

Лабораторная работа

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

Изучение основных характеристик свободных затухающих колебаний.

Требуемое оборудование

1. Блок генератора напряжений ГН1.
2. Осциллограф ОЦЛ2.
3. Стенд с объектом исследования СЗ-ЭМ01.
4. Проводники Ш4/Ш2 (4 шт), Ш2/Ш2 (3 шт), 2Ш4/BNC (2 шт).

Краткое теоретическое введение

В цепи, содержащей катушку индуктивности и конденсатор, могут возникать электромагнитные колебания. Такую цепь называют колебательным контуром. Выясним, каким образом в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания.

Обозначим полное электрическое сопротивление контура R , индуктивность катушки L , ёмкость конденсатора C (см. рис 1). Пусть вначале правая обкладка конденсатора (см. рис 1а) заряжена положительно, а левая – отрицательно. При этом вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. Замкнём ключ, конденсатор начнёт разряжаться, и через катушку потечёт ток I (см. рис 1б).

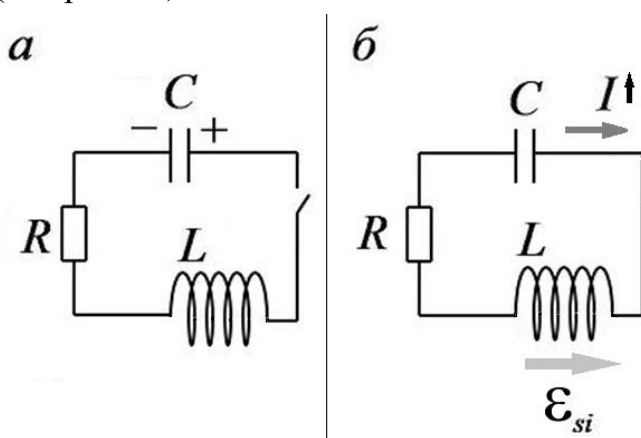


Рис. 1. Начало свободных затухающих колебаний в контуре

По мере разряда конденсатора и возрастания силы тока в контуре энергия электрического поля конденсатора будет превращаться в энергию магнитного поля катушки и в джоулево тепло на активном сопротивлении. Возникающая в

катушке при нарастании тока ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} будет тормозить рост тока. Предположим, что сопротивление R достаточно мало, чтобы выделившееся при разрядке конденсатора количество теплоты было невелико по сравнению с первоначальной энергией конденсатора. Процесс нарастания тока закончится, когда конденсатор полностью разрядится, а ток в цепи достигнет максимума. В этот момент вся энергия контура будет сосредоточена в магнитном поле катушки. С этого момента ток в цепи, не меняя направления, начнёт убывать. Однако, он прекратится не сразу, его будет поддерживать ЭДС самоиндукции, которая поменяет знак после смены возрастания тока на его убывание. Ток будет перезаряжать конденсатор: на левой обкладке будет накапливаться положительный заряд, на правой – отрицательный. Возрастающее электрическое поле будет уменьшать силу тока. Наконец, ток прекратится, а заряд на конденсаторе достигнет максимума. С этого момента конденсатор опять начнёт разряжаться, ток потечёт в направлении обратном к изображенному на рис.1б и т.д. – процесс будет многократно повторяться.

В ходе процесса заряд на обкладках конденсатора и ток через катушку будут совершать колебания вблизи нулевых значений, а энергии электрического и магнитного полей будут переходить друг в друга. При отсутствии сопротивления проводников в контуре совершались бы строго периодические незатухающие колебания. Но, поскольку сопротивление проводников R отлично от нуля, на каждом периоде описанного колебательного процесса будет происходить преобразование энергии электромагнитного поля в джоулеву теплоту и амплитуды колебаний заряда и тока будут постепенно уменьшаться, стремясь к нулю.

Найдём уравнение, которому подчиняется зависимость заряда конденсатора от времени. Выберем положительно направление тока как указано на рис. 2. и направление обхода контура по часовой стрелке.

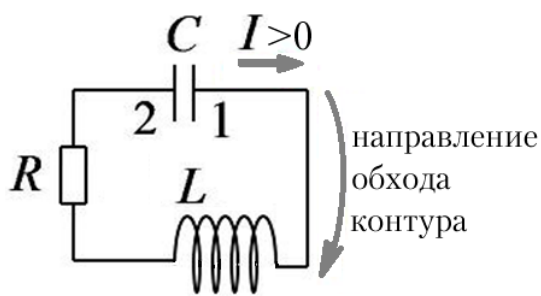


Рис 2. Выбор положительного направления тока и направления обхода контура.

Обозначим q заряд той обкладки конденсатора, которая заряжается при токе, текущем в выбранном положительном направлении (на рис. 2 – левая обкладка). Тогда ток в контуре связан с зарядом q формулой

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1)$$

По закону Ома для неоднородного участка цепи

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{si}. \quad (2)$$

Здесь φ_1 и φ_2 электрические потенциалы правой и левой обкладок конденсатора, соответственно, \mathcal{E}_{si} – ЭДС самоиндукции в катушке. Разность потенциалов связана с введенным выше зарядом q конденсатора соотношением

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}. \quad (3)$$

Для ЭДС самоиндукции имеем

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Учитывая выражения (1), (3) и (4) закон Ома (2) преобразуем к виду:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (5)$$

Это уравнение для заряда на конденсаторе в колебательном контуре – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Найдя с помощью этого уравнения зависимость $q(t)$, мы сможем вычислить для любого момента времени напряжение U_C на конденсаторе:

$$U_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} \quad (6)$$

и силу тока I в контуре по формуле (1).

Уравнение (5) принято записывать в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (7)$$

где величина

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (8)$$

называется коэффициентом затухания, а

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9)$$

собственная циклическая частота незатухающих колебаний контура.

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при малом затухании (т.е. при $\beta \ll \omega_0$) общее решение уравнения (7) имеет вид

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (10)$$

Величину ω в этой формуле определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (11)$$

Её принято называть собственной циклической частотой затухающих колебаний контура. Постоянные q_0 и φ_0 в уравнении (10) определяются из начальных условий, например, из значения тока и напряжения на конденсаторе в начальный момент времени. Величина

$$q_m = q_0 e^{-\beta t} \quad (12)$$

называется амплитудой затухающих колебаний заряда.

График функции (10) показан на рисунке 3. Видно, что это функция не периодическая.

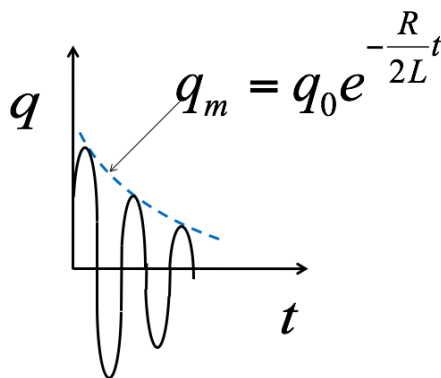


Рис 3. Зависимость заряда конденсатора от времени.

Тем не менее, величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (13)$$

называют периодом затухающих колебаний.

Для изучаемого колебательного контура выражение (13) с учетом определений (8) и (9) принимает вид

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (14)$$

Из этой формулы видно, что если сопротивление цепи равно

$$R_{\text{кр}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (15)$$

то период (14) обращается в бесконечность. Это сопротивление называется критическим сопротивлением контура.

Исходя из зависимости (10) заряда конденсатора от времени, можно определить напряжение (6) на конденсаторе и ток (1) в катушке:

$$U_c(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } U_0 = \frac{q_0}{C}; \quad (16)$$

$$I(t) = -q_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0)], \quad (17)$$

Выражение в квадратных скобках в последнем уравнении можно преобразовать к одному косинусу. Для этого умножим и разделим выражение в квадратных скобках $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$ и введём угол δ такой, что

$$\cos \delta = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \delta = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (18)$$

С учетом этих соотношений преобразуем выражение (17) к виду

$$I(t) = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta). \quad (19)$$

Из соотношений (18) следует, что угол δ лежит во второй четверти: $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$. Это означает, что при наличии активного сопротивления R ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе более, чем на $\frac{\pi}{2}$.

При $R=0$ выполнялось бы соотношение $\delta = \frac{\pi}{2}$. Графики зависимостей от времени напряжения (16) и тока (19) показаны на рис 4.

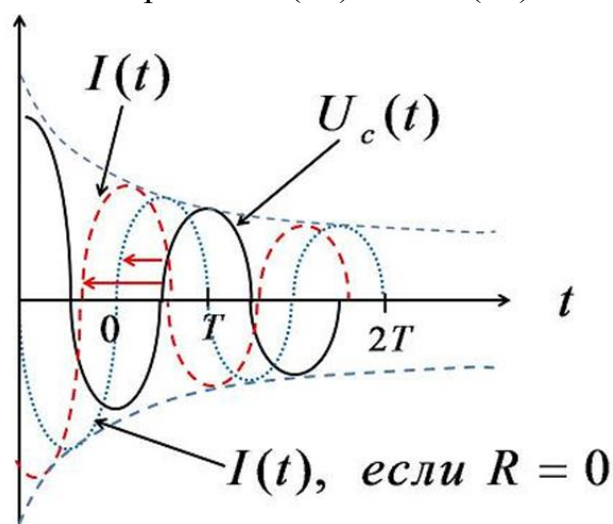


Рис 4. Зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени. Горизонтальные стрелки изображают временной сдвиг $\Delta t = \frac{\delta}{\omega}$ между колебаниями тока и напряжения

Кроме величин ω_0 , ω и β для характеристики затухающих колебаний в контуре используют следующие величины: время релаксации τ , логарифмический декремент затухания λ , добротность контура Q .

Время релаксации τ – время, за которое амплитуда колебаний (12) уменьшается в e раз. Из (12) и (8) получаем

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}. \quad (20)$$

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения двух значений амплитуды (12), разделённых периодом колебаний T :

$$\lambda = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)}. \quad (21)$$

Подставляя сюда выражение (12), в соответствии с определениями (8) и (14) находим выражение для логарифмического декремента через параметры элементов контура:

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{L} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (22)$$

Интерес представляет зависимость логарифмического декремента от активного сопротивления R контура при фиксированных ёмкости C и индуктивности L . Если затухание мало, т.е. $\beta \ll \omega_0$ или с учетом (8) и (9)

$\frac{R}{2L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то зависимость (22) логарифмического декремента от сопротивления является практически линейной:

$$\lambda \approx \pi R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (23)$$

Очевидно, что при приближении сопротивления к критическому значению (15) логарифмический декремент обращается в бесконечность. На рисунке 5 изображена зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура.

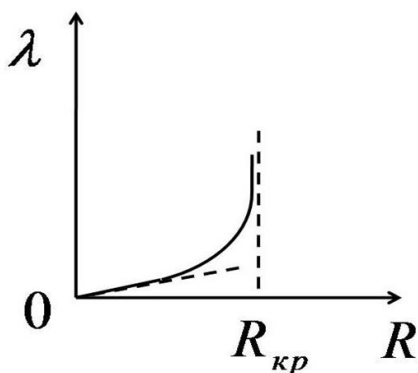


Рис 5. Зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура

Согласно формулам (20) и (22), логарифмический декремент можно представить, как

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (24)$$

где N_e число колебаний за время релаксации, т.е., напомним, за время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз.

При экспериментальном измерении логарифмического декремента затухания измеряют два значения напряжения на конденсаторе: U_i и U_{i+n} , отвечающие максимумам зависимости $U_C(t)$, разделенных количеством n периодов. С использованием этих значений напряжения, учитывая формулы (6) и (12), из (21) получаем

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{U_i}{U_{i+n}}. \quad (25)$$

Добротность контура с точностью до коэффициента 2π характеризует отношение энергии $W(t)$, запасенной в контуре, к потере энергии за период и определяется следующим соотношением

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (26)$$

Поскольку энергия конденсатора $W = q^2/2C$ и, следовательно, электромагнитная энергия, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды (12), для добротности контура при малом затухании получаем выражение

$$Q = 2\pi \frac{q_m^2(t)}{q_m^2(t) - q_m^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (27)$$

При малом затухании показатель экспоненты в знаменателе второй дроби мал. Разложим экспоненту в ряд и воспользуемся формулой (22), тогда

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (28)$$

В случае малого затухания для логарифмического декремента справедлива формула (23) и выражение (28) преобразуется к виду

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29)$$

Порядок выполнения работы

1. Спишите значения индуктивности L катушки и емкостей конденсаторов C_1, C_2, C_3, C_4 с измерительного стенда.

2. Соберите схему, изображенную на рисунке 6. В качестве индуктивности используйте катушку L , в качестве ёмкости – конденсатор C_1 . Роль добавочного сопротивления в контуре будет играть магазин сопротивлений R_M . Сигнал в виде прямоугольных импульсов с генератора переменных напряжений ГН-1 подайте в колебательный контур. Установите на генераторе частоту 40 Гц. Сигнал с конденсатора подайте на вход канала 1 осциллографа ОЦЛ2. Выход синусоидального сигнала генератора ГН-1 соедините с сигнальным входом синхронизации осциллографа. Включите осциллограф в режим внешней синхронизации. Получите на экране устойчивую картину затухающих колебаний. Обратите внимание, что регулировка амплитуды выходного синусоидального напряжения генератора ГН-1 позволяет смещать наблюдаемую осциллограмму по горизонтали.

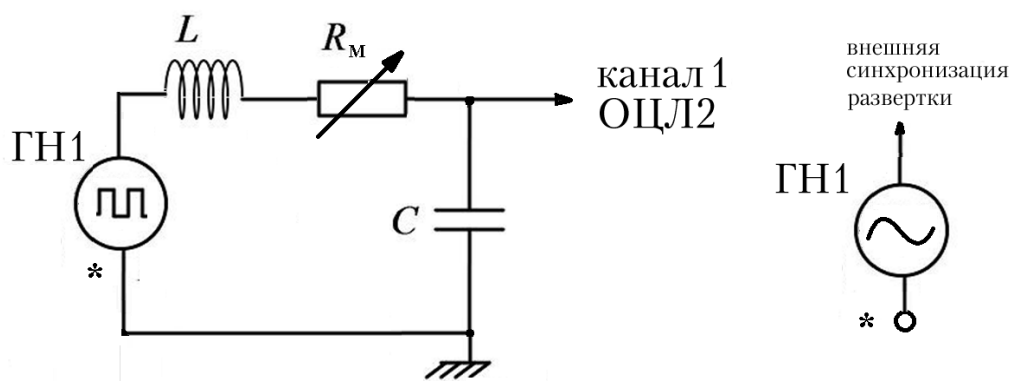


Рис 6. Рабочая схема для изучения затухающих колебаний напряжения на конденсаторе

3. При разных сопротивлениях магазина R_M измерьте период колебаний в контуре и значения $2U_i$, $2U_{i+n}$ удвоенной амплитуды (размаха) колебаний напряжения на конденсаторе для двух моментов времени разделённых количеством периодов $n = 1-5$. На рисунке 7 показана примерная осциллограмма напряжения на конденсаторе и измеряемые напряжения для случая $n = 3$. Для большей точности измерение периода необходимо проводить с минимально возможным масштабом по горизонтальной оси. При измерении величин $2U_i$ и $2U_{i+n}$ в одном масштабе по вертикальной оси их можно записывать в делениях экрана, не переводя в вольты, поскольку в дальнейших расчетах используется отношение напряжений. При этом желательно выбирать максимальное

значение n , но не слишком маленькое значение второго напряжения: $2U_{i+n}(\text{дел.}) \geq 2$. Измерения проведите при сопротивлении магазина R_M в диапазоне от 0 до 100 Ом с шагом 10 Ом и при значениях 200, 300, 400 Ом. Заполните первые пять столбцов таблицы 1.

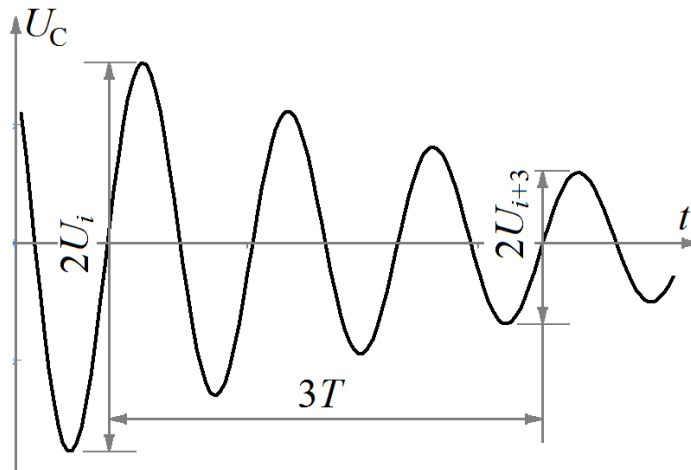


Рис 7. Осциллограмма затухающих колебаний напряжения на конденсаторе при измерении удвоенной амплитуды для моментов времени, разделенных тремя периодами

По формуле (25) вычислите значения логарифмического декремента λ , заполните соответствующие столбцы таблицы 1

Таблица 1.

R_M , Ом	T , мс	$2U_i$, дел	$2U_{i+n}$, дел	n	λ	Q	R , Ом	L , мГн

4. Постройте график зависимости логарифмического декремента λ от сопротивления магазина R_M . По начальному участку графика ($R_M \leq 100 \text{ Ом}$) найдите наклон и отсечку аппроксимирующей прямой и рассчитайте абсциссу точки пересечения этой прямой с осью абсцисс. Этой точке отвечало бы нулевое значение логарифмического декремента и в соответствии с формулой (22) — нулевое полное сопротивление R контура. Полное сопротивление складывается из собственного сопротивления контура R_0 и сопротивления магазина R_M :

$$R = R_M + R_0. \quad (30)$$

Поэтому абсцисса $R_M|_{\lambda=0}$ точки $\lambda = 0$ позволяет определить собственное сопротивление контура:

$$R_0 = -R_M|_{\lambda=0}. \quad (31)$$

5. Используя формулы (30) и (23) вычислите значения полного сопротивления R и индуктивности L , занесите результаты в таблицу 1. Вычисления индуктивности проведите только для малых значений

сопротивления магазина: $R_M \leq 100 \text{ Ом}$. Усредните полученные значения L и оцените погрешность среднего значения $L_{\text{ср}}$. Сравните среднее значение индуктивности с данными измерительного стенда.

6. По формулам (14) и (30) вычислите период колебаний в контуре при сопротивлении магазина 0, 200 и 400 Ом. Результаты сравните с измеренными значениями.
7. Вычислите по формуле

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\lambda}} \quad (32)$$

добротность контура Q при различных сопротивлениях магазина. Результаты занесите в таблицу 1. Постройте график зависимости добротности от сопротивления контура. Для 1–2 малых сопротивлений вычислите добротность по формуле (29). Сравните полученные результаты.

8. Увеличивая сопротивление магазина, подберите его значение, при котором исчезает периодичность процесса разряда конденсатор. Используя полученное таким образом значение с учетом формулы (30) оцените критическое сопротивление контура. Вычислите критическое сопротивление по формуле (15). Сравните полученные значения критического сопротивления.
9. Установите нулевое сопротивление магазина. Последовательно включая в качестве ёмкости контура конденсаторы C_1 , C_2 , C_3 и C_4 измерьте период $T_{\text{эксп}}$ колебаний в контуре. Вычислите соответствующие значения периода $T_{\text{теор}}$ по формуле (14), используя найденные выше индуктивность $L_{\text{ср}}$ и собственное сопротивление R_0 контура. По результатам измерений и вычислений заполните таблицу 2.

Таблица 2.

$C, \text{ мкФ}$	$T_{\text{эксп}}, \text{ мс}$	$T_{\text{теор}}, \text{ мс}$	$\delta T = \frac{T_{\text{эксп}} - T_{\text{теор}}}{T_{\text{теор}}}, \%$

Постройте графики зависимости периодов $T_{\text{эксп}}$ и $T_{\text{теор}}$ от ёмкости конденсатора. Оцените, можно ли вычислять период по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (32)$$

и выполняется ли в данном случае условие $\beta \ll \omega_0$.

10. Включите в качестве ёмкости контура конденсатор C_1 . Установите сопротивление магазина 30–50 Ом. Соберите схему, изображенную на рисунке 8. Напряжение, подаваемое на вход второго канала осциллографа, будет пропорционально току в контуре, в соответствии с законом Ома:

$$U_R = IR_M. \quad (33)$$

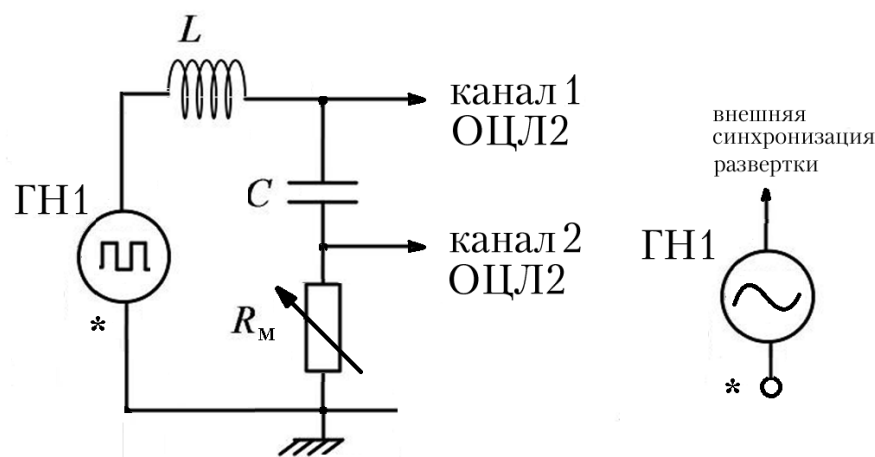


Рис 8. Рабочая схема для одновременного изучения затухающих колебаний напряжения на конденсаторе и тока в контуре

В то же время напряжение, подаваемое на вход первого канала, будет практически совпадать с напряжением U_C на конденсаторе. Переключите осциллограф в режим одновременного наблюдения двух сигналов (режим «1,2»). Ручками перемещения сигналов по вертикали добейтесь того, чтобы колебания обоих напряжений происходили относительно одной и той же горизонтали. Примерный вид осциллограмм изображен на рисунке 9. Измерьте в делениях экрана период T колебаний и временной сдвиг Δt между сигналами обоих каналов. По формуле

$$\delta_{\text{эксп}} = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad (34)$$

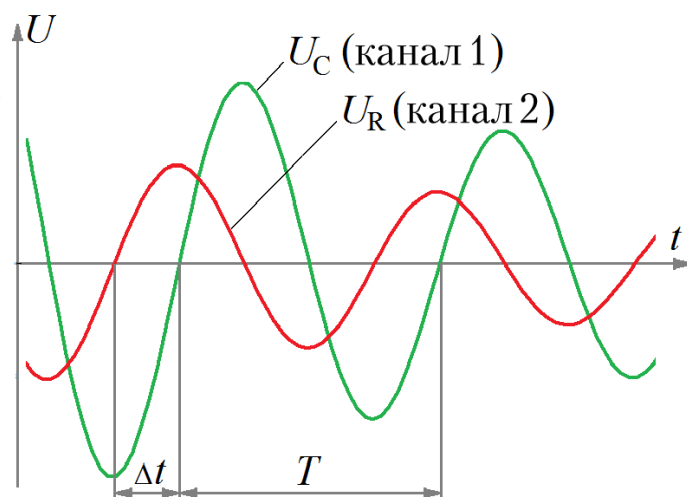


Рис 9. Осциллограммы затухающих колебаний напряжения на конденсаторе и тока в контуре при измерении фазового сдвига между током и напряжением

вычислите сдвиг фаз между током в контуре и напряжением на конденсаторе. Вычислите значения сдвига фаз $\delta_{\text{теор}}$, используя формулы (8), (9), (11) и (18). Сравните полученные значения $\delta_{\text{эксп}}$ и $\delta_{\text{теор}}$.

11. Установите частоту генератора 1200 Гц. Подберите масштаб по времени и масштабы отображения напряжения каналов, при которых на экране осциллографа в режиме «X-Y» наблюдается плавная и яркая фазовая кривая $I(U)$. Наблюдаемая кривая состоит из двух симметричных частей, поскольку возбуждение затухающих колебаний происходит как передними, так и задними фронтами входных прямоугольных импульсов. Зарисуйте с сохранением масштаба или сфотографируйте часть кривой, отвечающую затухающим колебаниям, возбуждаемым одним из фронтов входного сигнала. Запишите масштабы отображения напряжения для обоих каналов.

Литература

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики.— 8-е изд., стер. — М. : Издательский центр "Академия", 2009 .
2. Курепин В.В., Баранов И.В. Обработка экспериментальных данных: Методические указания к лабораторным работам. — СПб, 2003.-57 с.