Типовой расчет по алгебре за четвертый модуль
для студентов групп 1536, 1537,1538, 1539, 1742

I. Автоморфизм $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей **A.**

1) Найти спектр $\sigma(A)$ автоморфизма A;
2) Найти собственные векторы автоморфизма A и доказать, что A является оператором скалярного типа;
3) Найти собственные подпространства автоморфизма A;
4) Привести матрицу **A** автоморфизма A к диагональному виду, при этом указать матрицу **T** перехода к новому базису;
5) Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей $\mathbf{T}$), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе действительно диагональный;
6) Написать выражения для спектральных проекторов автоморфизма A, а также записать вид спектральной теоремы для него;
7) Вычислить указанные функции от оператора A: $f_1(A) = \cos^2 A$; $f_2(A) = \log_2 A$.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & -7 & 13 \end{pmatrix}$ 2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 8 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 15 \\ 0 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ 6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$ 10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 13 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & -11 \end{pmatrix}$ 12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ 14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 8 \\ 0 & -14 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & -9 & 11 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & -12 & -1 \end{pmatrix}$ 20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

II. Автоморфизм $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей **A.**

1. Найти спектр $\sigma(A)$ автоморфизма A;
2. Найти собственные векторы автоморфизма A и доказать, что A <u>не</u> является оператором скалярного типа;
3. Найти Жорданов (канонический) базис автоморфизма A;
4. Привести матрицу **A** автоморфизма A к Жордановой (канонической) форме, при этом указать матрицу $\mathbf{T}$ перехода к новому базису;
5. Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей $\mathbf{T}$), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе имеет именно ту Жорданову форму, которая указана в пункте 4;
6. Указать кратности (полную, алгебраическую и спектральную каждого собственного значения оператора A);
7. Написать выражения для характеристического и минимального полиномов автоморфизма A.
8. Вычислить следующие функции автоморфизма A**:** $f_1(\mathbf{A}) = \cos(\mathbf{A})$; $f_2(\mathbf{A}) = 3^{\mathbf{A}}$

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}5 & 0{,}75 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ -1{,}8 & -0{,}4 & 0{,}6 \\ 3{,}6 & -1{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3{,}4 & -0{,}2 \\ 2 & 0{,}8 & 2{,}6 \end{pmatrix}$ 4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 10 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}$ 8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6{,}5 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 6 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 8{,}5 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -4 & -6 & 6 \\ -4{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ 12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & -2{,}75 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ 14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2{,}5 & -6{,}5 & 3{,}5 \\ -9{,}5 & -10{,}5 & 7{,}5 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3,25 & 0,25 & 0,5\\ -0,25 & -2,75 & 0,5\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ 16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3,25 & -0,25 & 0,25\\ 1 & -3 & 0\\ 0,75 & -0,25 & -2,75\end{pmatrix}$

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-12 & 1 & 7\\ -8 & -5 & 8\\ -15 & 1 & 10\end{pmatrix}$ 18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ 0,5 & -3 & 0,5\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -4\\ 3 & 5 & -6\\ -0,5 & 0,5 & 3\end{pmatrix}$

III. Вещественное евклидово пространство X реализовано как $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением. Подпространство L евклидова пространства X задано как линейная оболочка векторов a_1, a_2, a_3. Задан также фиксированный вектор x. Найти ортогональную проекцию x_L вектора x на подпространство L и ортогональную составляющую x_M этого же вектора.

Решение задачи получить двумя способами:

Первый способ.

1. Найти ортонормированный базис подпространства L;
2. Написать явный вид ортогонального проектора $\mathbf{P}_L$ на подпространство L;
3. Вычислить с помощью $\mathbf{P}_L$ ортогональную проекцию x_L, а затем и x_M (как разность $x_M = x - x_L$)

Второй способ.

1. Найти неортонормированный базис подпространства L (анализируя структуру L как линейной оболочки векторов a_1, a_2, a_3);
2. С помощью представления $x = x_L + x_M$ (где x_L разложено по базису L), составить и решить систему линейных уравнений для определения коэффициентов разложения x_L по базису L.

1. $a_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\\-2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\\-3\end{pmatrix}$

2. $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\\2\end{pmatrix}$

3. $a_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\\-3\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

4. $a_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\3\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\\-2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\1\\3\end{pmatrix}$

5. $a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$

6. $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\\2\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-4\\-5\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\3\\5\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\5\\7\end{pmatrix}$

7. $a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\3\\2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

8. $a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\\3\end{pmatrix}$

9. $a_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\\3\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\\0\\-6\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\\1\end{pmatrix}$

10. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

11. $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

13. $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

14. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

15. $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

16. $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

18. $a_1=\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\\-4\\-7\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\\-3\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\5\\2\end{pmatrix}$

19. $a_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-2\\4\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\\2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$

20. $a_1=\begin{pmatrix}3\\5\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\3\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$

IV. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Указать матрицу перехода к новому базису (ортогональную), вид уравнения поверхности в новом базисе. Сделать рисунок, интерпретируя ортогональное преобразование координат как некоторый поворот системы координат в $\mathbb{R}^3$.

1. $x^2+4xy+y^2+2z^2-6=0$
2. $3x^2-2yz=0$
3. $2x^2+4y^2+2z^2+2xz-12=0$
4. $x^2-3y^2-2yz-3z^2-6=0$
5. $2x^2-6xy+2y^2+z^2=0$
6. $3x^2-2y^2-2yz-2z^2-12=0$
7. $2x^2-3y^2+2z^2+2xz+36=0$
8. $x^2+4xy+y^2-2z^2=0$
9. $6y^2-4xz=0$
10. $-x^2+2y^2+2yz+2z^2+10=0$
11. $x^2+4xy+y^2-2z^2+12=0$
12. $5x^2-2y^2-2yz-2z^2=0$
13. $2x^2-6xy+2y^2+z^2-25=0$
14. $4x^2+2y^2+2yz+2z^2-16=0$
15. $x^2+4xy+y^2-2z^2-12=0$
16. $2x^2-2y^2-2yz-2z^2+1=0$
17. $x^2+y^2-6yz+z^2=0$
18. $x^2+4xy+y^2-2z^2+12=0$

19. $2x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 - 10 = 0$

20. $x^2 - y^2 - yz - z^2 = 0$