре.

2^0. Узел и седло.

Пусть λ_1, λ_2 вещественны и различны.

Тогда $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и система (6.12) имеет вид: $\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases}$.

Интегрируя каждое из уравнений, находим общее решение:

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{6.13}$$

При $c_1, c_2 = 0$ получаем точку покоя $z(t) \equiv 0$.

Пусть теперь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Возможны два случая: а) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$; б) $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

а) Пусть, например, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда в (6.13) с ростом времени $z_k(t) \to 0$, а с убыванием — $|z_k(t)| \to \infty$ $(k = 1, 2)$.

При $c_1 = 0$ $(c_2 \neq 0)$ решения $z_1(t) \equiv 0$, $z_2(t) = c^{-2}e^{\lambda_1 t}$ и $z_1(t) \equiv 0$, $z_2(t) = -c^{-2}e^{\lambda_1 t}$ задают (параметризуют) две траектории, являющиеся положительной и отрицательной полуосями ординат.

Аналогично при $c_2 = 0$ $(c_1 \neq 0)$ получаем две траектории, являющимися положительной и отрицательной полуосями абсцисс. Их параметризуют движения $z_1(t) = c^{-2}e^{\lambda_1 t}$, $z_2(t) \equiv 0$ и $z_1(t) = -c^{-2}e^{\lambda_1 t}$, $z_2(t) \equiv 0$.

При $c_1, c_2 \neq 0$, избавляясь от t, получаем $(c_1^{-1}z_1)^{\lambda_2} = (c_2^{-1}z_2)^{\lambda_1}$.

Если $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то это — четыре траектории: $z_2 = \mp c^{-2}|z_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$ — левый и правый ус двух парабол, и движение точки по ним также происходит к началу координат (см. рис. а)).

А если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, то это также четыре траектории, но образованные "лежачими" параболами $z_1 = \mp c^{-2}|z_2|^{\lambda_1/\lambda_2}$.

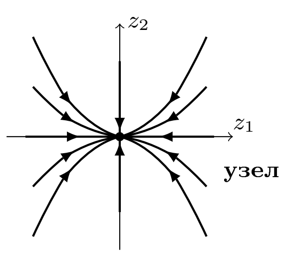
Полученный фазовый портрет и особая точка называются **узел**.

<u>Характерные особенности узла</u>: все траектории имеют в начале координат одно направление касательной, за исключением двух траекторий — с другим направлением касательной.

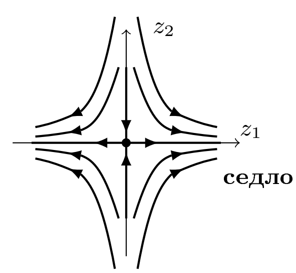
В зависимости от знака собственных чисел матрицы системы узел может быть устойчивым или неустойчивым.

На рисунке а) приведен устойчивый узел — материальная точка с ростом времени движется по каждой траектории в направлении начала координат, являющегося положением равновесия.

а) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



б) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



б) Пусть, например, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Тогда в (6.13) с ростом времени $|z_1(t)| \to \infty$, $z_2(t) \to 0$, а с убыванием времени — наоборот.

При $c_1 = 0$ $(c_2 \neq 0)$ траекториями являются полуоси ординат, и движение по ним к началу координат происходит с ростом времени. А при $c_2 = 0$ $(c_1 \neq 0)$ траектории — полуоси абсцисс, и движение по ним к началу координат происходит с убыванием времени.

При $c_1, c_2 \neq 0$ в качестве траекторий получаем гиперболы $z_2 = \mp c^{-2}|z_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$ (см. рис. б)).

Полученный фазовый портрет и особая точка называются **седло**.

Характерные особенности седла: две пары траектории имеют в начале координат свои, различные направления касательных, при этом одна пара входит в начало при $t \to +\infty$, а другая — при $t \to -\infty$; все другие траектории покидают любую окрестность точки покоя как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

3^0. Вырожденный узел и дикритический узел.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, а значит, $\mu \in \mathbb{R}^1$, поскольку матрица A в системе (6.10) вещественна. Тогда $J = \begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где $\sigma = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array}\right.$.

а) $\sigma = 1$. Система (6.12) имеет вид: $\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \mu z_2 \end{cases}$.

Из второго уравнения получаем: $z_2(t) = c_2 e^{\mu t}$.

Подставляя теперь $z_2(t)$ в первое уравнение, получаем уравнение $\dot{z}_1 = \mu z_1 + c_2 e^{\mu t}$. Его общее решение: $z_1(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t}$.

При $c_1, c_2 = 0$ траектория $z(t) \equiv 0$ является точкой покоя.

Пусть теперь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ и, например $\mu < 0$. Тогда с ростом времени $z_k(t) \to 0$, а с убыванием — $|z_k(t)| \to \infty$ $(k = 1, 2)$.

При $c_2 = 0$ $(c_1 \neq 0)$ получаем две траектории — являющимися положительная и отрицательная полуоси абсцисс. Их параметризуют движения $z_1(t) = c^{-2} e^{\mu t}$, $z_2(t) \equiv 0$ и $z_1(t) = -c^{-2} e^{\mu t}$, $z_2(t) \equiv 0$.

При $c_2 \neq 0$, избавляясь от t, получаем уравнение для траекторий $z_1 = c_1 c_2^{-1} z_2 + \mu^{-1} z_2 \ln(c_2^{-1} z_2)$.

Найдем производную функции $z_1(z_2)$ при $z_2 \to 0$ $(t \to +\infty)$.

Имеем: $\dfrac{dz_1}{dz_2} = \dfrac{c_1}{c_2} + \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu} \ln \dfrac{z_2}{c_2} \to +\infty$ при $z_2 \to 0$.

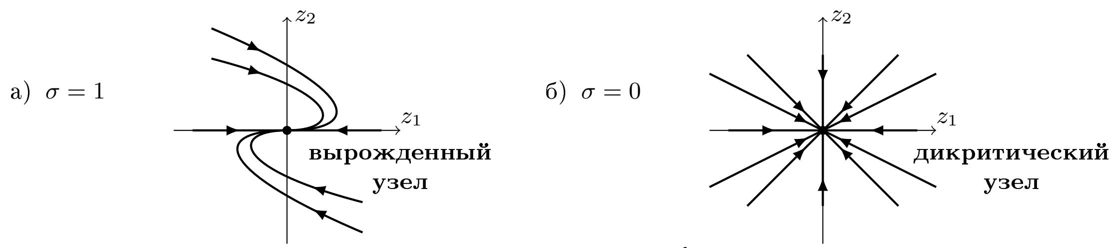
Следовательно все траектории "входят" в начало координат, имея горизонтальную касательную.

Полученный фазовый портрет и положение равновесия называются **вырожденный узел**.

Характерные особенности вырожденного узла: все траектории имеют в начале координат одно и то же направление касательной.

В зависимости от знака собственных чисел матрицы системы вырожденный узел может быть устойчивым или неустойчивым.

На рисунке а) приведен устойчивый вырожденный узел — материальная точка с ростом времени движется по каждой траектории в направлении начала координат, являющегося точкой покоя.



б) $\sigma = 0$. Система (6.12) имеет вид: $\begin{cases} \dot z_1 = \mu z_1 \\ \dot z_2 = \mu z_2 \end{cases}$. Ее общее решение $z_1(t) = c_1 e^{\mu t}$, $z_2(t) = c_2 e^{\mu t}$.

Пусть, например, $\mu < 0$. Тогда с ростом времени любое движение стремится к началу координат.

Как обычно, при $c_1, c_2 = 0$ получаем точку покоя $z(t) \equiv 0$, а при $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ уравнение для траекторий имеет вид: $c_2 z_1 = c_1 z_2$ — это пучок лучей, выходящих из начала координат.

Полученный фазовый портрет и положение равновесия называются **дикритический узел**.

Характерные особенности дикритического узла: все траектории можно разбить на пары, каждая из которых имеет в начале координат свое направление касательной и для любого направления найдется пара траекторий с выбранным направлением.

В зависимости от знака собственных чисел матрицы системы дикритический узел может быть устойчивым или неустойчивым.

На рисунке б) приведен устойчивый дикритический узел — материальная точка с ростом времени движется по каждой траектории в направлении начала координат, являющегося точкой покоя.

4^0. Фокус и центр.

Пусть $\lambda_1 = \alpha + \mathfrak{i}\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1,\ \beta \neq 0)$.

Поскольку исходная система (6.10) вещественна, другое собственное число матрицы A должно быть комплексно сопряженным к λ_1, т. е. $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Поэтому $\lambda_2 \neq \lambda_1$, и система (6.12), полученная из (6.10) заменой (6.11), имеет вид:

$$\dot z = Jz \ \text{ с } \ J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot z_1 = (\alpha + \mathfrak{i}\beta) z_1 \\ \dot z_2 = (\alpha - \mathfrak{i}\beta) z_2 \end{cases} \ (\beta > 0), \tag{6.14}$$

а неравенство $\beta > 0$ при необходимости получаем за счет перенумерации переменных в системе (6.10).

Уточним структуру матрицы S в линейной замене (6.11).

Пусть $S = (s^{(1)}, s^{(2)})$. Поскольку $S^{-1}AS = J$, то $AS = SJ$ или $A \cdot (s^{(1)}, s^{(2)}) = (s^{(1)}, s^{(2)}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}$. Отсюда $\begin{array}{l} As^{(1)} = \lambda_1 s^{(1)} \\ As^{(2)} = \overline{\lambda_1} s^{(2)} \end{array}$.

Вектор $s^{(1)}$ из первого уравнения выбираем любым — это собственный вектор вещественной матрицы A. Написав теперь уравнение, комплексно сопряженное к первому, заключаем, что можно выбрать другой собственный вектор $s^{(2)} = \overline{s^{(1)}}$.

Сделаем в системе (6.14) стандартную замену переменных

$$\begin{cases} z_1 = u_1 + \mathfrak{i}u_2 \\ z_2 = u_1 - \mathfrak{i}u_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad z = Cu \ \text{ с } \ C = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{i} \\ 1 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Имеем: $C\dot u = \dot z = JCu$ или $\dot u = C^{-1}JCu$, т. е. получена система

$$\begin{cases} \dot u_1 = \alpha u_1 - \beta u_2 \\ \dot u_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \dot u = J_R u \ \text{ с } \ J_R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

где $J_R = C^{-1}JC$ — вещественная жорданова форма матрицы A.

В результате замена, которая сводит вещественную систему (6.10) к системе (6.15), имеет вид:

$$y = SCu. \tag{6.17}$$

Покажем, что матрица SC в замене (6.17) — вещественная.

В самом деле, $SC = (s^{(1)}, \overline{s^{(1)}}) \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{i} \\ 1 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} = (s^{(1)} + \mathfrak{i}\overline{s^{(1)}}, \mathfrak{i}s^{(1)} - \mathfrak{i}\overline{s^{(1)}})$ — вещественна, поэтому $u = (SC)^{-1}y$ — вещественные координаты.

Таким образом установлено, что система (6.16) — вещественная и переменные z_1, z_2, системы (6.14), вводимые линейной заменой (6.11), согласно (6.16) — комплексно сопряженные, т. е. $z_2 = \overline{z_1}$.

Сделаем в системе (6.16) полярную замену переменных

$$u_1 = r\cos\varphi, \quad u_2 = r\sin\varphi \quad (r \geq 0).$$

Действуя так же, как в § 2, п. 3, получаем равенства

$$\begin{aligned} \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\dot\varphi &= \alpha r\cos\varphi - \beta r\sin\varphi, \\ \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\dot\varphi &= \beta r\cos\varphi + \alpha r\sin\varphi, \end{aligned}$$

а из них — чрезвычайно простую систему в полярных координатах

$$\dot r = \alpha r, \quad \dot\varphi = \beta,$$

которая имеет общее решение $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$, $\varphi(t) = \beta t + \varphi_0$.

При $r_0 = 0$ получаем траекторию $r = 0$ — особую точку.

При $r_0 > 0$ надо рассматривать два случая.

а) $\alpha \neq 0$. Пусть, например, $\alpha < 0$ $(\beta > 0)$. Тогда с ростом времени полярный угол $\varphi(t)$ любого движения монотонно возрастает, а радиус-вектор $r(t)$ стремится к нулю.

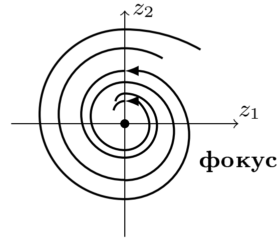
Полученный фазовый портрет и особая точка называются **фокус**.

Характерные особенности фокуса: все траектории являются спиралями, намотанными на особую точку, расположенную в начале координат.

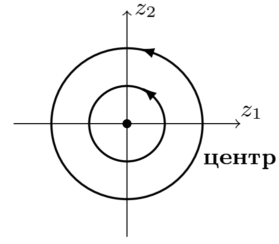
В зависимости от знака вещественной части собственных чисел системы фокус может быть устойчивым или неустойчивым.

На рисунке а) приведен устойчивый фокус — материальная точка с ростом времени движется по любой спиралевидной траектории в направлении начала координат, являющегося точкой покоя.

а) $\alpha \neq 0$



б) $\alpha = 0$



б) $\alpha = 0$. Тогда с ростом времени полярный угол $\varphi(t)$ любого движения монотонно возрастает, а радиус-вектор $r(t) \equiv r_0$, т. е. остается постоянным. Тем самым, траектории представляют собой семейство концентрических окружностей – циклов с общим центром в начале координат.

Полученный фазовый портрет и особая точка называются **центр**.

Характерные особенности центра: все траектории замкнуты и содержат начало координат внутри себя.

Движения, параметризующие любой цикл $r = r_0$ в полярных координатах имеют вид $r(t) \equiv r_0$, $\varphi(t) = \beta t + \varphi_0$, а в декартовых для системы (6.14) — $u_1(t) = r_0 \cos(\beta t + \varphi_0)$, $u_2(t) = r_0 \sin(\beta t + \varphi_0)$.

В результате любое движение $u(t)$ имеет период, равный $2\pi\beta^{-1}$.

Центр называется изохронным, если движения, параметризующие циклы в некоторой окрестности особой точки, имеют один и тот же период. В противном случае центр — неизохронный.

Разумеется, неизохронный центр может иметь место только у нелинейных автономных систем.

В заключение отметим, что все разновидности узлов и фокус имеют одинаковую топологию.

ГЛАВА VII
Теория устойчивости движения

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

1^0. Устойчивость — как попытка обобщения теоремы об интегральной непрерывности на бесконечный промежуток времени.

В этой главе для нормальной системы (3.1) будем использовать механическую запись (3.1_m) и сделаем дополнительное предположение о структуре области G. Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{7.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, f определена, непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области $G = (c, +\infty) \times D$, а D — область фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение или, как говорят, движение системы (7.1), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, где $t_0 > c$.

Зафиксируем начальный момент времени t_0 и через $x = x(t, x^0)$ будем обозначать решение системы (7.1) с начальными данными t_0, x^0 $\quad (x^0 \in D)$, определенное на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta) \ni t_0$.

Возьмем произвольный момент времени $T > t_0$ и рассмотрим выделенное решение $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$.

По теореме об интегральной непрерывности для всякого достаточно малого $\Delta > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого x^0 : $\|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ решение $x(t, x^0)$, которое определено на $[t_0, T]$ и $x(t, x^0) \in \overline{U}_\Delta$, т. е. $\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \Delta$, при $\forall t \in [t_0, T]$. Здесь левый конец отрезка $[a, b]$ из теоремы выбран совпадающим с t_0.

Таким образом, функция $x(t, x^0)$ оказалась непрерывной по x^0 равномерно относительно $t \in [t_0, T]$.

Очевидно, что с увеличением T, т. е. длины промежутка, на котором обязана работать теорема об интегральной непрерывности, δ может вынужденно уменьшаться, и может так случиться, что при T стремящемся к бесконечности δ будет стремиться к нулю.

Свойство устойчивости движения $x = \varphi(t)$ состоит в том, что величина δ, наличие которой для любого фиксированного T гарантирует теорема, вообще не зависит от выбора T, а значит, функция $x(t, x^0)$ непрерывна по x^0 равномерно не только по t, но и по T.

Следует сразу отметить, что речь идет не об устойчивости системы (7.1), а только об устойчивости какого-либо ее решения.

Мы выделяем движение $x = \varphi(t)$, продолжимое по времени до бесконечности, и смотрим, как ведут себя все решения системы (7.1), достаточно близкие к нему в начальный момент времени t_0. А именно, продолжимы ли они все на бесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$ и, если это так, то остаются ли они близки к $\varphi(t)$ при $t \to +\infty$.

2^0. Основные определения.

Df. *Выбранное движение $x = \varphi(t)$ системы (7.1), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется невозмущенным, а остальные движения $x = x(t, x^0)$ — возмущенными. При этом $\|x^0 - \varphi(t_0)\|$ называется возмущением.*

Df. *Невозмущенное движение $x = \varphi(t)$, определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется устойчивым по Ляпунову, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0: \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta \;\Rightarrow$$
$$\forall\, t \in [t_0, +\infty) \text{ верно неравенство } \|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Устойчивость движения не зависит от выбора начального данного по времени t_0. Попробуйте доказать этот факт самостоятельно, используя теорему об интегральной непрерывности.

Df. *Невозмущенное движение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и*

$$\exists\, \delta_0 > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0: \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta_0 \;\Rightarrow$$
$$\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Легко привести пример, когда выполняется второе условие из определения асимптотической устойчивости, но при этом невозмущенное движение не будет устойчивым по Ляпунову.

Df. *Областью притяжения асимптотически устойчивого движения $x = \varphi(t)$ называется множество точек $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ фазового пространства таких, что если x^0 — точка из этого множества, $x(t, x^0) \to \varphi(t)$ при $t \to +\infty$.*

В частности, непосредственно из определения асимптотической устойчивости движения вытекает, что область его притяжения содержит n-мерный куб с длиной ребра $2\delta_0$.

Df. *Если область притяжения асимптотически устойчивого движения совпадает со всем фазовым пространством* $\mathbb{R}^n$, *то это движение называется устойчивым в целом.*

Df. *Невозмущенное движение* $x = \varphi(t)$ *называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову.*

Смысл последнего определения заключается в том, что третьего не дано: любое движение системы (7.1), продолжимое на промежуток $[t_0, +\infty)$, либо устойчиво по Ляпунову (возможно асимптотически), либо неустойчиво.

Через "ε, δ" определение неустойчивости движения $x = \varphi(t)$ записывается следующим образом:

$$\exists\, \varepsilon_* > 0 \ \text{ такое, что } \ \forall\, \delta > 0 \ \Rightarrow$$
$$\exists\, x^0 : \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta \ \text{ и } \ \exists\, t_* > t_0, \quad \text{что} \quad \|x(t_*, x^0) - \varphi(t_*)\| = \varepsilon_*.$$

В заключение еще раз отметим, что устойчивость — это локальное свойство, относящееся к отдельным решениям системы.

3^0. Алгоритм исследования устойчивости движения.

На практике для начала исследование невозмущенного движения $x = \varphi(t)$ стандартным образом заменяют на исследование тривиального решения. Для этого в системе (7.1) делают сдвигающую замену переменных $x = y + \varphi(t)$, получая систему

$$\dot{y} = g(t, y), \tag{7.2}$$

в которой $g(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$ и которая имеет решение $y \equiv 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Тем самым, вектор функция g определена по y в некоторой окрестности начала координат фазового пространства $y_1, \ldots, y_n$, а по t — на $[t_0, +\infty)$, там же непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по y и $g(t, 0) \equiv 0$.

Очевидно, что при указанной сдвигающей замене свойства устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости для невозмущенного движения $x = \varphi(t)$ системы (7.1) равносильны тем же свойствам тривиального решения системы (7.2).

А определения для тривиального решения $y \equiv 0$ выглядят значительно проще.

Например, движение $y \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ такое, что } \forall y^0 : \quad \|y^0\| < \delta \Rightarrow$$
$$\forall t \in [t_0, +\infty) \text{ верно неравенство } \|y(t, y^0)\| < \varepsilon.$$

Следующим шагом является выделение в системе (7.2) линейной части. Для этого достаточно незначительно усилить ограничение на функцию f исходной системы (7.1), потребовав вместо условия Липшица ее непрерывную дифференцируемость по x в области G.

Тогда этим же свойством будет обладать и функция g в некоторой области $G_0 = (c, +\infty) \times D_0$, где $D_0 = \{y \mid \|y\| < c_0\}$ и c_0 достаточно мало. А значит, в g можно выделить линейный член ее разложения в ряд Тейлора и записать систему (7.2) в виде

$$\dot{y} = P(t)y + Y(t, y), \tag{7.3}$$

где матрица $P(t) = \left.\dfrac{\partial g(t, y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ и для $\forall t \in [t_0, +\infty)$ отношение $\|Y(t, y)\|/\|y\| \to 0$ при $\|y\| \to 0$, т. е. стремление к нулю отношения — поточечное. При этом, очевидно, $Y(t, 0) \equiv 0$.

Систему (7.3) обычно называют возмущенной, а линейную систему $\dot{y} = P(t)y$ — невозмущенной. Возмущение $Y(t, y)$ системы (7.3) при малых y сколь угодно мало по сравнению с линейной частью невозмущенной системы.

Исследовать устойчивость движений невозмущенной системы значительно проще и этому будет посвящен следующий параграф.

А дальше возникает естественный вопрос: когда из устойчивости или неустойчивости тривиального решения линейной системы вытекает устойчивость или не устойчивость тривиального решения возмущенной системы (7.3)? Этот вопрос был поставлен и решен в конце девятнадцатого века А. М. Ляпуновым. Его теорема об устойчивости по первому приближению будет доказана в § 3.

В § 4 будут изложены основы так называемого Второго метода Ляпунова, разработанного им для случаев, когда не работают теоремы об устойчивости или не устойчивости по первому приближению.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1^0. Инвариантность свойства устойчивости для линейных систем.

Пусть в линейной однородной системе

$$\dot{y} = P(t)y \tag{7.4}$$

матрица $P(t)$ определена и непрерывна на интервале $(c, +\infty)$, тогда по теореме о продолжимости решений почти линейных систем все решения системы (7.4) продолжимы на весь интервал $(c, +\infty)$.

Рассмотрим произвольное невозмущенное решение $x = \varphi(t)$ системы (7.4) и осуществим его сдвиг в тривиальное решение посредством замены $y = u + \varphi(t)$.

Имеем: $\dot{y} = \dot{u} + \dot{\varphi}$, но $\dot{\varphi}(t) \equiv P(t)\varphi(t)$, поэтому $P(t)(u + \varphi(t)) = \dot{u} + P(t)\varphi(t)$ или $\dot{u} = P(t)u$.

В результате получена та же система (7.4), а значит, любое ее решение при помощи сдвига сводится к тривиальному решению $y \equiv 0$.

Но непосредственно из определения устойчивости вытекает, что сдвиг не может повлиять на устойчивость движения. Следовательно вопрос об устойчивости произвольного невозмущенного движения линейной однородной системы равносилен вопросу об устойчивости ее тривиального решения.

Иными словами все решения системы (7.4) устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы одновременно, и сама линейная система устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива в зависимости от обладания одним из этих свойств любого и, в частности, тривиального решения.

2^0. Связь устойчивости с ограниченностью фундаментальной матрицы.

Теорема (об устойчивости линейных систем). *Система (7.4) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда у нее существует фундаментальная матрица, ограниченная на промежутке* $[t_0, +\infty)$ $(t_0 > c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть тривиальное решение $y \equiv 0$, рассматриваемое на промежутке $[t_0, +\infty)$, устойчиво по Ляпунову.

Выберем нормированную фундаментальную матрицу $\Phi_0(t)$, т. е. $\Phi_0(t_0) = E$. Тогда любое возмущенное решение системы (7.4) с начальными данными t_0, y^0 задается формулой $y(t, y^0) = \Phi_0(t)y^0$.

По определению устойчивости для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $\forall\, y^0 : \ \|y^0\| < \delta$ будет для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$ выполняться неравенство $\|\Phi_0(t)y^0\| < \varepsilon$.

Пусть $\Phi_0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $y^0 = (\delta/2, 0, \dots, 0)$, тогда $\|\varphi_1 \delta/2\| < \varepsilon$ или $\|\varphi_1\| < 2\varepsilon/\delta$ для $\forall\, t \geq t_0$.

Аналогичные неравенства можно получить для $\varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Поэтому $\|\Phi_0\| = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\varphi_{i,j}| < 2\varepsilon/\delta$, т. е. ограничена.

Пусть теперь у системы (7.4) существует фундаментальная матрица $\Phi(t)$, ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица C, что $\Phi_0(t) = \Phi(t)C$. Тогда $\|\Phi_0(t)\| \leq n\|\Phi(t)\| \cdot \|C\|$, а значит, $\|\Phi_0(t)\| \leq K$ для $\forall t \geq t_0$.

Теперь для $\forall \varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/(nK)$ и для $\forall\, y^0 : \ \|y^0\| < \ \delta$ оценим решение $y(t, y^0) = \Phi_0(t)y^0$. Для $\forall t \in [t_0, +\infty)$ имеем: $\|y(t, y^0)\| \leq n\|\Phi_0(t)\| \cdot \|y^0\| < nK\delta = \varepsilon$. Следовательно тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ системы (7.4) устойчиво по Ляпунову. □

3^0. Устойчивость линейных систем с постоянными и периодическими коэффициентами.

Рассмотрим отдельно линейные однородные системы с постоянными и ω-периодическими коэффициентами, структуры фундаментальных матриц которых известны.

Если в системе (7.4) $P(t)$ является постоянной матрицей A, то ее фундаментальная матрица $\Phi(t) = e^{At}$ (см. (5.11)), а если $P(t)$ — ω-периодическая матрица, то ФМ $\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}$ и матрица $Q(t)$ — также ω-периодическая (см.(5.21)).

Когда эти $\Phi(t)$ ограничены, если известно, что любой их элемент $\varphi_{ij}(t) = s_{ij}(t)e^{\lambda_k t}$, где $s_{ij}(t)$ — это многочлен с постоянными или периодическими коэффициентами степени, не превосходящей $n-1$, а λ_k — одно из собственных чисел матриц A или R?

Множество собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ этих матриц удобно разбить на три непересекающихся множества:

М1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ для $\forall\, k = \overline{1, n}$; М2) $\exists\, k_* : \ \operatorname{Re} \lambda_{k_*} > 0$;

М3) $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$ для $\forall\, k = \overline{1, n}$ и $\exists\, k_0 : \ \operatorname{Re} \lambda_{k_0} = 0$.

Исследуем устойчивость ЛОС с постоянными или периодическими коэффициентами для каждого из этих множеств.

М1) Очевидно, что $\varphi_{ij}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому система (7.4) устойчива по Ляпунову. Более того, ее тривиальное решение $y \equiv 0$ является асимптотически устойчивым, так как по лемме об оценке ФМ $\exists\,\lambda_0 < 0: \ \|\Phi(t)\| \le Ke^{\lambda_0 t} \to 0$ при $t \to +\infty$, а любое возмущенное решение $y(t, y^0) = \Phi(t)(\Phi^{-1}(t_0)y^0)$.

М2) Из структуры фундаментальной матрицы вытекает, что одним из ее столбцов является решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_* t}$ $(\operatorname{Re}\lambda_{k_*} > 0)$. Поэтому всегда найдется такая последовательность моментов времени $t_k \to +\infty$, что $\|y(t_k)\| \to +\infty$, а значит, фундаментальная матрица неограничена и линейная система неустойчива.

М3) Если $\operatorname{Re}\lambda_{k_0} = 0$, то система имеет решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_0 t} = s(t)(\cos(\lambda_0 t) + \mathrm{i}\sin(\lambda_0 t))$. Поэтому, если векторный полином $s(t)$ (возможно с периодическим коэффициентами) имеет ненулевую степень, то $y(t)$ неограничено и линейная система неустойчива. А если в фундаментальной матрице нулевую степень имеют все полиномы $s(t)$, которые стоят множителями при $e^{\lambda_k t}$ с $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, то фундаментальная матрица, очевидно, ограничена и линейная система является устойчивой по Ляпунову, но не асимптотически.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Вернемся к возмущенной системе (7.3) $\dot y = P(t)y + Y(t, y)$ и зададимся вопросом: когда возмущение $Y(t, y)$ не сможет повлиять на устойчивость или неустойчивость тривиального решения невозмущенной линейной системы $\dot y = P(t)y$?

Такая задача была поставлена и решена А. М. Ляпуновым в конце XIX века. Для этого ему пришлось наложить три дополнительных ограничения на правую часть системы (7.3). Он потребовал, чтобы: 1) матрица $P(t)$ была постоянной, 2) ее собственные числа принадлежали множествам М1) или М2), отношение $\|Y(t, y)\|/\|y\|$ стремилось бы к нулю при $y \to 0$, но не поточечно, а равномерно относительно t из промежутка $[t_0, +\infty)$.

Теорема (Ляпунова, об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему*

$$\dot{y} = Ay + Y(t, y), \tag{7.5}$$

в которой $Y \in C(G_0)$, $Y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G_0)$, *где* $G_0 = (c, +\infty) \times D_0$ *и* $D_0 = \{y \mid \|y\| < c_0\}$, $\|Y(t, y)\|/\|y\| \overset{[t_0,\infty)}{\rightrightarrows} 0$ *при* $\|y\| \to 0$. *Тогда тривиальное решение* $y \equiv 0$ *системы (7.5) асимптотически устойчиво, если* $\mathrm{Re}\,\lambda_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda_n < 0$, *и неустойчиво, если* $\exists\, k_*$ *такое, что* $\mathrm{Re}\,\lambda_{k_*} > 0$; *здесь* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа* A.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda_n < 0$.

Рассмотрим произвольное решение $y = y(t)$ системы (7.5) с начальными данными t_0, y^0 из области G_0 $(t_0 > c,\ y(t_0) = y^0)$, определенное на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta) \ni t_0$.

Надо доказать, что если $\|y^0\|$ достаточно мала, то решение $y(t)$ продолжимо по времени до $+\infty$, сколь угодно близко к нулю при всех $t \geq t_0$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Но как оценивать сверху по норме решение, которое неизвестно? Ведь в явном виде мы умеем интегрировать только линейные системы с постоянными коэффициентами.

Именно поэтому Ляпунов предложил превратить систему (7.5) в линейную неоднородную путем подстановки решения $y(t)$ только в ее возмущение.

Итак, очевидно, что $y(t)$ удовлетворяет ЛНС $\dot{y} = Ay + Y(t, y(t))$. Правда, теперь в неоднородности стоит неизвестная функция $y(t)$, но зато в явном виде можно выписать решение этой системы.

По формуле Коши для $\forall\, t \in [t_0, \beta)$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Y(s, y(s))\, ds.$$

Тогда при тех же t

$$\|y(t)\| \leq n\|e^{A(t-t_0)}\|\, \|y^0\| + \int_{t_0}^{t} n\|e^{A(t-s)}\|\, \|Y(s, y(s))\|\, ds. \tag{7.6}$$

Оценим сверху $\|e^{A(t-t_0)}\|$ и $\|Y(t, y(t))\|$, входящие в (7.6).

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для $\forall k = \overline{1,n}$, найдется такое число $\lambda > 0$, что $\max\limits_{j=\overline{1,n}} \operatorname{Re}\lambda_j < -\lambda$. Тогда по лемме об оценке фундаментальной матрицы ЛОС с постоянными коэффициентами найдется $K \geq 1$ такое, что $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq Ke^{-\lambda(t-t_0)}$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

Из предположения, что $\|Y(t,y)\|/\|y\| \overset{[t_0,\infty)}{\rightrightarrows} 0$ при $\|y\| \to 0$, и определения равномерной сходимости вытекает, что

$$\forall\, \varepsilon_0 \;\; \exists\, \delta_0, \text{ что } \forall\, t \geq t_0 : \; \|y(t)\| \leq \delta_0 \; \Rightarrow \; \|Y(t, y(t))\| \leq \frac{\varepsilon_0}{nK}\|y(t)\|.$$

Зафиксируем любое число $\varepsilon_0 < \lambda$ и выберем произвольное возмущение $y^0 : \; \|y^0\| < \delta_0/(nK) \leq \delta_0$. Тогда в силу непрерывности при t близких к t_0 решение $y(t)$ с начальными данными t_0, y^0 по норме будет меньше δ_0.

Существуют две возможности:

1) $\exists\, T > t_0 : \;\; \|y(t)\| < \delta_0$ при всех $t \in [t_0, T)$, а $\|y(T)\| = \delta_0$;

2) $\|y(t)\| < \delta_0$ для $\forall t \in [t_0, +\infty)$, т. е. $T = \beta = +\infty$.

Во всяком случае для $\forall t \in [t_0, T)$ из неравенства (7.6) имеем:

$$\|y(t)\| \leq nKe^{-\lambda(t-t_0)}\|y^0\| + \int_{t_0}^{t} nKe^{-\lambda(t-s)}\frac{\varepsilon_0}{nK}\|y(s)\|\, ds.$$

Домножим полученное неравенство на $e^{\lambda(t-t_0)}$, тогда

$$\|y(t)\|e^{\lambda(t-t_0)} \leq nK\|y^0\| + \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\|y(s)\|\, ds.$$

По лемме Гронуолла $\|y(t)\|e^{\lambda(t-t_0)} \leq nK\|y^0\|e^{\varepsilon_0\lambda(t-t_0)}$ или

$$\|y(t)\| \leq nK\|y^0\|e^{-(\lambda-\varepsilon_0)(t-t_0)}. \tag{7.7}$$

Допустим, что реализуется первая из возможностей, тогда согласно выбору ε_0, δ_0 и неравенству (7.7) приходим к противоречию: $\delta_0 = \|y(T)\| \leq \delta_0 e^{-(\lambda-\varepsilon_0)(T-t_0)} < \delta_0$!!!.

Следовательно неравенство (7.7) выполняется для $\forall\, t \geq t_0$, а из него вытекает как устойчивость по Ляпунову, так и асимптотическая устойчивость тривиального решения $y \equiv 0$.

Действительно, для $\forall\,\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min\{\delta_0, \varepsilon\}/(nK)$. Тогда для $\forall\, y^0:\ \|y^0\| < \delta$ имеем: $\|y^0\| < \delta_0/(nK)$, а значит, для всех t верно неравенство (7.7) и, в частности, $\|y(t)\| \le nK\|y^0\| < \varepsilon$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$ в силу выбора ε_0 и δ. Кроме того, при том же δ из неравенства (7.7) вытекает, что $\|y(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Неустойчивость тривиального решения при наличии хотя бы одного собственного числа с положительной вещественной частью доказывается построением функции Ляпунова с нужными свойствами, на основании разработанного Ляпуновым Второго метода. $\square$

§ 4. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

1^0. Функция Ляпунова.

Будем исследовать нормальную систему (7.2) $\dot{y} = g(t, y)$ размерности n, имеющую тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$.

Запишем ее в следующих обозначениях:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C(G), \quad f \in Lip_x^{loc}(G), \tag{7.11}$$

где $G = G_\tau^a = \{(t, x)\,|\, t \in (\tau, +\infty),\ \|x\| < a\}$, при этом $f(t, 0) \overset{t>\tau}{\equiv} 0$.

Продолжим исследовать устойчивость тривиального невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$.

Как уже отмечалось, изменение области G_τ^a путем уменьшения a или увеличения τ не влияют на его устойчивость. Поэтому при необходимости будем параметры a, τ указанным образом изменять.

Df. *Функцией Ляпунова V называется любая непрерывная функция $V(t, x):\ G \to \mathbb{R}$, если $V(t, 0) \overset{t>\tau}{\equiv} 0$.*

Сущность Второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения заключается в исследовании поведения функции Ляпунова как функции t после замены в ней переменной x на произвольное решение системы (7.11).

Df. *Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется знакопостоянной, если $\exists\ \tau, a$ такие, что V не меняет знак в области G_τ^a; она положительна, если $V(t, x) \ge 0$, и отрицательна, если $V(t, x) \le 0$.*

В частности, $V(t, x) \equiv 0$ как положительна, так и отрицательна.

Df. *Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется стационарной, если она не зависит от t, т. е. $V(t, x) \equiv W(x)$ и $W(0) = 0$.*

Df. *Стационарная функция Ляпунова* $W(x)$ *называется положительно определенной, если* $\exists\, a > 0$ *такое, что для* $\forall\, x\colon\ 0 < \|x\| < a$ *функция* $W(x) > 0$.

В частности, положительно определенная квадратичная форма (ее каноническая запись имеет вид: $x_1^2 + \ldots + x_n^2$) является положительно определенной стационарной функцией Ляпунова в $\mathbb{R}^n$.

Df. *Функция Ляпунова* $V(t,x)$ *называется положительно определенной, если существует положительно определенная стационарная функция Ляпунова* $W_1(x)$ *такая, что* $V(t,x) \geq W_1(x) > 0$ *в некоторой области* G_τ^a, *и отрицательно определенной — если функция* $-V(t,x)$ *есть положительно определенная функция Ляпунова.*

В связи этим определением следует привести пример нестационарной знакопостоянной функции Ляпунова $V(t,x)$, которая обращается в нуль только при $x = 0$, но не является знакоопределенной. Действительно, функция $V(t,x) = e^{-t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geq 0$ и $V(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому не существует такой положительно определенной функции $W(x)$, чтобы $V(t,x) \geq W(x)$.

Df. *Функция Ляпунова* $V(t,x)$ *допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая стационарная функция Ляпунова* $W_2(x)$, *что* $|V(t,x)| \leq W_2(x)$ *в некоторой области* G.

Тем самым, любая допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t,x)$ ограничена в любой G_τ^a с конечным a.

Покажем, что существуют ограниченные нестационарные функции Ляпунова, не допускающие бесконечно малого высшего предела.

Например, функция $V(t,x) = \sin(t(x_1^2 + \ldots + x_n^2))$ ограничена, однако для $\forall\, \{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\ :\ \|x^{(k)}\| \to 0$ найдется такая последовательность t_k, что $t_k((x_1^{(k)})^2 + \ldots + (x_n^{(k)})^2) = \pi/2 + 2\pi m$, а значит, $V(t_k, x^{(k)}) = 1$. Но любая непрерывная функция $W(x) \to 0$ при $x \to 0$, поэтому найдется такой момент времени t_{k^*}, при котором неравенство $|V(t_{k^*}, x^{(k^*)})| \leq W_2(x^{(k^*)})$ нарушается.

Df. *Пусть* $W(x)$ *— стационарная положительно определенная функция Ляпунова, тогда замкнутое множество* $W(x) = C$ *называется поверхностью уровня, а при* $n = 2$ *— линией уровня.*

2^0. Производная функции Ляпунова в силу системы.

В дальнейшем будем предполагать, что функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор DV:

$$DV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f \quad \text{или} \quad DV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x).$$

— это производная функции Ляпунова V по t в силу системы (7.11).

Пусть $x = x(t)$ — какое-либо решение системы (7.11), тогда
$\dfrac{dV(t,x(t))}{dt} = \dfrac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V(t,x(t))}{\partial x_i}\, \dot{x}_i(t),$ откуда

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt} \equiv DV(t,x(t)). \tag{7.12}$$

Введенный оператор DV является функцией Ляпунова, так как $DV \in C(G)$ и $DV(t,0) \equiv 0$, поскольку $V(t,0) \equiv 0$ и $f(t,0) \equiv 0$.

Сравним функцию Ляпунова $V(t,x)$ с произвольным интегралом $U(t,x)$ системы (7.11).

Если $x(t)$ — решение системы, то $U(t,x(t)) \equiv const$.

Дифференцируя, это тождество по t, получаем

$$0 \equiv \frac{dU(t,x(t))}{dt} \overset{(7.12)}{=} DU(t,x(t)).$$

Таким образом характеристическое свойство интеграла $DU \equiv 0$ позволяет проверять, является ли функция Ляпунова $V(t,x)$ интегралом системы (7.11), а также, как ведут себя траектории системы в окрестности поверхностей уровня.

Остановимся подробнее на геометрической интерпретации знака оператора DV на решениях системы.

Предположим, что система (7.11) — двумерная и $W = W(x_1,x_2)$ — стационарная положительно определенная функция Ляпунова. Тогда $\overline{m} = (\partial W/\partial x_1,\, \partial W/\partial x_2)$ — вектор внешней нормали к линии уровня $W(x_1,x_2) = C$, а $\overline{n} = (\dot{x}_1,\, \dot{x}_2)$ — касательный вектор к траектории системы. Следовательно

$$\frac{dW(x(t))}{dt} = \frac{\partial W(x(t))}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial W(x(t))}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{dt} = \langle \overline{m},\, \overline{n} \rangle.$$

Таким образом знак оператора DW на решении совпадает со знаком $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ в точке пересечения траектории решения с линией уровня $W(x_1,x_2)=C$: если $\pi/2<\alpha<3\pi/2$, то траектория пересекает линию уровня внутрь; если $0\le\alpha<\pi/2$ или $3\pi/2<\alpha<2\pi$, то — наружу; если $\alpha=\pi/2, 3\pi/2$, то $dW(x(t))/dt=0$, а значит, направление касательной к траектории совпадает с направлением касательной к линии уровня, поэтому, если это происходит в любой точки кривой $W(x_1,x_2)=C$, то $W(x)$ — интеграл системы (7.11).

3^0. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Лемма (о поведении положительно определенной функции Ляпунова вблизи нуля). *Пусть функция Ляпунова $V(t,x)$ положительно определена в области G^a_τ, функция $x(t)$ — непрерывна и $\|x(t)\|\le a_1<a$ при $t\in[t_0,+\infty)$, тогда: 1) если $V(t,x(t))\to 0$ при $t\to\infty$, то $\|x(t)\|\to 0$; 2) если $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел и $\|x(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$, то $V(t,x(t))\to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $V(t,x(t))\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку V положительно определена, существует стационарная функция Ляпунова $W_1(x)$ такая, что $V(t,x)\ge W_1(x)>0$ для $\forall\, x\ne 0$, а значит, $W_1(x(t))\to 0$ при $t\to\infty$.

Допустим, $x(t)\not\to 0$. Тогда найдется последовательность $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ такая, что $\|x(t_k)\|\ge\eta>0$, т. е. $\|x(t_k)\|\in[\eta,a_1]$.

Любая непрерывная функция на компакте достигает своего минимума, поэтому $\exists\, x_0\in[\eta,a_1]:\ \ \min_{[\eta,a_1]}W_1(x)=W_1(x_0)>0$.

Но тогда $W_1(x(t_k))\ge W_1(x_0)$ для $\forall\, k$, что невозможно.

2) Пусть теперь $\|x(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Поскольку функция Ляпунова $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, существует стационарная функция Ляпунова $W_2(x)$ такая, что $V(t,x)\le W_2(x)$ в области G. Функция $W_2(x)$ непрерывна и $W_2(0)=0$, следовательно $V(t,x(t))\le W_2(x(t))\to 0$ при $t\to\infty$. $\square$

Замечание 2. Лемма верна и для отрицательно определенной функции Ляпунова $V(t,x)$, надо только заменить V на $-V$.

Теорема Ляпунова (об устойчивости). *Пусть в области G_τ^a существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t,x)$, у которой $DV(t,x)$ отрицательна, тогда в системе (7.11) невозмущенное движение $x(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению существует такая стационарная функция $W_1(x)$, что в G_τ^a при $x\neq 0$ функция Ляпунова $V(t,x)\geq W_1(x)>0$.

Следовательно для $\forall\,\varepsilon\ \ (0<\varepsilon<a)\quad \exists\, l=\min\limits_{\|x\|=\varepsilon} W_1(x)>0$.

Зафиксируем произвольный начальный момент времени $t_0>\tau$.

Для $\forall\,\delta_0\ \ (0<\delta_0<\varepsilon)\quad \exists\, l_0=\max\limits_{\|x\|\leq\delta_0} V(t_0,x)>0$.

Очевидно, что $l_0\to 0$ при $\delta_0\to 0$, поскольку $V(t_0,0)=0$.

Поэтому $\exists\,\delta=\delta(l)\ \ (0<\delta<\varepsilon)$ такое, что для $\forall\, x:\ \|x\|<\delta\ \Rightarrow V(t_0,x)<l$. Можно взять, например, $l_0=l/2$.

Докажем, что полученное таким образом δ обеспечит выполнение неравенства из определения устойчивости движения. Точнее, для $\forall\, x^0:\ \|x^0\|<\delta$ рассмотрим возмущенное движение $x(t,x^0)$ и покажем, что $\|x(t,x^0)\|<\varepsilon$ для $\forall\, t\geq t_0$.

Доказательство этого факта проведем от противного.

Предположим, что $\exists\, x^0:\ \|x^0\|<\delta$ и $\exists\, t_*>t_0$ — первый момент времени, при котором $\|x(t_*,x^0)\|=\varepsilon$.

Тогда $\|x(t,x^0)\|\leq\varepsilon$ при $t\in[t_0,t_*]$.

Продифференцируем функцию $V(t,x(t,x^0))$ по t. В силу (7.12) $\dfrac{d\,V(t,x(t,x^0))}{dt}\equiv DV(t,x(t,x^0))\leq 0$ при $t\in[t_0,t_*]$.

Следовательно $V(t_*,x(t_*,x^0))\leq V(t_0,x^0)<l$ по выбору δ.

Но, с другой стороны, $\|x(t_*,x^0)\|=\varepsilon$, поэтому $V(t_*,x(t_*,x^0))\geq W_1(x(t_*,x^0))\geq l$ по определению l. !!! $\square$

Следствие 1. *Если система (7.11) имеет в области G положительно определенный интеграл $U(t,x)$ и $U(t,0)\equiv 0$, то невозмущенное движение $x(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.*

В этом случае не может быть асимптотической устойчивости, так как траектории возмущенных движений не могут сойти с поверхностей уровня и стремиться к началу координат.

Продемонстрируем действие теоремы Ляпунова об устойчивости на классическом примере.

Пример 1. Рассмотрим уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \tag{7.13}$$

где функция $g(x)$, называемая восстанавливающей силой, определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при $|x| < a$, $g(0) = 0$, $xg(x) > 0$ $(x \neq 0)$.

Уравнение (7.13) имеет решение $x \equiv 0$ и при $g(x) = \sin x$ описывает колебания математического маятника.

Сделаем в (7.13) стандартную замену $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, получая автономную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1). \tag{7.14}$$

Решение $x \equiv 0$ уравнения (7.13) устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво, если соответственно устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво тривиальное решение системы (7.14).

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\,x_2^2$. Она стационарна и определена положительно, так как $x_1 g(x_1) > 0$. Кроме того, $DV = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \equiv 0$ в силу (7.14).

Следовательно, функция Ляпунова $V(x_1, x_2)$ является интегралом, который определяет полную энергию системы (7.14), а тождество $DV \equiv 0$ означает закон сохранения энергии.

Согласно следствию 1 положение равновесия $x \equiv 0$ — устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

4^0. Асимптотическая устойчивость.

Теорема Ляпунова (об асимптотической устойчивости). *Пусть в области G_τ^a существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, а ее производная в силу системы $DV(t, x)$ определенно отрицательна, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ системы (7.13) асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, невозмущенное движение $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Остается показать, что найдется такое $\delta_0 > 0$, что для $\forall\, x^0: \ \|x^0\| < \delta_0 \ \Rightarrow \ \|x(t,x^0)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Возьмем число $a_1: \ 0 < a_1 < a$ (оно играет роль ε из определения устойчивости), тогда по нему найдется такое число $\delta_0 > 0$, что для $\forall\, x^0: \ \|x^0\| < \delta_0 \ \Rightarrow \ \|x(t,x^0)\| \le a_1$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

Надо показать, что $V(t,x(t,x^0)) \to 0$ при $t \to +\infty$, тогда по лемме о поведении положительно определенной функции Ляпунова вблизи нуля $\|x(t,x^0)\|$ также будет стремиться к нулю.

Заметим, что $V(t,x(t,x^0))$ — убывающая функция t при $x^0 \ne 0$, так как по условию теоремы $\dfrac{dV(t,x(t,x^0))}{dt} \overset{(7.12)}{\equiv} DV(t,x(t,x^0)) < 0$.

Рассуждая от противного, допустим, что $V(t,x(t,x^0)) \to l > 0$ при $t \to +\infty$.

Тогда $\exists\, \eta > 0: \ \eta \le \|x(t,x^0)\| \le a_1$ для $\forall t \in [t_0,+\infty)$, иначе существует такая последовательность моментов времени $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, что $\|x(t_k,x^0)\| \to 0$, а значит, по лемме, имея бесконечно малый верхний предел, $V(t_k, x(t_k,x^0)) \to 0$ при $k \to \infty$.

По определению отрицательная определенность DV означает, что существует такая стационарная положительно определенная функция Ляпунова $W_1(x)$, что в области G^a_τ при $x \ne 0$ функция Ляпунова $DV(t,x) \le -W_1(x) < 0$.

Пусть $\min\limits_{\eta \le \|x\| \le a_1} W_1(x) = l_1 > 0$, тогда $\dfrac{dV(t,x(t,x^0))}{dt} \le -l_1$.

Интегрируя это неравенство по s от t_0 до t, получаем:

$$V(t,x(t,x^0)) \le V(t_0,x^0) - l_1(t-t_0) \to -\infty \ \text{ при } \ t \to +\infty,$$

но $V(t,x)$ — положительно определенная функция. !!! $\square$

Пример 2. Рассмотрим уравнение движения диссипативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{7.15}$$

где функции $g(x), h(x)$ определены, непрерывны и удовлетворяет условию Липшица при $|x| < a$; $g(0) = 0$, $xg(x) > 0$ при $x \ne 0$; $h(x) > 0$ при $0 < |x| < a$.

Слагаемое $h(x)\dot{x}$ задает силу трения в уравнении (7.15).

Покажем, что решение $x \equiv 0$ уравнения (7.15) асимптотически устойчиво, для чего сделаем стандартную замену $x = x_1,\ \dot{x} = x_2$, получая автономную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_1)x_2. \tag{7.16}$$

Возьмем стационарную положительно определенную функцию Ляпунова $W(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\,x_2^2$ из примера 1. По определению она сама допускает бесконечно малый высший предел.

Продифференцируем W в силу системы (7.16):

$$DW(x_1, x_2) = g(x_1)x_2 + x_2(-g(x_1) - h(x_1)x_2) = -h(x_1)x_2^2 \le 0.$$

Поскольку $DW(x_1, 0) \equiv 0$, производная в силу системы DW не является отрицательно определенной, и непосредственно применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости не удается.

Однако, для автономных систем теорему можно усилить.

Если система (7.11) автономна, то она имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C(D), \quad f \in Lip_x^{loc}(D), \quad f(0) = 0, \tag{7.17}$$

где $D = D^a = \{x \mid \|x\| < a\}$, т. е. $D^a = G^a_{-\infty}$.

Теорема Ляпунова (Об асимптотической устойчивости для автономных систем). *Пусть у автономной системы (7.17) в области D^a существует положительно определенная стационарная функция Ляпунова $W(x)$, у которой производная в силу системы $DW(x) \le 0$, а множество $M = \{x \mid x \ne 0,\ DW(x) = 0\} \ne \emptyset$ для $\forall\, a > 0$ и не содержит целых траекторий, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ этой системы асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая аналогично доказательству теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости допустим, что $W(x(t, x^0)) \to l > 0$ при $t \to +\infty$, где $\|x(t, x^0)\| \le a_1 < a$.

Поскольку движение $x(t, x^0)$ системы (7.17) положительно устойчиво по Лагранжу, его Ω-предельное множество не пусто.

Пусть x^* — произвольная точка из Ω, тогда $x^* \ne 0$.

Действительно, по определению ω-предельной точки $\exists\, t_k \to +\infty$: $x_k = x(t_k, x^0) \to x^*$ при $k \to \infty$. И, если $x^* = 0$, то непрерывная функция $W(x)$ будет на последовательности x_k стремиться к $W(0) = 0$, а значит, принимать значения заведомо меньшие l.

Кроме того, $W(x^*) = l$, так как $W(x_k) \to W(x^*)$ и согласно предположению $W(x_k) \to l$.

Рассмотрим траекторию движения $x(t, x^*)$, которая в силу инвариантности Ω целиком состоит из ω-предельных точек. Поэтому

$$W(x(t, x^*)) = l \;\text{ для }\; \forall\, t \geq 0.$$

Продифференцируем это равенство по t :

$$\frac{dW(x(t,x^*))}{dt} \overset{(7.12)}{\equiv} DW(x(t,x^*)) = 0.$$

Следовательно $x(t, x^*) \in M$ для $\forall\, t \geq 0$. !!! $\square$

Пример 2 (продолжение 1). Итак, $DW = -h(x_1)x_2^2 \equiv 0$ при $x_2 = 0$ и $|x_1| \leq a_1$. Тогда во втором уравнении системы (7.16) имеем: $0 = -g(x_1) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Следовательно $x_2 \equiv 0$ не является решением (7.16), и множество M не содержит целых траекторий, отличных от состояния равновесия $x_1 = x_2 = 0$.

Теперь по доказанной выше теореме тривиальное решение системы (7.16) асимптотически устойчиво.

Полученный результат в механическом смысле полностью оправдан: колебания маятника под воздействием силы трения затухают.

5^0. Устойчивость в целом.

Исходную систему (7.11) $\dot{x} = f(t, x)$ будем рассматривать в области $G = G_\tau^\infty = \{(t,x)\,|\, t \in (\tau, +\infty),\; x \in \mathbb{R}^n\}$, при этом $f(t, 0) \overset{t \geq \tau}{\equiv} 0$.

Df. *Невозмущенное движение* $x(t) \equiv 0$ *называется устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и* $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ *движение* $x(t, x_0) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Таким образом устойчивость в целом решения является усилением свойства асимптотической устойчивости, так как областью притяжения оказывается все пространство $D^\infty = \mathbb{R}^n$.

Докажем аналог теоремы об асимптотической устойчивости для автономных систем должным образом усилив предположения на стационарную функцию Ляпунова.

Df. *Стационарная функция Ляпунова $W(x)$ называется бесконечно большой, если $W(x) \to \infty$ при $\|x\| \to +\infty$.*

Из приведенного определения непосредственно вытекает, что любая поверхность уровня $W(x) = C$ стационарной бесконечно большой функции Ляпунова ограничена, иначе на ней нашлась бы последовательность точек x_k, у которой $\|x_k\| \to +\infty$.

Продемонстрируем гладкую ограниченную стационарную положительно определенную Ляпунова, у которой любая поверхность уровня не ограничена.

Рассмотрим, например, гладкую функцию скалярного аргумента

$$W(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\left(1 + \frac{x^2 \sin x}{x^2+1}\right).$$

Очевидно, что $W(0) = 0$ и $0 < W(x) < 2$ при $x \neq 0$.

Покажем, что для $\forall\, c:\ 0 < c < 2 \ \Rightarrow\ \exists\, x_k \to +\infty:\ W(x_k) = c$.

Пусть $\tilde{x}_k = -\pi/2 + 2k\pi$, $\hat{x}_k = \pi/2 + 2k\pi$. Тогда $W(x)$ возрастает при $x \in (\tilde{x}_k, \hat{x}_k)$, $W(\tilde{x}_k) = \dfrac{\tilde{x}_k^2}{(\tilde{x}_k^2+1)^2} \to 0$, $W(\hat{x}_k) = \dfrac{\hat{x}_k^2(2\hat{x}_k^2+1)}{(\hat{x}_k^2+1)^2} \to 2$ при $k \to \infty$. Значит, $\exists\, K \geq 1:\ \forall\, k \geq K \ \Rightarrow\ W(\tilde{x}_k) < c,\ W(\hat{x}_k) > c$.

В силу непрерывности $\exists\, x_k \in (\tilde{x}_k, \hat{x}_k):\ W(x_k) = c$ и $x_k \to \infty$.

Отметим, что от предложенной выше функции $W(x)$ скалярного аргумента x легко перейти к функции векторного аргумента, взяв, например, $W(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2(x_i^2+1)^{-1}(1 + x_i^2 \sin x_i (x_i^2+1)^{-1})$.

Теорема (Об устойчивости в целом для автономных систем). *Пусть у автономной система (7.17) в области $D^\infty = \{\|x\| < \infty\}$ существует положительно определенная стационарная бесконечно большая функция Ляпунова $W(x)$, у которой производная в силу системы $DW(x) \leq 0$, а множество $M = \{x \,|\, DW(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ этой системы устойчиво в целом.*

Доказательство. Покажем, что если функция Ляпунова $W(x)$ — бесконечно большая, то все решения системы (7.17) ограничены по норме.

Возьмем произвольное решение $x(t, x^0)$ и рассмотрим функцию $W(x(t, x^0))$. В силу (7.12) $\dfrac{dW(x(t, x^0))}{dt} \equiv DW(x(t, x^0)) \leq 0$.

Следовательно $W(x(t, x^0)) \leq W(x(t_0, x^0)) = W(x^0)$.

Если допустить, что решение $x(t, x^0)$ неограничено, то найдется последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, что $\|x(t_k, x^0)\| \to \infty$.

Но тогда согласно определению бесконечно большой функции: $W(x(t_k, x^0)) \to \infty$, а W(x), как было установлено, ограничена. !!!

Поэтому $\exists\, a_1 \; : \; \|x(t, x^0)\| \leq a_1$, и дальнейшее доказательство дословно совпадает с доказательством предыдущей теоремы. □

Пример 2 (продолжение 2). Предположим дополнительно, что в уравнении (7.15) $\displaystyle\int_0^{x_1} g(s)\, ds \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$ (напр., $g(x) \geq 1/x$ при $x > 0$).

Тогда стационарная положительно определенная функция Ляпунова $W(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1} g(s)\, ds + \frac{1}{2}\, x_2^2$ будет бесконечно большой, так как, очевидно, что $W(x) \to \infty$ при $|x_2| \to \infty$.

Следовательно по теореме об устойчивости в целом невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ уравнения (7.15) — устойчиво в целом.

Г Л А В А VIII
Метод нормальных форм

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1^0. Объект изучения.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n, правая часть которой является формальным или абсолютно сходящимся векторным степенным рядом в некоторой окрестности точки покоя. Не уменьшая общности, считаем, что эта точка покоя помещена в начало координат и в правой части системы выделены линейные члены, т. е. система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + X(x), \tag{8.1}$$

где векторная переменная $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, A — постоянная $n \times n$ матрица, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, причем $X \in \Phi_2$, а Φ_2 — это множество формальных векторных степенных рядов по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются не ниже, чем со второго порядка, т. е. $X = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} X^{(p)} x^p$.

Здесь и всегда в дальнейшем предполагаем, что $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и имеет целые неотрицательные компоненты, т. е. $p_j \in \mathbb{Z}_+$ $(j = \overline{1,n})$, $|p| = p_1 + \ldots + p_n$, $x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$, $X^{(p)} = (X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)})$ — вектор комплексных или вещественных коэффициентов ряда X.

Векторный ряд $X(x) = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} X^{(p)} x^p$ называется абсолютно сходящимся в некоторой окрестности начала координат, если найдется такое положительное число ρ, при котором для $\forall\, i = \overline{1,n}$ сходятся числовые ряды $\overline{|X_i|}_\rho = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} |X_i^{(p)}| \rho^{|p|}$. Очевидно, что радиус сходимости ряда $X(x)$ в этом случае больше или равен ρ.

Если же указанного $\rho > 0$ не существует хотя бы для одной из компонент вектора X, то ряд $X(x)$ будем называть расходящимся.

Тем самым, если ряд X сходится (слово абсолютно будем опускать), то $X(x)$ является аналитической в нуле вектор-функцией.

Любой степенной ряд как сходящийся, так и расходящийся, будем называть формальным. Как правило о сходимости формального ряда в момент его рассмотрения ничего не известно.

Множество формальных рядов, разложение которых начинается не ниже, чем с порядка k, будем обозначать Φ_k $(k \geq 1)$. При подстановке ряда в ряд и дифференцировании с формальными степенными рядами будем поступать точно так же, как и со сходящимися.

В зависимости от сходимости стоящих в правой части системы (8.1) нелинейностей или возмущений $X_i(x)$ будем называть эту систему сходящейся (аналитической), расходящейся или формальной.

2^0. Понятие нормальной формы.

Как ведут себя решения системы в окрестности точки покоя? Это основной вопрос локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. А один из основных методов исследования поведения решений аналитических систем в окрестности состояния равновесия заключается в представлении их в виде сходящихся рядов по степеням известных функций. На этом основан, в частности, первый метод А. М. Ляпунова исследования устойчивости невозмущенных движений. При этом исходные координаты $x_1, \ldots, x_n$ не всегда удобны для изучения свойств решений, поэтому хотелось бы максимально упростить систему (8.1), вплоть до сведения ее к линейной или к системе, интегрируемой в явном виде.

Системой в нормальной форме или просто нормальной формой называют любую систему, полученную из исходной локальной обратимой заменой координат, в которой равны нулю все те слагаемые в разложении правой части, которые могут быть обращены в нуль вне зависимости от вида возмущения $X(x)$ исходной системы.

Таким образом, нормальная форма — это структурное понятие в том смысле, что система в нормальной форме при любых значениях коэффициентов $X_i^{(p)}$ исходной системы может содержать в правой части каждого уравнения только члены, имеющие строго определенные степени переменных.

Как будет видно из дальнейшего, эти степени зависят исключительно от собственных чисел матрицы A исходной системы.

3^0. Эквивалентность систем.

Упрощение системы (8.1) осуществляется при помощи замены переменных, от которой естественно потребовать сохранения в нуле состояния равновесия и обратимости, чтобы при необходимости было возможно вернуться к системе (8.1).

Рассмотрим такую замену:

$$x = Sy + f(y), \tag{8.2}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор новых переменных, S — постоянная $n \times n$ матрица, $\det S \neq 0$, векторный ряд $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Phi_2$, т. е. $f_i = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} f_i^{(p)} y^p \ \ (i = \overline{1,n})$.

Пусть замена переменных (8.2) преобразует (8.1) в систему

$$\dot{y} = By + Y(y). \tag{8.3}$$

Для того чтобы установить, как связаны между собой ряды X, Y и f, продифференцируем замену (8.2) по t в силу систем (8.1), (8.3), т. е. подставим в уравнение $\dot{x} = S\dot{y} + (\partial f(y)/\partial y)\dot{y}$ вместо $\dot{x}$, $\dot{y}$ правые части систем (8.1), (8.3), получая следующее тождество по y:

$$ASy + Af + X(Sy + f) = SBy + SY + (\partial f/\partial y)(By + Y).$$

Выделяя в нем линейные члены, получаем равенство $AS = SB$ или

$$B = S^{-1}AS, \tag{8.4}$$

а нелинейности удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial f}{\partial y}By - Af + SY = X(Sy + f) - \frac{\partial f}{\partial y}Y. \tag{8.5}$$

Итак, формальная замена (8.2) преобразует формальную систему (8.1) в формальную систему (8.3), если матрицы A, B подобны, т. е. верно равенство (8.4), и ряд $f(y)$ удовлетворяет уравнению (8.5).

В случае, когда ряды X или f расходятся, тождество (8.5) следует понимать как равенство коэффициентов рядов из левой и правой части (8.5), стоящих при всевозможных степенях y.

Df. *Системы (8.1) и (8.3) формально эквивалентны, если существует формальная замена переменных (8.2), которая преобразует (8.1) в (8.3). Если при этом ряды X и f сходятся, то системы (8.1) и (8.3) аналитически эквивалентны и система (8.3) — сходящаяся.*

Утверждение. *Отношения формальной и аналитической эквивалентности являются отношениями эквивалентности.*

Иными словами, если система (8.1) формально или аналитически эквивалентна системе (8.3), то (8.3) также эквивалентна (8.1).

4^0. Линейные и почти тождественные замены.

Из равенства (8.4) видно, что линейная часть замены (8.2) позволяет упрощать матрицу A в (8.1) путем сведения ее какой-либо подобной матрице.

Естественно в качестве матрицы B выбрать J — жорданову форму матрицы A. Очевидно, что J — это простейшая матрица среди подобных. Она двухдиагональна и имеет не более чем $2n-1$ отличных от нуля элементов.

Фактически, линейная часть Jy системы (8.3) и будет являться нормальной формой линейной части системы (8.1).

Переходя к тождеству (8.5), которое связывает нелинейные члены систем (8.1), (8.3) и замены (8.2), заметим, что оно существенно упростится если на месте B будет стоять ее жорданова форма J, ведь при этом матрица S должна быть единичной.

Приведенные соображения подсказывают, что удобнее всего разбить замену (8.2) в композицию двух более простых замен: линейную

$$x = Sz \tag{8.6}$$

с $S:\ J = S^{-1}AS$ и почти тождественную

$$z = y + h(y) \tag{8.7}$$

с $h = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} h^{(p)}y^p$, уже не затрагивающую линейные члены и воздействующую на нелинейности. Тогда в замене (8.2) $f(y) = Sh(y)$.

5^0. Задачи, стоящие перед теорией нормальных форм.

Наибольший интерес для приложений представляют собой аналитические замены (8.2), так как они наилучшим образом связывают решения систем (8.1) и (8.3). Однако сходимость замены (8.2), сколько-нибудь существенно упрощающей исходную аналитическую в нуле систему (8.1), встречается достаточно редко.

Но и формальная эквивалентность систем может представлять практический интерес, даже если в замене (8.2) ряд f расходится.

Во-первых, его можно трактовать как ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции и осуществлять нормализацию систем класса C^∞.

Во-вторых, решение многих задач требует упрощения только конечного числа первых членов ряда X, а это достигается полиномиальной заменой переменных.

Сформулируем три основные задачи, стоящие перед классической теорией нормальных форм, которую в последнее время стали также называть резонансной.

1. К какой наиболее простой системе (8.3) — нормальной форме (НФ) — можно свести систему (8.1) формальной заменой (8.2)? А также единственна ли нормальная форма?

2. Для каких исходных систем (8.1) из их аналитичности следует аналитичность нормализующей замены (8.2)? Иными словами, когда система (8.1) аналитически эквивалентна своей нормальной форме?

Здесь возможны два подхода: классический, когда достаточные для сходимости нормализующей замены условия накладываются на коэффициенты какой-либо НФ, формально эквивалентной исходной системе, и прямой (конструктивный), когда условия накладываются непосредственно на коэффициенты системы (8.1).

3. Когда у исходной аналитической системы все нормализующие замены расходятся?

Здесь также возможны два подхода: классический, при котором устанавливается для каких нормальных форм (8.3) существуют эквивалентные им аналитические системы (8.1), сводящиеся к нормальным формам только расходящимися заменами, и прямой, при котором для ответа на поставленный вопрос об отсутствии аналитических нормализующих замен условия накладываются непосредственно на коэффициенты исходной системы.

§ 2. ФОРМАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ

1^0. Нормализация линейной части системы.

Рассмотрим формальную систему (8.1) $\dot{x} = Ax + X(x)$ и для начала максимально упростим в ней линейную часть Ax посредством линейной обратимой замены (8.6) $x = Sz$, в которой S — $n \times n$ постоянная матрица такая, что $S^{-1}AS = J$ — жорданова форма матрицы A.

Для этого продифференцируем (8.6) по t в силу системы (8.1), т. е. подставим в равенство $\dot{x} = S\dot{z}$ вместо $\dot{x}$ правую часть (8.1), тогда $ASz + X(Sz) = S\dot{z}$. Умножая слева на S^{-1} получаем систему

$$\dot{z} = Jz + Z(z), \tag{8.8}$$

в которой возмущение $Z(z) = S^{-1}X(Sz)$.

Обозначим через $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вектор собственных чисел матрицы A. Они могут быть как вещественными, так и комплексными.

В главе V подробно разбирались возможные структуры жордановой формы J. Здесь же важно иметь в виду следующее: J в системе (8.8) представляет собой двухдиагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A системы (8.1), а поддиагональ состоит из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$, равных или нулю, или произвольно выбранному положительному числу σ_0, причем $\sigma_j = 0$, если $\lambda_{j-1} \neq \lambda_j$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Введем дополнительно число $\sigma_1 = 0$, тогда систему (8.8) можно переписать в координатной форме:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z) \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{8.9}$$

где $Z_i = \sum_{p\colon |p|=2}^{\infty} Z_i^{(p)} z^p$, т. е. векторный ряд $Z(z) \in \Phi_2$.

2^0. Связующая система.

Запишем почти тождественную замену (8.7) покоординатно:

$$z_i = y_i + h_i(y) \qquad (h \in \Phi_2). \tag{8.10}$$

Предположим, что она преобразует систему (8.9) в систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y) \qquad (Y \in \Phi_2). \tag{8.11}$$

Тогда согласно определению 1 система (8.9) формально или аналитически, если Z_i, h_i сходящиеся ряды, эквивалентна системе (8.11).

Для того чтобы выписать равенства, связывающие коэффициенты рядов Z, Y и h, продифференцируем замену (8.10) по t в силу систем (8.9) и (8.11).

Это значит, что в уравнения $\dot z_i = \dot y_i + \sum_{j=1}^n (\partial h_i/\partial y_j)\dot y_j$ вместо производных $\dot y_i$, $\dot z_i$ $(i=\overline{1,n})$ надо подставить правые части систем (8.8) и (8.11), получая тождества (возможно, формальные) относительно векторной переменной y :

$$\lambda_i(y_i+h_i)+\sigma_i(y_{i-1}+h_{i-1})+Z_i(y+h)=$$
$$=\lambda_i y_i+\sigma_i y_{i-1}+Y_i(y)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\lambda_j y_j+\sigma_j y_{j-1}+Y_j)$$

или после перегруппировки

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j-\lambda_i h_i+Y_i=Z_i(y+h)+\sigma_i h_{i-1}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\sigma_j y_{j-1}+Y_j).$$

Приравняем в тождествах коэффициенты, стоящие при всех линейно независимых мономах (одночленах) $y^p=y_1^{p_1}\ldots y_n^{p_n}$ с $p_i\ge 0$, целыми и $|p|=p_1+\ldots+p_n\ge 2$.

Для этого каждое слагаемое из правой и левой части каждого тождества надо при необходимости переразложить по степеням y, т. е. переписать, возможно, сдвигая индексы суммирования, в виде ряда $\sum\alpha_i^{(p)}y^p$, вычислив коэффициенты $\alpha_i^{(p)}$.

Учитывая, что ряды $h_i=\sum_{p:\,|p|=2}^\infty h_i^{(p)}y^p$, и используя обозначение $e_j=(0,\ldots,1_j,\ldots,0)$, имеем:

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j}=\sum_{|p|=2}^\infty p_j h_i^{(p)}y^{p-e_j}=\sum_{|p|=1}^\infty (p_j+1)h_i^{(p+e_j)}y^p,$$
$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j}y_{j-1}=\sum_{|p|=1}^\infty (p_j+1)h_i^{(p+e_j)}y^{p+e_{j-1}}=\sum_{|p|=2}^\infty (p_j+1)h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)}y^p.$$

Что касается произведения рядов $(\partial h_i/\partial y_j)Y_j$, выделим из Y_j произвольный член $Y_j^{(q)}y^q$. Тогда он должен быть умножен на слагаемое $\alpha_i^{(p-q)}y^{p-q}$ ряда $\partial h_i/\partial y_j$, т. е. на $(p_j-q_j+1)h_i^{(p+e_j-q)}y^{p-q}$. И для завершения переразложения остается просуммировать полученные произведения по всем возможным векторам q $(2\le|q|\le|p|)$.

Заметим, что как здесь, так и в дальнейшем ограничения будут указываться только на модули векторов, задающих степени мономов любого ряда, а не на их компоненты, поскольку общепринято считать нулевым любой коэффициент $\alpha_i^{(r_1,\ldots,r_n)}$ степенного ряда $\sum_{r:\ |r|\geq 0} \alpha_i^{(r)}$, имеющий хотя бы один отрицательный индекс r_j.

Так в представленных выше переразложениях отдельно не пишется, что у коэффициента $h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)}$ индекс $p_{j-1} \geq 1$, а у $h_i^{(p+e_j-q)}$ — индекс $p_j \geq q_j - 1$, индексы $p_k \geq q_j \ \ (k \neq j)$.

В результате для $\forall\, p$ с $|p| = 2, 3, \ldots$ и для $\forall\, i = \overline{1,n}$ получаем равенства, связывающие коэффициенты систем и замены:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j - \lambda_i\Big) h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = \{Z_i(y+h)\}^{(p)} + \sigma_i h_{i-1}^{(p)} - \tag{8.12}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \sigma_j (p_j+1) h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{|q|=2}^{|p|-1} (p_j - q_j + 1) h_i^{(p-q+e_j)} Y_j^{(q)}.$$

где запись $\{Z_i(y+h)\}^{(p)}$ означает, что после переразложения находящегося в фигурных скобках ряда по степеням переменной y из него выделены слагаемые, стоящие при y^p.

Заметим, что при $i = 1$ во второе слагаемое правой части (8.12) не входит несуществующий коэффициент $h_0^{(p)}$, так как $\sigma_1 = 0$. Аналогично обстоит дело при $j = 1$ с коэффициентом $h_i^{(p-e_0+e_1)}$ из третьего слагаемого. Наконец, в последнем слагаемом правой части (8.12) суммирование ведется по всем q с $|q| \leq |p|-1$, так как если $|q| = |p|$, то $|p - q + e_j| = 1$, а ряды h_i в замене (8.10) начинаются не ниже чем со второго порядка.

Df. *Равенства (8.12) будем называть связующей системой.*

3^0. Рекуррентность связующей системы.

Рассмотрим связующую систему (8.12). В левую часть любого ее уравнения входит коэффициент $h_i^{(p)}$ замены (8.10) и коэффициент $Y_i^{(p)}$ получаемой в результате замены системы (8.11).

Покажем, что в правой части (8.12) помимо коэффициентов $X_i^{(q)}$ исходной системы (8.9) присутствуют коэффициенты $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$, в известном смысле предшествующие коэффициентам $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$.

Для этого надо ввести упорядоченность на множестве пар (p,i). Сначала упорядочим множество векторных показателей степеней.

Множество n-мерных целочисленных векторов с неотрицательными компонентами вполне упорядочим следующим соотношением: вектор q предшествует p, если положительна первая ненулевая из последовательных разностей $|p|-|q|,\, p_1-q_1, \ldots,\, p_{n-1}-q_{n-1}$.

А если все эти разности равны нулю, то, очевидно, $q=p$.

Такая упорядоченность носит название лексико-графической.

Согласно введенной упорядоченности векторы возрастают в следующей последовательности: $2e_n, e_{n-1}+e_n, 2e_{n-1}, e_{n-2}+e_n, e_{n-2}+e_{n-1}, 2e_{n-2}$ и т. д. Поэтому каждому вектору p может предшествовать лишь конечное число векторов q с указанными свойствами.

Теперь в случае, когда $q=p$, считаем, что пара (p,j) предшествует паре (p,i), если $j<i$.

Df. *Будем говорить, что коэффициент $\alpha_j^{(q)}$ предшествует коэффициенту $\alpha_i^{(p)}$, если пара (q,j) предшествует паре (p,i).*

Покажем, что в смысле введенной упорядоченности в правой части системы (8.12) стоят коэффициенты $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$, предшествующие коэффициентам $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$ из левой части, а значит, связующая система — рекуррентная.

Действительно, в первом и четвертом слагаемом правой части равенств (8.12) содержатся $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$ с $|q|<|p|$, поскольку разложения рядов Z, Y, h начинаются не ниже чем со второго порядка.

В третьем слагаемом правой части $|p-e_{j-1}+e_j|=|p|$, но $(j-1)$-я компонента верхнего индекса у коэффициента ряда h_i на единицу меньше компоненты p_j вектора p, а при $j=1$ там равен нулю множитель σ_j.

Наконец, во втором слагаемом правой части верхний индекс у коэффициента ряда h равен p, как и в левой части, но зато нижний индекс на единицу меньше, и опять при $i=1$ второе слагаемое в правой части отсутствует за счет того, что $\sigma_1=0$.

Следовательно, связующая система задает рекуррентную формулу для последовательного определения входящих в ее левую часть коэффициентов $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$ при $|p|=2,3,\ldots$

В частности, при $|p|=2$ получаем $(\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j-\lambda_i)h_i^{(p)}+Y_i^{(p)}=Z_i^{(p)}+\sigma_i h_{i-1}^{(p)}-\sum_{j=1}^n \sigma_j(p_j+1)h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)}$. А начинается все с первой пары $(p,i)=(2e_n,1)$, для которой $(2\lambda_n-\lambda_1)h_1^{(2e_n)}+Y_1^{(2e_n)}=Z_1^{(2e_n)}$.

В полученном равенстве коэффициент $Z_1^{(2e_n)}$ известен и, если множитель $2\lambda_n-\lambda_1\neq 0$, то один из коэффициентов $h_1^{(2e_n)}$ или $Y_1^{(2e_n)}$ можно выбирать произвольным образом, а другой после этого найдется однозначно. Если же $2\lambda_n-\lambda_1=0$, то коэффициент замены, вообще говоря, ни на что не влияет и может выбираться любым, зато в получаемой системе обязательно коэффициент $Y_1^{(2e_n)}=Z_1^{(2e_n)}$.

Второе уравнение связующей системы, очевидно, выглядит так: $(2\lambda_n-\lambda_2)h_2^{(2e_n)}+Y_2^{(2e_n)}=Z_2^{(2e_n)}+h_1^{(2e_n)}$, причем коэффициент $h_1^{(2e_n)}$ уже известен. И так далее.

4^0. Резонансные и нерезонансные объекты, теорема о формальной эквивалентности систем.

Введем в рассмотрение величины

$$\delta_{pi}=\delta_{pi}(\lambda)=\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j-\lambda_i=(p,\lambda)-\lambda_i=(p-e_i,\lambda),$$

которые играют важнейшую роль в теории нормальных форм.

Связующую систему уравнений (8.12) удобно записать в виде

$$\delta_{pi}h_i^{(p)}+Y_i^{(p)}=\widetilde{Y}_i^{(p)}\qquad (|p|\geq 2,\quad i=\overline{1,n}),\tag{8.13}$$

где через $\widetilde{Y}^{(p)}$ обозначена уже известная правая часть системы (8.12).

Df. *Пара индексов (p,i) называется резонансной, если она удовлетворяет уравнению*

$$\delta_{pi}=(p,\lambda)-\lambda_i=0\qquad (|p|\geq 2,\quad i=\overline{1,n}).\tag{8.14}$$

В противном случае эта пара индексов — нерезонансная.

Df. *Пусть ряд $f(z)\in\Phi_1$, тогда:*

— коэффициенты $f_i^{(p)}$ и мономы $f_i^{(p)}z^p$, у которых пара (p,i) удовлетворяет уравнению (8.14), а также векторный ряд $f^0=f_\lambda^0(z)$ с компонентами $f_i^0=\sum_{p:\,\delta_{pi}=0} f_i^{(p)}z^p$, называются резонансными;

— остальные коэффициенты и члены ряда f, а также ряд $f_\lambda^*(z)$ с компонентами $f_i^*=\sum_{p:\,\delta_{pi}\neq 0} f_i^{(p)}z^p$, называются нерезонансными.

Таким образом, любой формальный векторный степенной ряд может быть однозначно представлен в виде суммы рядов с резонансными и нерезонансными членами: $f(z) = f^0(z) + f^*(z)$. При этом один и тот же вектор p в зависимости от величины собственных чисел λ_i может быть резонансным для одних значениях индекса i и нерезонансным — для других.

Вернемся к связующей системе (8.13). Естественным образом она разделяется на две части — нерезонансную и резонансную.

Если $\delta_{pi} \neq 0$, то нерезонансные коэффициенты $Y_i^{(p)}$ системы (8.11), входящие в левую часть (8.13), не имеют ограничений и могут быть выбраны и зафиксированы произвольным образом.

После этого нерезонансные коэффициенты $h_i^{(p)}$ в замене (8.10) определяются однозначно по формуле

$$h_i^{(p)} = \delta_{pi}^{-1}(\widetilde{Y}_i^{(p)} - Y_i^{(p)}). \tag{8.15}$$

Если $\delta_{pi} = 0$, то (8.13) сводится к уравнению

$$Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)} \quad \text{(пара } (p,i) \text{ — резонансная)}, \tag{8.16}$$

правая часть которого определяет резонансный коэффициент $Y_i^{(p)}$ системы (8.11). При этом резонансный коэффициент $h_i^{(p)}$ в замене (8.10) не имеет ограничений, так как множитель δ_{pi} при нем в уравнении (8.13) равен нулю. Поэтому он всегда может выбираться произвольным образом.

В результате приведенных рассуждений оказалось доказано следующее утверждение.

Теорема (о формальной эквивалентности автономных систем) *Пусть формальная замена (8.10) сводит систему (8.9) к системе (8.11), тогда коэффициенты рядов Z, Y, h удовлетворяют алгебраической связующей системе (8.13). Если заранее зафиксировать произвольным образом резонансный ряд h^0 в замене (8.10) и нерезонансный ряд Y^* в системе (8.11), то нерезонансная часть h^* ряда h и резонансная часть Y^0 ряда Y определятся однозначно из уравнений (8.15) и (8.16).*

§ 3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ

1^0. Эквивалентность системы своей нормальной форме. Как уже отмечалось выше, первой задачей, стоящей перед методом нормальных форм, является максимальное формальное упрощение системы (8.9) $\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z)$ $(i = \overline{1,n})$, полученной из произвольной исходной системы (8.1) линейной заменой, сводящей матрицу линейной части A к жордановой форме.

Упрощение заключается в том, чтобы обратить в нуль наибольшее число коэффициентов системы (8.9) при помощи почти тождественной замены переменных (8.10) $z_i = y_i + h_i(y)$.

В связи с указанным подходом естественным выглядит следующее определение "самой простой" системы.

Df. *Система (8.11) называется системой в нормальной форме или просто нормальной формой (НФ), если все ее нерезонансные коэффициенты равны нулю, т. е. ряд $Y = Y^0$.*

Df. *Замена (8.10), преобразующая систему (8.9) в НФ (8.11), называется нормализующей заменой. Нормализующая замена, в которой резонансный ряд $h^0 \equiv 0$, называется стандартной.*

Теорема (о существовании нормализующей замены). *Для любой системы (8.9) существует почти тождественная нормализующая замена (8.10). Существует и единственна нормализующая замена с наперед произвольно выбранными резонансными членами, в частности, стандартная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\delta_{pi} \neq 0$, то в (8.13) всегда можно выбрать $Y_i^{(p)} = 0$. Тогда в (8.15) $h_i^{(p)} = \delta_{pi}^{-1} \widetilde{Y}_i^{(p)}$. А если $\delta_{pi} = 0$, то коэффициенты $Y_i^{(p)}$ находим из резонансного уравнения (8.16).

Входящие в $\widetilde{Y}_i^{(p)}$ резонансные коэффициенты ряда h предшествуют коэффициентам $h_i^{(p)}$, $Y_i^{(p)}$, поэтому при любом заранее зафиксированном резонансном ряде h^0 нормализующая замена (8.10) и нормальная форма (8.11) однозначно определяются.

В частности, можно выбрать резонансный ряд $h^0 \equiv 0$. $\square$

Отметим, что все линейные члены как НФ (8.11), так и системы (8.9) являются резонансными. Это связано с тем, что линейная часть Ax исходной системы (8.1) уже была нормализована посредством линейной замены, которая свела матрицу A к жордановой форме.

В самом деле, $\lambda_i y_i = \lambda_i y^{(e_i)}$ и $\delta_{e_i i} = \lambda_i - \lambda_i = 0$, а $\sigma_i y_{i-1} = \sigma_i y^{(e_{i-1})}$ и либо $\sigma_i = 0$, либо $\lambda_{i-1} = \lambda_i$ и тогда $\delta_{e_{i-1} i} = \lambda_{i-1} - \lambda_i = 0$.

2^0. Особенности процесса нормализации системы.

Из приведенного определения и теоремы вытекает, что термин "нормальная форма" используется в двух смыслах.

С одной стороны НФ или система в нормальной форме — это любая система (8.11), в возмущении $Y(y)$ которой отсутствуют нерезонансные члены, т. е. $Y = Y^0$. При этом коэффициенты резонансного ряда Y^0 могут иметь любые значения, в том числе и нулевые.

С другой стороны по теореме о существовании нормализующей замены каждая система (8.9), а значит, и исходная система (8.1) формально эквивалентны своей нормальной форме (8.11), коэффициенты которой (все — резонансные), естественно, зависят как от коэффициентов системы (8.9), так и от выбора резонансных коэффициентов нормализующей замены, если таковые имеются.

Действительно, перебирая последовательно в порядке возрастания пары (p, i) мы определяем в связующей системе (8.13) коэффициенты $Y_i^{(p)}$ и $h_i^{(p)}$. До тех пор, пока идут нерезонансные пары, т. е. в (8.14) $\delta_{pi} \neq 0$, все однозначно: выбираем $Y_i^{(p)} = 0$, если хотим получить НФ, а $h_i^{(p)}$ определяется по формуле (8.15).

Пусть (p_0, i_0) — первая резонансная пара. Тогда $\delta_{p_0 i_0} = 0$ и резонансный коэффициент системы (8.11) $Y_{i_0}^{(p_0)}$ фиксирован резонансным уравнением (8.16). Зато резонансный коэффициент $h_{i_0}^{(p_0)}$ в замене (8.10) каждый может выбрать, каким захочет.

В ходе дальнейшего процесса нормализации коэффициент $h_{i_0}^{(p_0)}$ может попасть в $\widetilde{Y}_i^{(p)}$ связующей системы (8.13), точнее, в первое или последнее слагаемое правой части системы (8.12). В этом случае он окажет определенное влияние как на последующие коэффициенты замены, так и, что более важно, на последующие коэффициенты (резонансные) получаемой НФ. То же относится и к остальным произвольно выбираемым коэффициентам нормализующей замены.

Таким образом, при наличии резонансных пар, т. е. решений уравнения (8.14), нормализующая замена системы (8.9) не единственна, как не единственна и ее нормальная форма.

Понятно, что степень возможного упрощения системы (8.9) зависит от количества решений уравнения (8.14): чем их меньше, тем проще будет НФ (больше нулевых членов). Поэтому все зависит только от соотношения собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A.

Выделим две "крайние" ситуации.

1) Максимальное упрощение системы достигается, когда собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рационально несоизмеримы. Тогда для любых целочисленных векторов p и для любых $i = \overline{1, n}$ величины $\delta_{pi} = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n - \lambda_i \neq 0$, т. е. резонансные пары отсутствуют.

В этом случае нормализующая замена однозначно определяется системой (8.9), ее НФ (8.11) единственна и линейна:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1}.$$

2) Другой крайний случай возникает, когда все собственные числа равны нулю. Тогда $\delta_{pi} = 0$ всегда, и любая система (8.9) по определению является нормальной формой, так как все ее коэффициенты — резонансные. И любая замена координат, сделанная в ней, будет нормализующей.

Поэтому к системам с нулевыми собственными числами резонансная теория нормальных форм применена быть не может.

Для упрощения таких систем разработан другой метод — теория обобщенных нормальных форм.

3) В остальных случаях при нормализации достигается более или менее значительное упрощение исходной системы (8.9), а поскольку существуют как резонансные, так и нерезонансные пары (p, i), то НФ (8.11) определяется системой (8.9) неоднозначно.

§ 4. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ДВУХ ЧИСТО МНИМЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1^0. Условия вещественности при линейной замене.

Рассмотрим вещественную двумерную систему (8.1):

$$\dot{x} = Ax + X(x) \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + X_2(x_1, x_2) \end{cases}, \tag{8.17}$$

собственные числа матрицы A в которой $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta \ \ (\beta > 0)$.

Понятно, что вещественность системы означает, что переменные x_1, x_2, коэффициенты $X_1^{(p_1,p_2)}, X_2^{(p_1,p_2)}$ и элементы a_{ij} матрицы A вещественны.

Применим к системе (8.17) метод нормальных форм.

При этом на первом этапе нормализации будем существенно использовать результаты, полученные для линейных преобразований двумерных линейных автономных систем в п. 4^0, § 3, Гл. 6.

Существует линейная неособая замена (8.6) $x = Sz$ с $n = 2$ (она же замена (6.10)), которая преобразует систему (8.17) в систему (8.8) или в координатной записи — (8.9) вида

$$\dot z = Jz + Z(z) \ \text{ или } \ \begin{cases} \dot z_1 = \ \ \mathbf{i}\beta z_1 + Z_1(z_1, z_2) \\ \dot z_2 = -\mathbf{i}\beta z_2 + Z_2(z_1, z_2) \end{cases} \quad (\beta > 0), \tag{8.18}$$

где $J = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\beta & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}\beta \end{pmatrix} = S^{-1}AS,\ \ Z = \sum\limits_{|p|\ge 2} Z^{(p_1,p_2)} z_1^{p_1} z_2^{p_2} = S^{-1}X(Sz).$

Для замены (6.10) было установлено, что если исходная система вещественна, то можно выбрать матрицу $S = (s^{(1)}, \overline{s^{(1)}})$, а тогда новые переменные z_1, z_2 в системе (8.18) будут комплексно сопряженными, т. е. $z_2 = \overline{z_1}$.

Сравнивая комплексное сопряжение первого уравнения системы (8.18) со вторым уравнением, заключаем, что $Z_2(z_1, z_2) = \overline{Z_1(z_1, z_2)}$ $= \sum_{p_1+p_2\ge 2} \overline{Z_1^{(p_1,p_2)}}\, \overline{z_1}^{p_1} \overline{z_2}^{p_2} = \sum_{p_1+p_2\ge 2} \overline{Z_1^{(p_1,p_2)}} z_2^{p_1} z_1^{p_2} = \overline{Z}_1(z_2, z_1)$.

Таким образом, система (8.18), полученная из системы (8.17), хотя и является комплексной, но не произвольна, а удовлетворяет следующим условиям вещественности:

$$z_2 = \overline{z}_1, \quad Z_2(z_1, z_2) = \overline{Z}_1(z_2, z_1) \ \text{ или } \ Z_2^{(p_1,p_2)} = \overline{Z}_1^{(p_2,p_1)}. \tag{8.19}$$

Тем самым, в критическом случае двух чисто мнимых собственных чисел в системе (8.18) второе уравнение является комплексно сопряженным к первому и в дальнейшем его можно не выписывать.

При желании можно сохранить вещественность исходной системы, сводя матрицу A к вещественной жордановой форме J_R.

Для этого надо сделать в системе (8.17) вещественную замену вида (6.16): $x = SCu$, получая вещественную систему

$$\dot u = J_R\, u + U(u) \ \text{ или } \ \begin{cases} \dot u_1 = -\beta u_2 + U_2(u_1, u_2) \\ \dot u_2 = \ \ \beta u_1 + U_2(u_1, u_2) \end{cases}, \tag{8.20}$$

причем $J_R = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = (SC)^{-1}A(SC) = C^{-1}JCu$, а переменные u_1, u_2 и коэффициенты рядов U_1, U_2 — вещественные.

Систему (8.20) можно также получить из системы (8.18) стандартной заменой (6.14): $z = Cu$ с $C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} z_1 = u_1 + \mathrm{i}u_2 \\ z_2 = u_1 - \mathrm{i}u_2 \end{cases}$.

Стандартная замена (6.14) обычно применяется к системам, полученным из вещественных после ряда преобразований, сохраняющих условия вещественности, например, к нормальной форме для того, чтобы записать ее в вещественных координатах.

Но приводить к нормальной форме, безусловно, удобнее не систему (8.20) с вещественной жордановой матрицей в линейной части, а комплексную систему (8.18) с условиями вещественности (8.19).

2^0. Структура нормальной формы.

Рассмотрим формальную систему

$$\dot{y}_1 = \mathrm{i}\beta y_1 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = -\mathrm{i}\beta y_2 + Y_2(y_1, y_2) \quad (\beta > 0), \tag{8.21}$$

в которой $Y_i = \sum_{p_1+p_2=2}^{\infty} Y_i^{(p_1,p_2)} y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, т. е. векторный ряд $Y \in \Phi_2$.

Предположим, что она является системой в нормальной форме или просто НФ. Как тогда она выглядит?

При $i = 1$ уравнение (8.14) $\delta_{pi} = 0$ имеет вид $\mathrm{i}\beta(p_1 - p_2 - 1) = 0$, т. е. $p_1 - 1 = p_2 = r$, а при $i = 2$ оно имеет вид $\mathrm{i}\beta(p_1 - p_2 + 1) = 0$, а значит, $p_2 - 1 = p_1 = r$.

Поэтому в системе (8.21) коэффициенты $Y_1^{(r+1,r)}$ и $Y_2^{(r,r+1)}$ — резонансные $(r \geq 1)$, а остальные — нерезонансные.

По определению система (8.21) является НФ, если в ней

$$Y_1 = \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)} y_1^{r+1} y_2^r, \quad Y_2 = \sum_{r=1}^{\infty} Y_2^{(r,r+1)} y_1^r y_2^{r+1}. \tag{8.22}$$

Таким образом НФ не содержит членов четного порядка по y_1, y_2, а каждый однородный многочлен нечетного порядка $2r+1$ имеет не более одно слагаемого — это $Y_1^{(r+1,r)} y_1^{r+1} y_2^r$ или $Y_2^{(r,r+1)} y_1^r y_2^{r+1}$.

Предположим теперь, что для нормальной формы (8.21) выполняются условия вещественности, аналогичные (8.19):

$$y_2 = \overline{y}_1, \quad Y_2(y_1, y_2) = \overline{Y_1(y_1, y_2)} \quad \text{или} \quad Y_2^{(p_1,p_2)} = \overline{Y}_1^{(p_2,p_1)}. \tag{8.23}$$

При этих условиях второе уравнение системы (8.21) становится комплексно-сопряженным к первому. Поэтому в формулах (8.22)

$$Y_2^{(r,r+1)} = \overline{Y}_1^{(r+1,r)} \quad (r \in \mathbb{N}).$$

В итоге, в критическом случае двух чисто мнимых собственных чисел нормальная форма (8.21) при наличии условий вещественности (8.23) имеет вид:

$$\dot{y}_1 = \mathfrak{i}\beta y_1 + Y_1^0(y_1, y_2) \qquad (y_2 = \overline{y_1}), \tag{8.24}$$

где $Y_1^0(y_1, y_2) = y_1 \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)}(y_1 y_2)^r$, а уравнение для $\dot{y}_2$ является комплексно сопряженным к (8.24).

Нормальную форму (8.24) будем называть вещественной НФ.

Для того чтобы посмотреть, как выглядит НФ (8.24) в вещественных координатах $v = (v_1, v_2)$, надо сделать уже знакомую линейную стандартную замену переменных вида (6.14):

$$y = Cv \ \text{ с } \ C = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{i} \\ 1 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} \ \text{ или } \ \begin{cases} y_1 = v_1 + \mathfrak{i} v_2 \\ y_2 = v_1 - \mathfrak{i} v_2 \end{cases}.$$

Дифференцируя первое уравнение указанной замены по t, получаем равенство $\dot{v}_1 + \mathfrak{i}\dot{v}_2 = (v_1 + \mathfrak{i} v_2)(\mathfrak{i}\beta + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)}(v_1^2 + v_2^2)^r)$. Его вещественная и мнимая части образуют систему

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\beta v_2 + \sum\limits_{r=1}^{\infty} (v_1 \mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} - v_2 \mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)})(v_1^2 + v_2^2)^r \\ \dot{v}_2 = +\beta v_1 + \sum\limits_{r=1}^{\infty} (v_2 \mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} + v_1 \mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)})(v_1^2 + v_2^2)^r \end{cases}. \tag{8.25}$$

Система (8.25) — это вещественная система в нормальной форме, записанная в вещественных координатах.

3^0. Нормализующая замена и связующая система.

Приведем систему (8.18) с условиями вещественности (8.19), полученную из вещественной системы (8.17), к вещественной НФ (8.24).

Покажем, что нормализующая замена вида

$$z_1 = y_1 + h_1(y_1, y_2), \quad z_2 = y_2 + \overline{h}_1(y_2, y_1) \quad (y_2 = \overline{y_1}, \quad h_1^0 - \forall), \tag{8.26}$$

в которой $h_1(y) = \sum_{p_1+p_2=2}^{\infty} h_1^{(p_1,p_2)} y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, сводит (8.18) к НФ (8.24).

Второе уравнение замены (8.26) сразу выбрано комплексно сопряженным к первому, как и связываемых ею системах. Кроме того, резонансный ряд h_1^0 в (8.26) пока выбран произвольным образом, что позволяет получить все возможные нормальные формы.

Дифференцируя по t первое уравнение замены (8.26) в силу систем (8.18) и (8.24), получаем тождество

$$\mathfrak{i}\beta h_1 + Z_1(y_1 + h_1, y_2 + \overline{h}_1) = Y_1^0 + \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(\mathfrak{i}\beta y_1 + Y_1^0) + \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(-\mathfrak{i}\beta y_2 + \overline{Y}_1^0).$$

Последовательно для $\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+,\ p_1 + p_2 \geq 2$ приравнивая в нем коэффициенты при $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, выпишем связующую систему (8.12):

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\beta(p_1 - p_2 - 1)h_1^{(p_1,p_2)} + \{Y_1^0(y_1, y_2)\}^{(p_1,p_2)} = \\ = \{Z_1(y_1 + h_1, y_2 + \overline{h}_1)\}^{(p_1,p_2)} - \Phi_1^{(p_1,p_2)}, \end{aligned} \tag{8.27}$$

где $\Phi_1^{(p_1,p_2)} = \sum_{r=1}^{p_*} h_1^{(p_1-r,p_2-r)}((p_1 - r)Y_1^{(r+1,r)} + (p_2 - r)\overline{Y}_1^{(r+1,r)}) = \sum_{r=1}^{p_*} h_1^{(p_1-r,p_2-r)}((p_1 + p_2 - 2r)\mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} + \mathfrak{i}(p_1 - p_2)\mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)})$, $p_* = \min\{\, p_1, p_2, (p_1 + p_2)/2 - 1\}$, $\mathfrak{i}\beta(p_1 - p_2 - 1) = \delta_{p1}$.

В данном случае второе уравнение связующей системы (8.12) будет, очевидно, комплексно сопряженным к первому.

Связующая система (8.27) — рекуррентная. В ее правую часть входят коэффициенты $h_1^{(q_1,q_2)}$ только с $|q| < |p|$, поэтому они предшествуют коэффициенту $h_1^{(p_1,p_2)}$ из левой части, а также коэффициенты $Y_1^{(r+1,r)}$ с $r \leq p_*$, а значит, $r \leq s - 1$ как при $|p| = 2s$, так и при $|p| = 2s + 1$ $(s \geq 1)$, поэтому они предшествуют коэффициенту $Y_1^{(s+1,s)}$ из $\{Y_1^0(y_1, y_2)\}^{(p_1,p_2)}$, когда $p_1 = s + 1$, $p_2 = s$. А если $|p| = 2s$ или $|p| = 2s + 1$, но $p_1 \neq p_2 + 1$, то $\{Y_1^0(y_1, y_2)\}^{(p_1,p_2)} = 0$, $\delta_{p1} \neq 0$ и (8.27) позволяет однозначно определить нерезонансный коэффициент $h_1^{(p_1,p_2)}$ нормализующей замены переменных.

4^0. Вопрос о сходимости нормализующей замены в алгебраическом и в трансцендентном случаях.

Изучим на примере критического случая двух чисто мнимых собственных чисел вопрос об аналитической эквивалентности исходной вещественной системы (8.17) или линейно эквивалентной ей системы (8.18) своей нормальной форме (8.24), т. е. вопрос о наличии или отсутствии сходящейся нормализующей замены (8.26).

Следуя А. М. Ляпунову, множество вещественных НФ разобьем на два класса — алгебраический и трансцендентный.

Df. *Для НФ (8.24) выполняется алгебраический случай, если*

$$\exists\, p_0 \geq 1: \quad \mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} = 0 \ \ (1 \leq r < p_0), \quad \mathrm{Re}\, Y_1^{(p_0+1,p_0)} = a \neq 0;$$

если такого числа p_0 *не существует, т. е.* $\mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} = 0$ *для* $\forall\, r \geq 1$, *то реализуется трансцендентный случай.*

Таким образом, в трансцендентном случае все коэффициенты НФ — чисто мнимые, т. е. $Y_1^{(r+1,r)} = \mathrm{i}\mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)}$ и в системе (8.27)

$$\Phi_1^{(p_1,p_2)} = \mathrm{i}(p_1 - p_2) \sum\nolimits_{r=1}^{p_*} h_1^{(p_1-r,p_2-r)} \mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)}. \qquad (8.28)$$

Справедлива теорема, согласно которой алгебраический и трансцендентный случаи инвариантны, а именно, если для какой-либо НФ выполняется алгебраический случай, то он выполняется и для любой другой НФ с теми же самыми индексом p_0 и числом $a \neq 0$, называемым константой Ляпунова.

От чего зависит сходимость или расходимость нормализующих замен в рассматриваемом случае?

В алгебраическом случае выражение $\Phi_1^{(p_1,p_2)}$ из правой части связующей системы (8.27) содержит те слагаемые, которые порождают так называемые факториальные множители, как правило, приводящие к слишком быстрому (факториальному) росту коэффициентов $h_1^{(p_1,p_2)}$ в замене (8.26), а значит, ее расходимости.

В самом деле, в алгебраическом случае в НФ (8.24) $\mathrm{Re}\, Y_1^{(p_0+1,p_0)} = a \neq 0$, поэтому, например, при $p_1 = p_2 = s$ в связующей системе (8.27) $-\mathrm{i}\beta h_1^{(s,s)} = \ldots - h_1^{(s-p_0,s-p_0)}(2s - 2p_0)a + \ldots$. Если теперь обозначенные многоточием слагаемые при больших s не будут в достаточной степени случайно "сокращаться" с выписанным явно произведением, то при переходе от рекуррентной формулы к прямой будет справедливо неравенство $|h_1^{(p_0 s,p_0 s)}| \geq b(s-1)!C^{-s}$, обеспечивающее расходимость ряда h_1.

В частности, справедлива классическая теорема о расходимости, согласно которой для любой вещественной аналитической в нуле НФ в алгебраическом случае найдется вещественная сходящаяся система, всякая нормализующая замена которой расходится.

Обоснованность такого подхода в вопросу о расходимости заключается в том, что и в алгебраическом случае нормализующая замена может оказаться сходящейся. Возьмем, например, любую аналитическую НФ в алгебраическом случае и сделаем произвольную почти тождественную полиномиальную замену, получив аналитическую систему. Очевидно, что нормализующая замена этой системы, являясь обратной к полиномиальной, сходится.

В трансцендентном случае, когда все $\operatorname{Re} Y_1^{(r+1,r)} = 0$, указанный выше интегральный множитель исчезает и $\Phi^{(p_1,p_2)}$ имеет вид (8.28).

На первый взгляд, стоящий в $\Phi_1^{(p_1,p_2)}$ при $\operatorname{Im} Y_1^{(r+1,r)}$ множитель $(p_1 - p_2)$ также является факториальным, когда, например, значения p_1 растут, а $p_2 = 0$, но его рост нейтрализуется аналогичным ростом множителя $(p_1 - p_2 - 1)$ в левой части системы (8.24).

Поэтому в трансцендентном случае справедлива теорема об аналитической эквивалентности системы своей НФ. Она будет доказана ниже так называемым методом мажорант Коши.

5^0. Трансцендентный случай. Метод мажорант Коши.

Теорема (о сходимости нормализующей замены в трансцендентном случае) *В трансцендентном случае вещественная аналитическая в нуле система (8.17) аналитически эквивалентна своей НФ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для вещественной системы (8.17) выполняется трансцендентный случай.

Это значит, что после линейной неособой замены (8.6) $x = Sz$, сводящей (8.17) к системе (8.18) при условиях (8.19), и последующей формальной почти тождественной нормализующей замены (8.26) с произвольно выбранным резонансным рядом $h^0(y)$, сводящей (8.18) к вещественной нормальной форме (8.24), все коэффициенты полученной НФ — чисто мнимые и $\Phi_1^{(p_1,p_2)}$ в связующей системе (8.27) вычисляется по формуле (8.28).

Если теперь показать, что какая-либо из нормализующих замен (8.26) сходится, то будет сходится и замена (8.2), являющаяся композицией замен (8.6) и (8.26), и теорема будет доказана.

Проще и удобнее всего выбрать в замене (8.26) $h^0 \equiv 0$, т.е. использовать стандартную нормализующую замену.

Продифференцировав замену (8.26) в силу систем (8.18) и (8.24), получим связующую систему (8.27).

Выпишем ее нерезонансную и резонансную части.

Если $p_2 \neq p_1 - 1$, то пара $((p_1,p_2),1)$ — нерезонансная и

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\beta(p_1-p_2-1)h_1^{(p_1,p_2)} = \{Z_1(y_1+h_1,y_2+\overline{h}_1)\}^{(p_1,p_2)} - \\ -\mathrm{i}(p_1-p_2)\sum_{r=1}^{p_*} h_1^{(p_1-r,p_2-r)}\mathrm{Im}\,Y_1^{(r+1,r)},\end{gathered} \tag{8.29}$$

а если $p_2 = p_1 - 1 = s$ $(s \geq 1)$, то

$$Y_1^{(s+1,s)} = \{Z_1(y_1+h_1,y_2+\overline{h}_1)\}^{(s+1,s)}, \tag{8.30}$$

поскольку каждое слагаемое $\Phi_1^{(s+1,s)}$ из (8.28) содержит какой-либо нулевой резонансный коэффициент $h_1^{(s-r+1,s-r)}$.

Оценим сверху по модулю нерезонансные коэффициенты $h_1^{(p_1,p_2)}$ в левой части равенства (8.29) и резонансные коэффициенты $Y_1^{(s+1,s)}$ в левой части равенства (8.30), учитывая, что $Y_1^{(r+1,r)} = \mathrm{i}\mathrm{Im}\,Y_1^{(r+1,r)}$ и что в (8.29) отношение $|p_1-p_2|/|p_1-p_2-1| \leq 2$.

Имеем:

$$|h_1^{(p_1,p_2)}| \leq \beta^{-1}\Big\{\sum_{q_1+q_2\geq 2}|Z_1^{(q_1,q_2)}|\Big(y_1+\sum_{l_1+l_2\geq 2}|h_1^{(l_1,l_2)}|y_1^{l_1}y_2^{l_2}\Big)^{q_1}\times$$

$$\times\Big(y_2+\sum_{l_1+l_2\geq 2}|\overline{h_1}^{(l_2,l_1)}|y_1^{l_1}y_2^{l_2}\Big)^{q_2}\Big\}^{(p_1,p_2)} + 2\beta^{-1}\sum_{r=1}^{p_*}|h_1^{(p_1-r,p_2-r)}||Y_1^{(r+1,r)}|,$$

$$|Y_1^{(s+1,s)}| \leq \{|Z_1(y_1+|h_1|,y_2+|\overline{h}_1|)|\}^{(s+1,s)}.$$

Обозначим через $\widehat{h}_1(y)$ ряд $\sum_{p:\,|p|=2}^{\infty}|h_1^{(p)}|y^p$, называемый мажорантным для ряда $h_1(y)$. Аналогичным образом введем ряд $\widehat{Y}_1(y)$.

Вообще, если для коэффициентов степенных рядов a и b выполняются неравенства $|a^{(p)}| \leq b^{(p)}$, то это обозначается $a \prec b$, и из сходимости мажорантного ряда b следует абсолютная сходимость мажорируемого ряда a.

Домножим левую и правую части неравенства для $|h_1^{(p_1,p_2)}|$ на $y_1^{p_1}y_2^{p_2}$ $(p_1 \neq p_2+1)$, а для $|Y_1^{(s+1,s)}|$ — на $y_1^{s+1}y_2^{s}$, и просуммируем полученные неравенства по всем индексам $p=(p_1,p_2)$ с $|p| \geq 2$.

Учитывая, что резонансные коэффициенты ряда h равны нулю, и вводя $\beta_* = \max\{1,\beta^{-1}\}$, получаем мажорантное неравенство

$$\widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1 \prec \beta_*\widehat{Z}_1(y_1+\widehat{h}_1,y_2+\widehat{h}_1) + 2\beta_* y_1^{-1}\widehat{h}_1\widehat{Y}_1.$$

Это неравенство не нарушится, если его правую часть увеличить, заменив в ней каждый из рядов $\widehat{h}_1$ или $\widehat{Y}_1$ рядом $\widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1$, т. е.

$$\widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1 \prec \beta_* \widehat{Z}_1(y_1 + \widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1, y_2 + \widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1) + 2\beta_* y_1^{-1}(\widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1)^2.$$

Для того чтобы доказать сходимость произвольного ряда от двух переменных с неотрицательными коэффициентами, например, ряда $\widehat{h}_1(y_1, y_2)$, достаточно установить его сходимость в какой-либо точке $y_1, y_2 = \eta \neq 0$.

Положим $y_1 = y_2 = \eta$ и введем следующие обозначения:

$$\widehat{h}_1 + \widehat{Y}_1 = \eta\varphi(\eta), \quad \widehat{Z}_1(\eta + \eta\varphi(\eta), \eta + \eta\varphi(\eta)) = \eta^2 V(\eta, \varphi).$$

Поскольку разложения рядов h_1, Z_1, Y_1 начинаются не ниже чем со второго порядка и система (8.18) аналитична в нуле, то $\varphi(0) = 0$ и V — аналитическая функция η и φ.

Поэтому сходимость ряда $\varphi(\eta)$ равносильна сходимости каждого из рядов $\widehat{h}_1$, $\widehat{Y}_1$, а для φ после деления на η имеет место мажорантное неравенство

$$\varphi \prec \beta_* \eta V(\eta, \varphi) + 2\beta_* \varphi^2. \tag{8.31}$$

Рассмотрим наряду с неравенством (8.31) следующее равенство:

$$\psi = \beta_* \eta V(\eta, \psi) + 2\beta_* \psi^2. \tag{8.32}$$

Введем функцию $\Psi(\eta, \psi) = \psi - \beta_* \eta V(\eta, \psi) - 2\beta_* \psi^2$ — это сходящийся ряд по степеням η и ψ, причем $\Psi(0,0) = 0$ и $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \psi}(0,0) = 1$.

По теореме о неявной функции уравнение $\Psi(\eta, \psi) = 0$, совпадающее с (8.32), определяет сходящийся ряд $\psi(\eta)$, причем $\psi(0) = 0$.

Остается доказать, что $\varphi(\eta) \prec \psi(\eta)$, так как из этого мажорантного неравенства вытекает сходимость ряда φ, а значит, h_1 и Y_1.

Пусть $\varphi(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)} \eta^k$, $\psi(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)} \eta^k$, тогда

$$\eta V(\eta, \varphi) = \eta^{-1} \widehat{Z}_1(\eta(1 + \varphi), \eta(1 + \varphi)) = \sum_{q\colon |q|=2}^{\infty} |Z_1^{(q_1, q_2)}| \eta^{|q|-1} (1 + \varphi)^{|q|},$$

$$\varphi^2(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^k \sum_{m=1}^{k-1} \varphi^{(k-m)} \varphi^{(m)}.$$

Приведенные разложения степенных рядов показывают, что неравенство (8.31) и равенство (8.32) являются рекуррентными, т. е., приравнивая в них коэффициенты при η^k, получаем:

$$\varphi^{(1)} \le |Z_1^{(2,0)}| + |Z_1^{(1,1)}| + |Z_1^{(0,2)}| = \psi^{(1)};$$

$$\varphi^{(k)} \le \chi_k(\varphi^{(k-1)}, \ldots, \varphi^{(1)}), \quad \psi^{(k)} = \chi_k(\psi^{(k-1)}, \ldots, \psi^{(1)})$$

с известными функциями χ_k $(k \ge 2)$.

Теперь индукцией по k легко доказывается, что $\varphi^{(k)} \le \psi^{(k)}$.

Следовательно, стандартная нормализующая замена (8.26) системы (8.18), полученной из вещественной аналитической системы (8.17), и НФ (8.24) в трансцендентном случае сходятся. □

7^0. **Трансцендентный случай. Интегрируемость системы.** Полученный результат позволяет в явном виде проинтегрировать системы (8.18) и (8.17).

Действительно, в трансцендентном случае НФ (8.24), полученная из аналитической в начале координат системы (8.18) с условиями вещественности (8.19) при помощи стандартной нормализующей замены (8.26) с $h_1(y) = h_1^*(y)$, имеет вид:

$$\dot{y}_1 = \mathrm{i} y_1 A(y_1 \overline{y_1}) \qquad (y_2 = \overline{y_1}), \tag{8.33}$$

где вещественный степенной ряд $A(y_1\overline{y_1}) = \beta + \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{Im} Y_1^{(r+1,r)} (y_1\overline{y_1})^r$ $(y_1\overline{y_1} = |y_1|^2 = |y|^2)$ сходится по доказанной выше теореме, а уравнение для $\dot{y}_2$ комплексно сопряжено к (8.33).

Убедимся, что для любого вектора $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_1^0 \end{pmatrix}$ вектор функция

$$y(t, y^0) = \begin{pmatrix} y_1(t, y^0) \\ y_1(t, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 e^{+\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} \\ y_1^0 e^{-\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} \end{pmatrix} \ (y_1^0\overline{y_1^0} = |y_1^0|^2 = |y^0|^2) \tag{8.34}$$

является решением задачи Коши нормальной формы (8.33) с начальными данными $t_0 = 0$, $y_1(0, y^0) = y_1^0$.

Подставим $y_1(t, y_0)$ в (8.33), тогда $\dot{y}_1(t, y^0) = y_1^0 e^{\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t}(\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0}))$, а $\mathrm{i} y_1(t, y^0) A(y_1(t, y^0)\overline{y_1(t, y^0)}) = \mathrm{i} y_1^0 e^{\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} A(y_1^0 e^{\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} \cdot \overline{y_1^0} e^{-\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t})$, т. е. левая и правая части тождественно равны.

Подставляя теперь решение $y_1(t, y^0)$ в стандартную сходящуюся нормализующую замену (8.26), найдем аналитическое решение системы (8.18) в виде сходящегося ряда по степеням начальных данных

$$z(t, z^0) = \begin{pmatrix} z_1(t, z^0) \\ \overline{z_1(t, z^0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 e^{+\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} + h_0(t, y_1^0, \overline{y_1^0}) \\ \overline{y_1^0} e^{-\mathrm{i}A(y_1^0\overline{y_1^0})t} + \overline{h_0}(t, \overline{y_1^0}, y_1^0) \end{pmatrix}, \qquad (8.35)$$

где $h_0 = \sum_{\substack{p_1+p_2\geq 2 \\ p_1\neq p_2+1}} h_0^{(p_1,p_2)}(t)(y_1^0)^{p_1}(\overline{y_1^0})^{p_2}$ — скалярный ряд с аналитическими по t коэффициентами $h_0^{(p_1,p_2)}(t) = h_1^{(p_1,p_2)} e^{\mathrm{i}(p_1-p_2)A(y_1^0\overline{y_1^0})t}$, а $z^0 = y^0 + h(y^0, \overline{y^0})$, так как $z_1(0, z^0) = z_1^0 = y_1^0 + h_0(0, y_1^0, \overline{y_1^0})$ и $h_0^{(p_1,p_2)}(0) = h_1^{(p_1,p_2)}$ $(z_2^0 = \overline{z_1^0})$.

Использование подобных разложений решений лежит в основе разработанного А. М. Ляпуновым Первого метода.

Отметим еще, что радиусы сходимости рядов h_0 из (8.35) и h_1 из аналитической нормализующей замены (8.26) совпадают, поскольку $|h_0^{(p_1,p_2)}(t)| = |h_1^{(p_1,p_2)}|$ для $\forall t \in \mathbb{R}^1$, а значит, известна окрестность начала координат, из которой можно выбирать начальное данное y^0 решения (8.34).

Остается подставить решение $z(t, z^0)$ в линейную замену (6.10) $x = Sz$ с $S = (s^{(1)}, \overline{s^{(1)}})$, чтобы получить вещественное аналитическое решение исходной вещественной системы (6.17)

$$x(t, x^0) = 2\mathrm{Re}(z_1(t, z^0)s^{(1)})$$

с начальными данными $t_0 = 0$, $x^0 = 2\mathrm{Re}(z_1(0, z^0)s^{(1)})$, поскольку $x(t, x^0) = (s^{(1)}, \overline{s^{(1)}}) \begin{pmatrix} z_1(t, z^0) \\ \overline{z_1(t, z^0)} \end{pmatrix} = z_1(t, z^0)s^{(1)} + \overline{z_1(t, z^0)}\,\overline{s^{(1)}}$.

7^0. Об устойчивости в трансцендентном и алгебраическом случаях.

Пусть из произвольной вещественной сходящейся системы (8.17) $\dot{x} = Ax + X(x)$ линейной заменой (8.6) $x = Sz$ с $S = (s^{(1)}, \overline{s^{(1)}})$ получена сходящаяся система (8.18) $\dot{z}_1 = \mathbf{i}\beta z_1 + Z_1(z_1, \overline{z_1})$.

Устойчиво ли тривиальное решение систем (8.17) и (8.18)?

а) Отметим в первую очередь тот факт, что из устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости или неустойчивости тривиального решения $z \equiv 0$ системы (8.18) вытекает тот же тип устойчивости тривиального решения $x \equiv 0$ системы (8.17) и наоборот.

Пусть, например, движение $z(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, т. е. для $\forall\,\varepsilon_*>0\ \ \exists\,\delta_*>0$ такое, что для $\forall\,z^0=\begin{pmatrix} z_1^0\\ \overline{z_1^0}\end{pmatrix}$: $\|z^0\|=|z_1^0|<\delta_*$ $\Rightarrow\ \|z(t,z^0)\|<\varepsilon_*$ для $\forall\,t\ge 0\quad (t_0=0)$.

Покажем, что тогда движение $x(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Положим $S=\begin{pmatrix} s_1 & \overline{s_1}\\ s_2 & \overline{s_2}\end{pmatrix}$, $\det S=s_1\overline{s_2}-\overline{s_1}s_2=\mathrm{i}c\ne 0\ \ (c\in\mathbb{R}^1)$, $\|S\|=\max\{|s_1|,|s_2|\}=b>0$, тогда $S^{-1}=(\mathrm{i}c)^{-1}\begin{pmatrix} \overline{s_2} & -\overline{s_1}\\ -s_2 & s_1\end{pmatrix}$ и $\|S^{-1}\|=b/c$.

Заметим, если $x(t,x^0)$ — вещественное решение системы (8.17), то $z(t,z^0)=S^{-1}x(t,x^0)$ есть решение системы (8.18), при этом $z^0=$
$$=\begin{pmatrix} z_1^0\\ \overline{z_1^0}\end{pmatrix}=z(0,z^0)=S^{-1}x(0,x^0)=S^{-1}x^0=(\mathrm{i}c)^{-1}\begin{pmatrix} \overline{s_2}x_1^0-\overline{s_1}x_2^0\\ -s_2x_1^0+s_1x_2^0\end{pmatrix}.$$

Итак, для $\forall\,\varepsilon>0$ выберем $\varepsilon_*=(2b)^{-1}\varepsilon$. По нему найдется δ_* из определения устойчивости тривиального решения системы (8.18).

Положим $\delta=(2b)^{-1}c\delta_*$. Тогда для $\forall\,x^0$: $\|x^0\|<\delta$ с учетом формулы для нормы произведения матриц имеем: $\|z^0\|=\|S^{-1}x^0\|\le 2\,\|S^{-1}\|\cdot\|x^0\|<2bc^{-1}\delta=\delta_*$. Поэтому $\|x(t,x^0)\|=\|Sz(t,z^0)\|\le 2\,\|S\|\cdot\|z(t,z^0)\|<2b\,\varepsilon_*=\varepsilon$ для $\forall\,t\ge 0$.

б) Рассмотрим теперь первое приближение системы (8.18) — это линейная система $\dot z_1=\mathrm{i}\beta z_1$ или в вещественных координатах u_1,u_2 (см. (6.15) с $\alpha=0$) $\ \ \dot u_1=-\beta u_2,\ \dot u_2=\beta u_1\quad (z_1=u_1+\mathrm{i}u_2,\ z_2=\overline{z_1})$.

Согласно классификации Пуанкаре имеет место центр (изохронный), а значит, точка покоя $z=0$ устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

Действительно, $z_1(t,z^0)=z_1^0e^{\mathrm{i}\beta t}$ — решение задачи Коши с начальными данными $t_0=0,\ z_1(0,z^0)=z_1^0\quad (z_2=\overline{z_1})$, и для доказательства устойчивости достаточно выбрать $\delta=\varepsilon$. Но при этом асимптотическая устойчивость отсутствует, так как $|z_1(t,z^0)|=1$.

Тот же результат легко получить и для ЛОС в вещественных координатах, поскольку ее вещественная фундаментальная матрица $\Phi(t)=\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t\\ \sin\beta t & -\cos\beta t\end{pmatrix}$ ограничена для $\forall\,t\ge 0$, и по теореме об устойчивости линейных систем решение $u(t)\equiv 0$ устойчиво.

в) Возвращаясь к системам (8.17), (8.18), изучим вопрос об устойчивости тривиального решения сначала в трансцендентном случае, когда полученная из системы (8.18) стандартной аналитической заменой (8.26) сходящаяся НФ (8.24) имеет вид (8.33): $\dot{y}_1 = \mathrm{i} y_1 A(y_1 \overline{y_1})$.

Очевидно, что решение $y(t) \equiv 0$ нормальной формы (8.33) устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически, поскольку у любого ее возмущенного движения (8.34) $\|y(t, y^0)\| = \|y^0\| = |y_1^0|$ для $\forall\, t \geq 0$.

То же самое можно сказать про решение $z(t) \equiv 0$ системы (8.18).

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное решение (8.35) $z(t, z^0)$ системы (8.18).

Равенство $z^0 = y^0 + h(y^0, \overline{y^0})$, связывающее начальные данные решений (8.34) и (8.35), по теореме о неявной функции обратимо.

Пусть $y^0 = z^0 + f(z^0, \overline{z^0})$, f — абсолютно сходящийся ряд, разложение которого начинается не ниже, чем со второго порядка.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему найдется $\delta_y > 0$ такое, что для $\forall\, y^0$: $\|y^0\| < \delta_y \;\Rightarrow\; \|y^0\| + \widehat{h}(|y_1^0|, |\overline{y_1^0}|) < \varepsilon$, где $\widehat{h}$ — ряд, мажорирующий h. По δ_y найдется $\delta > 0$ такое, что для $\forall\, z^0$: $\|z^0\| < \delta \Rightarrow \|z^0\| + \widehat{f}_1(|z_1^0|, |\overline{z_1^0}|) < \delta_y$, где ряд $\widehat{f}$ мажорирует ряд f, а значит, если $\|z^0\| < \delta$, то $\|y^0\| = \|z^0 + f(z^0, \overline{z^0})\| < \delta_y$,

Для указанных z^0 и $\forall\, t \geq 0$ оценим решение (8.35), помня, что норма любого из рассматриваемых векторов по определению совпадает с модулем каждой из его комплексно сопряженных компонент.

Имеем: $|z_1(t, z^0)| \leq |y_1^0| + |h_0(t, |y_1^0|, |\overline{y_1^0}|)| \leq |y_1^0| + \widehat{h}_1(|y_1^0|, |\overline{y_1^0}|) < \varepsilon$.

Следовательно решение $z(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

При этом асимптотическая устойчивость тривиального решения отсутствует, поскольку коэффициенты $h_0^{(p_1,p_2)}(t)$ ряда h_0 из (8.35) с ростом t не стремятся к нулю, как и мономы $(y_1^0)^{p_1}(\overline{y_1^0})^{p_2}$, фиксированные выбором начального данного z^0.

Что касается устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ исходной вещественной системы (8.17) в трансцендентном случае, то она, как установлено в пункте а), вытекает из устойчивости решения $z(t) \equiv 0$.

г) Изучим теперь вопрос об устойчивости в алгебраическом случае, когда в нормальной форме (8.24), полученной из системы (8.18) с условиями вещественности (8.19), существует $p_0 \in \mathbb{N}$ — первое число со свойством: $\operatorname{Re} Y^{(p_0+1, p_0)} = a \neq 0$.

Можно доказать, и ниже это будет сделано в более общей ситуации, что тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ нормальной формы (8.24) асимптотически устойчиво при $a > 0$ и не устойчиво при $a < 0$, разумеется, если НФ — сходящаяся. Но, как было указано в п. 4^0, трудно рассчитывать, что нормализующая замена окажется сходящейся, а значит, связь между решениями исходной системы и ее НФ не установлена.

Однако, для того чтобы решить все вопросы об устойчивости, нет необходимости приводить всю систему (8.18) к НФ, а достаточно нормализовать ее члены только до порядка $2p_0 + 1$ включительно.

Рассмотрим полиномиальную нормированную замену

$$z_1 = y_1 + \breve{h}_1(y_1, y_2), \quad z_2 = y_2 + \overline{\breve{h}_1}(y_2, y_1) \quad (y_2 = \overline{y_1},\ \breve{h}_1^0 \equiv 0), \quad (8.36)$$

в которой $\breve{h}_1 = \sum_{p:\,|p|=2}^{2p_0+1} h_1^{(p_1,p_2)} y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, а $h_1^{(p_1,p_2)}$ из замены (8.26).

Убедимся, что она преобразует систему (8.18) в систему

$$\dot{y}_1 = \mathfrak{i}\beta y_1 + \breve{Y}_1^0(y_1, y_2) + \mathcal{Y}_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = \overline{\dot{y}_1}, \quad (8.37)$$

где $\breve{Y}_1^0 = \sum_{s=1}^{p_0} Y_1^{(s+1,s)} y_1^{s+1} y_2^s$ — полином с коэффициентами из нормальной формы (8.24), а $\mathcal{Y}_1 = \sum_{p:\,|p|=2p_0+2}^{\infty} \mathcal{Y}_1^{(p_1,p_2)} y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ — некий сходящийся степенной ряд.

Дифференцируя по t замену (8.36) в силу систем (8.18) и (8.37), получаем тождество по y, аналогичное тождеству из п. 3^0 :

$$\mathfrak{i}\beta\breve{h}_1 + Z_1(y_1 + \breve{h}_1, y_2 + \overline{\breve{h}_1}) = \breve{Y}_1^0 + \mathcal{Y}_1 +$$
$$+ \frac{\partial \breve{h}_1}{\partial y_1}(\mathfrak{i}\beta y_1 + \breve{Y}_1^0 + \mathcal{Y}_1) + \frac{\partial \overline{\breve{h}_1}}{\partial y_2}(-\,\mathfrak{i}\beta y_2 + \overline{\breve{Y}_1^0} + \overline{\mathcal{Y}_1}).$$

Приравнивая теперь коэффициенты при $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, но только для $\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$ с $2 \le |p| \le 2p_0 + 1$ и учитывая, что разложение ряда $\mathcal{Y}_1$ начинается не ниже, чем с порядка $2p_0 + 2$ по y_1, y_2, получаем в точности связующую систему (8.27), последовательно однозначно разрешимую при указанных p_1, p_2.

А для нахождения коэффициентов ряда $\mathcal{Y}_1$ при $|p| \ge 2p_0 + 2$, имеем рекуррентные уравнения:

$$\mathcal{Y}_1^{(p_1,p_2)} = \{Z_1(y_1 + \breve{h}_1, y_2 + \overline{\breve{h}_1}) - \frac{\partial \breve{h}_1}{\partial y_1}(\breve{Y}_1^0 + \mathcal{Y}_1) - \frac{\partial \overline{\breve{h}_1}}{\partial y_2}(\overline{\breve{Y}_1^0} + \overline{\mathcal{Y}_1})\}^{(p_1,p_2)}.$$

Поскольку рассматривается алгебраический случай с константами p_0, a, в системе (8.37) $\breve{Y}_1^0 = \mathfrak{i}\sum_{s=1}^{p_0} \operatorname{Im} Y_1^{(s+1,s)} y_1^{s+1} y_2^s + a y_1^{p_0+1} y_2^{p_0}$.

Сделаем в системе (8.37) полярную замену

$$y_1 = re^{\mathfrak{i}\varphi}, \quad y_2 = re^{-\mathfrak{i}\varphi} \qquad (r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}^1).$$

Для этого, как обычно, продифференцируем первое уравнение замены по t в силу (8.37) и поделим все члены на $e^{\mathfrak{i}\varphi}$, получая:

$$\dot r + r\mathfrak{i}\dot\varphi = \mathfrak{i}\beta r + \mathfrak{i}\sum_{s=1}^{p_0} \operatorname{Im} Y_1^{(s+1,s)} r^{2s+1} + ar^{2p_0+1} + \\ + \sum_{p\colon |p|=2p_0+2}^{\infty} \mathcal{Y}_1^{(p_1,p_2)} r^{p_1+p_2} e^{\mathfrak{i}\varphi(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2-1)}.$$

Теперь система в полярных координатах возникает после выделения в нем вещественной и мнимой части или, что то же самое, после дифференцирования второго уравнения замены и последовательного сложения и вычитания полученных тождеств:

$$\dot r = r^{2p_0+1}(a + R(r,\varphi)), \quad \dot\varphi = \beta + \Phi(r,\varphi), \tag{8.38}$$

где $\Phi = \sum_{s=1}^{p_0} \operatorname{Im} Y_1^{(s+1,s)} r^{2s} + \sum_{l=2p_0+2}^{\infty} r^{l-1} \sum_{p\colon |p|=l} \operatorname{Im}\big(\mathcal{Y}_1^{(p_1,p_2)} e^{\mathfrak{i}\varphi(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2-1)}\big)$,

$R = \sum_{l=2p_0+2}^{\infty} r^{l-2p_0-1} \sum_{p\colon |p|=l} \operatorname{Re}\big(\mathcal{Y}_1^{(p_1,p_2)} e^{\mathfrak{i}\varphi(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2-1)}\big)$ — абсолютно сходящиеся при малых r степенные ряды с аналитическими и 2π- периодическими по φ коэффициентами, причем $R(0,\varphi), \Phi(0,\varphi) \equiv 0$.

Ясно, что при r близких к нулю $|R(r,\varphi)| < |a|/2$, $|\Phi(r,\varphi)| < \beta/2$.

Следовательно при таких r с ростом t полярный угол $\varphi(t)$ монотонно возрастает $(\beta > 0)$, а радиус-вектор $r(t)$ стремится к нулю, если константа Ляпунова $a < 0$, и монотонно возрастает, если $a > 0$, т. е. имеет место устойчивый или неустойчивый фокус.

Именно поэтому алгебраический случай называют еще случаем вещественного негрубого фокуса, так как для невозмущенной линейной системы имеет место центр, а возмущение таково, что приводит к разрыву замкнутых траекторий в некоторой окрестности начала координат и к образованию спиралей, наматывающихся на особую точку $r = 0$, когда $a < 0$, или сматывающихся с нее при $a > 0$.

Таким образом тривиальное решение $r(t) \equiv 0$ системы (8.38) в зависимости от знака a асимптотически устойчиво или неустойчиво, а с ним вместе тем же свойством обладают и тривиальные решения систем (8.37) и (8.18), поскольку (8.37) связывает с (8.38) полярная замена, а (8.18) с (8.37) — аналитическая в нуле (полиномиальная) почти тождественная замена (8.35).

Отметим, что в предложенной терминологии "грубый" фокус имеет место, когда собственные числа матрицы линейной части систем (8.17) или (8.18) имеют ненулевые вещественные части. Тогда критическая ситуация отсутствует и ответ на вопрос об асимптотической устойчивости или неустойчивости тривиального решения в зависимости от знака вещественной части собственных чисел дает теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.