

# Лекция 10: Умножение матриц

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт математики и компьютерных наук,  
кафедра алгебры и дискретной математики

В данной лекции вводится операция умножения матриц, изучаются ее свойства и указываются некоторые ее приложения. Как мы увидим, используя умножение матриц можно существенно сократить как запись многих формул, так и доказательства некоторых утверждений. Операция умножения матриц будет активно использоваться в дальнейшем в данном курсе и во многих других математических курсах.

# Определение произведения матриц

Прежде всего отметим, что

**!!** *произведение двух матриц определено лишь в случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.*

Иными словами, если матрица  $A$  имеет размер  $k \times \ell$ , а матрица  $B$  — размер  $r \times m$ , то произведение  $AB$  существует тогда и только тогда, когда  $\ell = r$ .

## Определение

Пусть  $A = (a_{ij})$  — матрица размера  $k \times \ell$ , а  $B = (b_{ij})$  — матрица размера  $\ell \times m$ . Тогда *произведением*  $AB$  матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $k \times m$  такая, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\ell}b_{\ell j}.$$

Иными словами,  $c_{ij}$  есть сумма произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

Для краткости правило вычисления элементов произведения матриц часто формулируют так:

- *элемент  $c_{ij}$  равен произведению  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$ .*

Легко понять, что

- *произведение матриц некоммутативно,*

т. е. равенство  $AB = BA$  выполняться не обязательно. Прежде всего, может оказаться, что произведение матриц  $A$  и  $B$  в одном порядке существует, а в другом — нет. Например, если матрица  $A$  имеет размер  $3 \times 5$ , а матрица  $B$  — размер  $5 \times 4$ , то матрица  $AB$  существует (и имеет размер  $3 \times 4$ ), а матрицы  $BA$  не существует. Далее, матрицы  $AB$  и  $BA$  могут существовать, но иметь разные размеры. Например, если  $A$  имеет размер  $3 \times 5$ , а  $B$  — размер  $5 \times 3$ , то  $AB$  — квадратная матрица порядка 3, а  $BA$  — квадратная матрица порядка 5. Как показывает следующее замечание, ситуация, когда произведения  $AB$  и  $BA$  существуют и имеют одинаковые размеры, встречается довольно редко.

## Замечание 1

*Если произведения  $AB$  и  $BA$  существуют и имеют одинаковые размеры, то  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного и того же порядка.*

Доказательство замечания 1 дано на следующем слайде.

**Доказательство.** Пусть  $A$  — матрица размера  $m \times n$ , а  $B$  — матрица размера  $r \times s$ . Из существования произведения  $AB$  вытекает, что  $n = r$ , а из существования произведения  $BA$  — что  $m = s$ . Но тогда  $AB$  — квадратная матрица порядка  $m$ , а  $BA$  — квадратная матрица порядка  $n$ . Поскольку размеры матриц  $AB$  и  $BA$  совпадают, получаем, что  $m = n$ . Таким образом,  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы порядка  $n$ . □

Но и в случае, когда  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного и того же порядка, равенство  $AB = BA$  может не выполняться. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} -14 & 3 \\ -22 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad BA = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

## Свойства произведения матриц

- 1) Если произведения матриц  $AB$  и  $BC$  определены, то  $(AB)C = A(BC)$  (умножение матриц ассоциативно).
- 2) Если  $A$  и  $B$  — матрицы одного и того же размера и произведение матриц  $AC$  определено, то  $(A + B)C = AC + BC$  (умножение матриц дистрибутивно относительно сложения по первому аргументу).
- 3) Если  $B$  и  $C$  — матрицы одного и того же размера и произведение матриц  $AB$  определено, то  $A(B + C) = AB + AC$  (умножение матриц дистрибутивно относительно сложения по второму аргументу).
- 4) Если произведение матриц  $AB$  определено, а  $t$  произвольное — число, то  $(tA)B = A(tB) = t(AB)$ .
- 5) Если  $E$  — единичная матрица такая, что произведение  $AE$  [соответственно  $EA$ ] определено, то  $AE = A$  [соответственно  $EA = A$ ].
- 6) Если  $O$  — нулевая матрица такая, что произведение  $AO$  [соответственно  $OA$ ] определено, то  $AO = O$  [соответственно  $OA = O$ ].
- 7) Если произведение матриц  $AB$  определено, то  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**Доказательство.** Свойства 2)–7) проверяются простыми вычислениями, основанными на определениях операций над матрицами. Докажем свойство 1). Нам понадобится следующее свойство суммирования:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q x_{ij} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p x_{ij}.$$

Пусть  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times r}$ ,  $C = (c_{ij})_{r \times s}$ ,  $AB = D = (d_{ij})_{m \times r}$ ,  $BC = F = (f_{ij})_{n \times s}$ ,  $(AB)C = G = (g_{ij})_{m \times s}$  и  $A(BC) = H = (h_{ij})_{m \times s}$ . Требуется доказать, что  $g_{ij} = h_{ij}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$  и  $j = 1, 2, \dots, s$ . Возьмем в матрице  $G$  произвольный элемент  $g_{ij}$  и преобразуем его:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^s d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^s \left[ \left( \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} \right) \cdot c_{kj} \right] = \sum_{k=1}^s \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^s a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^n \left[ a_{i\ell} \cdot \left( \sum_{k=1}^s b_{\ell k} c_{kj} \right) \right] = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} f_{\ell j} = h_{ij}. \end{aligned}$$

Требуемое равенство доказано. □

Произведение двух квадратных матриц одного и того же порядка есть квадратная матрица того же порядка. Нашей ближайшей целью является доказательство того факта, что определитель произведения таких матриц равен произведению их определителей. Для доказательства этого факта нам понадобятся некоторые новые понятия и результаты.

## Определение

Квадратная матрица  $G$  порядка  $n$  называется *полураспавшейся*, если существуют натуральные числа  $p$  и  $q$  такие, что  $p + q = n$  и на пересечении последних  $q$  строк и первых  $p$  столбцов матрицы  $G$  стоит нулевая матрица.

Обозначим через  $A$  квадратную матрицу порядка  $p$ , стоящую на пересечении первых  $p$  строк и первых  $p$  столбцов полураспавшейся матрицы  $G$ , через  $B$  — квадратную матрицу порядка  $q$ , стоящую на пересечении последних  $q$  строк и последних  $q$  столбцов матрицы  $G$ , а через  $F$  — матрицу размера  $p \times q$ , стоящую на пересечении первых  $p$  строк и последних  $q$  столбцов матрицы  $G$ . Иными словами,

$$G = \begin{pmatrix} A & F \\ O & B \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В этом случае мы будем говорить, что  $G$  — *полураспавшаяся матрица с диагональными блоками  $A$  и  $B$* .



## Предложение 1

Если  $G$  — полураспавшаяся матрица с диагональными блоками  $A$  и  $B$ , то  $|G| = |A| \cdot |B|$ .

**Доказательство.** Пусть матрица  $G$  имеет вид (1), причем  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы порядков  $p$  и  $q$  соответственно, а  $F$  — матрица размера  $p \times q$ . Положим  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  и  $F = (f_{ij})$ . Иными словами,

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & f_{p1} & f_{p2} & \dots & f_{pq} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qq} \end{pmatrix}.$$

Доказательство предложения проведем индукцией по  $p$ .

**База индукции.** Пусть  $p = 1$ . Тогда

$$|G| = \begin{vmatrix} a_{11} & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1q} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель из правой части этого равенства по первому столбцу, получим, что  $|G| = a_{11} \cdot |B|$ . С другой стороны, в рассматриваемом случае  $A = (a_{11})$  и  $|A| = a_{11}$ . Следовательно,  $|G| = |A| \cdot |B|$ . База индукции доказана.

**Шаг индукции.** Предположим, что доказываемое равенство выполнено при  $p = r - 1$ , и докажем, что тогда оно выполнено при  $p = r$ . Минор матрицы  $A$ , соответствующий элементу  $a_{ij}$ , будем, как обычно, обозначать через  $M_{ij}$ . Разложив определитель матрицы  $G$  по первому столбцу и используя после этого предположение индукции, получим, что

# Определитель полураспавшейся матрицы (3)

$$|G| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2r} & f_{21} & \dots & f_{2q} \\ a_{32} & \dots & a_{3r} & f_{31} & \dots & f_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r2} & \dots & a_{rr} & f_{r1} & \dots & f_{rq} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1r} & f_{11} & \dots & f_{1q} \\ a_{32} & \dots & a_{3r} & f_{31} & \dots & f_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r2} & \dots & a_{rr} & f_{r1} & \dots & f_{rq} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{r+1} a_{r1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1r} & f_{11} & \dots & f_{1q} \\ a_{22} & \dots & a_{2r} & f_{21} & \dots & f_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-12} & \dots & a_{r-1r} & f_{r-11} & \dots & f_{r-1q} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} \cdot |B| - a_{21}M_{21} \cdot |B| + \dots + (-1)^{r+1} a_{r1}M_{r1} \cdot |B| =$$

$$= a_{11}A_{11} \cdot |B| + a_{21}A_{21} \cdot |B| + \dots + a_{r1}A_{r1} \cdot |B| =$$

$$= (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{r1}A_{r1}) \cdot |B| = |A| \cdot |B|.$$

Предложение доказано.

Теперь мы можем доказать анонсированное выше утверждение об определителе произведения матриц.

## Теорема 1

Если  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  — квадратные матрицы одного и того же порядка, то  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .

**Доказательство.** Обозначим порядок матриц  $A$  и  $B$  через  $n$ , а матрицу  $AB$  — через  $C$ . Пусть  $C = (c_{ij})$ . Рассмотрим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$D^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

является полураспавшейся матрицей с диагональными блоками  $A$  и  $B$ .

Применяя предложение 9 из лекции 5 и предложение 1 из данной лекции, имеем  $|D| = |D^T| = |A^T| \cdot |B^T| = |A| \cdot |B|$ , т. е.

$$|D| = |A| \cdot |B|. \quad (2)$$

Прибавим к  $(n+1)$ -му столбцу матрицы  $D$  ее первый столбец, умноженный на  $b_{11}$ , второй, умноженный на  $b_{21}$ , ..., и, наконец,  $n$ -й, умноженный на  $b_{n1}$ . Полученную матрицу обозначим через  $D'$ . Ясно, что во всех столбцах матрицы  $D'$ , кроме  $(n+1)$ -го, стоят те же элементы, что и в матрице  $D$ . Если  $1 \leq i \leq n$ , то элемент, стоящий в  $i$ -й строке и  $(n+1)$ -м столбце матрицы  $D'$ , равен

$$a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1} = c_{i1};$$

если же  $n+1 \leq i \leq 2n$ , то этот элемент равен  $-b_{i1} + b_{i1} = 0$ . Таким образом, матрица  $D'$  имеет следующий вид:

$$D' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к  $(n+2)$ -му столбцу матрицы  $D'$  ее первый столбец, умноженный на  $b_{12}$ , второй, умноженный на  $b_{22}$ , ..., и, наконец,  $n$ -й, умноженный на  $b_{n2}$ . Полученную матрицу обозначим через  $D''$ . Во всех столбцах матрицы  $D''$ , кроме  $(n+2)$ -го, стоят те же элементы, что и в матрице  $D'$ . Как и выше, проверяется, что элемент, стоящий в  $i$ -й строке и  $(n+2)$ -м столбце матрицы  $D''$ , равен  $c_{i2}$ , если  $1 \leq i \leq n$ , и 0, если  $n+1 \leq i \leq 2n$ . Таким образом,

$$D'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Изменим аналогичным образом  $(n + 3)$ -й столбец матрицы  $D''$ , затем  $(n + 4)$ -й столбец полученной матрицы и т. д. После того как будет изменен последний столбец, мы получим матрицу

$$D^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом предложений 6 и 10 из лекции 5 получаем, что

$$|D| = |D'| = |D''| = \dots = |D^*|.$$

Следовательно,

$$|D^*| = |D|. \quad (3)$$



Поменяем в матрице  $D^*$  местами сначала  $(n+1)$ -й столбец с первым, затем  $(n+2)$ -й столбец — со вторым,  $\dots$ , наконец, последний столбец — с  $n$ -м. В результате мы получим матрицу

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя от матрицы  $D^*$  к матрице  $\overline{D}$ , мы сделали  $n$  перестановок столбцов. Применяя предложения 3 и 10 из лекции 5, имеем

$$|\overline{D}| = (-1)^n \cdot |D^*|. \quad (4)$$

Матрица  $\overline{D}$  является полураспавшейся матрицей с диагональными блоками  $C$  и  $-E$ . Предложение 1 данной лекции и предложение 11 из лекции 5 показывают, что  $|\overline{D}| = |C| \cdot (-1)^n$ . Умножая обе части этого равенства на  $(-1)^n$ , имеем  $(-1)^n \cdot |\overline{D}| = (-1)^{2n} \cdot |C| = |C|$ , т. е.

$$|C| = (-1)^n \cdot |\overline{D}|. \quad (5)$$

Из равенств (2)–(5) вытекает, что

$$|C| = (-1)^n \cdot |\overline{D}| = (-1)^{2n} \cdot |D^*| = |D^*| = |D| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема доказана. □

# Значение многочлена от квадратной матрицы (1)

Операции умножения и сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют вычислять значения многочленов от квадратных матриц.

Очевидно, что если  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ , то матрицы  $A^2 = A \cdot A$ ,  $A^3 = A^2 \cdot A$ ,  $\dots$ ,  $A^k = A^{k-1} \cdot A$ ,  $\dots$  существуют и являются квадратными матрицами порядка  $n$ . В силу ассоциативности умножения матриц возведение матриц в степень обладает всеми теми же свойствами, что и возведение чисел в степень. А именно,

- если  $A$  — квадратная матрица, а  $m$  и  $n$  — натуральные числа, то  $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ , а  $(A^m)^n = A^{mn}$ .

## Определение

Если  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  — многочлен, а  $A$  — квадратная матрица, то значением многочлена  $f(x)$  от матрицы  $A$  называется матрица

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

где  $E$  — единичная матрица того же порядка, что и  $A$ .

## Значение многочлена от квадратной матрицы (2)

Можно рассматривать и матричные многочлены вида

$$F(x) = A_0x^r + A_1x^{r-1} + \cdots + A_{r-1}x + A_r,$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_r$  — фиксированные квадратные матрицы порядка  $n$ .  
Значение такого многочлена от квадратной матрицы  $B$  порядка  $n$  вычисляется по формуле

$$F(B) = A_0B^r + A_1B^{r-1} + \cdots + A_{r-1}B + A_r.$$

## Матричная запись системы линейных уравнений

Используя операцию умножения матриц, можно получить другую, более компактную и удобную запись системы линейных уравнений. Система

[illegible]

может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Введем обозначения для трех матриц, входящих в последнее равенство:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(в частности,  $A$  — основная матрица системы (6)). Равенство (7) можно теперь переписать в виде  $AX = B$ . Это равенство называется *матричной записью системы линейных уравнений* (6).

# Использование матричной записи системы линейных уравнений для доказательства утверждений

Отметим, что матричная запись системы линейных уравнений позволяет компактно записывать не только сами эти системы, но и доказательства многих утверждений. Так, например, доказательство теоремы 1 в лекции 3 можно записать теперь следующим образом. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — частные решения однородной системы линейных уравнений  $AX = O$  (где  $O$  — нулевой столбец), а  $t$  — произвольное число. Тогда

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O \text{ и } A(tX_1) = t(AX_1) = t \cdot O = O.$$

Следовательно,  $X_1 + X_2$  и  $tX_1$  — решения системы  $AX = O$ .

# Матричное уравнение вида $AX = B$ (1)

*Матричным уравнением* называется уравнение, в котором неизвестным является матрица. Сейчас мы подробно рассмотрим матричное уравнение вида

$$AX = B, \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  — известные матрицы, а  $X$  — неизвестная. Позже в данной лекции и лекции 11 будут рассмотрены матричные уравнения еще двух типов. Из определения произведения матриц видно, что число строк в матрице  $AX$  равно числу строк в матрице  $A$ . Следовательно, если число строк в матрицах  $A$  и  $B$  различно, то уравнение (8) решений не имеет. Поэтому всюду в дальнейшем, говоря об этом уравнении, мы будем считать, что *матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковое число строк*.

Из определения произведения матриц видно также, что число столбцов в матрице  $AX$  равно числу столбцов в матрице  $X$ . Следовательно, если  $X$  — решение уравнения (8), то матрицы  $X$  и  $B$  содержат одинаковое число столбцов. Как мы видели выше в данной лекции, если матрицы  $X$  и  $B$  содержат один столбец, то уравнение (8) есть просто другой способ записи системы линейных уравнений. Обозначим через  $k$  число столбцов в матрицах  $X$  и  $B$ . Для всякого  $i = 1, 2, \dots, k$  обозначим  $i$ -й столбец матрицы  $X$  через  $X_i$ , а  $i$ -й столбец матрицы  $B$  — через  $B_i$ . Из определения произведения матриц вытекает, что  $i$ -й столбец матрицы  $AX$  равен  $AX_i$ .

## Матричное уравнение вида $AX = B$ (2)

Поэтому в общем случае уравнение (8) равносильно совокупности  $k$  систем линейных уравнений вида

$$AX_1 = B_1, AX_2 = B_2, \dots, AX_k = B_k. \quad (9)$$

Для того чтобы решить каждую из этих систем методом Гаусса, надо записать расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести ее к ступенчатому виду. Если при этом окажется, что хотя бы одна из систем несовместна, то и исходное матричное уравнение не имеет решений. Если же все системы совместны, то, решив каждую из них, мы найдем все столбцы матрицы  $X$ , а значит и саму эту матрицу. Но у всех решаемых систем основная матрица одна и та же — матрица  $A$ . Это позволяет решать все системы одновременно, действуя по алгоритму, который приведен на следующем слайде.



# Матричное уравнение вида $AX = B$ (3)

## Алгоритм решения матричного уравнения вида $AX = B$

Пусть дано уравнение (8), в котором  $A$  — матрица размера  $n \times k$ , а  $B$  — матрица размера  $n \times m$ . Запишем матрицу размера  $n \times (k + m)$ , в которой в первых  $k$  столбцах стоит матрица  $A$ , а в последних  $m$  столбцах — матрица  $B$ . С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые  $k$  столбцов) к ступенчатому виду. После этого для всякого  $i = 1, 2, \dots, k$  можно найти  $i$ -й столбец матрицы  $X$ , решив систему линейных уравнений вида  $A'X_i = B'_i$ , где  $A'$  — левая часть полученной матрицы, а  $B'_i$  —  $i$ -й столбец правой части полученной матрицы. Если при этом окажется, что хотя бы одна из этих систем несовместна, то уравнение  $AX = B$  решений не имеет.

# Матричное уравнение вида $AX = B$ : первый пример

Проиллюстрируем сказанное двумя примерами.

**Задача 1.** Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Действуя по описанному выше алгоритму, имеем:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Расширенная матрица системы линейных уравнений, соответствующей последнему столбцу полученной матрицы имеет вид

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Последняя строка этой матрицы показывает, что соответствующая система линейных уравнений решений не имеет. Следовательно, наше матричное уравнение также не имеет решений.

# Матричное уравнение вида $AX = B$ : второй пример (1)

**Задача 2.** Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Вновь действуя по описанному выше алгоритму, имеем:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матрица  $X$  имеет размер  $3 \times 2$ . Обозначим ее элементы следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Выпишем системы линейных уравнений, соответствующие полученной нами матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = -3, \\ -y_2 + 5y_3 = 1. \end{cases}$$

## Матричное уравнение вида $AX = B$ : второй пример (2)

Решая первую систему, из ее второго уравнения получаем, что  $x_2 = 5x_3 - 3$ ; из первого уравнения теперь вытекает, что

$$x_1 = -\frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_3 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \cdot x_3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot x_3 + \frac{5}{2} = -2x_3 + 4.$$

Аналогично, из второго уравнения второй системы вытекает, что  $y_2 = 5y_3 - 1$ , после чего из первого уравнения следует, что

$$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot y_3 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \cdot y_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot y_3 - \frac{3}{2} = -2y_3 - 1.$$

Полагая  $x_3 = c_1$ ,  $y_3 = c_2$ , получаем, что решениями нашего уравнения являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} -2c_1 + 4 & -2c_2 - 1 \\ 5c_1 - 3 & 5c_2 - 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные действительные числа, и только они.

# Матричное уравнение вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы $A$ (1)

Особый интерес для дальнейшего представляет уравнение (8) в случае, когда  $A$  — квадратная матрица, определитель которой не равен 0. Квадратные матрицы с указанным свойством называются *невырожденными*. В указанном случае каждая из систем (9) является крамеровской и в силу теоремы Крамера (см. лекцию 6) имеет единственное решение. Следовательно, и уравнение (8) имеет единственное решение. Это позволяет использовать для его решения метод Гаусса–Жордана в том виде, в каком он был изложен в конце лекции 4. Объединяя алгоритм нахождения решения системы, имеющей единственное решение (см. конец лекции 4) и изложенный выше в данной лекции алгоритм решения матричного уравнения вида  $AX = B$ , получаем приведенный на следующем слайде алгоритм решения уравнения (8) в рассматриваемом частном случае.

## Матричное уравнение вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы $A$ (2)

### Алгоритм решения матричного уравнения вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы $A$

Пусть дано уравнение (8), в котором  $A$  — невырожденная квадратная матрица порядка  $n$ , а  $B$  — матрица размера  $n \times k$ . Запишем матрицу размера  $n \times (n + k)$ , в которой в первых  $n$  столбцах стоит матрица  $A$ , а в последних  $k$  столбцах — матрица  $B$ . С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые  $n$  столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних  $k$  столбцах) полученной матрицы будет записана матрица  $X$ , являющаяся единственным решением уравнения (8).

Другой способ решения уравнения (8) в рассматриваемом частном случае будет указан в лекции 11.

## Матричное уравнение вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы $A$ : пример

Решим описанным выше способом уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Действуя по сформулированному на предыдущем слайде алгоритму, имеем

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 8 & 4 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 8 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, наше уравнение имеет единственное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Матричная запись формул перехода от одного базиса к другому

В лекции 8 были выведены формулы изменения координат вектора при замене базиса (см. там формулы (4)). Теперь мы можем записать их более компактно. Пусть  $F$  и  $G$  — базисы пространства  $\mathbb{R}_n$ ,  $T_{FG}$  — матрица перехода от  $F$  к  $G$ ,  $x$  — вектор из  $\mathbb{R}_n$ , а  $X$  и  $X'$  — столбцы координат вектора  $x$  в базисах  $F$  и  $G$  соответственно. Тогда формулы изменения координат вектора при замене базиса можно записать в виде

$$X = T_{FG} X'.$$

Поскольку мы считаем, что столбец  $X$  известен, а столбец  $X'$  надо найти, это уравнение относится к тому типу матричных уравнений, который рассматривался выше в данной лекции. Более того, матрица  $T_{FG}$  — квадратная, а ее определитель, как уже отмечалось в лекции 8, отличен от 0 (этот факт будет доказан в лекции 12). Поэтому для решения рассматриваемого уравнения можно применить алгоритм, указанный двумя слайдами ранее.



Сказанное выше об уравнении (8) можно применить к решению матричных уравнений вида  $XA = B$ , где  $A$  и  $B$  — известные матрицы, а  $X$  — неизвестная. Транспонируя обе части равенства  $XA = B$  и используя свойство 7) произведения матриц, получаем уравнение  $A^T X^T = B^T$ , т. е. уравнение вида (8). Решив его описанным выше способом, мы найдем матрицу  $X^T$ . Транспонировав ее, получим матрицу  $X$ .