2.1) usando a equação Ampere - Maxwell

$$\text{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

aplicando div

$$\text{div rot}\, \bar{H} = \text{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \rightsquigarrow \text{div rot}\, \bar{H} = 0$$

$$\text{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = 0 \rightsquigarrow \text{aplicando teorema da divergência}$$

$$\int_V \text{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) dV = \oint_{S(V)} \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \cdot d\bar{S} = 0 \quad //$$

A partir das equações de Maxwell, demostrar que, para qualquer superfície fechada S temos :

$$\oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

comparar a amplitude das correntes de condução e a amplitude das correntes de deslocamento em função da frequência para diferentes materiais

2.2) $V = V_0 \, sen(\omega t)$

pode considerar um campo elétrico da forma:

$$\vec{E} = E_0 \, sen(\omega t) \, \hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \boxed{\sigma E_0} sen(\omega t) \, \hat{x}$$

$$E_x = \frac{V}{d} = \frac{V_0 \, sen(\omega t)}{d}$$

$$J_x = \sigma E_x = \frac{\sigma V_0 \, sen(\omega t)}{d}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ (considerando a permissividade constante)

$$= \boxed{\omega \varepsilon E_0} cos(\omega t) \, \hat{x}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\varepsilon V_0 \omega \cos(\omega t)}{d}$$

visto que as densidades de correntes são defasadas, comparamos somente a amplitude

na verdade, a permissividade e a condutividade variam com a frequência (em particular par o mar e a terra). Contudo, nesse exercício, os valores fornecidos são considerados constantes

$$\frac{\overbrace{\frac{\varepsilon V_0 \omega}{d}}^{\sim \frac{\partial D}{\partial t}}}{\underbrace{\frac{\sigma V_0}{d}}_{\sim J}} = \frac{\varepsilon \omega}{\sigma}$$ ~ usar como meio de comparação

o objetivo do exercício é comparar a amplitude das correntes de condução (J) e a amplitude das correntes de deslocamento (dD/dt) em função da frequência para diferentes materiais:

$$(\omega \varepsilon / \sigma) = (\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r / \sigma)$$

material	cond. (S/m)	perm. relativa	60Hz	1kHz	1MHz	1GHz
cobre	5.8E7	1				
chumbo	0.5E7	1				
mar	4	81				
terra	1E-3	10				

Ex. 2.2 Cap. 2

2.3) densidades de correntes constantes: $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{H} = \bar{J} \\ \boxed{\text{div } \bar{B} = 0} \\ \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \boxed{\text{div } \bar{D} = \rho} \end{cases}$$

//

Exercício:
Estabeleça as equações de Maxwell para campos magnéticos produzidos por densidades de correntes e ~~de cargas constantes~~.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$ (por M-G)

$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}}$ (M-A)

$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$ (M-A)

$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ $(\vec{B} = \mu \vec{H})$

$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = \vec{0}}$

2.4) $\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial [B_0 \text{sen}(\omega t) \hat{i}]}{\partial t}$

$\text{rot } \bar{E} = -B_0 \omega \cos(\omega t) \hat{i} \rightsquigarrow \bar{J} = 0$

$\sigma . \bar{E} = 0$

$\text{rot } \bar{E} = 0$

$B_0 \omega \cos(\omega t) = 0$

↳ note que a expressão pode ser zero, mas não para todo t, invalidando a igualdade //

Mostrar que, numa região onde a densidade de cargas livres e a densidade de corrente de condução são nulas, o seguinte campo de indução magnética não satisfaz as equações de Maxwell

$\vec{B} = B_0 \text{sen}(\omega t) \hat{i}$

$(\hat{i} = \hat{x})$

Faltaram algumas condições no livro, no texto do exercício, por exemplo:
a região considerada fica num material de condutividade não nula e sem movimento com relação ao sistema de coordenadas utilizado para o cálculo dos campos

$$\begin{cases} \sigma \neq 0 \\ \vec{J} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

(porque $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$)

2.5) $\text{rot}\,\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\text{rot}\,\bar{H} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\rightsquigarrow \bar{J} = 0$

Mostrar que, em regiões onde a densidade de cargas livres e a densidade de corrente de condução são nulas temos:
M-A => M-G
M-F => M-T

a) $\text{rot}\,\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\rightsquigarrow$ aplicando div

$$\text{div}\,\cancel{\text{rot}}\,\bar{E} = -\text{div}\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) \rightsquigarrow \text{div}\,\text{rot}\,\bar{E} = 0$$

$$\text{div}\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\text{div}\,\bar{B})}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow \text{div}\,\bar{B} = 0$$

b) $\text{rot}\,\bar{H} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\rightsquigarrow$ aplicando div

$$\text{div}\,\cancel{\text{rot}}\,\bar{H} = \text{div}\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \rightsquigarrow \text{div}\,\text{rot}\,\bar{H} = 0$$

$$\text{div}\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\text{div}\,\bar{D})}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow \text{div}\,\bar{D} = 0$$

Faltou, no texto do exercício, dizer que em algum instante (por exemplo t=0) as equções de M-G e M-T são verficadas, para justificas as ultimas implicações dessas deduçẽos

2.7) $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\rightsquigarrow$ aplicando div

Demostre que, em regime estático, em um meio uniforme (conditividade e permissividade uniformes), e com densidade de cargas livres nula, temos:
M-A => M-G

$\text{div}\,\cancel{\text{rot}}\,\bar{H} = \text{div}\,\bar{J}$

$\text{div}\,\bar{J} = 0 \rightsquigarrow \bar{J} = \sigma\bar{E} = \sigma\dfrac{\bar{D}}{\varepsilon}$

$\dfrac{\cancel{\sigma}}{\cancel{\varepsilon}}\,\text{div}\,\bar{D} = 0$ //

podem sair do divergente porque são uniformes (ou seja, independentes da posição e então das variáveis de espaço)

2.8) $V = V_0\,\text{sen}(\omega t)$

$J = \dfrac{\partial D}{\partial t}$

$E = \dfrac{V}{d} = \dfrac{V_0\,\text{sen}(\omega t)}{d}$

$J = \sigma E = \dfrac{\sigma V_0\,\text{sen}(\omega t)}{d}$ //

$\dfrac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon\dfrac{\partial E}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon\omega V_0 \cos(\omega t)}{d}$ //

visto que são defasados, igualar somente a amplitude

Em um capacitor de placas planas paralelas, com dielétrico de permissividade relativa 9 e condutividade 4S/M, sobr o qual é aplicada um tensão elétrica senoidal, calcular a frequência para a qual a amplitude da corrente de deslocamento é igual à amplitude da corrente de condução

$\dfrac{\sigma \cancel{V_0}}{\cancel{d}} = \dfrac{\varepsilon\omega \cancel{V_0}}{\cancel{d}} \rightsquigarrow \varepsilon = 9\varepsilon_0$

$\sigma = 9\varepsilon_0\omega$

$\omega = 5{,}02083 \cdot 10^{10}$

$\omega = 2\pi f \rightsquigarrow f = 7990909429 \cong 8\,GHz$ //

2.9) $\bar{E} = E_0 \cos(\omega t)\,\hat{i}$

considerando esse campo elétrico com Eo=100V/m em um dielétrico de permissividade relativa 25, calcular o valor pico da densidade de corrente de deslocamento

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\underbrace{\varepsilon E_0 \omega}_{D_0} \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{i}$$

$$|D_0| = \varepsilon E_0 \omega \rightsquigarrow \varepsilon = 25\varepsilon_0$$

$$|D_0| = 25\varepsilon_0 \cdot 100 \cdot 10^9 = 22{,}13\ A/m^2$$

Amplitude

2.10) $\bar{E} = 120\pi \cos(10^6\pi t - \beta x)\hat{j}$

$\bar{H} = A\pi \cos(10^6\pi t - \beta x)\hat{k}$

A partir dessa expressões para o campo elétrico e o campo magnético, determinar o valor de (A) e (beta) em um meio linear, isotrópico, homogêneo (propriedades uniformes) com

$\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 4$, $\sigma = 0$

$\vec{J} = \vec{0}$, $\rho = 0$

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 10^6\pi\mu A\pi\,\text{sen}(10^6\pi t - \beta x)\hat{k} \quad (1)$$

$$\text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial x}\hat{k} - \cancel{\frac{\partial E}{\partial z}}^{\,0}\hat{i}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}\hat{k} = \beta . 120\pi\,\text{sen}(10^6\pi t - \beta x)\hat{k} \quad (2)$$

(1) = (2)

$$10^6\pi\mu A\cancel{\pi}\,\cancel{\text{sen}}(10^6\pi t - \beta x)\hat{k} = \beta\, 120\cancel{\pi}\,\cancel{\text{sen}}(10^6\pi t - \beta x)\hat{k}$$

$$10^6\pi\mu A = \beta\, 120 \,//$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \epsilon \cdot -10^6\pi\, 120\pi\,\text{sen}(10^6\pi t - \beta x)\hat{j} \quad (3)$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \cancel{\frac{\partial H}{\partial y}\hat{i}} - \frac{\partial H}{\partial x}\hat{j}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x}\hat{j} = \beta A\pi \,\text{sen}(10^6\pi t - \beta x)\,\hat{j} \; (4)$$

$(4) = (3)$

$$+\beta A\cancel{\pi}\,\cancel{\text{sen}}(10^6\pi t - \beta x)\hat{j} = +\varepsilon 10^6\cancel{\pi}\, 120\pi\,\cancel{\text{sen}}(10^6\pi t - \beta x)\hat{j}$$

$$\beta A = \varepsilon\, 10^6\, 120\pi \;//$$

$$\begin{cases} 120\beta = \mu 10^6 A\pi \rightsquigarrow \beta = \dfrac{\mu 10^6 A\pi}{120} \\ \beta . A = \varepsilon . 10^6\, 120\pi \end{cases}$$

$$\frac{\mu \cancel{10^6} A^2 \cancel{\pi}}{120} = \varepsilon . \cancel{10^6}\, 120\cancel{\pi} \rightsquigarrow \begin{matrix} \varepsilon = 4\varepsilon_0 \\ \mu = 4\mu_0 \end{matrix}$$

$$A^2 = \frac{\cancel{4}\varepsilon_0 . 120^2}{\cancel{4}\mu_0}$$

$$A = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 . 120^2}{\mu_0}} \cong 0,3185 \;//$$

$$\beta = \frac{4\mu_0 . 10^6 (0,3185)\pi}{120} \cong 0,04191 \;//$$

2.11) $\bar{B} = B_0 \, e^{j(\omega t - \beta z)} \, \hat{i}$ ⟶ tem direção $\hat{i}$ mas só varia com z

A partir dessa expressão para a indução magnética em um material isotrópico e homogêneo (propriedades uniformes) e com densidades de cargas livres e de corrente de condução nulas, determinar a expressão do campo magnético, do campo elétrico e da indução elétrica.
Pode se considerar também a seguinte expressão para a indução magnética

$$\vec{B}(z,t) = B_0 \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\hat{i}$$

1ª forma)

$$\text{rot}\,\bar{H} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\,\bar{B} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial B}{\partial z}\hat{j} - \cancel{\frac{\partial B}{\partial y}\hat{k}}^{\,0}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial B}{\partial z}\hat{j} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \;\leadsto\; \frac{\partial B}{\partial z} = -j\beta B_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(-j\beta B_0 e^{j(\omega t - \beta z)}\right)\hat{j} = \frac{d\bar{D}}{dt}$$

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} = \int -\frac{j\beta B_0}{\mu} e^{j(\omega t - \beta z)} dt \cdot \hat{j}$$

$$\varepsilon\bar{E} = -\frac{\cancel{j}\beta B_0}{\mu} \cdot \frac{1}{\cancel{j}\omega} e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \hat{j}$$

$$\bar{E} = -\frac{\beta B_0 e^{j(\omega t - \beta z)}}{\varepsilon\mu\omega}\hat{j}$$

Ex. 2.11 Verso Cap. 2

2ª forma)

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{-\partial |B|}{\partial t} = -j\omega B_0 e^{j(\omega t-\beta z)}$$

→ $\bar{B}$ só tem componente $\hat{i}$

$$\text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \cancel{\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)}\hat{j} + \cancel{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}\hat{k}$$

→ só depende de z

$$\left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} = -j\omega B_0 e^{j(\omega t-\beta z)}\hat{i}$$

$$\frac{dE_y}{dz} = j\omega B_0 e^{j(\omega t-\beta z)} \rightsquigarrow E_y = E\cdot\hat{j} = \bar{E}$$

$$E_y = -\frac{\cancel{j}\omega B_0}{\cancel{j}\beta} e^{j(\omega t-\beta z)} = -\frac{\omega B_0}{\beta} e^{j(\omega t-\beta z)} \rightsquigarrow \beta = \omega\cdot\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}$$

$$\bar{E} = -\frac{\beta B_0 e^{j(\omega t-\beta z)}}{\omega\mu\varepsilon}\,\hat{j}$$

2.12) $\bar{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{i}$ ⇝ tem direção $\hat{i}$ mas só varia com z

A partir dessa expressão para o campo elétrico em um material isotrópico e homogêneo (propriedades uniformes) e com densidades de cargas livres e de corrente de condução nulas, determinar a expressão do campo magnético e da indução magnética.

1ª forma)

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial z}\hat{j} - \cancel{\frac{\partial E}{\partial y}}^{\,0}\hat{k}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}\hat{j} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{\partial E}{\partial z} = \beta E_0 \,\text{sen}(\omega t - \beta z)$$

$$-\frac{d\bar{B}}{dt} = \beta E_0 \,\text{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\bar{B} = \int -\beta E_0 \,\text{sen}(\omega t - \beta z)\, dt \,.\, \hat{j} = \frac{\beta E_0}{\omega} \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu} = \frac{\beta E_0}{\mu \omega} \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

2ª forma)

$$\text{rot}\,\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\varepsilon \epsilon_0 \omega \,\text{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{i}$$

↳ $\bar{E}$ só tem componente $\hat{i}$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \cancel{\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{j}} + \cancel{\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{k}}$$

↳ só depende de z

$$\left(\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} \cancel{-} \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{i} = \cancel{-}\varepsilon \epsilon_0 \omega \,\text{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{i}$$

$$\frac{dH_y}{dz} = \varepsilon \epsilon_0 \omega \,\text{sen}(\omega t - \beta z) \rightsquigarrow H_y = H \cdot \hat{j} = \bar{H}$$

$$\bar{H} = \int \varepsilon \epsilon_0 \omega \,\text{sen}(\omega t - \beta z)\, dz \cdot \hat{j}$$

$$\bar{H} = \frac{\varepsilon \epsilon_0 \omega \cos(\omega t - \beta z)}{\beta} \cdot \hat{j} \quad //$$

2.13) a partir da equação de Maxwell-Ampère

escrever a equação de conservação da carga elétrica (ou eq. de continuidade elétrica)

a) $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\rightsquigarrow$ aplicamos div

$$\text{div}\,\overset{0}{\cancel{\text{rot}}}\,\bar{H} = \text{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \rightsquigarrow \text{div}\,\text{rot}\,\bar{H} = 0$$

$$\text{div}\,\bar{J} = -\,\text{div}\,\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\bar{J} = -\frac{\partial\left(\text{div}\,\bar{D}\right)}{\partial t} \rightsquigarrow \text{div}\,\bar{D} = \rho$$

$$\text{div}\,\bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad //$$

caso estático

b) $\text{div}\,\bar{J} = 0$ $\rightsquigarrow$ caso estático, sem variação no tempo

no caso estático, em um condutor homogêneo, mostre que o campo elétrico pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar

c) $dW = \bar{F} \cdot d\bar{l}$ $\rightsquigarrow$ $\bar{F} = q \cdot \bar{E}$

$$\frac{dW}{q} = \frac{\bar{F}}{q} \cdot d\bar{l} \rightsquigarrow dV = -\bar{E} \cdot d\bar{l}$$

↳ convenção

$\downarrow$

dV: trabalho por unidade de carga

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $\quad (\vec{v} = \vec{0})$

$\text{div}\,\vec{J} = 0$

$\Rightarrow \text{div}(\sigma \vec{E}) = 0$

$\Rightarrow \sigma\,\text{div}(\vec{E}) = 0$

$\Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = -\,\text{grad}(V)$

d) $\bar{E} = E \cdot \hat{i}$ considerando um campo uniforme paralelo à direção (x), determinar a expressão geral do potencial escalar elétrico

$\vec{E} = -\text{grad}\, V \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\text{grad}\, V \cdot \vec{dl}$

$\Rightarrow E\hat{i} \cdot \vec{dl} = E\,dx = -dV$

$\Rightarrow \int dV = -\int E\,dx$

$= -E \int dx$ (E unif.)

$\Rightarrow \boxed{V(x) = -Ex + V_0}$

V_0 constante de integração

$\text{div}\, \bar{J} = 0 \rightsquigarrow \bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$

$\text{div}\,(\sigma \bar{E}) = 0$ definição de divergente variando em x

$\dfrac{\partial (\sigma \bar{E})}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow$

$\cancel{\sigma} \dfrac{dE}{dx} = 0 \rightsquigarrow E = C_1 \rightsquigarrow$ só queremos o valor absoluto

$V = -\int \bar{E} \cdot d\bar{l} = -XC_1 + C_2 \rightsquigarrow dl = dx$

$V(x) = XC_1 + C_2$ //

considerar as seguinte condições ao limite:

e) $\begin{cases} V(0) = 1\,V \\ V(2) = 0\,V \end{cases} \rightsquigarrow$

(posição x em metros)

$V(0) = 0 \cdot C_1 + C_2 = 1$

$C_2 = 1$

$V(2) = 2 \cdot C_1 + 1 = 0$

$C_1 = -\dfrac{1}{2}$

$V(x) = -\dfrac{X}{2} + 1$ //

$U = V(0) - V(2) = 1\,V$

$J = \sigma E$

$\dfrac{I}{S} = \sigma (V \cdot l)$

calcular a corrente atravessando uma superfície de 2mm quadrados

$U = \dfrac{l}{\sigma S} \cdot I \rightsquigarrow I = 10\,A$ //

2.14) $V = 2{,}5 \cdot 10^5 \,\text{sen}(\omega t)$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{2{,}5 \cdot 10^5 \,\text{sen}(\omega t)}{10} = 2{,}5 \cdot 10^4 \,\text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \,\omega\, 2{,}5 \cdot 10^4 \underset{\cos^*}{\cancel{\text{sen}}}(\omega t) \rightsquigarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^5$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \underline{\underline{0{,}139}} \underset{\cos^*}{\cancel{\text{sen}}}(\omega t)$$ ⇝ analisar a amplitude

entre duas placas paralelas condutoras separadas
por uma distância d=10m é aplicada a tensão V(t)
de frequência 100Hz. Na região de ar entre as placas
existe um fio condutor (por exemplo uma espira),
de seção transversal 1mm^2 no qual circula uma
corrente de 1A.

Argumentar sobre eventuais aproximações
das equações de Maxwell aplicáveis para o estudo
desse problema.

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1}{10^{-6}} = \underline{\underline{10^6}}$$

$$J >>> \frac{\partial D}{\partial t}$$

tem poucos elementos no texto do exercício para escolher possíveis simplificações...
a aproximação do campo elétrico, o cálculo da densidade de corrente de deslocamento
e a comparação com a densidade de corrente de condução são alguns elementos de resposta.
Também, pode se calcular o comprimento de onda para 10Hz no vácuo e comparar
com os 10m que podem ser considerados como dimensão característica do problema.
O texto não diz se a corrente no fio varia com o tempo e com qual frequência.
Note que a comparação corrente de condução/corrente de deslocamento é local... no condutor.
Mas fora dele, só tem corrente de desclocamento.

2.15) equações de Maxwell em regime estático (nenhuma grandeza depende do tempo)

a) $$\begin{cases} \text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} \\ \text{div}\,\bar{B} = 0 \\ \text{rot}\,\bar{E} = 0 \\ \text{div}\,\bar{D} = \rho \end{cases}$$

Mostre que uma indução magnética da forma B=rot(A) verifica M-T

b) $\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$ ⤳ aplicando div

$$\text{div}\,\bar{B} = \underbrace{\text{div}\,\text{rot}}_{0}\,\bar{A}$$

$\text{div}\,\bar{B} = 0$ ⤳ condiz com as equações

No caso que o potencial vetor magnético tem só componente
na direção (z) e é invariante com relação a (z) (só depende de x e y)
calcular as componentes da indução magnética em função de (Az).

c) $\bar{A} = (0, 0, A_k)$

$$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \cancel{\partial/\partial z} \\ 0 & 0 & A_k \end{vmatrix} = \frac{\partial A_k}{\partial y}\hat{i} - \frac{\partial A_k}{\partial x}\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

$$\bar{B} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial y}, -\frac{\partial A_k}{\partial x}, 0\right)$$ ⤳ $\bar{B} = \mu\bar{H}$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$$

$$\bar{H} = \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_k}{\partial y}, -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_k}{\partial x}, 0\right)$$

//

d) $\bar{J} = (0, 0, J_k)$ $\rightsquigarrow$ só componente $\hat{k}$

considerando además que a densidade de corrente tem componente só na direção (z) e só depende de (x) e (y)
escrever M-A em função de (Az), (Jz) e da permeabilidade.

$$\text{rot}\,\vec{H} = \bar{J}$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \cancel{\partial/\partial z} \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y} & -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right]\hat{k}$$

$$-J = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$$

↳ componentes em $\hat{k}$

2.16) $\text{rot}\,\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$

$\text{div}\,\bar{D} = 0$ $\text{div}\,\bar{B} = 0$

Demonstre que desprezando a densidade de corrente de deslocamento para um meio homogêneo, linear e com densidade de cargas livre nula temos

$$\Delta\vec{E} = \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{E} = -\text{rot}\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) \rightsquigarrow \nabla^2\bar{E} = \text{grad}\,\text{div}\,\bar{E} - \text{rot}\,\text{rot}\,\bar{E}$$

$$\text{grad}\,\cancel{\text{div}\,\bar{E}} - \nabla^2\bar{E} = -\frac{\partial(\text{rot}\,\bar{B})}{\partial t} \rightsquigarrow \text{div}\,\bar{E} = \frac{\text{div}\,\bar{D}}{\varepsilon_0} = 0$$

permissividade e permeabilidade uniformes (material homogêneo linear)

$$\nabla^2\bar{E} = \frac{\partial(\text{rot}\,\mu\bar{H})}{\partial t} \rightsquigarrow \text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$$

$$\nabla^2\bar{E} = \mu\frac{\partial\bar{J}}{\partial t} \rightsquigarrow \bar{J} = \sigma\bar{E}$$

$$\nabla^2\bar{E} = \sigma\mu\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \quad //$$

2.17) $\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$

Demonstre que desprezando a densidade de corrente de deslocamento para um meio homogêneo, linear e com densidade de cargas livre nula temos

$\text{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\nabla^2 \bar{H} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$

$\text{div}\,\bar{D} = 0$ $\quad$ $\text{div}\,\bar{B} = 0$

$\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{H} = \text{rot}\,\bar{J} \rightsquigarrow \nabla^2 \bar{H} = \text{grad}\,\text{div}\,\bar{H} - \text{rot}\,\text{rot}\,\bar{H}$

$\text{grad}\,\cancel{\text{div}\,\bar{H}}^{\,0} - \nabla^2 \bar{H} = \text{rot}\,\bar{J} \rightsquigarrow \text{div}\,\bar{H} = \text{div}\,\frac{\bar{B}}{\mu} = 0$

$-\nabla^2 \bar{H} = \text{rot}\,\sigma\bar{E} \rightsquigarrow \bar{J} = \sigma\bar{E}$

condutividade
e permeabilidade
uniformes
(material homogêneo linear)

$-\nabla^2 \bar{H} = \sigma\,\text{rot}\,\bar{E} \rightsquigarrow \text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$-\nabla^2 \bar{H} = \sigma \cdot -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \bar{B} = \mu\bar{H}$

$\nabla^2 \bar{H} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ //