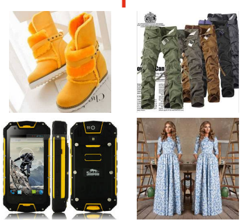
Высшая математика:

Математика для заочников
Математические формулы, таблицы и справочные материалы
Математические сайты
>>> Удобный калькулятор
>>> Расчётная программа *«Геометрия без ошибок»*

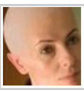
Не нашлось нужной задачи?
Сборники готовых решений!
Не получается пример?
>>> mathprofi.com New!
Есть хорошие материалы?
Добавьте их в библиотеку!

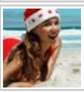


Учимся решать:

Первый курс:

Высшая математика для чайников, или с чего начать?
Аналитическая геометрия:
Векторы для чайников
Скалярное произведение векторов
Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов
Векторное и смешанное произведение векторов
Формулы деления отрезка в данном отношении
Прямая на плоскости
Простейшие задачи с прямой на плоскости
Линейные неравенства
Как научиться решать задачи по аналитической геометрии?
Линии второго порядка. Эллипс
Гипербола и парабола
Задачи с линиями 2-го порядка
Как привести уравнение л. 2 п.





Второй курс:

Дифференциальные уравнения:

Предел последовательности и предел функции по Коши

Сегодня на уроке мы разберём **строгое определение последовательности** и **строгое определение предела функции**, а также научимся решать соответствующие задачи теоретического характера. Статья предназначена, прежде всего, для студентов 1-го курса естественнонаучных и инженерно-технических специальностей, которые начали изучать теорию математического анализа, и столкнулись с трудностями в плане понимания этого раздела высшей математики. Кроме того, материал вполне доступен и учащимся старших классов.

За годы существования сайта я получил недобрый десяток писем примерно такого содержания: «Плохо понимаю математический анализ, что делать?», «Совсем не понимаю матан, думаю бросить учёбу» и т.п. И действительно, именно матан часто прореживает студенческую группу после первой же сессии. Почему так обстоят дела? Потому что предмет немыслимо сложен? Вовсе нет! **Теория математического анализа не столь трудна, сколько своеобразна**. И её нужно принять и полюбить такой, какая она есть =)

Начнём с самого тяжёлого случая. Первое и главное – не надо бросать учёбу. Поймите правильно, бросить, оно всегда успеется ;-) Безусловно, если через год-два от выбранной специальности будет тошнить, тогда да – следует задуматься *(а не пороть горячку!)* о смене деятельности. Но пока стОит продолжить. И, пожалуйста, забудьте фразу «Ничего не понимаю» – так не бывает, чтобы СОВСЕМ ничего не понимать.

Что делать, если с теорией плохо? Это, кстати, касается не только математического анализа. Если с теорией плохо, то сначала нужно СЕРЬЁЗНО налечь на практику. При этом решаются сразу две стратегические задачи:

– Во-первых, значительная доля теоретических знаний появилась благодаря практике. И поэтому многие люди понимают теорию через… – всё верно! Нет-нет, вы не о том подумали =)

– И, во-вторых, практические навыки с большой вероятностью «вытянут» вас на экзамене, даже если…, но не будем так настраиваться! Всё реально и всё реально «поднять» в достаточно короткие сроки. Математический анализ – это мой любимый раздел высшей математики, и поэтому я просто не мог не протянуть вам ~~ноги~~ руку помощи:

В начале 1-го семестра обычно проходят пределы последовательностей и пределы функций. Не понимаете, что это такое и не знаете, как их решать? Начните со статьи **Пределы функций**, в которой «на пальцах» рассмотрено само понятие и разобраны простейшие примеры. Далее проработайте другие уроки по теме, в том числе урок о **пределах последовательностей**, на котором я фактически уже сформулировал строгое определение.

На начальном этапе не рекомендую особо заглядывать в учебник по математическому анализу, да и в собственные записи тоже. Хотя давайте немного причастимся:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbf{N} \,|\, \forall n>N \quad |x_n-a|<\varepsilon$$

Какие значки помимо знаков неравенств и модуля вы знаете?

Из **курса алгебры** нам известны следующие обозначения:

$\forall$ – *квантор всеобщности* обозначает– «для любого», «для всех», «для каждого», то есть запись $\forall\varepsilon>0$ следует прочитать «для любого положительного эпсилон»;

$\exists$ – *квантор существования*, $\exists N\in\mathbf{N}$ – существует значение N, принадлежащее **множеству натуральных чисел**.

Дифференциальные уравнения первого порядка
Однородные ДУ 1-го порядка
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка
Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах
Уравнение Бернулли
Дифференциальные уравнения с понижением порядка
Однородные ДУ 2-го порядка
Неоднородные ДУ 2 порядка
Метод вариации произвольных постоянных
Как решить систему дифференциальных уравнений
Числовые ряды:
Ряды для чайников
Как найти сумму ряда?

Поиск

Отблагодарить автора >>>

Если Вы заметили опечатку, пожалуйста, сообщите мне об этом

Заказать контрольную
Часто задаваемые вопросы
Гостевая книга

Кнопка для сайта:

Когда нет времени:

Авторские работы на заказ

[redacted] – длинная вертикальная палка читается так: *«такое, что», «такая, что», «такой, что»* либо *«такие, что»*, в нашем случае, очевидно, речь идёт о номере N – поэтому «такой, что»;

$\forall n > N$ – для всех «эн», бОльших чем N;

$|x_n - a| < \varepsilon$ – **знак модуля означает расстояние**, т.е. эта запись сообщает нам о том, что расстояние между значениями x_n, a меньше эпсилон.

А теперь попытайтесь прочитать строку $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \,|\, \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$ целиком.

Ну как, убийственно сложно? =)

После освоения практики жду вас в следующем параграфе:

Определение предела последовательности

И в самом деле, немного порассуждаем – как сформулировать строгое определение последовательности? …Первое, что приходит на ум в свете **практического занятия**: «предел последовательности – это число, к которому бесконечно близко приближаются члены последовательности».

Хорошо, распишем **последовательность** $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$:

$0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\ \frac{9}{8},\ -\frac{8}{9},\ \frac{11}{10}, \ldots$

Нетрудно уловить, что *подпоследовательность* $0,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{6}{7},\ -\frac{8}{9}, \ldots$ бесконечно близко приближаются к числу –1, а члены с чётными номерами $\frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{6},\ \frac{9}{8},\ \frac{11}{10}, \ldots$ – к «единице».

А может быть предела два? Но тогда почему у какой-нибудь последовательности их не может быть десять или двадцать? Так можно далеко зайти. В этой связи логично считать, что **если у последовательности существует предел, то он единственный**.

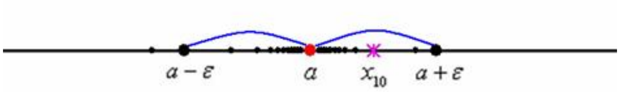
Примечание: *у последовательности $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ нет предела, однако из неё можно выделить две подпоследовательности (см. выше), у каждой из которых существует свой предел.*

Таким образом, высказанное выше определение оказывается несостоятельным. Да, оно работает для случаев вроде $x_n = \frac{1}{n}$ *(чем я не совсем корректно пользовался в упрощённых объяснениях практических примеров)*, но сейчас нам нужно отыскать строгое определение.

Попытка вторая: «предел последовательности – это число, к которому приближаются ВСЕ члены последовательности, за исключением, разве что их *конечного* количества». Вот это уже ближе к истине, но всё равно не совсем точно. Так, например, у последовательности $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$: $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$ половина членов вовсе не приближается к нулю – они ему просто-напросто равны =) К слову, «мигалка» $x_n = (-1)^n$ вообще принимает два фиксированных значения.

Формулировку нетрудно уточнить, но тогда возникает другой вопрос: как записать определение в математических знаках? Научный мир долго бился над этой проблемой, пока ситуацию не разрешил **известный маэстро**, который, по существу, и оформил классический матанализ во всей его строгости. Коши предложил оперировать ***окрестностями***, чем значительно продвинул теорию.

Рассмотрим некоторую точку a и её *произвольную* ε-окрестность:



Значение «эпсилон» всегда положительно, и, более того, мы вправе выбрать его самостоятельно. Предположим, что в данной окрестности находится множество членов *(не обязательно все)* некоторой последовательности x_n. Как записать тот факт, что, например десятый член попал в окрестность? Пусть он находится в правой её части. Тогда расстояние между точками x_{10} и a должно быть меньше «эпсилон»: $x_{10} - a < \varepsilon$. Однако если «икс десятое» расположено левее точки «а», то разность будет отрицательна, и поэтому к ней нужно добавить знак **модуля**: $|x_{10} - a| < \varepsilon$.

Определение: число a называется пределом последовательности, если **для любой** его окрестности $(\forall \varepsilon > 0)$ *(заранее выбранной)* существует натуральный номер $(\exists N \in \mathbf{N})$ – ТАКОЙ, что **ВСЕ** члены последовательности с бОльшими номерам $(\forall n > N)$ окажутся внутри окрестности: $|x_n - a| < \varepsilon$

Или короче: $a = \lim_{n \to +\infty} x_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \,|\, \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Иными словами, какое бы малое значение «эпсилон» мы ни взяли, рано или поздно «бесконечный хвост» последовательности ПОЛНОСТЬЮ окажется в этой окрестности.

Так, например, «бесконечный хвост» последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ ПОЛНОСТЬЮ зайдёт в любую сколь угодно малую ε-окрестность точки $a = 0$. Таким образом, это значение является пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ по определению. Напоминаю, что последовательность, предел которой равен нулю, называют *бесконечно малой*.

Следует отметить, что для последовательности $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ уже нельзя сказать «бесконечный хвост **зайдёт**» – члены с нечётными номерами по факту равны нулю и «никуда не заходят» =) Именно поэтому в определении использован глагол «окажутся». И, разумеется, члены такой последовательности, как $x_n = 1^n$ тоже «никуда не идут». Кстати, проверьте, будет ли число $a = 1$ её пределом.

Теперь покажем, что у последовательности $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$: $0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6}, \ldots$ не существует предела. Рассмотрим, например, окрестность $\varepsilon = \frac{1}{2}$ точки $a = 1$. Совершенно понятно, что нет такого номера, после которого ВСЕ члены окажутся в данной окрестности – нечётные члены всегда будут «выскакивать» к «минус единице». По аналогичной причине не существует предела и в точке $a = -1$.

Начинающим рекомендую 2-3 раза перечитать вышесказанное + параграф **понятие предела последовательности** предыдущего урока, где я объяснил то же самое, но без математических значков.

Закрепим материал практикой:

Пример 1

Доказать что предел последовательности $x_n = \frac{1}{n+3}$ равен нулю. Указать номер $N(\varepsilon)$, после которого, все члены последовательности гарантированно окажутся внутри любой сколь угодно малой ε-окрестности точки $a = 0$.

Примечание*: у многих последовательностей искомый натуральный номер N зависит от значения ε – отсюда и обозначение $N(\varepsilon)$.*

Решение: рассмотрим *произвольную* ε-окрестность точки $a = 0$ и проверим, **найдётся ли** номер $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ – такой, что ВСЕ члены с бОльшими номерами $(\forall n > N(\varepsilon))$ окажутся внутри этой окрестности:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+3} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+3}\right| < \varepsilon$$

Чтобы показать существование искомого номера $N(\varepsilon)$, выразим n через ε.

Так как при любом значении «эн» $\frac{1}{n+3} > 0$, то знак модуля можно убрать:

$$\frac{1}{n+3} < \varepsilon$$

Используем «школьные» действия с неравенствами, которые я повторял на уроках **Линейные неравенства** и **Область определения функции**. При этом важным обстоятельством является то, что «эпсилон» и «эн» положительны:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+3$$

$$n+3 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 3$$

Поскольку слева речь идёт о натуральных номерах, а правая часть в общем случае дробна, то её нужно округлить:

$$n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$$

Примечание*: иногда для перестраховки справа добавляют единицу, но на самом деле это излишество. Условно говоря, если $n > 2{,}25$ и мы ослабим результат округлением в меньшую сторону $n > 2$, то ближайший подходящий номер («тройка») всё равно будет удовлетворять первоначальному неравенству.*

А теперь смотрим на неравенство $n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$ и вспоминаем, что изначально мы рассматривали *произвольную* ε-окрестность, т.е. «эпсилон» может быть равно **любому** положительному числу.

Вывод: для любой сколько угодно малой ε-окрестности точки $a = 0$ нашлось значение $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$, такое, что для всех бОльших номеров $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\frac{1}{n+3} - 0\right| < \varepsilon \quad (|x_n - a| < \varepsilon)$. Таким образом, число $a = 0$ является пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n+3}$ по определению. **Что и требовалось доказать**.

К слову, из полученного результата $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$ хорошо просматривается естественная закономерность: чем меньше ε-окрестность – тем больше номер $N(\varepsilon)$, после которого ВСЕ члены последовательности окажутся в данной окрестности. Но каким бы малым ни было «эпсилон» – внутри всегда будет «бесконечный хвост», а снаружи – пусть даже большое, однако *конечное* число членов.

Как впечатления? =) Согласен, что странновато. **Но строго!** Пожалуйста, перечитайте и осмыслите всё ещё раз.

Рассмотрим аналогичный пример и познакомимся с другими техническими приёмами:

<u>Пример 2</u>

Используя определение последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3}$

Решение: по определению последовательности нужно доказать, что
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \,|\, \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon$ *(проговариваем вслух!!!)*.

Рассмотрим *произвольную* ε-окрестность точки $a = \frac{4}{3}$ и проверим, **существует ли** натуральный номер $N(\varepsilon)$ – такой, что для всех бОльших номеров $(\forall n > N(\varepsilon))$ выполнено неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2} - \frac{4}{3}\right| < \varepsilon$$

Чтобы показать существование такого $N(\varepsilon)$, нужно выразить «эн» через «эпсилон». Упрощаем выражение под знаком модуля:

$$\left|\frac{3(4n^2+1) - 4(3n^2+2)}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{12n^2+3-12n^2-8}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-5}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon$$

Модуль уничтожает знак «минус»:

$$\left|\frac{5}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon$$

Знаменатель положителен при любом «эн», следовательно, палки можно убрать:

$$\frac{5}{3(3n^2+2)} < \varepsilon$$

Перетасовка:

$$3n^2 + 2 > \frac{5}{3\varepsilon}$$

$$3n^2 > \frac{5}{3\varepsilon} - 2$$

$$n^2 > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)$$

Теперь надо бы извлечь квадратный корень, но загвоздка состоит в том, что при некоторых «эпсилон» правая часть будет отрицательной. Чтобы избежать этой неприятности *усилим* неравенство модулем:

$$n^2 > \frac{1}{3}\left|\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)\right|$$

Почему так можно сделать? Если, условно говоря, окажется, что $n^2 > 1$, то подавно будет выполнено и условие $n^2 > -1$. Модуль может *только увеличить* разыскиваемый номер $N(\varepsilon)$, и это нас тоже устроит! Грубо говоря, если подходит сотый, то подойдёт и двухсотый! В соответствии с определением, нужно показать **сам факт существования номера** (хоть какого-то), после которого все члены последовательности окажутся в ε-окрестности. Кстати, именно поэтому нам не страшнО финальное округление правой части в бОльшую сторону.

Извлекаем корень:

$$n > \sqrt{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)\right|}$$

И округляем результат:

$$n > \left[\sqrt{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)\right|}\right]$$

Вывод: т.к. значение «эпсилон» выбиралось произвольно, то для любой сколько угодно малой ε-окрестности точки $a = \frac{4}{3}$ нашлось значение $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)\right|}\right]$, такое, что для всех бОльших номеров $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2} - \frac{4}{3}\right| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3}$ по определению. **Что и требовалось доказать**.

Советую **особо** разобраться в усилении и ослаблении неравенств – это типичные и очень распространённые приёмы математического анализа. Единственное, нужно следить за корректностью того или иного действия. Так, например, неравенство $n^2 > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right)$ ни в коем случае нельзя *ослаблять*, вычитая, скажем, единицу:

$$n^2 > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right) - 1$$

Опять же условно: если номер $N(\varepsilon) = 100$ точно подойдёт, то предыдущий может уже и не подойти.

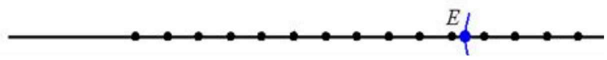
Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 3

Используя определение последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$

Краткое решение и ответ в конце урока.

Если последовательность *бесконечно велика*, то определение предела формулируется похожим образом: точка $a = +\infty$ называется пределом последовательности, если для любого, *сколь угодно большого* числа $E > 0$ существует номер N, такой, что для всех бОльших номеров $n > N$, будет выполнено равенство $x_n > E$. Число E называют *окрестностью точки «плюс бесконечность»*:



Иными словами, какое бы большое значение E мы ни взяли, «бесконечный хвост» последовательности обязательно зайдёт в E-окрестность точки $a = +\infty$, оставив слева лишь конечное число членов.

Дежурный пример: $\lim\limits_{n\to+\infty} (n) = +\infty$

И сокращённая запись: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \,|\, \forall n > N \quad x_n > E$

Для случая $\lim\limits_{n\to+\infty} (n) = -\infty$ запишите определение самостоятельно. Правильная версия в конце урока.

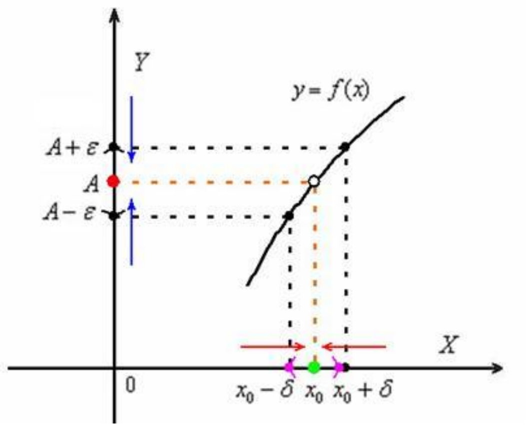
После того, как вы «набили» руку на практических примерах и разобрались с определением предела последовательности, можно обратиться к литературе по математическому анализу и/или своей тетрадке с лекциями. Рекомендую закачать 1-й том Бохана *(попроще – для заочников)* и Фихтенгольца *(более подробно и обстоятельно)*. Из других авторов советую Пискунова, курс которого ориентирован на технические ВУЗы.

Попытайтесь добросовестно изучить теоремы, которые касаются предела последовательности, их доказательства, следствия. Поначалу теория может казаться «мутной», но это нормально – просто нужно привыкнуть. И многие даже войдут во вкус!

Строгое определение предела функции

Начнём с того же самого – как сформулировать данное понятие? Словесное определение предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ формулируется значительно проще: «число A является пределом функции $f(x)$, если при «икс», стремящемся к x_0 - му *(и слева, и справа)*, соответствующие значения функции стремятся к A» *(см. чертёж)*. Всё вроде бы нормально, но слова словами, смысл смыслом, значок $\lim$ значком, а строгих математических обозначений маловато. И во втором параграфе мы познакомимся с двумя подходами к решению данного вопроса.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке X за исключением, возможно, точки x_0. В учебной литературе общепринято считают, что функция там **не** определена:



Такой выбор подчёркивает **суть предела функции**: «икс» *бесконечно близко* приближается к x_0 - му, и соответствующие значения функции – *бесконечно близко* к A. Иными словами, понятие предела подразумевает не «точный заход» в точки, а именно *бесконечно близкое приближение*, при этом не важно – определена ли функция $y = f(x)$ в точке x_0 или нет.

Первое определение предела функции, что неудивительно, формулируется с помощью двух последовательностей. Во-первых, понятия родственные, и, во-вторых, пределы функций обычно изучают после пределов последовательностей.

Рассмотрим последовательность $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ точек *(на чертеже отсутствуют)*, принадлежащих промежутку X и *отличных от* x_0, которая *сходится* к x_0 - му. Тогда соответствующие значения функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ тоже образуют числовую последовательность, члены которой располагаются на оси ординат.

Предел функции по Гейне: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если **для любой** последовательности точек $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ *(принадлежащих X и отличных от x_0)*, которая сходится к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ сходится к A.

Генрих Гейне – это немецкий математик. …И не надо тут ничего такого думать, гей в Европе всего лишь один – это Гей-Люссак =)

Второе определение предела соорудил… да-да, вы правы. Но сначала разберёмся в его конструкции. Рассмотрим произвольную ε-окрестность точки A *(«чёрная»*

Согласно соответствующей теореме математического анализа, определения по Гейне и по Коши эквивалентны, однако наиболее известен второй вариант *(ещё бы!)*, который также называют «предел на языке ε - δ»:

Пример 4

Используя ε - δ определение предела, доказать, что $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$

Решение: функция определена на всей числовой прямой кроме точки $x = -3$. Используя определение $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 | \quad \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, докажем существование предела в данной точке.

Примечание*: величина «дельта»-окрестности зависит от «эпсилон», отсюда и обозначение* $\delta(\varepsilon)$

Рассмотрим *произвольную* ε-окрестность. Задача состоит в том, чтобы по этому значению ε проверить, **существует ли** $\delta(\varepsilon)$ -окрестность, **ТАКАЯ**, что из неравенства $0 < |x - (-3)| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\left| \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} - (-7) \right| < \varepsilon$.

Предполагая, что $x \neq -3$, преобразуем последнее неравенство:

$\left| \dfrac{(2x - 1)(x + 3)}{x + 3} + 7 \right| < \varepsilon$ (*разложили квадратный трёхчлен*)

$|2x - 1 + 7| < \varepsilon$

$|2x + 6| < \varepsilon$

$2|x + 3| < \varepsilon$

$|x + 3| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad (x \neq -3)$

После упрощений для лучшего понимания перепишем ещё раз то, что требовалось проверить: «…**существует ли** $\delta(\varepsilon)$-окрестность, **ТАКАЯ** что из неравенства $0<|x-(-3)|<\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|x+3|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (x\neq -3)$?»

Конечно, существует, например, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. В этом случае из неравенства $0<|x-(-3)|<\frac{\varepsilon}{2}$ следует $|x+3|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (x\neq -3)$ (формально оно же само). Следует отметить, что в качестве примера можно привести и любую меньшую «дельта»-окрестность, например, $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, поскольку из неравенства $0<|x-(-3)|<\frac{\varepsilon}{4}$ тем более следует, что $|x+3|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (x\neq -3)$ *(из того, что «в кармане меньше 50-ти рублей» следует то, что «в кармане меньше 100 рублей»)*. Однако в качестве стандартного примера окрестности практически всегда берут «пограничное» значение, в данном примере $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

Вывод: для любой *сколько угодно малой* ε-окрестности точки $A=-7$ нашлась окрестность $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ точки $x_0=-3$, такая, что из неравенства $0<|x-(-3)|<\frac{\varepsilon}{2}$ следует неравенство $\left|\frac{2x^2+5x-3}{x+3}-(-7)\right|<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$ по определению предела функции. **Ч.т.д.**

Небольшое задание для самостоятельного решения.

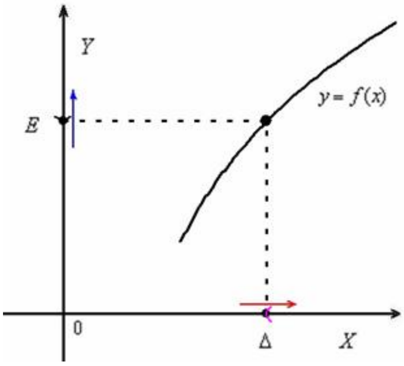
<u>Пример 5</u>

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)=9$

Слишком просто? А вы попробуйте грамотно оформить, и, самое главное, ПОНЯТЬ, ход решения ;-)

Следует отметить, что рассмотренные задачи не дают нам каких-то способов решения пределов, они позволяют лишь доказать либо опровергнуть существование некоторых из них.

Определение бесконечного предела, в частности предела $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, тоже формулируется 2-мя способами. Приведу наиболее популярный вариант. Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, который содержит сколь угодно большие значения «икс». Предел функции $f(x)$ равен «плюс бесконечности» при $x\to +\infty$, если для любого *сколь угодно большого* числа $E>0$ *(заранее заданного)* найдётся окрестность $\Delta>0$, такая, что: КАК ТОЛЬКО значения аргумента войдут в данную окрестность: $x>\Delta$ *(красная стрелка)*, ТАК СРАЗУ соответствующие значения функции зайдут в E-окрестность: $f(x)>E$ *(синяя стрелка)*:



Сокращённая запись: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, если $\forall E>0 \quad \exists\Delta>0 \mid \forall x>\Delta \quad \Rightarrow \quad f(x)>E$

Определения следующих двух пределов предлагаю сформулировать самостоятельно: $\lim\limits_{x\to k} f(x)=+\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=m$

Изобразите на чертеже принципиальную картину, прорисуйте окрестности и постарайтесь корректно записать определения. Для обозначения закрытых окрестностей используйте буквы ε, δ, для открытых к бесконечности – буквы E, Δ. Ответы в конце урока.

Случаи «минус бесконечности» и обобщённый случай легко отыскать в соответствующей литературе.

Что делать дальше? После освоения теории пределов целесообразно перейти к изучению **непрерывности функции**, правда, в рамках сайта сформулировано лишь «прикладное» определение непрерывности, поэтому книги в помощь. Далее в 1-м семестре, как правило, проходят производные. Здесь я рекомендую придерживаться той же схемы – сначала **учимся дифференцировать**, затем осваиваем **теоретический материал о производной**, «сопутствующие» теоремы и т.д.

Ни в коем случае не расстраивайтесь, если дела «пойдут не очень», в конце концов, тут нужно принять во внимание, что учиться на «технаря» вообще непросто: что-то даётся легче, что-то труднее, а с чем-то может и помучиться придётся. Лично у меня некоторые разделы математики шли лучше, некоторые хуже, а программирование вообще переносилось с трудом (уж не знаю, почему). Нельзя идеально знать и любить всё.

Оглядываясь в прошлое, с улыбкой вспоминаю свои первый месяцы учёбы – тогда математический анализ показался мне самой трудной дисциплиной, и я с перепуга выучил ВЕСЬ материал 1-го семестра, даже сказать точнее не выучил, а почти во всём разобрался, чего и всем желаю!

Надеюсь, данная статья была полезна, а может, и послужила ключом к предмету!

Решения и ответы:

Пример 3: ***Решение****: докажем, что* $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}\,\big|\; \forall n>N(\varepsilon) \quad |x_n-a|<\varepsilon$*. Для этого рассмотрим произвольную* ε*-окрестность точки* $a=-\frac{1}{2}$ *и проверим, найдётся ли натуральный номер* $N(\varepsilon)$ *– такой, что* $\forall n>N$ *выполнено:*

$$\left|\frac{n+1}{1-2n}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$$

Преобразуем неравенство:

$$\left|\frac{n+1}{1-2n}+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2(n+1)+1-2n}{2(1-2n)}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n+2+1-2n}{2(1-2n)}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{3}{2(1-2n)}\right|<\varepsilon$$

$\frac{3}{2}\left|\frac{1}{2n-1}\right|<\varepsilon$ *(подумайте, почему)*

Для всех «эн»: $2n-1>0$*, поэтому:*

$$\frac{1}{2n-1}<\frac{2\varepsilon}{3}$$

Автор: Емелин Александр

Высшая математика для заочников и не только >>>

(Переход на главную страницу)

Как можно отблагодарить автора?