1 семестр

1. Пусть Rи S- рефлексивные отношения на A. Будет ли рефлексивным их а) объединение? б) пересечение? В этом и следующих заданиях, если ответ отрицательный, при демонстрации контрпримера удобно использовать представление отношения в виде ориентированного графа.
2. Пусть Rи S- симметричные отношения на A. Будет ли симметричным их а) объединение? б) пересечение?
3. Пусть Rи S- транзитивные отношения на A. Будет ли транзитивным их а) объединение? б) пересечение?
4. Пусть Rи S- антисимметричные отношения на A. Будет ли антисимметричным их а) объединение? б) пересечение?
5. Определим R^{-1}следующим образом: если xRy, то yR^{-1}x. Выполнено ли соотношение RR^{-1} = I, где I- отношение равенства? Выполнен ли закон сложения степенией R^iR^j=R^{i+j}, если iи jразного знака?
6. Пусть Rобладает свойством X. Будет ли обладать свойством Xотношение R^{-1}? Следует проанализировать X- рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность
7. Пусть Rи S- транзитивные отношения на A. Будет ли транзитивным их композиция?
8. Пусть Rи S- антисимметричные отношения на A. Будет ли антисимметричным их композиция?
9. Постройте пример рефлексивного, симметричного, но не транзитивного отношения
10. Постройте пример рефлексивного, антисимметричного, но не транзитивного отношения
11. Является ли отношение R, такое что (a, b) R (c, d), если ad = bcна {\mathbb Z}^+ \times {\mathbb N}отношением эквивалентности?
12. Может ли отношение частичного порядка быть отношением эквивалентности? Если да, то в каких случаях?
13. Можно ли в определении отношения эквивалентности убрать требование рефлексивности отношения, потому что оно следует из симметричности и транзитивности?
14. Выразите в явном виде "и", "или" и "не" через стрелку Пирса
15. Выразите в явном виде "и", "или" и "не" через штрих Шеффера
16. Можно ли "и", "или" и "не" выразить через функции из множества \{x\oplus y, x = y\}?
17. Можно ли "и", "или" и "не" выразить через функции из множества \{x\to y, \neg x\}?
18. Можно ли "и", "или" и "не" выразить через функции из множества \{{\mathbf 0}, \langle xyz\rangle, \neg x\} ?
19. Можно ли "и", "или" и "не" выразить через функции из множества \{x \to y, \langle xyz\rangle, \neg x\} ?
20. Можно ли выразить "и" через "или"?
21. Выразите медиану 5 через медиану 3
22. Выразите медиану 2n+1через медиану 3
23. Булева функция называется пороговой, если f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1тогда и только тогда, когда a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \ge b, где a_iи b- вещественные числа. Докажите, что "и" и "или" - пороговые функции.
24. Приведите пример непороговой функции
25. Рассмотрим булеву функцию f. Обозначим как N(f)число наборов аргументов, на которых fравна 1. Например, N(\vee) = 3. Обозначим как \Sigma(f)сумму всех наборов аргументов, на которых fравна 1 как векторов. Например, \Sigma(\vee) = (2, 2). Докажите, что если для пороговой функции fи функции gвыполнено N(f) = N(g)и \Sigma(f) = \Sigma(g), то f = g
26. Постройте двойственную функцию для каждой функции от 2 аргументов.
27. Сколько существует самодвойственных функций от nаргуметов?
28. Будем говорить, что функция существенно зависит от переменной x_i, если существует два набора аргументов, различающихся только значением x_i, на которых функция принимает различные значения. Сколько существует булевых функций от nаргументов, существенно зависящих от всех аргументов? Достаточно привести рекуррентную формулу.
29. Приведите пример функции, существенно зависящей хотя бы от 3 аргументов, которая лежит во всех 5 классах Поста.
30. Приведите пример функции, существенно зависящей хотя бы от 3 аргументов, которая не лежит ни в одном классе Поста.
31. Докажите, что любую функцию от nпеременных можно представить с использованием стрелки Пирса формулой, длиной не больше чем 2^n\cdot poly(n), где poly(n)- полином, общий для всех функций
32. Докажите, что любую монотонную функцию можно выразить через "и", "или", 0 и 1.
33. Докажите, что любую монотонную самодвойственую функцию можно выразить через медиану
34. Игра "два шага вперед, один назад". Задана булева функция от nаргументов f(x_1, \ldots, x_n). Играют два игрока: 0 и 1. Игроки делают ходы по очереди. Для хода используется вспомогательное значение m, исходно равное 0, кроме того исходно все значения переменных не определены. Ход заключается в следующем. Игрок либо увеличивает mна 2, либо уменьшает на 1. После этого действия значение mдолжно удовлетворять неравенству 1 \le m \le n. Затем, если значение x_mне определено, то игрок присваивает переменной x_mзначение на свое усмотрение. Если же значение x_mопределено, то оно меняется на противоположное. Игра заканчивается, когда все значения определены. Если значение функции fна получившемся наборе переменных равно 1, то выигрывает 1, иначе выигрывает 0. Проанализируйте описанную игру для значений nот 2 до 9 на функции f(x_1, \ldots, x_n), равной 1, если строка x_1x_2\ldots x_nлексикографически строго меньше строки x_nx_{n-1}\ldots x_1.
35. Проанализируйте игру "два шага вперед, один назад" для значений nот 2 до 9 на функции f(x_1, \ldots, x_n)=x_1\oplus x_2\oplus \ldots\oplus x_n.
36. Проанализируйте игру "два шага вперед, один назад" для значений nот 2 до 9 на функции f(x_1, \ldots, x_n), равной 1, если строка x_1x_2\ldots x_nне содержит двух единиц подряд.
37. Проанализируйте игру "два шага вперед, один назад" для значений nот 2 до 9 на функции f(x_1, \ldots, x_n), равной 1, если строка x_1x_2\ldots x_nпредставляет собой (возможно дополненную ведущими нулями) двоичную запись простого числа.
38. Говорят, что формула имеет вид 2-КНФ, если она имеет вид (t_{11}\vee t_{12})\wedge(t_{21}\vee t_{22})\wedge\ldots, где t_{ij}представляет собой либо переменную, либо ее отрицание (в каждом дизъюнкте ровно два терма). Предложите полиномиальный алгоритм проверки, что формула, заданная в 2-КНФ имеет набор значений переменных, на которых она имеет значение 1.
39. КНФ называется КНФ Хорна, если в каждом дизъюнкте не более одной переменной находится без отрицания. Пример: x\wedge(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg t). Предложите полиномиальный алгоритм проверки, что формула, заданная в форме КНФ Хорна имеет набор аргументов, на котором она равна 1.
40. Докажите, что если булеву функцию fможно задать в форме Крома (в виде 2-КНФ), то выполнено следствие: f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) = f(z_1, ..., z_n) = 1\Rightarrow f(\langle x_1, y_1, z_1\rangle, ..., \langle x_n, y_n, z_n \rangle) = 1
41. Докажите, что если выполнено следствие: f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) = f(z_1, ..., z_n) = 1\Rightarrow f(\langle x_1, y_1, z_1\rangle, ..., \langle x_n, y_n, z_n \rangle) = 1, то булеву функцию fможно задать в форме Крома.
42. Докажите, что если булеву функцию fможно задать в форме Хорна, то выполнено следствие: f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) = 1 \Rightarrow f(x_1\wedge y_1, ..., x_n \wedge y_n) = 1
43. Докажите, что если выполнено следствие: f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) = 1 \Rightarrow f(x_1\wedge y_1, ..., x_n \wedge y_n) = 1, то булеву функцию fможно задать в форме Хорна
44. Докажите, что x_0\oplus x_1\oplus\ldots\oplus x_{2m} = \langle \neg x_0,s_1,s_2,\ldots,s_{2m}\rangle, где s_j=\langle x_0,x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+m-1},\neg x_{j+m},\neg x_{j+m+1},\ldots,\neg x_{j+2m-1}\rangle, для удобства x_{2m+k}обозначет то же, что и x_kдля k \ge 1.
45. Докажите, что биномиальный коэффициент C_n^kнечетен тогда и только тогда, когда в двоичной записи kединицы стоят только на тех позициях, где в двоичной записи nтакже находятся единицы (иначе говоря, двоичная запись kдоминируется двоичной записью nкак двоичным вектором).
46. Докажите "метод треугольника" построения полинома Жегалкина по таблице истинности.
47. Булева функция f(x_1, x_2, \ldots, x_n)называется форсируемой, если существует такое назначение x_i=const, что для любых значений других переменных значение функции является константой. Например, x_1 \wedge x_2является форсируемой, поскольку при x_1 = 0значение функции равно 0 для любого значения x_2. Для каждой функции от двух переменных определите, является ли она форсируемой.
48. Булева функция называется симметричной, если ее значение не меняется при любой перестановке ее переменных. Сколько существует симметричных функций от nпеременных?
49. Постройте схему из функциональных элементов для операции медиана трех над базисом \{ \vee, \wedge, \neg\}. Постарайтесь использовать минимальное число элементов.
50. Постройте схему из функциональных элементов для операции x \oplus y \oplus zнад базисом \{ \vee, \wedge, \neg\}. Постарайтесь использовать минимальное число элементов.
51. Предложите способ построить схему для функции x_1 \oplus ... \oplus x_nнад базисом \{ \vee, \wedge, \neg\}с линейным числом элементов и глубиной O(\log n).
52. Докажите, что не существует схем константной глубины для функций x_1 \vee ... \vee x_n, x_1 \wedge ... \wedge x_n, x_1 \oplus ... \oplus x_n.
53. Мультиплексором называется схема, которая имеет 2^n+nвходов и один выход. Обозначим входы как x_0, x_1, \ldots, x_{2^n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}. На выход подается то же, что подается на вход x_i, где i- двоичное число, которое кодируется входами y_0, \ldots, y_{n-1}. Постройте схему линейного размера для мультиплексора.
54. Дешифратором называется схема, которая имеет n+1входов и 2^nвыходов. Обозначим входы как y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, x, а выходы как z_0, z_1, \ldots, z_{2^n-1}. На все выходы подается 0, а на выход z_iто же, что подается на вход x, где i- двоичное число, которое кодируется входами y_0, \ldots, y_{n-1}. Постройте схему линейного размера для дешифратора.
55. Докажите, что для функции "большинство из 2n+1" существует схема из функциональных элементов глубины O(\log n)
56. Докажите, что не существует схемы константной глубины для сложения.
57. На одном китайском заводе в матричном умножителе случайно использовали элементы "или" вместо "и". Можно ли из получившихся значений получить произведение исходных чисел (доступа к входам нет, есть только доступ к n\times 2nвыходам матричного псевдоумножителя).
58. Докажите, что любую булеву функцию от nаргументов можно представить схемой из функциональных элементов, содержащей O(2^n)элементов.
59. Контактной схемой называется ориентированный ациклический граф, на каждом ребре которого написана переменная или ее отрицание (ребра в контактных схемах называют *контактами*, а вершины - *полюсами*). Зафиксируем некоторые значения переменным. Тогда *замкнутыми* называются ребра, на которых записана 1, ребра, на которых записан 0, называются *разомкнутыми*. Зафиксируем две вершины uи v. Тогда контактная схема вычисляет некоторую функцию fмежду вершинами uи v, равную 1 на тех наборах переменных, на которых между uи vесть путь по замкнутым ребрам. Постройте контактные схемы для функций "и", "или" и "не".
60. Постройте контактную схему для функции "xor".
61. Постройте контактную схему для функции медиана трех.
62. Докажите, что любую булеву функцию можно представить контактной схемой.
63. Постройте контактную схему "xor от nпеременных", содержащую O(n)ребер.
64. Постройте контактную схему "большинство из 2n+1переменных", содержащую O(n)ребер.
65. Постройте контактную схему, в которой для каждого из 2^nнаборов конъюнкций переменных и их отрицаний есть пара вершин, между которыми реализуется эта конъюнкция, используя O(2^n)ребер.
66. Докажите, что любую булеву функцию можно представить контактной схемой, содержащей O(2^n)ребер.
67. Как выглядит дерево Хаффмана для частот символов 1, 2, ..., 2^{n-1}(степени двойки) ?
68. Как выглядит дерево Хаффмана для частот символов 1, 1, 2, 3, ..., F_{n-1}(числа Фибоначчи)?
69. Докажите, что если размер алфавита - степень двойки и частоты никаких двух символов не отличаются в 2 или более раз, то код Хаффмана не лучше кода постоянной длины
70. Модифицируйте алгоритм Хаффмана, чтобы строить k-ичные префиксные коды
71. Укажите, как построить дерево Хаффмана за линейное время, если символы уже отсортированы по частоте
72. Предложите алгоритм построения оптимального кода среди префиксных кодов с длиной кодового слова не более L бит
73. Предложите способ хранения информации об оптимальном префиксном коде для n-символьного алфавита, использующий не более 2n - 1 + n \lceil\log_2(n)\rceilбит (\lceil x\rceil - округление xвверх)
74. Можно ли разработать алгоритм, который сжимает любой файл не короче заданной величины Nхотя бы на 1 бит?
75. Приведите пример однозначно декодируемого кода оптимальной длины, который не является ни префиксным, ни развернутым префиксным
76. Для каких префиксных кодов существует строка, для которой он является кодом Хаффмана? Предложите алгоритм построения такой строки.
77. Пусть заданы пары (u_i, v_i). Предложите алгоритм проверки, что существует код Хаффмана для некоторой строки, в котором i-е кодовое слово содержит u_iнулей и v_iединиц.
78. Докажите, что если в коде Хаффмана для некоторой строки i-е кодовое слово содержит u_iнулей и v_iединиц, то для многочлена от двух переменных f(x, y) = \sum_{i=1}^n x^{u_i}y^{v_i}выполнено f(x, y) - 1 = (x + y - 1) g(x, y)для некоторого многочлена g(x, y).
79. Разработайте алгоритм кодирования Move To Front строки длиной nза O(n \log n)
80. Докажите, что при оптимальном кодирование с помощью LZ77 не выгодно делать повтор блока, который можно увеличить вправо
81. Верно ли утверждение из предыдущего задания при кодировании с помощью L78?
82. Разработайте алгоритм оптимального кодирования текста с помощью LZ77, если на символ уходит cбит, а на блок повтора dбит
83. Предложите семейство строк S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, где S_iимеет длину i, таких, что при их кодировании с помощью LZW длина строки увеличивается. Начальный алфавит \{0, 1\}.
84. Разработайте алгоритм обратного преобразования Барроуза-Уиллера
85. Разработайте алгоритм обратного преобразования Барроуза-Уиллера за O(n)
86. Проанализируйте время работы алгоритма арифиметического кодирования
87. Докажите, что для любого c > 1существует распределение частот p_1, p_2, .., p_n, что арифметическое кодирование в cраз лучше Хаффмана
88. При арифметическом кодировании можно учитывать, что с учетом уже потраченных символов соотношения символов становятся другими и отрезок надо делить в другой пропорции. Всегда ли кодирование с таким уточнением лучше классического арифметического кодирования?
89. При арифметическом кодировании трудным моментом является деление отрезка в пропорциях, не являющихся степенями двойки. Рассмотрим модификацию арифметического кодирования, когда соотношения между символами приближаются дробями со знаменателями - степенями двойки. Что можно сказать про получившийся алгоритм?
90. Разработайте оптимальный код исправляющий одну ошибку при пересылке 2 битов
91. Разработайте оптимальный код исправляющий одну ошибку при пересылке 3 битов
92. Разработайте код, исправляющий две ошибки, использующий асимптотически не более 2nбит для кодирования 2^nсимвольного алфавита (для n > n_0)
93. Докажите, что в зеркальном коде Грея g_i = i \oplus \lfloor i / 2\rfloor
94. Докажите, что в зеркальном коде Грея при переходе от g_iк g_{i+1}меняется тот же бит, который меняется с 0 на 1 при переходе от iк i+1
95. Разработайте код Грея для k-ичных векторов
96. При каких a_1, a_2, ..., a_nсуществует обход гиперпараллелепипеда a_1 \times a_2 \times ... \times a_n, который переходит каждый раз в соседнюю ячейку и бывает в каждой ячейке ровно один раз?
97. При каких a_1, a_2, ..., a_nсуществует обход гиперпараллелепипеда a_1 \times a_2 \times ... \times a_n, который переходит каждый раз в соседнюю ячейку и бывает в каждой ячейке ровно один раз, а в конце возвращается в исходную ячейку?
98. Код "антигрея" - постройте двоичный код, в котором соседние слова отличаются хотя бы в половине бит
99. Троичный код "антигрея" - постройте троичный код, в котором соседние слова отличаются во всех позициях
100. При каких nи kсуществует двоичный n-битный код, в котором соседние кодовые слова отличаются ровно в kпозициях?
101. Докажите, что для достаточно больших nсуществует код Грея, который отличается от любого, полученного из зеркального перестановкой столбцов, отражением и циклическим сдвигом строк
102. Код Грея назвается монотонным, если нет таких слов g_iи g_j, что i < j, а g_iсодержит на 2 или больше единиц больше, чем g_j. Докажите, что существует монотонный код Грея
103. Докажите корректность следующего алгоритма построения цепного кода. Начинаем со строки из nнулей. Каждый раз пытаемся жадно приписать 1, если слово из последних nсимволов уже встречалось раньше, то приписываем 0. Заканчиваем, когда все 2^nслов получены.
104. Докажите, что \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n
105. Докажите, что \sum_{k=0}^n (-1)^kC_n^k = 0
106. Используйте предыдущее задание для альтернативного доказательства формулы включения-исключения: посчитайте для каждого элемента, сколько раз он будет посчитан в правой части формулы.
107. Коды Грея для перестановок. Предложите способ перечисления перестановок, в котором соседние перестановки отличаются обменом двух соседних элементов (элементарной транспозицией).
108. Коды Грея для сочетаний. Предложите способ перечисления сочетаний, в котором соседние сочетания отличаются заменой одного элемента.
109. Коды Грея для размещений. Предложите способ перечисления сочетаний, в котором соседние размещения отличаются заменой одного элемента в одной позиции.
110. Максимумом в перестановке называется элемент, который больше своих соседей (одного, если он первый или последний, обоих иначе). Выведите рекуррентную формулу для числа перестановок nэлементами с kмаксимумами
111. Подъемом в перестановке называется пара соседних элементов, таких что a_{i-1} < a_i. Выведите рекуррентную формулу для числа перестановок nэлементов с kподъемами
112. Неподвижной точкой в перестановке называется элемент a_i = i. Выведите рекуррентную формулу для числа перестановок nэлементов с kнеподвижными точками
113. Сочетание с повторениями - это способ выбрать из nэлементов k, причем один элемент можно выбирать несколько раз. Порядок не важен. Чему равно число сочетаний с повторениями из nпо k?
114. Размещение с повторениями - это способ выбрать из nэлементов k, причем один элемент можно выбирать несколько раз. Порядок выбора важен. Чему равно число размещений с повторениями из nпо k?
115. Выведите рекуррентную формулу для числа разбиений числа nна нечетные слагаемые
116. Выведите рекуррентную формулу для числа разбиений числа nна нечетное число слагаемых
117. Выведите рекуррентную формулу для числа разбиений числа nна различные слагаемые
118. Предложите алгоритм получения по перестановке ее таблицы инверсий за O(n \log n).
119. Предложите алгоритм получения перестановке по ее таблице инверсий за O(n^2). Отмечайте это задание только если не решили следующее.
120. Предложите алгоритм получения перестановки по ее таблице инверсий за O(n \log n).
121. Чему равно число перестановок с заданным циклическим классом?
122. Степенью перестановки \piназывается минимальное k, такое что \pi^k=i, где i- тождественная перестановка. Как связана степень перестановки с ее циклическим классом?
123. Предложите алгоритм поиска перестановки из nэлементов с максимальной степенью за O(n^3).
124. Рассмотрим коды Грея для перестановок и коды Грея для их таблиц инверсий. Есть ли между ними связь?
125. Докажите, что числа Стирлинга 1 рода образуют матрицу переходов в линейном пространстве полиномов базиса возрастающих факториальных степеней к базису обычных степеней
126. Докажите, что числа Стирлинга 2 рода образуют матрицу переходов в линейном пространстве полиномов от базиса обычных степеней к базису убывающих факториальных степеней
127. Укажите способ подсчитать число разбиений заданного n-элементного множества на kупорядоченных непустых подмножеств
128. Докажите, что число различных триангуляций правильного n-угольника равно числу Каталана. В этом и нескольких следующих заданиях номер соответствующего числа Каталана может отличаться от n, требуется также установить соответствие между размером задачи и номерами чисел Каталана.
129. Докажите, что число двоичных деревьев с nвершинами равно числу Каталана.
130. Докажите, что число подвешенных деревьев с порядком на детях с nвершинами равно числу Каталана.
131. Будем называть последоватедовательность *сортируемой стеком*, если ее можно отсортировать, используя в произвольном порядке следующие операции: (а) взять первый элемент входной последовательности и положить в стек (б) взять верхний элемент стека и отправить в конец выходной последовательности. Докажите, что число перестановок nэлементов, сортируемых стеком, равно число Каталана.
132. Докажите, что число перестановок nэлементов, в которых нет возрастающей последовательности длины 3, равно числу Каталана.
133. Докажите, что число способов расставить числа от 1 до 2nв прямоугольник 2 \times n, чтобы числа в каждой строке и каждом столбце возрастали, равно числу Каталана.
134. Докажите, что число Каталана C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.
135. Матрица Ханкеля - матрица n \times n, такая что a[i][j] = C_{i+j-2}. Докажите, что определитель матрицы Ханкеля равен 1.
136. Укажите способ подсчитать число разбиений числа на слагаемые за O(n \sqrt{n})(докажите и используйте пентагональную теорему Эйлера).
137. Докажите, что минимальное число невозрастающих подпоследовательностей, на которые можно разбить заданную последовательность, равно длине ее наибольшей возрастающей подпоследовательности
138. Докажите, что произведение длины наибольшей возрастающей подпоследовательности и наибольшей убывающей подпоследовательности перестановки не меньше n
139. Выведите формулу для числа ожерельев из nбусинок kцветов с точностью до циклического сдивига и отражения.
140. Выведите формулу для числа раскрасок прямоугольника n \times mв kцветов с точностью до отражения относительно горизонтальной и вертикальной оси.

2 семестр

1. Чему равна вероятность, что две случайно вытянутые кости домино можно приложить друг к другу по правилам домино?
2. Чему равна вероятность, что на двух брошенных честных игральных костях выпадут числа, одно из которых делит другое?
3. Чему равна вероятность, что если вытянуть из колоды две случайные карты, одной из них можно побить другую (одна из мастей назначена козырем, картой можно побить другую, если они одинаковой масти или если одна из них козырь)?
4. Чему равна вероятность, что на двадцати брошенных честных монетах выпадет поровну нулей и единиц?
5. Петя и Вася три раза бросают по одной честной игровой кости. Вася два раза выкинул строго больше, чем Петя, а один раз строго меньше. При этом Петя в сумме выкинул строго больше, чем Вася. С какой вероятностью такое могло произойти?
6. Петя собирается смотреть серию матчей финала Флатландской хоккейной лиги. В финале две команды играют до 5 побед, ничьих не бывает, таким образом максимум в финале будет не более 9 матчей. Вася рассказал Пете, что всего в финале было 7 матчей. Петя считает матч интересным, если перед его просмотром он не знает, кто выиграет финал. Какова вероятность, что будет хотя бы 5 интересных матчей?
7. Петя собирается смотреть серию матчей финала Флатландской хоккейной лиги. В финале две команды играют до 5 побед, ничьих не бывает, таким образом максимум в финале будет не более 9 матчей. Вася рассказал Пете, что всего в финале было 7 матчей. Петя считает матч зрелищным, если перед его просмотром он не знает, кто его выиграет. Какова вероятность, что будет хотя бы 5 зрелищных матчей?
8. Приведите пример событий, независимых попарно, но зависимых в совокупности
9. Приведите пример трех событий, для которых P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C), но которые не являются независимыми, причем вероятности всех трех событий больше 0
10. Доказать или опровергнуть, что для независимых событий Aи Bи события C, где P(C) > 0выполнено P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)
11. Доказать или опровергнуть, что для независимых событий Aи Bи события C, где P(A) > 0, P(B) > 0выполнено P(C|A \cap B) = P(C|A)P(C|B)
12. Рассмотрим множество костей домино (неупорядоченные пары (i, j), где iи jот 0 до 6, всего костей 28). Можно ли вероятностное пространство костей домино естественным образом представить как прямое произведение вероятностных пространств?
13. Доказать или опровергнуть: если P(A|B) = P(B|A), то P(A) = P(B)
14. Доказать или опровергнуть: если P(A|B) = P(B|A), то Aи Bнезависимы
15. Доказать или опровергнуть: если P(A|C) = P(B|C), то P(C|A) = P(C|B)
16. Доказать или опровергнуть: если Aи Bнезависимы, то \Omega \setminus Aи \Omega \setminus Bнезависимы
17. Перемножим счетное число вероятностных пространств, соответствующих честным монетам. Что получится? Как бы вы ввели на результате вероятностную меру?
18. Найдите математическое ожидание и дисперсию значения на нечестной монете
19. Найдите распределение и математическое ожидание следующей случайной величины: число бросков нечестной монеты до первого выпадения 1.
20. Найдите распределение и математическое ожидание следующей случайной величины: число бросков честной монеты до второго выпадения 1.
21. Докажите, что если fи gнезависимы, то для любых aи bсобытия [f = a]и [g = b]независимы
22. Случайные величины f, g и h называются независимыми в совокупности, если для любых a, b и c события [f <= a], [g <= b] и [h <= c] независимы. Приведите пример независимых попарно, но не независимых в совокупности случайных величин
23. Случайные величины f, g и h называются независимыми в совокупности, если для любых a, b и c события [f <= a], [g <= b] и [h <= c] независимы. Приведите пример независимых попарно, но не независимых в совокупности случайных величин, запрещается использовать величины, пропорциональные индикаторным случайным величинам событий
24. Найдите математическое ожидание числа инверсий в перестановке чисел от 1 до n
25. Найдите математическое ожидание числа подъемов в перестановке чисел от 1 до n
26. Найдите математическое ожидание числа троек i, j, k, где i < j < kи a[i] < a[j] < a[k]в перестановке чисел от 1 до n
27. Предложите метод генерации случайной перестановки порядка nс равновероятным распределением всех перестановок, если мы умеем генерировать равномерно распределенное целое число от 1 до kдля любых небольших k(k = O(n)).
28. Дает ли следующий метод равномерную генерацию всех перестановок? "p = [1, 2, ..., n]; for i from 1 to n: swap(p[i], p[random(1..n)] )"
29. Дает ли следующий метод равномерную генерацию всех перестановок? "p = [1, 2, ..., n]; for i from 1 to n: swap(p[random(1..n)], p[random(1..n)] )"
30. Предложите метод генерации случайного сочетания из nпо kс равновероятным распределением всех сочетаний, если мы умеем генерировать равномерно распределенное целое число от 1 до tдля любых небольших t(t = O(n))
31. Предложите метод генерации случайного сочетания из nпо kс равновероятным распределением всех сочетаний, если мы умеем генерировать равномерно распределенное целое число от 1 до tдля любых небольших t(t = O(n)), использующий O(k)времени и памяти.
32. Найдите математическое ожидание и дисперсию значения на честной игральной кости
33. Верно ли, что если \xiи \eta- независимые случайные величины, то таким будут и f(\xi)и g(\eta)для любых функций fи g?
34. Постройте случайную величину, имеющую конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию.
35. Оцените вероятность, что значение на игральной кости отличается от матожидания больше чем на 2 с помощью неравенства Чебышева. Какова погрешность оценки?
36. Докажите, что вероятность того, что значения на двух нечестных игральных костях совпадает, не меньше 1/6.
37. Найдите дисперсию следующей случайной величины: число бросков честной монеты до первого выпадения 1.
38. Найдите дисперсию следующей случайной величины: число бросков честной монеты до k-го выпадения 1.
39. Докажите, что корреляция случайных величин лежит в диапазоне от -1 до 1
40. Докажите или опровергните, что корреляция случайных величин равна 0 тогда и только тогда, когда они независимы
41. Докажите, что корреляция случайных величин равна 1 тогда и только тогда, когда они линейно зависимы (f = cg)и c > 0(если c < 0, то корелляция равна -1)
42. Петя и Вася играют в игру. Они бросают честную монету, и выписывают результаты бросков. У каждого из игроков есть критерий победы, выигрывает тот, чей критерий наступит раньше. Петя выигрывает в тот момент, когда результаты последних двух бросков равны 11. Вася выигрывает, когда результаты последних двух бросков равны 00. С какой вероятностью Петя выиграет?
43. Петя и Вася играют в игру. Они бросают честную монету, и выписывают результаты бросков. У каждого из игроков есть критерий победы, выигрывает тот, чей критерий наступит раньше. Петя выигрывает в тот момент, когда результаты последних двух бросков равны 01. Вася выигрывает, когда результаты последних двух бросков равны 00. С какой вероятностью Петя выиграет?
44. Петя и Вася играют в игру. Они бросают честную монету, и выписывают результаты бросков. У каждого из игроков есть критерий победы, выигрывает тот, чей критерий наступит раньше. Петя выигрывает в тот момент, когда результаты последних двух бросков равны 01. Вася выигрывает, когда результаты последних двух бросков равны 00. С какой вероятностью Петя выиграет?
45. Можно ли сделать игру в предыдущем задании честной (чтобы вероятности выигрышей оказались равны 1/2), используя нечестную монету?
46. По аналогии с доказательством на лекции, докажите оценку на отклонение суммы nчестных монет от n/2вниз: P(\xi \le (1-\delta)n/2) \le \exp(-\delta^2/(4n)).
47. Используйте метод границы Чернова, чтобы следующее. Пусть нечестную монету с вероятностью выпадения 1 равной p бросили nраз. Обозначим случайную величину "число выпавших единиц" как \xi. Тогда P(\xi \le n/2) \le exp(-\frac{1}{2p}n\left(p-\frac{1}{2}\right)^2).
48. Сколько байт в бите?
49. Докажите, что для монеты энтропия максимальна в случае честной монеты
50. Докажите, что для n исходов энтропия максимальна если они все равновероятны
51. Зафиксируйте ваш любимый язык программирования. Колмогоровской сложностью K(x)для слова xназывается длина минимальной программы, которая выводит слово x. Докажите, что колмогоровская сложность не превышает n H(x) + O(\log n), где n- длина строки x, H(x)- энтропия случайного источника с распределением соответствующим частотам встречания символов в x, константа в O, не зависит от слова x(но может зависеть от выбранного языка программирования)
52. Докажите, что для любого c > 0найдется слово, для которого K(x) < c n H(x)
53. Пусть заданы полные системы событий A = \{a_1, ..., a_n\}и B = \{b_1, ..., b_m\}. Определим условную энтропию H(A | B)как -\sum\limits_{i = 1}^m P(b_i) \sum\limits_{j = 1}^n P(a_j | b_i) \log P(a_j | b_i)). Докажите, что H(A | B) + H(B) = H(B | A) + H(A)
54. Что можно сказать про H(A | B)если a_iи b_jнезависимы для любых iи j?
55. Что можно сказать про H(A | A)?
56. Петя хочет пойти в кино с вероятностью ровно 1/3, а у него есть только честная монета. Может ли он осуществить свой замысел?
57. Решите предудыщее задание для любой дроби 0 \le p/q \le 1.
58. Постройте схему получения вероятности 1/3 с помощью честной монеты, имеющую минимальное математическое ожидание числа бросков. Докажите оптимальность вашей схемы.
59. Рассмотрим случайное блуждание точки на прямой, пусть точка начинает в точке p(p - целое) и каждую секунду переходит равновероятно на 1 влево или вправо. Точка поглощается в точках 0 и n(n целое, больше p). Найдите вероятность поглощения в точке 0.
60. Рассмотрим случайное блуждание точки на прямой, пусть точка начинает в точке 0 и каждую секунду переходит равновероятно на 1 влево или вправо. Докажите, что математическое ожидание максимума координаты точки за nшагов есть O(\sqrt{n}).
61. Дана марковская цепь с двумя состояниями и вероятностью перехода из 1 в 2 равной a, вероятностью перехода из 2 в 1 равной b. Найдите в явном виде n-ю степень матрицы переходов.
62. Петя и Вася играют в игру. Они бросают честную монету, и выписывают результаты бросков. У каждого из игроков есть критерий победы, выигрывает тот, чей критерий наступит раньше. Петя выигрывает в тот момент, когда результаты последних двух бросков равны 0101. Вася выигрывает, когда результаты последних двух бросков равны 000. С какой вероятностью Петя выиграет?
63. Предложите решение предыдущей задачи для произвольных выигрышных строк Васи и Пети (за полином от суммы длин этих строк).
64. Петя и Вася играют в игру. Они бросают честную монету, и выписывают результаты бросков. У каждого из игроков есть критерий победы, выигрывает тот, чей критерий наступит раньше. Петя выигрывает в тот момент, когда результаты последних двух бросков равны 001. Какую строку длины 3 оптмально выбрать Васе, чтобы его вероятность выигрыша была максимальна?
65. Предложите решение предыдущей задачи для произвольной выигрышной строки Пети (за полином от длины этой строки).
66. Пусть последовательно генерируется последовательность из 0 и 1 длины n. Каждый элемент последовательности определяется с помощью броска честной монеты. Определите, с какой вероятностью некоторый префикс этой последовательности представляет собой запись двоичного числа, которое делится на 3.
67. Пусть последовательно генерируется последовательность из 0 и 1 длины n. Каждый элемент последовательности определяется с помощью броска честной монеты. Предложите алгоритм определния, с какой вероятностью некоторый префикс этой последовательности представляет собой запись двоичного числа, которое делится на pдля заданного целого p.
68. Для симуляции распределения двумя исходами с вероятностями p/qи 1-p/q, где pи qцелые, с помощью честной монеты можно использовать метод с делением отрезка [0-1], изложенный на лекции, а можно использовать поглощающую марковскую цепь "пьяницы на прямой" с q+1вершиной. Проведите сравнительный анализ этих двух методов.
69. Докажите, что математическое ожидание числа экспериментов при симуляции одного распределения другим асимптотически пропорционально отношению энтропий распределений (считайте, что энтропия симулируемого распределения больше).
70. Постройте регулярную Марковскую цепь с двумя состояниями и эргодическим распределением [a, 1-a]для заданного a.
71. Постройте регулярную Марковскую цепь с nсостояниями и заданным распределением.
72. В случае, если НОД длин циклов единственного эргодического класса не равен 1, соотвтствующая Марковская цепь будет периодической и эргодического распреления не будет. Тем не менее, что можно сказать про распределения в моменты с заданным остатком по модулю НОД длин циклов?
73. Завершите доказательство леммы из эргодической теоремы для регулярных цепей. Докажите, что если P- матрица переходов, не содержащая нулей, то для любого вектора uс максимальным элементом Mи минимальным элементом mмаксимальный и минимальный элементы PuM'и m', соответственно, удовлетворяют условиям m \le m', M \ge M', M'-m' \le (M - m)(1 - 2\varepsilon), где \varepsilon- минимальный элемент P.
74. В этом и последующих заданиях необходимо подробно изложить алгоритм вычисления числа комбинаторных объектов с таким префиксом, чтобы можно было получить объект по номеру и номер по объекту. Получение объекта по номеру и номера по объекту для перестановок.
75. Получение объекта по номеру и номера по объекту для сочетаний.
76. Получение объекта по номеру и номера по объекту для размещений.
77. Получение объекта по номеру и номера по объекту для разбиений на слагаемые.
78. Получение объекта по номеру и номера по объекту для скобочных последовательностей с одним типом скобок.
79. Получение объекта по номеру и номера по объекту для скобочных последовательностей с двумя типами скобок.
80. Факториальная система счисления. Рассмотрим систему счисления, где бесконечно много цифр, в i-м разряде (нумерация разрядов с 1 от младшего к старшему) разрешается использовать цифры от 0 до i, вес i-го разряда i!. Докажите, что у каждого положительного числа ровно одно представление в факториальной системе счисления (с точностью до ведущих нулей). Предложите алгоритм перевода числа в факториальную систему счисления.
81. Как связана факториальная система счисления и нумерация перестановок?
82. Фибоначчиева система счисления. Рассмотрим систему счисления, где есть две цифры, 0 и 1. Пусть нумерация разрядов ведется с 0 от младшего к старшему, вес i-го разряда F_i, где F_i- i-е число Фибоначчи (F_0 = 1, F_1 = 1). При этом запрещается исползовать две единицы в соседних разрядах, а также запрещается использовать 1 в разряде 1. Сколько представлений в Фибоначчиевой системе счисления у положительного числа x? Предложите алгоритм перевода числа в фибоначчиеву систему счисления.
83. Свяжите фибоначчиеву систему счисления с нумерацией каких-либо комбинаторных объектов.
84. Предложите алгоритм получения следующего по номеру в лексикографическом порядке разбиения множества \{1, \ldots, n\}на множества. Множества в каждом разбиении упорядочиваются лексикографически по представлениям в виде возрастающего списка элеметов. Разбиения далее упорядочиваются лексикографически как списки множеств.
85. Предложите алгоритм получения следующего по номеру в лексикографическом порядке разбиения множества \{1, \ldots, n\}на множества. Множества в каждом разбиении упорядочиваются лексикографически как битовые вектора. Разбиения далее упорядочиваются лексикографически как списки множеств.
86. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых четность числа 0 равна четности числа 1
87. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых число нулей кратно 3
88. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых нет трех нулей подряд
89. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, которые представляют собой двоичную запись чисел, кратных 5
90. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых число нулей не кратно 3
91. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых есть три нуля подряд. Сделайте вывод из последних двух заданий.
92. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых число нулей кратно 3 и которые представляют собой двоичную запись чисел кратных 5.
93. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых число нулей кратно 3 или которые представляют собой двоичную запись чисел кратных 5. Сделайте вывод из последних двух заданий.
94. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в пятый символ с конца - 0. Можно построить недетерминированный автомат.
95. Постройте детерминированный автомат для предыдущего задания или докажите, что в нем слишком много состояний, чтобы его рисовать ;).
96. Постройте регулярное выражение для языка слов над бинарным алфавитом, в которых нет двух нулей подряд.
97. Постройте регулярное выражение для языка слов над бинарным алфавитом, в которых число 0 кратно 3.
98. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых нет трех одинаковых символов подряд.
99. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, которые заканчиваются на 01001.
100. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, которые содержат подстроку 01001.
101. Постройте конечный автомат для языка слов, которые содержат заданную подстроку s.
102. Постройте недетерминированный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых k-й символ с конца равен 0, содержащий O(k)состояний.
103. Докажите, что любой детерминированный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, в которых k-й символ с конца равен 0, содержит \Omega(2^k)состояний.
104. Можно ли обобщить два предыдущих задания для любого размера алфавита cследующим образом: построить семейство языков, для которых будут существовать НКА, содержащий O(k)состояний, но любые ДКА будут содержать \Omega(c^k)состояний?
105. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, которые представляют собой развернутую двоичную запись чисел кратных 5 (сначала на вход подаются младшие разряды).
106. Постройте конечный автомат для языка слов над бинарным алфавитом, которые представляют собой развернутую двоичную запись чисел кратных 6 (сначала на вход подаются младшие разряды).
107. Рассмотрим язык \{x_0 y_0 z_0 x_1 y_1 z_1 \dots x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1\}\}, где X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0и аналогично представляется Yи Z, причем X + Y = Z. Докажите, что этот язык регулярный.
108. То же, что и предыдущее, только \{x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} \dots x_1 y_1 z_1 x_0 y_0 z_0 \mid \dots \}.
109. Петя строит автомат для конкатенации языков L_1и L_2из автоматов для этих языков. Оказалось, что автомат для L_1содержит только одно терминальное состояние и Петя просто объединил в одно это состояние и начальное состояние автомата для L_2. Всегда ли у Пети получится то, что нужно?
110. Петя строит автомат для объединения языков L_1и L_2из автоматов для этих языков. Решив сэкономить, Петя просто объединил в одно начальные состояния автоматов для L_1и L_2. Всегда ли у Пети получится то, что нужно?
111. Петя строит автомат для замыкания Клини языка L. Решив сэкономить, Петя просто провёл \varepsilon-переход из каждого терминального состояния в начальное состояние, и сделал начальное состояние также терминальным. Всегда ли у Пети получится то, что нужно?
112. Для символа aобозначим как La^{-1}множество слов w, таких что wa \in L. Докажите, что если Lрегулярный, то La^{-1}регулярный.
113. Для символа aобозначим как a^{-1}Lмножество слов w, таких что aw \in L. Докажите, что если Lрегулярный, то a^{-1}Lрегулярный.
114. Докажите или опровергните утверждения: (а) Laa^{-1}=L, (б) La^{-1}a=L, (в) a^{-1}aL=L, (г) a^{-1}aL=L.
115. Пусть Rи S- регулярные языки. Выразите (RS)a^{-1}через R, S, Ra^{-1}и Sa^{-1}. Указание: рассмотрите два случая: \varepsilon \in Sили \varepsilon \not\in S.
116. Обозначим как \min Lмножество слов w \in L, таких что никакой собственный префикс wне является словом языка L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \min Lрегулярный.
117. Обозначим как \max Lмножество слов w \in L, таких что wне является собственным префиксом никакого словом языка L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \max Lрегулярный.
118. Обозначим как \mbox{pref}\,Lмножество префиксов слов языка L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \mbox{pref}\,Lрегулярный.
119. Обозначим как \mbox{suf}\,Lмножество суффиксов слов языка L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \mbox{suf}\,Lрегулярный.
120. Пусть aи b- слова равной длины n. Обозначим как \mbox{alt}(a, b)слово a_1b_2a_2b_2\ldots a_nb_n. Для языков Rи Sобозначим как \mbox{alt}(R, S)множество всех слов, которые получаются как \mbox{alt}(a, b)где a \in R, b \in S. Докажите, что если Rи Sрегулярные, то \mbox{alt}(R, S)регулярный.
121. Пусть aи b- слова. Обозначим как \mbox{shuffle}(a, b)множество слов, которые можно составить, вставив в слово aвсе буквы слова bв том порядке, в котором они идут в b. Например, \mbox{shuffle}(01, 23)=\{0123, 0213, 0231, 2013, 2031, 2301\}. Для языков Rи Sобозначим как \mbox{shuffle}(R, S)объединение всех множеств \mbox{shuffle}(a, b)где a \in R, b \in S. Докажите, что если Rи Sрегулярные, то \mbox{shuffle}(R, S)регулярный.
122. Обозначим как \mbox{cycle}\,Lмножество циклических сдвигов слов языка L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \mbox{cycle}\,Lрегулярный.
123. Обозначим как \mbox{half}\,Lмножество таких слов a, что существует слово bтакой же длины, как и a, что ab \in L. Докажите, что если Lрегулярный, то и \mbox{half}\,Lрегулярный.
124. Докажите нерегулярность языка, каждое слово которого содержит поровну 0 и 1.
125. Докажите нерегулярность языка палиндромов.
126. Докажите нерегулярность языка тандемных повторов.
127. Докажите нерегулярность языка 0^n1^m, n \le m
128. Докажите нерегулярность языка 0^n1^m, n \ne m
129. Докажите нерегулярность языка 0^{n^2}
130. Докажите нерегулярность языка 0^p, p— простое
131. Докажите нерегулярность языка двоичных записей простых чисел
132. Докажите нерегулярность языка 0^n1^m, gcd(n, m) = 1
133. Докажите нерегулярность языка 0^a1^b2^c, a \ne bи b \ne c
134. Приведите пример нерегулярного языка, для которого выполнена лемма о разрастании
135. Докажите, что если состояния uи vавтомата различимы, то uи vразличимы строкой длины O(n^2).
136. Докажите, что если состояния uи vавтомата различимы, то uи vразличимы строкой длины O(n).
137. Предложите алгоритм проверки того, что регулярный язык бесконечен
138. Предложите алгоритм подсчёта числа слов в регулярном языке (если язык бесконечен, алгоритм должен выдать информацию, что он бесконечен). Алгоритм должен работать за полином от числа состояний в автомате.
139. Предложите алгоритм проверки того, что регулярный язык является беспрефиксным
140. Предложите алгоритм проверки того, что один регулярный язык является подмножеством другого
141. Предложите алгоритм проверки того, что регулярные языки не пересекаются
142. Предложите алгоритм проверки того, что объединение двух заданных регулярных языков совпадет с некоторым третьим заданным.
143. Приведите пример регулярного языка и двух неизоморфных недетерминированных автоматов для него, которые при этом имеют минимальное число состояний среди всех недетерминированных автоматов для этого языка.
144. Рассмотрим язык \{x_0 y_0 z_0 x_1 y_1 z_1 \dots x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1\}\}, где X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0и аналогично представляется Yи Z, причем X \times Y = Z. Докажите, что этот язык не является регулярным.
145. Рассмотрим отношение на словах L: x \equiv y, если для любых u, vвыполнено uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L. Классы эквивалентности этого отношения называются синтаксическим моноидом языка L. Докажите, что Lрегулярный тогда и только тогда, когда синтаксический моноид Lконечен.
146. Придумайте семейство регулярных языков L_i, у которых ДКА для L_iсодержит O(i)состояний, а синтаксический моноид L_iимеет неполиномиальный размер.
147. Постройте КС-грамматику для правильных скобочных последовательностей с двумя типами скобок.
148. Постройте КС-грамматику для языка 0^n1^n.
149. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, в которых число нулей равно числу единиц. Докажите, что ваша грамматика является правильной.
150. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, в которых число нулей равно удвоенному числу единиц. Докажите, что ваша грамматика является правильной.
151. Постройте КС-грамматику для языка 0^k1^n2^{k+n}.
152. Постройте КС-грамматику для языка 0^k1^n2^{k+n}\cup 1^k0^n2^{k+n}. Сделайте вывод о свойствах КС-языков.
153. Постройте КС-грамматику для языка 0^k1^n2^{k+n}1^i0^j2^{i+j}. Сделайте вывод о свойствах КС-языков.
154. Постройте КС-грамматику для языка 0^i1^j2^k, i \ne jили j \ne k.
155. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, которые не являются палиндромами.
156. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, которые не являются правильными скобочными последовательностями.
157. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, в которых число нулей не равно числу единиц.
158. Постройте КС-грамматику для языка слов над алфавитом \{0, 1\}, которые не являются тандемными повторами.
159. Верно ли, что любую КС-грамматику можно привести к форме, когда любое правило имеет вид A\to BCDили A\to a?
160. Верно ли, что любой КС-язык над односимвольным алфавитом является регулярным?
161. Докажите, что язык не является КС: 0^i1^j2^k, i<j<k.
162. Докажите, что язык не является КС: 0^n1^n2^k, k<n.
163. Докажите, что язык не является КС: 0^p, pпростое.
164. Докажите, что язык двоичных записей простых чисел не является КС.
165. Докажите, что язык не является КС: 0^i1^j, j=i^2.
166. Докажите, что язык не является КС: 0^n1^n2^k, n<k<2n.
167. Докажите, что язык не является КС: ww^Rw, w- строка из 0 и 1, w^R- развернутая строка w.
168. Докажите, что язык \{0^n1^m2^n3^m\}не является КС.
169. Докажите, что язык \{0^n1^m2^n| n \ne m\}не является КС.
170. Приведите пример не КС-языка, для которого выполнена лемма о разрастании.
171. Постройте МП-автомат для языка 0^n1^n.
172. Постройте МП-автомат для языка слов, где число нулей равно числу единиц.
173. Постройте МП-автомат для языка 0^n1^{2n}.
174. Постройте МП-автомат для языка 0^n1^m2^{n+m}.
175. Постройте МП-автомат для языка 0^{2n}1^n.
176. Постройте МП-автомат для языка 0^n1^n\cup0^n1^{2n}.
177. Постройте МП-автомат для языка слов 0^n1^m, где n \le m \le 2n.
178. Докажите, что для любых pи qсуществует МП-автомат для языка слов 0^n1^m, где n/m=p/q
179. Постройте автомат с магазинной памятью для языка слов над алфавитом \{0, 1, 2\}, которые содержат равное число двоек и равное число единиц, или равное число двоек и равное число нулей.