**Упорядоченная пара** — двухэлементное семейство, где множеством индексов является \{ 1, 2 \}. При этом (a; b) = (c; d) ⬄ (a = c) и (b = d). Порядок элементов существенен, даже если элементы совпадают.

**Декартовым** или **прямым произведением** множеств Xи Yназывается множество всех упорядоченных пар, таких, что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y:   
X \times Y =  \{ (x, y): x \in X, y \in Y \}

Обобщение: X1 × ... × Xm = {(x1, ... , xm) : xi ∈ Xi при всех i = 1, ... , m}

**Операции над множествами**

Пусть { \{ X_{\alpha} \} }_{ \alpha \in A }— семейство множеств. **Объединением** семейства { \{ X_{\alpha} \} }_{ \alpha \in A } называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X_{\alpha}:   
\underset{\alpha \in A}{\bigcup} X_{\alpha} = \{ x: \exists \alpha \in A \ x \in X_{\alpha} \}

Пусть { \{ X_{\alpha} \} }_{ \alpha \in A }— семейство множеств. **Пересечением** семейства { \{ X_{\alpha} \} }_{ \alpha \in A } называется множество всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств X_{\alpha}:   
\underset{\alpha \in A}{\bigcap} X_{\alpha} = \{ x: \forall \alpha \in A \ x \in X_{\alpha} \}

**Разностью** множеств Xи Yназывается множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y:   
X \backslash Y = \{ x: x \in X, x \not\in Y \}

Частный случай Y ⊂ X. В таком случае разность X∖Y называется еще дополнением множества Y до множества X. Дополнение X до основного множества U называется проще дополнением X и обозначается U∖X или XC.

**Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем**

Множество ℝ̅ называется расширенной числовой прямой; к вещественным числам ℝ̅ = ℝ ⋃{ −∞, +∞} добавляются два новых символа (несобственных элемента): −∞ и +∞.

Считают, что ∀x ∈ ℝ: −∞ < x < +∞ и −∞ < +∞.

Полагают:

x + (+∞) = (+∞) + x = +∞, x ∈ ℝ

x + (−∞) = (−∞) + x = −∞, x ∈ ℝ

x \* (+∞) = (+∞) \* x = http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%5C%7B%20%5Cbegin%7Bmatrix%7D%20%0A%2B%5Cinfty%2C%20%26%20x%3E0%20%0A%20%5C%5C%20%0A%20-%5Cinfty%2C%20%26%20x%3C0%0A%20%5Cend%7Bmatrix%7D

x \* (−∞) = (−∞) \* x = http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%5C%7B%20%5Cbegin%7Bmatrix%7D%20%0A-%5Cinfty%2C%20%26%20x%3E0%20%0A%20%5C%5C%20%0A%20%2B%5Cinfty%2C%20%26%20x%3C0%0A%20%5Cend%7Bmatrix%7D

(+∞) + (+∞) = +∞

(−∞) + (−∞) = −∞

(+∞) \* (+∞) = (−∞) \* (−∞) = +∞

(+∞) \* (−∞) = (−∞) \* (+∞) = −∞

Операциям (+∞) + (−∞) , (−∞) + (+∞) , (+∞) − (+∞) , (−∞) − (−∞) , 0 \* (±∞) не приписывается никакого значения.

**Подмножество в R, ограниченное сверху**

Множество E \subset \mathbb{R} называется **ограниченным сверху**, если существует такое число M \in \mathbb{R}, что x \leqslant Mдля всех x \in E. Число Mназывается **верхней границей множества**.

**Максимальный элемент множества**

Число Mназывается **максимумом** или **наибольшим элементом** множества E \subset \mathbb{R}, если M \in E и x \leqslant Mдля всех x \in E. Обозначается \max E.

**Последовательность**

Отображение множества натуральных чисел \mathbb{N}в множество Yназывается **последовательностью** в YОбозначается как \{ x_n \}.

**Образ и прообраз множества при отображении**

Пусть f: X \to Y, \ A \subset X. Множество f(A) = \{ y \in Y: \exists x \in A \ f(x) = y \} называется **образом** множества A при отображении f.

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y, \ B \subset Y. Множество f^{-1}(B) = \{ x \in X: \ f(x) \in B \}называется **прообразом** множества Bпри отображении f. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=10)**] Инъекция, сюръекция, биекция**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y. Если f(X) = Y, то отображение fназывается **сюръективным**, или **сюръекцией**, или **отображением "на"**. |

Иными словами: f(x) = yимеет хотя бы одно решение в X.

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y. Если для любых различных элементов Xих образы различны, то отображение fназывается **инъективным**, или **инъекцией**, или **обратимым** отображением. |

Иными словами: f(x) = yимеет не более одного решения в X.

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y. Если отображение fодновременно инъективно и суръективно, то оно называется **биективным**, или **биекцией**, или **взаимно-однозначным** отображением (соответствием). |

Иными словами: f(x) = yимеет ровно одно решение в X.

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=11)**] Целая часть числа**

Пусть x \in \mathbb R. Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется целой частью xи обозначается [x].

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=12)**] Векторнозначаная функция**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| **Векторозначная функция (вектор-функция)** — отображение fиз Xв \mathbb{R} ^mили \mathbb{C} ^m. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=13)**] Координатная функция**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Отображение f_kиз Xв \mathbb{R}или \mathbb{C}, которое каждому элементу xсопоставляет число f_k (x), называют **k-ой координатной функцией** отображения f \left ( k \in \left [ 1 \ : \ m \right ] \right )и пишут f = (f_1, ..., f_m). |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=14)**] График отображения**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y. **Графиком** отображения fназывается множество  \Gamma_f = \{ \left ( x, y \right ) : x \in X, y = f(x) \} |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=15)**] Композиция отображений**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y, g: Y_0 \ \to \ Z, f(X) \subset Y_0. Отображение h: X \ \to \ Z, действующее по правилу  h(x) = g(f(x)), \ x \in X  называется **композицией** или **суперпозицией** отображений fи g, а также **сложным отображением** и обозначается g \circ f. При этом gназывается **внешним**, а f— **внутренним отображением**. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=16)**] Сужение и продолжение отображений**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: X \to Y, X_0 \subset X. Отображение, которое каждому x \in X_0сопоставляет f(x), называется **сужением** отображения fна множество X_0и обозначается f | _{X_0}. Если отображение gесть сужение отображения f, то fназывается **продолжением**, **распространением** или **расширением** g. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=17)**] Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \{ x_n \} _{n = 1} ^{\infty}— последовательность вещественных чисел. Число a \in \mathbb{R}называют **пределом последовательности** \{ x_n \}и пишут  \lim_{n \to \infty}x_n , если для любого положительного числа \varepsilonсуществует такой положительный номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется равенство \left | x_n - a \right | < \varepsilon:  \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \ \left | x_n - a \right | < \varepsilon |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left ( X, \rho \right )— метрическое пространство, \{ x_n \} _{n = 1} ^{\infty}— последовательность в X. Точку a \in Xназывают **пределом последовательности** \{ x_n \}и пишут  \lim_{n \to \infty}x_n,  если для любого положительного числа \varepsilonсуществует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется равенство \rho(x_n, a) < \varepsilon:  \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \ \rho(x_n, a) < \varepsilon |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=18)**] Предел последовательности (определение на языке окрестностей)**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Интервал \left ( a - \varepsilon, a + \varepsilon \right )называется \varepsilon-**окрестностью** точки aи обозначается V_{\alpha} (\varepsilon)или V_{\alpha}, если значение \varepsilonнесущественно. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Число aназывается **пределом последовательности** \{ x_n \}, если для любой окрестности точки aвсе члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этой окрестности. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=19)**] Метрика, метрическое пространство, подпространство**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Функция \rho: X \times X \to \mathbb{R}_{+}называется **метрикой** или **расстоянием** в множестве X, если она удовлетворяет следующим условиям:   1. \rho (x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \ x, y \in X 2. \rho (x, y) = \rho (y, x), \ x, y \in X 3. \rho (x, z) \leqslant \rho (x, y) + \rho (y, z), \ x, y, z \in X |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пара \left ( X, \rho \right )— множество с метрикой в нём — называется **метрическим пространством**. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть Y \subset X, \rho— метрика в X. Метрическое пространство \left ( Y, \rho | _{Y \times Y} \right )называется подпространством метрического пространства \left ( X, \rho \right ). |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=20)**] Шар, замкнутый шар, окрестности в R с чертой**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left ( X, \rho \right )— метрическое пространство, a \in X, r > 0. Множество  B(a, r) = \{ x \in X: \rho(x, a) < r \} называется **открытым шаром** радиуса rс центром в точке a, или **окрестностью** (r-**окрестностью**) точки aи обозначается ещё V_{a}(r)или V_a, если значение rнесущественно. Множество  \bar{B}(a, r) = \{ x \in X: \rho(x, a) \leqslant r \} называется **замкнутым шаром**, а множество  S(a, r) = \{ x \in X: \rho(x, a) = r \}  — **сферой** радиуса rс центром в точке a. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=21)**] Векторное пространство**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть K— поле, X— множество, и над элементами Xи Kопределены две операции: сложение X \times X \overset{+}{\to} Xи умножение K \times X \overset{\cdot}{\to} X, удовлетворяющие следующим условиям:   1. (x + y) + z = x + (y + z), \ x, y, z \in X 2. x + y = y + x, \ x, y \in X 3. \exists \theta \in X \ \forall x \in X \ 0 \cdot x = \theta 4. ( \lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x, \ x \in X, \lambda, \mu \in K 5. \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y, \ x, y \in X, \lambda \in K 6. (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x), \ \ x \in X, \lambda, \mu \in K 7. 1 \cdot x = x, \ x \in X   Тогда Xназывается **векторным пространством** или **линейным множеством** над полем K |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=22)**] Норма**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть X— векторное пространство над \mathbb{R}или \mathbb{C}. **Нормой** в Xназывается функция p: X \to \mathbb{R}_{+}, удовлетворяющая следующим условиям:   1. Положительная определённость: p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta 2. Положительная однородность: p(\lambda x) = \left | \lambda \right | p(x) 3. Неравенство треугольника (полуаддитивность): p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).   Обозначается как p(x) = \left \Vert x \right \Vert. Пара \left ( X, \left \Vert \cdot \right \Vert \right )называется **нормированным пространством**. Если функция p: X \to \mathbb{R}_{+}удовлетворяет аксиомам 2 и 3, то pназывается **полунормой**. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=23)**] Скалярное произведение**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть X— векторное пространство над \mathbb{R}или \mathbb{C}. Функция \varphi: X \times X \to \mathbb{R}(или \mathbb{C}называется **скалярным произведением** в X(обозначение: \varphi (x, y) = \left ( x, y \right ), если она удовлетворяет следующим свойствам:   1. Линейность по первому аргументу: для всех x_1, x_2, y \in Xи всех \lambda, \mu \in \mathbb{R}(или \mathbb{C}) \left ( \lambda x_1 + \mu x_2, y \right ) = \lambda \cdot \left ( x_1, y \right ) + \mu \cdot \left ( x_2, y \right ) 2. Эрмитовская симметричность: \left ( y, x \right ) = \overline{\left ( x, y \right )}(в вещественном случае черту можно опустить) 3. Положительная определённость: \left ( x, x \right ) \geqslant 0; \ \left ( x, x \right ) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta |

Свойства скалярного произведения:

1. \left ( x, y_1 + y_2 \right ) = \left ( x, y_1 \right ) + \left ( x, y_2 \right )
2. \left ( x, \lambda y \right ) = \bar{\lambda} \left ( x, y \right )
3. \left ( \theta, y \right ) =  \left ( x, \theta \right ) = 0

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=24)**] Последовательность, сходящаяся к бесконечности**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Последовательность, стремящаяся к бесконечности, называется **бесконечно большой**. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=25)**] Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть E \subset \mathbb{R}, \ E \neq \varnothing, Eограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множества Eназывается **точной верхней границей**, или **верхней гранью**, или **супремумом** множества Eи обозначается \sup E. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть E \subset \mathbb{R}, \ E \neq \varnothing, Eограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множества Eназывается **точной нижней границей**, или **нижней гранью**, или **инфимумом** множества Eи обозначается \inf E. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=26)**] Функция ограниченная сверху, снизу**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Функция называется ограниченной (сверху, снизу) на множестве D, если множество f(D)ограничено (сверху, снизу). |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=27)**] Строго и не строго монотонная функция**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть D \subset X \subset \mathbb{R}. Функция f: X \to \mathbb{R}называется:  **возрастающей** на множестве D, если для любых x_1, x_2из Dтаких, что x_1 < x_2, будет f(x_1) \leqslant f(x_2);  **строго возрастающей** на множестве D, если для любых x_1, x_2из Dтаких, что x_1 < x_2, будет f(x_1) < f(x_2);  **убывающей** на множестве D, если для любых x_1, x_2из Dтаких, что x_1 < x_2, будет f(x_1) \geqslant f(x_2)  **строго убывающей** на множестве D, если для любых x_1, x_2из Dтаких, что x_1 < x_2, будет f(x_1) > f(x_2). |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=28)**] Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Точка aназывается **внутренней точкой** множества D, если существует окрестность точки a, содержащаяся в D. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Множество Dназывается **открытым**, если все его точки внутренние. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Множество всех внутренних точек множества Dназывается **внутренностью** Dи обозначается \overset{\circ}{D}или Int D. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=29)**] Предельная точка множества**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Точка aназывается **предельной точкой** или **точкой сгущения** множества D, если в любой окрестности точки aнайдётся точка множества D, отличная от a. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=30)**] Замкнутое множество, замыкание, граница**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Если точка aпринадлежит множеству D, но не является его предельной точкой, то aназывается **изолированной точкой** множества D. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Множество Dназывается **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Точка aназывается **точкой прикосновения** множества D, если в любой окрестности точки aнайдётся точка множества D. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Множество всех точек прикосновения множества Dназывается **замыканием** Dи обозначается \bar{D}или Cl D. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Точка aназывается **граничной точкой** множества D, если в любой окрестности aнайдётся как точка, принадлежащая D, так и точка, не принадлежащая D. Множество всех граничных точек множества Dназывается **границей** Dи обозначается Fr D. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=31)**] Верхний и нижний пределы**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть последовательность \{ x_n \}ограничена сверху. Величина \overline{\underset{n \to \infty}{\lim}} = \underset{n \to \infty}{\lim} \underset{k \geqslant n}{\sup} x_kназывается **верхним пределом** последовательности \{ x_n \}. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть последовательность \{ x_n \}ограничена снизу. Величина \underline{\underset{n \to \infty}{\lim}} = \underset{n \to \infty}{\lim} \underset{k \geqslant n}{\inf} x_kназывается **нижним пределом** последовательности \{ x_n \}. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=32)**] Частичный предел**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Точка aназывается **частичным пределом** последовательности \{ x_n \}, если существует подпоследовательность \{ x_{n_k} \}, стремящаяся к a. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=33)**] Определения предела отображения (3 шт)**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left ( X, \rho_x \right ), \left ( Y, \rho_y \right )— метрические пространства, f: D \subset X \to Y, a \in X— предельная точка D, A \in Y. Точку Aназывают пределом отображения fв точке aи пишут \underset{x \to a}{\lim} f(x) = A, если выполняется одно из следующих утверждений:   * Определение на \varepsilon-языке, или по Коши.   Для любого положительного числа \varepsilonсуществует такое положительное число \delta, что для всех точек xмножества D, отличных от aи удовлетворяющих неравенству \rho_X (x, a) < \delta, выполняется неравенство \rho_Y (f(x), A) < \varepsilon:  \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \backslash \{ a \} : \ \rho_X (x, a) < \delta \ \rho_Y (f(x), A) < \varepsilon.   * Определение на языке окрестностей.   Для любой окрестности V_Aточки Aсуществует такая окрестность V_aточки a, что образ пересечения проколотой окрестности V_aс множеством Dпри отображении fсодержится в окрестности V_A:  \forall V_A \ \exists V_a \ f(V_a \cap D) \subset V_A.   * Определение на языке последовательностей, или по Гейне.   Для любой последовательности \{ x_n \}точек множества D, отличных от a, стремящейся к a, последовательность \{ f(x_{n}) \}стремится к A:  \forall \{ x_n \} : \ x_n \in D \backslash \{ a \} , x_n \to a \ f(x_{n}) \to A. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=34)**] Предел по множеству**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: D \subset X \to Y, \ D_1 \subset D, a— предельная точка D_1. Предел \underset{x \to a}{\lim} f | _{D_1} (x)называется **пределом** отображения fв точке a**по множеству** D_1. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=35)**] Односторонние пределы**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: D \subset \mathbb{R} \to Y, \ a \in \mathbb{R}.   1. Если a— предельная точка множества D_1 = D \cap \left ( - \infty, a \right ), то предел отображения fв точке aпо множеству D_1называется **левосторонним пределом** отображения fв точке aи обозначается \underset{x \to a-}{\lim} f(x)или f(a-). 2. Если a— предельная точка множества D_2 = D \cap \left ( a, + \infty \right ), то предел отображения fв точке aпо множеству D_2называется **правосторонним пределом** отображения fв точке aи обозначается \underset{x \to a+}{\lim} f(x)или f(a+). |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=36)**] Компактное множество**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Семейство множеств \{ G_{\alpha} \} _{\alpha \in A}называется **покрытием** множества K, если K \subset \underset{\alpha \in A}{\bigcup} G_{\alpha}. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left ( X, \rho \right )— метрическое пространство, K \in X. Покрытие \{ G_{\alpha} \} _{\alpha \in A}множества Kназывается **компактным**, если из любого открытого покрытия Kможно извлечь конечное подпокрытие |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=37)**] Фундаментальная последовательность**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \{ x_n \} _{n = 1} ^{\infty}— последовательность в метрическом пространстве X. Говорят, что последовательность \{ x_n \}**сходится в себе**, если для любого положительного числа \varepsilonсуществует такой номер N, что для всех номеров nи l, больших N, выполняется неравенство \rho (x_n, x_l) < \varepsilon:  \forall \varepsilon > 0 \ \exists N  \ \forall n, l > N \ \rho (x_n, x_l) < \varepsilon  Сходящуюся в себе последовательность также называют **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=38)**] Полное метрическое пространство**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пространство \mathbb{R}^mполно \Longleftrightarrowв \mathbb{R}^mлюбая сходящаяся в себе последовательность сходится. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=39)**] Непрерывное отображение**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left ( X, \rho_X \right )и \left ( Y, \rho_Y \right )— метрические пространства, f: D \subset X \to Y, \ x_0 \in D. Отображение fназывается **непрерывным** в точке x_0, если выполняется одно из следующих утверждений:   1. Предел отображения fв точке x_0существует и равен f(x_0 ). Это определение применимо, если x_0— предельная точка D. 2. По Коши: для любого положительного числа \varepsilonсуществует такое положительное число \delta, что для всех точек xмножества D, удовлетворяющих неравенству \rho_X (x, x_0) < \delta, выполняется неравенство \rho_Y (f(x), f(x_0)) < \varepsilon: \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \rho_X (x, x_0) < \delta \ \rho_Y (f(x), f(x_0)) < \varepsilon. 3. На языке окрестностей: для любой окрестности V_{f(x_0)}точки f(x_0)существует такая окрестность V_{x_0}точки x_0, что образ пересечения окрестности V_{x_0}с множеством Dсодержится в окрестности V_{f(x_0)}: \forall V_{f(x_0)} \ \exists V_{x_0} \ f \left ( V_{x_0} \cap D \right ) \subset V_{f(x_0)}. 4. По Гейне: для любой последовательности \left \{ x_n \right \}точек множества D, стремящейся к x_0, последовательность \left \{ f(x_n) \right \}стремится к f(x_0): \forall \{ x_n \} : \ x_n \in D, x_n \to x_0 \ f(x_n) \to f(x_0). 5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения: \Delta y \underset{\Delta x \to \theta x}{\to} \theta_Y. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=40)**] Непрерывность слева**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть Y— метрическое пространство, f: D \subset \mathbb{R} \to Y, \ x_0 \in D. Если сужение отображения fна множество E_1 = D \cap \left ( - \infty, x_0 \right ](E_2 = D \cap \left [ x_0, + \infty \right ) ) непрерывно в точке x_0, то говорят, что отображение f**непрерывно слева (справа)** в точке x_0. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=41)**] Функция равномерно непрерывная на множестве**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Функция f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}называется **равномерно непрерывной** на множестве D, если для любого положительного числа \varepsilonсуществует такое положительное число \delta, что для всех точек \bar{x}, \bar{\bar{x}}множества D, удовлетворяющих неравенству \left | \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right | < \delta, выполняется неравенство \left | f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}}) \right | < \varepsilon:  \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D: \left | \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right | < \delta \ \left | f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}}) \right | < \varepsilon. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=42)**] Степенная функция**

e_{\alpha} (x) = x^{\alpha}

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=43)**] Показательная функция**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть a > 0, x \in \mathbb{R}. Положим a^x = \underset{r \to x}{\lim} a^r | _{\mathbb{Q}}. При a > 0, \ a \neq 1функция a^x, \ x \in {\mathbb{R}}называется **показательной функцией с основанием** a. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=44)**] Логарифм**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть a > 0, a \neq 1. Функция, обратная к показательной с основанием a, называется **логарифмом по основанию** a. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=45)**] О большое и o маленькое, эквивалентные функции или асимптотически равные функции**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть X— метрическое пространство, D \subset X, \ f, g: D \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C}), x_0— предельная точка D. Если существует функция \varphi: D \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})и окрестность V_{x_0}точки x_0, такие, что f(x) = \varphi (x) g(x)для всех x \in V_{x_0} \cap Dи   1. \varphiограничена на V_{x_0} \cap D, то говорят, что функция f**ограничена по сравнению с** gпри x \to x_0, и пишут f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0; 2. \varphi (x) \to 0, то говорят, что функция f**бесконечно малая по сравнению с** gпри x \to x_0, и пишут f(x) = o(g(x)), \ x \to x_0; 3. \varphi (x) \to 1, то говорят, что функция f**эквивалентны** или **асимптотически равны** при x \to x_0, и пишут f(x) \sim g(x), \ x \to x_0. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=46)**] Асимптотическое разложение**

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=47)**] Наклонная асимптота графика**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть \left \langle a, + \infty \right ) \subset D \subset \mathbb{R}, \ f: D \to \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. Прямая y = \alpha x + \betaназывается **наклонной асимптотой** функции fпри x \to + \infty, если  f(x) = \alpha x + \beta + o(1), \ x \to + \infty. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=48)**] Функция, дифференцируемая в точке**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: \left \langle a, b \right \rangle \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \left \langle a, b \right \rangle. Если существует такое число A \in \mathbb{R}, что f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \ x \to x_0, то функция fназывается **дифференцируемой** в точке x_0. При этом число Aназывается **производной** функции fв точке x_0. |

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: \left \langle a, b \right \rangle \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \left \langle a, b \right \rangle. Если существует предел \underset{x \to x_0}{\lim} {{f(x) - f(x_0)} \over {x - x_0}}, равный числу A \in \mathbb{R}, то функция fназывается **дифференцируемой** в точке x_0. При этом число Aназывается **производной** функции fв точке x_0. |

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=49)**] Производная**

|  |
| --- |
| **Определение:** |
| Пусть f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, D_1— множество дифференцируемости f(множество всех точек D, где функция дифференцируема). Функция f': D_1 \to \mathbb{R}, которая каждому x \in D_1сопоставляет число f'(x), называется **производной функцией** функции f. |

f'(x_0) = \underset{x \to x_0}{\lim} {{f(x) - f(x_0)} \over {x - x_0}}

**[**[**править**](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A3%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA:Katyatitkova/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD&action=edit&section=50)**] Левостороняя и правосторонняя производные**

Правосторонняя: f'_{+} (x_0) = \underset{x \to x_{0+}}{\lim} {{f(x) - f(x_0)} \over {x - x_0}}

Левосторонняя: f'_{-} (x_0) = \underset{x \to x_{0-}}{\lim} {{f(x) - f(x_0)} \over {x - x_0}}