

## СПИСОК ВОПРОСОВ ПРИНОСИМ С СОБОЙ НА ЭКЗАМЕН!

Вопросы 1–44 относятся к программе коллоквиума.

1. Дифференцирование композиции
2. Дифференцирование и арифметические операции
3. Дифференцирование обратного отображения
4. Контрпример равенства смешанных производных
5. Теорема о смешанных производных
6. Выражение коэффициентов многочленов через частные производные
7. Комбинаторная лемма о числе последовательностей индексов с заданным распределением
8. Существование и явные формулы дифференциалов высших порядков
9. Единственность многочлена Тейлора
10. Оценка локальной малости функции с нулевыми частными производными нескольких первых порядков
11. Теорема Тейлора-Пеано
12. Теорема Тейлора-Лагранжа, её следствия
13. Необходимое условие экстремума
14. Достаточное условие экстремума (с леммой об оценке снизу положительной формы)
15. Примеры исследования на экстремум функции нескольких вещественных переменных
16. Локальная обратимость гладкой функции
17. Лемма об оценках приращения гладкого отображения
18. Существование и непрерывность локально обратного отображения
19. Открытость образа гладкого отображения с леммой о "почти сдвиге"
20. Теорема о гладкости обратного отображения
21. Итоговая теорема о локальной обратимости гладких отображений (в двух формулировках)
22. Цилиндрические и сферические координаты
23. Постановка задачи о неявно заданном отображении и наводящие соображения о её решении
24. Теорема о неявной функции
25. Пример вычисления частных производных первого и второго порядка функции, заданной неявно
26. Необходимое условие условного экстремума
27. Достаточное условие условного экстремума (формулировка и набросок доказательства)
28. Утверждение об экстремальных значениях квадратичной формы на сфере и следствие из него
29. Алгоритм решения задачи об экстремальных значениях функции на компакте, пример решения такой задачи
30. Определение и простейшие свойства вещественных и комплексных рядов. Примеры
31. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда
32. Теорема о группировках членов ряда
33. Критерий сходимости положительных числовых рядов, признак сравнения и его следствия
34. Признак Коши (радикальный)
35. Признак Даламбера
36. Интегральный признак сходимости ряда. Примеры его применения
37. Асимптотические формулы для частичных сумм числовых рядов
38. Асимптотические формулы для частичных сумм гармонического ряда и ряда из значений степенной функции
39. Связь между сходимостью и абсолютной сходимостью ряда. Признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости
40. Преобразование Абеля. Признак Абеля для числовых рядов
41. Признаки Дирихле и Лейбница. Примеры оценок остатка
42. Достаточное условие сходимости перестановки ряда
43. Перестановки условно сходящихся числовых рядов: пример перестановки, меняющей сумму ряда и Теорема Римана (без доказательства)

44. Теорема об умножении рядов. Пример пары рядов, для которых результат перемножения зависит от способа перемножения
45. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов: определения, критерий Коши. Примеры
46. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса. Примеры
47. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда
48. Признак Абеля равномерной сходимости ряда
49. Теорема Дини
50. Достаточное условие непрерывности предела для функциональной последовательности и для функционального ряда
51. Достаточное условие почленного интегрирования ряда в терминах равномерной сходимости. Примеры
52. Достаточное условие почленного дифференцирования ряда. Примеры
53. Теорема Коши–Адамара; формулы вычисления радиуса сходимости степенного ряда
54. Действия над степенными рядами. Примеры
55. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Критерий сходимости бесконечного произведения специального вида
56. Формула Эйлера для Гамма-функции, ее следствие.
57. Представление дзета-функции Римана в виде произведения.
58. Полукольцо, алгебра,  $\sigma$ -алгебра множеств; объем, мера. Примеры.
59. Критерий измеримости функции на языке измеримости прообразов лучей различного типа
60. Действия над измеримыми функциями, сохраняющие измеримость
61. Теорема об аппроксимации
62. Лемма об общем допустимом разбиении для пары ступенчатых функций. Определение и простейшие свойства интеграла от неотрицательных ступенчатых функций.
63. Определение и элементарные свойства интеграла от неотрицательных функций.
63. Теорема Леви
64. Дальнейшие свойства интеграла от неотрицательных функций
65. Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде"
66. Свойства интеграла от суммируемых функций (до "свойств, выражаемых равенствами")
67. Свойства интеграла от суммируемых функций, выражаемые равенствами
68. Определение и элементарные свойства интеграла от комплекснозначных функций.
69. Неравенство Чебышева, неравенство Гельдера
70. Неравенство Минковского
71. Пространства  $L^p(X, \mu)$
72. Счетная аддитивность интеграла и ее следствие.
73. Предельный переход в интеграле по мере при наличии равномерной сходимости
74. Обобщенная теорема Леви и ее следствия
75. Теорема Лебега о мажорированной сходимости
76. Теорема Фату

## Определения и формулировки

Матрица Якоби композиции, частные производные композиции  
 Дифференциал и матрица Якоби обратного отображения  
 Производные высших порядков, классы  $C^s$ ,  
 Мультииндексы и элементарные операции над мультииндексами  
 Формула дифференциалов второго порядка для функций двух переменных  
 Формула дифференциалов второго порядка для функций  $n$  переменных  
 Многочлен Тейлора  
 Формула Тейлора–Пеано; формула Тейлора в дифференциалах; формула Тейлора–Лагранжа  
 Оценка остатка формулы Тейлора  
 Теорема о среднем

Полином Ньютона  
 Экстремум, стационарные точки  
 Положительно определенные, отрицательно определенные, неопределенные квадратичные формы  
 Гомеоморфизм; диффеоморфизм; условие Липшица  
 Отображение, заданное неявно  
 Условный экстремум  
 Метод Лагранжа; множители Лагранжа; функция Лагранжа  
 Числовой ряд; сходящийся ряд, расходящийся ряд;  
 Сумма ряда; частичная сумма ряда; остаток ряда  
 Гармонический ряд; область сходимости рядов  $\sum_n (1/n^p)$   
 Необходимое условие сходимости ряда  
 Группировка членов ряда  
 Положительные ряды  
 Абсолютная сходимость ряда  
 Перестановка ряда  
 Произведение рядов. Произведение рядов по Коши  
 Поточечная и равномерная сходимость а) функциональной последовательности; б) функционального ряда  
 Степенной ряд; интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда  
 Бесконечные произведения  
 Полукольцо, алгебра,  $\sigma$ -алгебра множеств. Объем, мера  
 Внешняя мера, измеримое множество, измеримая функция  
 Ступенчатая (простая) функция  
 Интеграл по мере  
 Суммируемая функция, интегрируемая функция  
 "почти везде", существенный супремум, норма в пространствах  $L^p(X, \mu)$   
 Сходимость почти всюду, сходимость по мере.