МатАнализ. Теоремы.

MERGE PDF с определениями и теоремами - https://goo.gl/eF6FaP
PDF с определениями - https://goo.gl/nnGaVt
PDF с теоремами (PDF этого гуглодока) - https://goo.gl/RCxfSX

Гуглодок с определениями - https://goo.gl/hLo4I0
Гуглодок с теоремами (этот гуглодок) - https://goo.gl/L7vO0b

- **Зеленый** - по конспекту/сверено
- **Синее** - по книжке Громова-Виноградова (можно поверить)
- **Оранжевое** - сомнительные додумки/сомнения по источнику
- **Черное** - по книжке/альт. источники/не ясно/статус не присвоен (тут уж как…)
- **Красное** - пора валить… в гугл

Символы для вставки: ℕ ℝ ℚ ℤ ℂ ∅

Аксиомы вещественных чисел 1

Всего 16 аксиом. По группам:

Аксиомы поля (конспект) (стр. 13)

Пусть X - множество, и существуют две функции $F,\ G:\ X \times X \to X$. Т.е для $a,\ b \in X$: $F(a,\ b) \leftrightarrow a + b$, $G(a,\ b) \leftrightarrow a * b$. Тогда свойства:

1. Ассоциативность сложения
   $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. Коммутативность сложения
   $a+b = b+a$
3. Существует нейтральный элемент по сложению
   $\exists 0 \in X\ \forall a \in X:\ \ a+0 = a$
4. Существует обратный элемент по сложению
   $\forall a \in X\ \ \exists b \in X:\ \ a+b = 0$
5. Ассоциативность умножения
   $(x*y)*z = x*(y*z)$
6. Коммутативность умножения
   $x*y = y*x$
7. Существует нейтральный элемент по умножению, отличный от нуля
   $\exists 1 \in X,\ 1 \neq 0,\ \forall a \in X:\ x*1 = x$
8. Существуют обратные элементы по умножению
   $\forall a \neq 0\ \ \exists b \in X:\ a*b = 1$
9. Распределительный закон (дистрибутивность)
   $x*(y+z) = x*y + x*z$

Множество, в котором определены две операции, удовлетворяющие свойствам 1-9, называется *полем*, а сами свойства - аксиомами поля.

Аксиомы порядка (конспект) (стр. 14)

Пусть X - множество. В нем задано отношение порядка, т.е. $\forall x,\ y$ известно, верно или нет, что $x \le y$. Тогда свойства:

1. $\forall x,\ y \in X$ верно, что $x \le y$ или $y \le x$
2. Если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$
3. $\forall x,\ y,\ z:\ x \ge y,\ y \ge z$, то $x \ge z$, и наоборот $x \le y,\ y \le z$, то $x \le z$
4. $\forall x,\ y,\ z,\ \ x \le y$ верно, что $x+z \le y+z$
5. $\forall x,\ y \ge 0$ верно, что $x*y \ge 0$

Поле, в котором введено отношения порядка, удовлетворяющее свойствам 1-5, называется *упорядоченным*.

Аксиома Архимеда (конспект) (стр. 16)

Для любых положительных чисел $x,\ y \in \mathbb{R}$ существует такое натуральное число n, что $nx > y$:
$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x,\ y \ge 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \ nx > y$

Упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Архимеда, называется *архимедовым*.

Аксиома Кантора о вложенных отрезках (конспект) (стр. 16)

Пусть задана последовательность вложенных отрезков: $[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset [a_3,\ b_3] \supset \dots$

Тогда существует точка, принадлежащая одновременно всем отрезкам, т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n] \neq \emptyset$

NB! Если $|b_n - a_n| \to 0$, то $\exists! c \in \mathbb{R}:\ \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n] = \{c\}$

Законы де Моргана | 2

Теорема 1. Законы де Моргана (конспект) (стр. 10)
Пусть X - множество, $\{Y_a\}_{a \in A}$ - семейство множеств. Тогда:

$$X \backslash \bigcup_{a \in A} Y_a = \bigcap_{a \in A} (X \backslash Y_a)$$

$$X \backslash \bigcap_{a \in A} Y_a = \bigcup_{a \in A} (X \backslash Y_a)$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π соответственно левую и правую части равенства (1). По определению разности соотношение $x \in \Lambda$ означает, что $x \in Y$ и x не принадлежит объединению множеств X_α. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и x не принадлежит ни одному из множеств X_α, то есть $x \in Y \setminus X_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. По определению пересечения последнее значит, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано. Соотношение (2) доказывается аналогично. $\square$

Теорема 2 (конспект) (стр. 11)
Пусть X - множество, $\{Y_a\}_{a \in A}$ - семейство множеств. Тогда:

$$X \cap \bigcup_{a \in A} Y_a = \bigcup_{a \in A} (X \cap Y_a)$$

$$X \cup \bigcap_{a \in A} Y_a = \bigcap_{a \in A} (X \cup Y_a)$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π левую и правую часть равенства (3). По определению пересечения соотношение $x \in \Lambda$ означает, что $x \in Y$ и $x \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in X_{\alpha_0}$. Другими словами, существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in Y \cap X_{\alpha_0}$. Последнее означает, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано. Соотношение (4) доказывается аналогично. $\square$

Тождество Лагранжа. Неравенство Коши-Буняковского | 3

По утверждению. Тождество Лагранжа (конспект)
$A = B = \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} U_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} V_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} U_i V_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{(i,k)\in A\times B} (U_i V_k - U_k V_i)^2$$

По следствию. Неравенство Коши-Буняковского (конспект)

$U_1 \ldots U_n,\ V_1 \ldots V_n,\ U_i,\ V_i \in \mathbb{R}:\ \left|\sum_{i=1}^{n} U_i V_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} U_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}$

Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$	4	**Аксиома Архимеда (конспект)** (стр. 16) Для любых положительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$, существует такое натуральное число n, что $nx > y$: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \ge 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ nx > y$ Упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Архимеда, называется *архимедовым*. **Теорема. Плотность множества рациональных чисел (конспект)** (стр. 27) Для любых двух вещественных чисел a и b, не равных друг другу, найдется такое рациональное число q, которое будет расположено между ними: $\forall (a, b) \subset \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q}:\ \ q \in (a, b)$. **Доказательство.** Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$, и по аксиоме Архимеда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и $$c \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b,$$ $$c > \frac{na-1+1}{n} = a,$$ то есть $c \in (a, b)$. □
Неравенство Бернулли	5	**Теорема. Неравенство Бернулли (конспект)** light: $(1+x)^n \ge 1 + nx$, при $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$. pro: $(1+x)^n \ge 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, при $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Счетные множества. Два простейших свойства	6	**По определению (конспект)** A - счетное множество, если существует $\varphi: \mathbb{N} \to A$ биекция. **NB!** Конечное множество не счетно. **Свойство 1 (Теорема 1) (конспект)** (стр. 37) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. Пусть множество A бесконечно. Тогда в нем есть элемент a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нем есть элемент a_2. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно, поэтому в нем есть элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A этот процесс не оборвется ни на каком шаге; продолжая его и далее, получим множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, которое по построению будет счетным подмножеством A. $\square$

Свойство 2 (Теорема 2) (конспект) (стр. 38)

Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно: если A счетно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B счетно.

Доказательство. Расположим элементы A в виде последовательности:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}.$$

Будем нумеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд. $\square$

Теорема 3 (конспект) (стр. 39)

Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более ч сем счетно: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - счетно.

Теорема 4 (конспект) (стр. 39)

Множество рациональных чисел счетно.

Следствие 1 из теоремы 4 (конспект) (стр. 39)

Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ счетно.

Теорема 5 (конспект) (стр. 40)

$[0, 1]$ - НЕсчетное множество..

Следствие 2 из теоремы 5 (конспект) (стр. 40)

Множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ и иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ несчетны.

Счетность множества рациональных чисел	7	**Теорема (конспект)** (стр. 39) Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство. Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \qquad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $Q_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\right\}$ счетно. По теореме 3 и $\mathbb{Q}_+ = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} Q_q$ счетно. Очевидно, что $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. Снова по теореме 3 множество

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

счетно. $\square$

Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

8

Теорема. Единственность предела (конспект) (стр. 45)
Последовательность не может иметь более одного предела:
если x_n - вещественная последовательность, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $a \neq b$. Тогда $|a - b| > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, и $|x_n - b| < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то по свойству 5 модуля из § 2 главы 1

$$|a - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

что абсурдно. $\square$

Теорема. Ограниченность сходящейся последовательности (конспект) (стр. 46)
Сходящая последовательность ограничена:
если x_n - последовательность, и $\lim x_n = a$, то x_n - ограниченная последовательность.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Взяв $\varepsilon = 1$, подберем такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $|x_n - a| < 1$. Тогда при всех $n > N$

$$|x_n| \leqslant |a| + |x_n - a| < |a| + 1.$$

Положим

$$R = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |a| + 1\};$$

тогда $|x_n| \leqslant R$ при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема о предельном переходе в неравенствах

9

Теорема (конспект) (стр. 46)

Пусть x_n, y_n - вещественные последовательности, $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \le y_n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда $a \le b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ положительно. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n,$$

что противоречит условию. $\square$

Теорема о двух городовых (Теорема о сжатой последовательности)

10

Теорема. О сжатой последовательности / О двух городовых / О двух милиционерах (конспект) (стр. 47)

Пусть x_n, y_n, z_n - вещественные последовательности, $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \le y_n \le z_n$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. Тогда предел y_n существует и равен a.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$ и $z_n < a + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε предел $\{y_n\}$ существует и равен a. $\square$

Бесконечно малая последовательность: теорема и лемма

11

По определению (конспект) (стр. 47)

Числовая последовательность называется *бесконечно малой*, если она стремится к нулю: $x_n \to 0$.

Теорема (конспект) (стр. 47)

		Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая: если x_n, y_n - вещественные последовательности, x_n - бесконечно малая, y_n - ограничена, то $x_n y_n$ - бесконечно малая. **Доказательство.** В силу ограниченности $\{y_n\}$ найдется такое $K > 0$, что $\lvert y_n\rvert \leqslant K$ при всех n. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности $\{x_n\}$ существует такой номер N, что $\lvert x_n\rvert \leqslant \frac{\varepsilon}{K}$ для всех $n > N$. Но тогда для всех $n > N$ $$\lvert x_n y_n\rvert < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$ В силу произвольности ε это и означает, что $x_n y_n \to 0$. $\square$ **Лемма (конспект):** Если x_n, y_n - бесконечно малые, то $x_n \pm y_n$ - тоже бесконечно малые.
Теорема об арифметических свойствах предела	12	**Теорема (конспект)** (стр. 48) Пусть x_n, y_n - вещественные последовательности. При этом $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда: 1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$ 2. $x_n y_n \to ab$ 3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$ 4. $\lvert x_n\rvert \to \lvert a\rvert$ 5. Пусть $\forall n \;\; y_n \neq 0$, $b \neq 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ **Доказательство** Лучше посмотреть в винограде. Там много. Стр. 48
Теорема о предельном переходе в неравенствах для случая, когда пределы лежат в R с чертой	13	
Теорема об арифметических свойствах предела в R с чертой	14	**Теорема (конспект)** Пусть x_n, y_n - вещественные последовательности. При этом $x_n \to a$, $y_n \to b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда: 1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$ 2. $x_n y_n \to ab$ 3. Пусть $\forall n \;\; y_n \neq 0$, $b \neq 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$
Счетные множества. Два простейших свойства	15	См. вопрос 6. Они эквивалентны.

Счетность множества рациональных чисел	16	**Теорема (конспект)** (стр. 39) **(эквивалентно вопросу 7)** Множество рациональных чисел счетно.
Несчетность отрезка	17	**Теорема (конспект)** (стр. 40) $[0,\ 1]$ - несчетное множество. **Доказательство.** Допустим противное: пусть отрезок $[0,1]$ счетен, то есть все числа отрезка $[0,1]$ можно расположить в виде последовательности: $$[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\}$$ Разобьем отрезок $[0,1]$ на три равных отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1 (если таких два, то все равно, какой). Далее разобьем отрезок $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ любой из них, который не содержит точки x_2. Этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, причем $x_n \notin [a_n, b_n]$ для любого n. По аксиоме о вложенных отрезках существует точка x^*, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Тем более, $x^* \in [0,1]$. Тогда $x^* = x_m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Но по построению $x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности x^* всем отрезкам $[a_n, b_n]$. $\square$
Теорема о стягивающихся отрезках	18	Говорят, что $\{[a_n,\ b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность *стягивающихся отрезков*, если $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ при всех n и $b_n - a_n \to 0$. **Теорема. О стягивающихся отрезках (стр. 54)** Пусть $\{[a_n,\ b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность стягивающихся отрезков. Тогда пересечение всех отрезков $[a_n,\ b_n]$ состоит из одной точки: $\exists c \in \mathbb{R} : \ \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n] = \{c\}$ при этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Доказательство. То, что пересечение непусто, следует из аксиомы о вложенных отрезках. Пусть $c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что $c = d$. Поскольку $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ и $a_n \leqslant d \leqslant b_n$, имеем

$$a_n - b_n \leqslant c - d \leqslant b_n - a_n.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве $0 \leqslant c - d \leqslant 0$, то есть $c = d$. Так как

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n, \qquad 0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n,$$

по теореме о сжатой последовательности $a_n \to c$ и $b_n \to c$. $\square$

Теорема о существовании супремума

19

Теорема (конспект) (стр. 55)

Всякое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет $\sup X$.

Доказательство

Большое, смотрите его на странице 56.

Лемма о свойствах супремума

20

Лемма (конспект)

1. Пусть $\emptyset \neq D \subset E \in \mathbb{R}$. Тогда $\sup D \leq \sup E$
2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha X = \{\alpha x,\ x \in X\}$. Тогда при $\alpha > 0$, $\sup(\alpha X) = \alpha \sup X$
3. $\sup(-X) = -\inf(X)$

Теорема о пределе монотонной последовательности

21

Теорема. Предел монотонной последовательности (конспект) (стр. 58)

1. Всякая возрастающая ограниченная сверху вещественная последовательность сходится
2. Всякая убывающая ограниченная снизу вещественная последовательность сходится
3. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме 2 существует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = c \in \mathbb{R}$. Докажем, что $c = \lim x_n$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению супремума найдется такой номер N, что $x_N > c - \varepsilon$. В силу возрастания последовательности при любом $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$. Снова по определению супремума $x_n \leqslant c$ при всех n. Итак, для любого $n > N$

$$c - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant c < c + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это значит, что $c = \lim x_n$.

Второе утверждение доказывается аналогично, третье следует из первых двух. □

Определение числа e, соответствующий замечательный предел	22	**По определению (конспект)** (стр. 61) Предел последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$ называют *числом Непера* или *основанием натуральных логарифмов* и обозначают буквой e: $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2,7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995\ 9574966967\ 6277240766\ 30353\ldots$
Лемма о "быстро" убывающей последовательности. Три предела	23	**По замечанию (конспект) (стр. 62)** Пусть $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$. Отсюда следует, что: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
Лемма о пределе подпоследовательности	24	**Лемма (конспект)** (стр. 63) Всякая подпоследовательность последовательности, имеющей предел, стремится к тому же пределу: если x_n - вещественная последовательность, x_{n_k} - ее подпоследовательность: $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \to a$, то $x_{n_k} \to a$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела существует такой номер N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда, если $k > N$, то по замечанию 1 и $n_k > N$, а значит, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

В случае бесконечного предела a в доказательстве следует заменить неравенства вида $|x_n - a| < \varepsilon$ на $|x_n| > E$ и т.п. или воспользоваться языком окрестностей. $\square$

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

25 **Теорема (конспект)** (стр. 64)

Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся последовательность.

Доказательство. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена, все ее члены принадлежат некоторому отрезку $[a, b]$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ ту половину отрезка $[a, b]$, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (это означает, что $x_n \in [a_1, b_1]$ для бесконечного множества индексов n); если обе половины содержат бесконечно много членов последовательности, то можно взять любую половину. Выберем такой номер n_1, что $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Далее, обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину отрезка $[a_1, b_1]$, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выберем такой номер $n_2 > n_1$, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. Этот процесс продолжим неограниченно: на шаге с номером k обозначаем через $[a_k, b_k]$ ту половину отрезка $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выбираем такой номер $n_k > n_{k-1}$, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Так мы построим последовательность стягивающихся отрезков $\{[a_k, b_k]\}$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ исходной последовательности. По теореме о стягивающихся отрезках существует такая точка c, что $a_k \to c$ и $b_k \to c$. Но так как $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, по теореме о сжатой последовательности и $x_{n_k} \to c$. $\square$

Теорема о свойствах верхнего и нижнего пределов

26 **Теорема. О верхнем и нижнем пределе последовательности (стр. 66)**

Пусть x_n - вещественная последовательность. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Верхний предел - наибольший, а нижний предел - наименьший из частичных пределов x_n
2. Предел x_n в $\overline{\mathbb{R}}$ существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. При этом $\lim x_n$ равен их общему значению.

Доказательство

Большое, смотрите его на странице 66.

Критерий Больцано-Коши для последовательностей

27

Теорема (конспект) (стр. 69)

Сходимость вещественной последовательности равносильна ее сходимости в себе.

Доказательство. 1. Пусть $\lim x_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n, m > N$

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и значит, что $\{x_n\}$ сходится в себе.

2. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. По пункту 1 леммы 4 она ограничена. По принципу выбора Больцано – Вейерштрасса из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а тогда по пункту 2 леммы 4 она сама сходится. $\square$

Эквивалентность определений Гейне и Коши

28

Теорема (конспект) (стр. 74)

Определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство

Большое, смотрите его на странице 74.

Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

29

Теорема. Единственность предела функции (стр. 75)

Функция в данной точке не может иметь более одного предела: если $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$, то $A = B$

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. По определению Гейне $f(x_n) \to A$ и $f(x_n) \to B$. В силу единственности предела последовательности $A = B$. $\square$

Теорема. Локальная ограниченность функции, имеющей предел (стр. 76)

Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$. Тогда существует такая окрестность V_a точки a, что f ограничена в $V_a \cap D$.

Доказательство. По определению предела для числа $\varepsilon = 1$ найдется такая окрестность V_a точки a, что $|f(x) - A| < 1$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Следовательно, для таких x будет $|f(x)| < |A| + 1$. Если $a \notin D$, то на этом доказательство заканчивается, так как $\dot{V}_a \cap D = V_a \cap D$. Если же $a \in D$, то

$$|f(x)| \leqslant \max\{|A| + 1, |f(a)|\}$$

для всех $x \in V_a \cap D$. □

Теорема. О стабилизации знака функции, имеющей предел (стр. 76)

Если $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$, то существует такая окрестность V_a точки a, что знаки $f(x)$ и B совпадают в $\dot{V}_a \cap D$; в частности, $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Последнее верно и в случае $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $B > 0$. Если утверждение неверно, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in \dot{V}_a(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) \leqslant 0$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. По определению предела $g(x_n) \to B$, а по теореме о предельном переходе в неравенстве $B \leqslant 0$, что противоречит условию. □

Арифметические свойства пределов	**30**	**Теорема (стр. 76)** Пусть $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$. Тогда: 1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A + B$ 2. $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} AB$ 3. $f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A - B$ 4. $\lvert f(x)\rvert \xrightarrow[x \to a]{} \lvert A\rvert$ 5. если, кроме того, $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{A}{B}$.

Доказательство. С помощью определения на языке последовательностей теорема 4 сводится к теореме 5 § 1. Докажем, например, первое утверждение. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о пределе суммы для последовательностей $f(x_n) + g(x_n) \to A + B$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и значит, что $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A + B$. При доказательстве утверждения о пределе частного следует еще учесть, что по замечанию 3 существует такая окрестность V_a, что частное $\frac{f}{g}$ определено по крайней мере на множестве $\dot{V}_a \cap D$. $\square$

Теорема о сжатой функции. Предельный переход в неравенстве

31

Теорема. О сжатой функции (стр. 78)

Пусть $f, g, h: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x \in D \backslash \{a\}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$. Тогда и $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$.

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$. Кроме того, по условию для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

По теореме о сжатой последовательности $g(x_n) \to A$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и значит, что $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$. $\square$

Теорема. Предельный переход в неравенстве (стр. 78)

Пусть $f, g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D, $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in D \backslash \{a\}$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$. Тогда $A \le B$.

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей $A \leqslant B$. $\square$

Теорема о пределе монотонной функции

32

Теорема. О пределе монотонной функции (стр. 80)

Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \subseteq (-\infty, +\infty]$, $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, a - предельная точка D_1.

1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$.

		Доказательство. Докажем первое утверждение; второе доказывается аналогично. Положим $A = \sup\limits_{x \in D_1} f(x)$. Тогда $A \in \mathbb{R}$ в силу ограниченности функции сверху. Докажем, что $f(a-) = A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению верхней грани существует такая точка $x_0 \in D_1$, что $f(x_0) > A - \varepsilon$. Но тогда для всех таких $x \in D_1$, что $x > x_0$, в силу возрастания f $$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A < A + \varepsilon.$$ Теперь положим $\delta = a - x_0$ при $a \in \mathbb{R}$ или $\Delta = \max\{x_0, 1\}$ при $a = +\infty$; тогда неравенство из определения предела выполнено для всех таких $x \in D$, что $0 < a - x < \delta$ (соответственно, $x > \Delta$). $\square$
Критерий Больцано-Коши для функций	**33**	**Теорема. Критерий Больцано-Коши для функций (стр. 81)** Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка D. Тогда существование конечно предела f в точке a равносильно следующему утверждению: для любого положительного числа ε существует такая окрестность V_a точки a, что для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ множества D, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{V}_a$, выполняется неравенство $\|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})\| < \varepsilon$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{V}_a\ \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D\ \|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})\| < \varepsilon$.

Доказательство. 1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такая окрестность V_a точки a, что $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Тогда, если $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D$, то

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| \leqslant |f(\bar{x}) - A| + |A - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε условие (3) выполнено.

2. Пусть выполнено условие (3). Докажем существование предела f в точке a на языке последовательностей. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, и докажем, что существует $\lim f(x_n) \in \mathbb{R}$. По $\varepsilon > 0$ подберем окрестность V_a из условия (3). По определению предела $\{x_n\}$ найдется такой номер N, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$; тогда $x_n \in \dot{V}_a \cap D$ для тех же n. По выбору V_a для всех $n, l > N$ будет $|f(x_n) - f(x_l)| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в себе и, значит, имеет конечный предел. Тогда в силу замечания 6 к определению предела функция f имеет конечный предел в точке a. ☐

Свойства непрерывных функций: арифметические, стабилизация знака, композиция	**34**	**стр. 89-90**
Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов	**35**	**стр. 124**
Теорема единственности асимптотического разложения	**36**	**стр. 127**
Теорема Вейерштрасса о функции непрерывной на замкнутом промежутке	**37**	**стр. 90-91**
Теорема Кантора о равномерной непрерывности	**38**	**стр. 93**
Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении	**39**	**стр. 94**

Лемма о выпуклых множествах в R	**40**	**стр. 95**
Теорема о сохранении промежутка	**41**	**стр. 95**
Теорема о разрывах и непрерывности монотонной функции	**42**	**стр. 96**
Теорема о существовании и непрерывности обратной функции	**43**	**стр. 97**
Равносильность двух определений производной. Критерий дифференцируемости	**44**	**стр. 134-135**
Дифференцирование композиции	**45**	**стр. 139**
Правила дифференцирования	**46**	**стр. 140**
Дифференцирование обратной функции	**47**	**стр. 142**
Теорема Ферма (с леммой)	**48**	**Лемма:** Пусть $f :< a;\ b >\to R$ $\quad x_0 \in< a;\ b >$ $\quad f$ – дифференцируема в точке x_0 $\quad f'(x_0) > 0$ Тогда $\exists\varepsilon > 0$: при $x \in (x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ $\quad f(x) > f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0)$ $\quad f(x) < f(x_0)$ **Доказательство:** Устремим $x \to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ $\exists\varepsilon > 0$ в $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)\backslash\{x_0\}$ $\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ $x \in (x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ $\Rightarrow$ знаменатель > 0 $\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$, т. е. $f(x) > f(x_0)$ $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0)$ $\Rightarrow$ знаменатель < 0 $\Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ **Теорема Ферма:** Пусть $f :< a;\ b >\to R$ $\quad x_0 \in< a;\ b >$: $f(x_0) = max\,f(x)$ $\quad f$ – дифференцируема в x_0 Тогда $f'(x_0) = 0$ **Доказательство:** Следует из леммы. А именно: в этой точке производная не положительная и не отрицательная, но она есть.

		Примечание: контрпример - функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Казалось бы, все сломано. Однако, нужно смотреть внимательнее: у функции нет производной в точке 0. Все по конспекту **(стр. 148)**
Теорема Ролля	**49**	**Теорема Ролля:** Пусть $f : [a; b] \to R$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$ Тогда $\exists$ точка $c \in (a;\ b) :\ f'(c) = 0$ **Доказательство:** $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b] \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\Rightarrow \exists x_1 :\ f(x_1) = max\, f(x)$ в промежутке $[a; b]$ и $\exists x_2 :\ f(x_2) = min\, f(x)$ на $[a; b]$ По теореме Ферма в $x1$ и $x2$ производная равна нулю. **Другие формулировки:** 1) С геометрической точки зрения это значит, что есть точка, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс 2) Эту формулировку дал сам Константин Петрович. “Между двумя корнями уравнения есть корень производной”. Все по конспекту **(стр. 149)**
Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной	**50**	**Теорема Лагранжа:** Пусть f – непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a;\ b)$ Тогда $\exists c \in (a;\ b) :\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ P. S. Проще запомнить это, как: “На своем пути (f(b) - f(a)) за все время пути (b - a) есть момент (c), в который тело движется со средней скоростью”. P. P. S. Геометрическая формулировка: есть точка, в которой касательная к графику параллельна отрезку ab. **Доказательство:** Она - следствие теоремы Коши при g(x)=x **Теорема Коши:** Пусть $f,\ g$ – непрерывны на $[a;\ b]$ и дифференцируемы на $(a;\ b)$ Тогда $\exists c \in (a;\ b) :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (разумеется, при $g' \neq 0$ на $[a; b]$ и $g(b) \neq g(a)$) **Доказательство:** Пусть $F(x) = f(x) - k * g(x)$ Подберем $k :\ F(a) = F(b)$ $f(a) - k * g(a) = f(b) - k * g(b)$ $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (К слову, по теореме Ролля, если $g(a) = g(b) \Rightarrow \exists c : g'(c) = 0$) Итак, $\exists c : F'(c) = 0$ (это тоже по теореме Ролля) $f'(c) - k * g'(c) = 0$

		$\frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Теорема доказана. **Следствия об оценке приращения и о пределе производной:** Все по конспектам **стр. 150(Лагранжа), стр. 151(оценка конечных приращений) и стр.152(Коши)**
Степенная функция с рациональным показателем	**51**	**Определение:** По-простому, это функция вида x^a, где $a = const$. Ниже подробности: 1) $f(x) = x$ – непрерывная, монотонная 2) $a = n$ в смысле $x^n = x * x * ... * x$ (n раз) : $R \to R \Rightarrow$ монотонна (при $x \geq 0$), непрерывна по теореме об арифм. св – ах (чего?) $x^n : [0;+\infty] \to R$; по теореме о сохранении промежутка мн – во значений x^n – тоже промежуток 3) $a =- n,\ n \in N\ \frac{1}{x^n}$ – непрерывна при $x \neq 0$ и монотонна на промежутках до и после нуля при $k \to +\infty$ $sup\ k^n = +\infty,\ inf\ k^{-n} = 0$ 4) $a = 1/n,\ n$ – нечетн. $x^n : R \to R$, т.е. мн – во значений – вся вещественная ось. $f(x)$ строго монотонна $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ обратная функция : $f_{1/n}(x) : R \to R$ n – четно. $x^n : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ строго монотонна, непрерывна на $\Rightarrow$ аналогично существует обратная функция 5) $a = p/q$(несократимая) $f_a(x) = f_{1/q}(x) \circ f_p(x)$ Свойства: 1. $x^{a+b} = x^a * x^b$ 2. $(x)^{ab} = x^{a*b}$ 3. $(xy)^a = x^a * y^b$ **стр. 100**
Теорема о свойствах показательной функции	**52**	**стр. 103-105**
Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия	**53**	**хз**
Показательная функция от произведения	**54**	**хз**
Теорема Дарбу. Следствия	**55**	**чет не нашел**
Формула Тейлора с остатком в форме Пеано	**56**	**стр. 163**
Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа	**57**	**ку ку)** **стр. 164**

Леммы о представимости функции рядом Тейлора и о дифференцировании разложений Тейлора	**58**	
Формула Тейлора для экспоненты, иррациональность числа e	**59**	**стр. 170 - 171**
Метод Ньютона	**60**	
Теорема о разложении рациональной дроби на простейшие	**61**	
Логарифм и его свойства	**62**	
Непрерывность тригонометрических функций и обратных к ним	**63**	
Замечательные пределы с участием синуса, логарифма, степенной и показательной функции	**64**	
Критерий монотонности в терминах производной	**65**	
Теорема о достаточных условиях экстремума	**66**	

Символы для вставки: ℕ ℝ ℚ ℤ ℂ ∅

МатАнализ. Определения и формулировки.

MERGE PDF с определениями и теоремами - https://goo.gl/eF6FaP
PDF с определениями (PDF этого гуглодока) - https://goo.gl/nnGaVt
PDF с теоремами - https://goo.gl/RCxfSX

Гуглодок с определениями (этот гуглодок) - https://goo.gl/hLo4I0
Гуглодок с теоремами - https://goo.gl/L7vO0b

1. Будущие результаты…
2. Пдфки:
    a. Merge, PDF, 1 MB
    b. Definitions, PDF, 555 KB
    c. Theorems, PDF, 971 KB
3. Гуглодоки
    a. Definitions, GoogleDoc
    b. Theorems, GoogleDoc
4. Громов-Виноградов - Теория, PDF, 1 MB
5. Таблица Кохася со всеми вопросами (зачем она вам, все здесь), GoogleDoc

- **Зеленый** - по конспекту/сверено
- **Синее** - по книжке Громова-Виноградова (можно поверить)
- **Оранжевое** - сомнительные додумки/сомнения по источнику
- **Черное** - по книжке/альт. источники/не ясно/статус не присвоен (тут уж как…)
- **Красное** - пора валить… в гугл

Символы для вставки: ℕ ℝ ℚ ℤ ℂ ∅

Упорядоченная пара	**1**	**НеОпределение** (стр. 11) *Упорядоченная пара* - это двухэлементное семейство $(a,\ b)$, в котором считается, что на первом месте написан элемент, занумерованный индексом 1, а на втором - индексом 2. При этом $(a,\ b) = (c,\ d)$ равносильно тому, что $a = c$ и $b = d$. Порядок элементов существенен, даже если элементы совпадают.
Декартово произведение	**2**	**Определение (конспект)** (стр. 11) Пусть X и Y - два множества. Тогда *декартовым произведением* называется множество упорядоченных пар, таких, что: $X \times Y = \{(x,\ y):\ x \in X,\ y \in Y\}$ Обобщение: $X_1 \times ... \times X_m = \{(x_1,\ ...,\ x_m):\ x_i \in X_i \text{ при всех } i = 1,\ ...,\ m\}$ Порядок сомножителей существенен.
Операции над множествами	**3**	**Определение (конспект)** (стр. 9) Пусть $\{X_a\}_{a \in A}$ - семейство множеств. Тогда: 1. *Объединение* - множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\bigcup\limits_{a \in A} X_a = \{x:\ \exists a \in A:\ x \in X_a\}$, или на примере двух множеств: $A \cup B = \{x:\ x \in A \text{ или } x \in B\}$ 2. *Пересечением* - множество всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств $\bigcap\limits_{a \in A} X_a = \{x:\ \forall a \in A:\ x \in X_a\}$, или на примере двух множеств: $A \cap B = \{x:\ x \in A \text{ и } x \in B\}$. **Определение (конспект)** (стр. 10) *Разность* множеств X и Y - множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y: $X \backslash Y = \{x:\ x \in X,\ x \notin Y\}$ Частный случай - $Y \subset X$. В таком случае разность $X \backslash Y$ называется еще *дополнением* множества Y до множества X. Дополнение X до основного множества U называется проще - *дополнением* X - и обозначается $U \backslash X$ или X^C.
Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем	**4**	**Формулировка (конспект)** (стр. 15) Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$ называется *расширенной числовой прямой*; к вещественным числам добавляются два новых символа (несобственных элемента): $-\infty$ и $+\infty$. Считают, что $\forall x \in \mathbb{R}:\ -\infty < x < +\infty$ и $-\infty < +\infty$. Полагают: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x \in \mathbb{R}$ $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,\ x \in \mathbb{R}$ $x * (+\infty) = (+\infty) * x = \begin{cases} +\infty, & x>0 \\ -\infty, & x<0 \end{cases}$ $x * (-\infty) = (-\infty) * x = \begin{cases} -\infty, & x>0 \\ +\infty, & x<0 \end{cases}$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$ $(+\infty) * (-\infty) = (-\infty) * (+\infty) = -\infty$

		Операциям $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0*(\pm\infty)$, $0*(\pm\infty)$ не приписывается никакого значения.
Подмножество в R, ограниченное сверху	**5**	**По определению (конспект)** Множество вещественных чисел $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ \ a \leq c$.
Максимальный элемент множества	**6**	**Определение (конспект)** (стр. 25) Элемент $x \in A$ называется *максимальным элементом* множества, если $\forall a \in A\ \ a \leq x$.
Последовательность	**7**	**Определение (конспект)** (стр. 29) *Последовательностью* называется отображение множества натуральных чисел в множество X: $f: \mathbb{N} \to X$. Обозначение: $n \mid \to f(n)$ или fn.
Образ и прообраз множества при отображении	**8**	**Определение (конспект)** (стр. 30) Пусть $f:\ X \to Y$, $A \subset X$ - множество. Множество $f(A) = \{f(a):\ a \in A\}$ называется *образом* множества A под действием отображения f. **Определение (конспект)** (стр. 30) Пусть $f:\ X \to Y$, $B \subset Y$ - множество. Множество $f^{-1}(B) = \{x \in X:\ f(x) \in B\}$ называется *прообразом* множества B под действием отображения f.
Инъекция, сюръекция, биекция	**9**	**Определение (конспект)** (стр. 31) Пусть $f: X \to Y$. Если для любых двух различных элементов X их образы различны, то отображение f называется *инъективным*, или *инъекцией*, или *обратимым* отображением. Т.е. “не склеивает точки”: $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Т.е. при $\forall y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения в X. **Определение (конспект)** (стр. 31) Пусть $f:\ X \to Y$. Если $\forall y \in Y\ \ \exists x \in X$ уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение в X, то отображение f называется *сюръективным*, или *сюръекцией*, или *отображением “на”* (отображением X на Y). **Определение (конспект)** (стр. 31) Пусть $f: X \to Y$. Если отображение f одновременно сюръективно и инъективно, то f называется *биективным*, или *биекцией*, или *взаимно-однозначным* соответствием. Т.е. при $\forall y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение в X.
Целая часть числа	**10**	**Определение (родная Википедия)** Целая часть $[y]$ вещественного числа y - наибольшее целое число x такое, что $x \in \mathbb{Z} \mid x \leq y$. **Определение** (конспект) [x] = max{k∈Z, k<=x}
Векторнозначная функция, ее координатные функции	**11**	**Определение (конспект)** Векторозначная функция - это: $f:\ X \to R^m$

		$x \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ При этом $y_1 = f_1(x),\ \ldots,\ y_m = f_m(x)$.
График отображения	**12**	**Определение (конспект)** (стр. 32) Пусть $f: X \to Y$. *Графиком* отображения f называется множество $\Gamma_f \subset X \times Y = \{(x, y): y = f(x), x \in X, y \in Y\}$.
Композиция отображений	**13**	**Определение (конспект)** (стр. 33) Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Отображение $h: X \to Z$, действующее по правилу $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$, называется *композицией* отражений f и g, и обозначается $g \circ f$.
Сужение и продолжение отображений	**14**	**Определение (конспект)** (стр. 34) Пусть $f: X \to Y$, $A \subset X$. Отображение $A \to Y$, которое каждому элементу x множества A сопоставляет значение $f(x)$, называется *сужением* отображения f на множество A и обозначается $f\vert_A$. **Определение (конспект)** (стр. 34) Пусть $f: X \to Y$, $X \subset B$. Отображение $F: B \to Y$, называется *продолжением*, или *расширением* отображения f на множестве B, если $\forall x \in X \subset B: F(x) = f(x)$.
Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)	**15**	**Определение (конспект)** (стр. 42) Пусть x_n - вещественная последовательность. Число $a \in \mathbb{R}$ называют *пределом последовательности* x_n и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $\vert x_n - a\vert < \varepsilon$ (т.е. последовательность сходится): $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N\ \ \vert x_n - a\vert < \varepsilon$.
Окрестность точки, проколотая окрестность	**16**	**Определение (конспект)** Пусть $\varepsilon > 0$. ε*-окрестностью точки* a называется множество точек, удаленных от a менее чем на ε: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x: \vert x - a\vert < \varepsilon\}$. **Определение (конспект)** (стр. 70) *Проколотой окрестностью* точки a называется множество $\dot{V}_a = V_a \backslash \{a\}$ Таким образом, точка a называется предельной точкой множества D, если любая проколотая окрестность точки a имеет с D непустое пересечение.
Предел последовательности (определение на языке окрестностей)	**17**	**Определение (конспект)** Число a называют пределом последовательности, если: $\forall U(a)\ \exists N\ \forall n > N\ x_n \in U(a)$

Последовательность, сходящаяся к бесконечности

18

Определение (конспект) (стр. 49)

Говорят, что вещественная последовательность x_n стремится к:

1. *плюс бесконечности*, и пишут:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
   если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $x_n > E$:
   $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > N\ \ x_n > E$
2. *минус бесконечности*, и пишут:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
   если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $x_n < -E$:
   $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > N\ \ x_n < -E$
3. *бесконечности (бесконечности неопределенного знака)*, и пишут:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
   если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > E$:
   $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > N\ \ |x_n| > E$.

Ограниченное множество, ограниченная последовательность

19

Определение (конспект) (стр. 25)

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $|x| < M$ для всех $x \in E$.

Определение (конспект) (стр. 45)

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если оно ограничено и сверху и снизу, т.е. множество ее значений ограничено:

$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |x_n| \le M$.

Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

20

Определение (конспект) (стр. 25)

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $x \le M$ для всех $x \in E$. Число M при этом называется *верхней границей* множества E.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $x \ge m$ для всех $x \in E$. Число m при этом называется *нижней границей* множества E.

Определение (конспект) (стр. 55)

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \ne \emptyset$, E ограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множеств E называется *супремумом* множества E и обозначается $\sup E$.

Техническое определение:

$$M = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \le M \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E:\ M - \varepsilon < x \le M \end{cases}.$$

Определение (конспект) (стр. 55)

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \ne \emptyset$, E ограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множеств E называется *инфинумом* множества E и обозначается $\inf E$.

		Техническое определение: $m = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E \quad x \geq m \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in E\colon\ m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}.$
Техническое описание супремума	**21**	**Определение (конспект)** (стр. 55) $M = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E \quad x \leq M \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in E\colon\ M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}.$
Частичный предел	**22**	**Определение (конспект)** (стр. 65) Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* последовательности x_n, если существует подпоследовательность x_{n_k}, стремящаяся к a: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.
Верхний и нижний пределы	**23**	**Определение (конспект)** (стр. 65) Пусть вещественная последовательность x_n ограничена сверху. Величина $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_k$ называется *верхним пределом* последовательности x_n. Пусть вещественная последовательность ограничена снизу. Величина $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_k$ называется *нижним пределом* последовательности x_n.
Техническое описание верхнего предела	**24**	**По замечанию (стр. 68)** $M = \varlimsup x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n > N\ \ x_n < M + \varepsilon \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, N\ \exists\, n > N\ \ x_n > M - \varepsilon \end{cases}$
Последовательность Коши	**25**	**Определение. Последовательность Коши / Фундаментальная последовательность / Последовательность, сходящаяся в себе (конспект)** x_n - последовательность Коши, если выполняется условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N\ \ \lvert x_m - x_n \rvert < \varepsilon$
Определения предела (3 шт)	**26**	**Определение (стр. 71)** Пусть $f\colon\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ - предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$. Точку A называют *пределом* функции f в точке a и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$ если выполняется одно из следующих утверждений: **Определение 1. На ε-языке, или по Коши (стр. 71)** Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $\lvert x - a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \setminus \{a\}:\ \lvert x - a \rvert < \delta\ \ \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

		Определение 2. На языке окрестностей (стр. 71) Для любой окрестности V_A точки A существует такая окрестность V_a точки a, что образ пересечения проколотой окрестности $\dot{V}_a$ со множеством D при отображении f содержится в окрестности V_A: $\forall V_A\ \exists V_a\ \ f(\dot{V}_a \cap D) \subset V_A$. **Определение 3. На языке последовательностей, или по Гейне (стр. 71)** Для любой последовательности x_n точек множество точек D, отличных от a, стремящейся к a, последовательность $f(x_n)$ стремится к A: $\forall x_n\ \ x_n \in D \backslash \{a\},\ x_n \to a\ \ f(x_n) \to A$.
Предельная точка множества	27	**Определение (стр. 69)** Пусть $a \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Точка a называется *предельной точкой* или *точкой сгущения* множества D, если в любой окрестности точки a найдется точка множества D, отличная от a.
Предел по множеству	28	**Определение (стр. 79)** Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_1 \subset D$, a - предельная точка D_1. Предел $\lim\limits_{x \to a} f\vert_{D_1}(x)$ называется *пределом* функции f в точке a *по множеству* D_1.
Разные случаи определения предела функции по Коши (a, A - конечные или бесконечные)	29	**НеОпределение** Для $a,\ A \subset \overline{\mathbb{R}}$ верно, что: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X: \lvert x \rvert > \delta \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X: x > \delta \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X: x < -\delta \Rightarrow \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X:\ \lvert x - a \rvert < \delta\ \ \lvert f(x) \rvert > \varepsilon$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X:\ \lvert x - a \rvert < \delta\ \ f(x) > \varepsilon$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X:\ \lvert x - a \rvert < \delta\ \ f(x) < -\varepsilon$
Односторонние пределы	30	**Определение (стр. 79)** Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ 1. Если a - предельная точка множества $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, то предел функции f в точке a по множеству D_1 называется *левосторонним пределом* функции f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$. 2. Если a - предельная точка множества $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, то предел функции f в точке a по множеству D_2 называется *правосторонним пределом* функции f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.
Определения непрерывной функции (4 шт)	31	**Определение (стр. 82)** Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняется одно из следующих утверждений. **Определение 1 (стр. 82)**

		Предел функции f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$. Это определение применимо, если x_0 - предельная точка D. **Определение 2. На ε-языке, или по Коши (стр. 82)** Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, удовлетворяющих неравенству $\lvert x-x_0\rvert<\delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D:\ \lvert x-x_0\rvert<\delta\ \lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$. **Определение 3. На языке окрестностей (стр. 83)** Для любой окрестности $V_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что образ пересечения окрестности V_{x_0} с множеством D содержится в окрестности $V_{f(x_0)}$: $\forall V_{f(x_0)}\ \exists V_{x_0}\ f(V_{x_0}\cap D)\subset V_{f(x_0)}$. **Определение 4. На языке последовательностей, или по Гейне (стр. 83)** Для любой последовательности x_n точек множества D, стремящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0)$: $\forall x_n:\ x_n\in D,\ x_n\to x_0\ f(x_n)\to f(x_0)$. **Определение 5 (стр. 83)** Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\Delta y \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$. Здесь $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.
Разрывы первого и второго рода	**32**	**Определение (стр. 82)** Пусть $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$. Если функция f не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что f *разрывна* (терпит разрыв, испытывает разрыв) в точке x_0, а точку x_0 называют *точкой разрыва* функции f. Если существуют конечные пределы $f(x_0-)$ и $f(x_0+)$, но не все три числа $f(x_0-)$, $f(x_0+)$, $f(x_0)$ равны между собой, то точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода* функции f. Разрыв первого рода еще называют *скачком*. В противном случае, то есть если хотя бы один из односторонних пределов в точке разрыва x_0 бесконечен или вовсе не существует, точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода* функции f.
Непрерывность слева	**33**	**Определение (стр. 82)** Пусть $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$. Если сужение функции f на множество $E_1=D\cap(-\infty,x_0]$ ($E_2=D\cap[x_0,+\infty)$) непрерывно в точке x_0, то говорят, что функция f *непрерывна слева* (*справа*) в точке x_0.
О большое	**34**	**Определение (стр. 120)** Пусть $f,g:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 - предельная точка D и существуют функция $\varphi:D\to\mathbb{R}$ и окрестность $\dot{V}_{x_0}\cap D$. Если φ ограничена на $\dot{V}_{x_0}\cap D$, то говорят, что функция f *ограничена по сравнению* с g при $x\to x_0$, и пишут $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.
О маленькое	**35**	**Определение (стр. 120)** Пусть $f,g:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 - предельная точка D и существуют функция $\varphi:D\to\mathbb{R}$ и окрестность $\dot{V}_{x_0}\cap D$. Если $\varphi(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$, то говорят, что функция f - *бесконечно малая по сравнению* с g при $x\to x_0$, и пишут

		$f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.
Эквивалентные функции	36	**Определение (стр. 120)** Пусть $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка D и существуют функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ и окрестность $\dot{V}_{x_0} \cap D$. Если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$, то говорят, что функции f и g *эквивалентны* или *асимптотически равны* при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.
Асимптотически равные (сравнимые) функции	37	**Определение выше, плюс** **Определение (стр. 121)** Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ (при $x \to x_0$) или $x \in D$), то говорят, что функции f и g *сравнимы* (при $x \to x_0$ или $x \in D$ соответственно), и пишут $f \asymp g$.
Асимптотическое разложение	38	**стр. 127 (наверху до теоремы)** что-то я не пойму.. чистого определения там нет
Наклонная асимптота графика	39	**Определение (стр. 129)** Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется *наклонной асимптотой* функции (графика функции) f при $x \to +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$, $x \to +\infty$.
Равномерная непрерывность	40	**Определение (стр. 92)** Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если только для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ множества D, удовлетворяющих неравенству $\lvert \bar{x} - \bar{\bar{x}} \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}}) \rvert < \varepsilon$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D : \ \lvert \bar{x} - \bar{\bar{x}} \rvert < \delta \quad \lvert f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}}) \rvert < \varepsilon$.
Функция, дифференцируемая в точке	41	**Определение (стр. 133)** Функция f называется *дифференцируемой в точке* a, если существует такое число k, что $f(x) = f(a) + k(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a)$. Коэффициент k называется *производной* f *в точке* a, и обозначается $f'(a)$.
Производная	42	**Определение выше**
Левосторонняя и правосторонняя производные	43	**НеОпределение (стр. 136)** Обозначим $f'_{\pm}(a) = \lim\limits_{x \to a\pm} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Если $f'_{-}(a)$ и $f'_{+}(a)$ существуют, то они называются соответственно левой и правой производными f в точке a.

Касательная прямая к графику функции	**44**	**НеОпределение (стр. 134)** Прямая $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ называется *касательной* к графику f в точке a.
Показательная функция	**45**	**Определение (стр. 101)** Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Положим $a^x = \lim\limits_{r \to x} a^r\vert_{\mathbb{Q}}$. При $a > 0$, $a \neq 1$ функция $\exp_a$, действующая по формуле $\exp_a x = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ называется *показательной функцией с основанием* a.
Производная n-го порядка	**46**	**Определение (стр. 158)** Пусть $a \in E_n$. Число $(f^{(n-1)})'(a)$ называется n*-й производной* f в точке a и обозначается $f^{(n)}(a)$, а f называется n *раз дифференцируемой в точке* a. Функция $f^{(n)}$, определенная на E_n соотношением $x \mapsto f^{(n)}(x)$, называется n*-й производной* f.
Многочлен Тейлора n-го порядка	**47**	**Определение (стр. 131)** Многочлен p степени не выше n, удовлетворяющий условию $p(a) = f(a)$ и $f(x) = p(x) + o((x-a)^n)$, $x \to a$, называется *многочленом Тейлора функции* f *порядка* n *в точке* a и обозначается $T_{a,n} f$.
Классы C^n(E)	**48**	**Определение** Множество функций, определенных и n раз дифференцируемых на E.
Разложения Тейлора основных элементарных функций	**49**	**НеОпределение (стр. 166)** Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. При $x \to 0$ 1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ 2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ 3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ 4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ 5. $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Положим $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1) * \cdots * (\alpha-k+1)}{k!}$. Тогда:

		a. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^{\ k} x^k + o(x^n) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)*\cdots*(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
Локальный максимум, минимум, экстремум	**50**	**Определение (стр. 174)** Предположим, что $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. 1. Пусть существует $\delta > 0$. Если при всех $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \cap E$ выполняется неравенство: a. $f(x) \geq f(a)$, тогда a называется *точкой минимума* f. b. $f(x) \leq f(a)$, тогда a называется *точкой максимума* f. 2. Пусть существует $\delta > 0$. Если при всех $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \cap E \backslash \{a\}$ выполняется неравенство: a. $f(x) > f(a)$, тогда a называется *точкой строгого минимума* f. b. $f(x) < f(a)$, тогда a называется *точкой строгого максимума* f. 3. Если a является точкой минимума или максимума функции f, то a называется *точкой экстремума* f.

Символы для вставки: $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{C}$ $\emptyset$