

ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO

1. INTRODUCCION

Surge en 1970, con la obra pionera de Box y Jenkins: “Time Series Analysis: Forecasting and Control”.

La modelización de series de tiempo es, por su puesto, una disciplina de pleno derecho. El análisis de cointegración creció desde esta rama. El análisis de series de tiempo es actualmente ampliamente visto como un ladrillo básico de la econometría. K. Cuthbertson et al.

Es una herramienta imprescindible en el análisis económico aplicado.

1.1. BIBLIOGRAFIA

Los presentes apuntes están basados en varios textos. En particular:

Ezequiel URIEL - **ANALISIS DE SERIES TEMPORALES - MODELOS ARIMA** -Colección Abaco - Ed. Paraninfo - 1985.

Como bibliografía ampliatoria.

Antoni ESPASA y José Ramón CANCELO (Eds.) - **METODOS CUANTITATIVOS PARA EL ANALISIS DE LA COYUNTURA ECONOMICA** - Alianza Economía - 1993.

En particular, la presente introducción y el Capítulo 2 se ha basado en dicho texto.

Otra referencia:

Andrew C. HARVEY - **THE ECONOMETRIC ANALYSIS OF TIME SERIES** - LSE HANDBOOKS IN ECONOMICS - 1990.

1.2. IDEA CENTRAL

Si el objetivo es explicar el valor que toma, en un momento determinado del tiempo, un fenómeno económico que muestra dependencia temporal, un procedimiento factible consiste en recoger información sobre su evolución a lo largo del tiempo, y explotar el patrón de regularidad que muestran los datos.

Para construir un modelo de series de tiempo, lo único que se necesita es la información muestral de la variable a analizar.

Si se desea explicar el comportamiento de una variable temporal Y_t , un modelo de series temporales puede plantearse como:

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$$

1.3. VENTAJAS Y DESVENTAJAS

(comparación con el método de regresión)

Ventajas de los modelos de series temporales:

- i) a menudo no se dispone de los datos de las variables exógenas (por ejemplo, expectativas, gap de producto);
- ii) dificultades en el marco del método de regresión para la estimación con variables retardadas (especialmente con la variable endógena retardada);
- iii) predicción: ¿cómo predecir los valores de las variables exógenas?
- iv) son más sencillos de estimar;
- v) con niveles de desagregación temporal elevados (datos mensuales, semanales, diarios) es mucho más fácil construir un modelo de series temporales;

Limitaciones:

- vi) un modelo econométrico, estimado adecuadamente, será más eficiente, y por lo tanto más útil que un modelo de series temporales;
- vii) los modelos econométricos permiten conocer la forma en que la variable de interés se relaciona con las variables exógenas; éste puede ser el objetivo principal del análisis (por ejemplo, estimación de una elasticidad).

FINALMENTE, ABORDAJES COMPLEMENTARIOS Y NO OPUESTOS

1.4. MODELOS DE SERIES TEMPORALES

Variables temporales: variables que se observan a lo largo del tiempo. Y_t indica la variable Y en el momento t .

Serie temporal: Conjunto de T observaciones, una observación por cada una de las variables: Y_1, Y_2, \dots, Y_T .
Sinónimo: serie cronológica.

A las observaciones de una variable temporal se denominan *realizaciones*. Son los resultados de un *proceso estocástico*, como se plantea más adelante.

En gran parte de las variables temporales propias del análisis económico se detecta un patrón de comportamiento en el tiempo. Las series presentan movimientos sistemáticos (repetitivos). En la evolución en el tiempo se observa una regularidad.

Esta regularidad de las series temporales es, en general, *estocástica* y no *determinística*. Es decir, esa regularidad no admite una formulación funcional determinista, sino que es función de variables aleatorias.

Estimando tal regularidad, el analista construye un mecanismo explicativo que recibe el nombre de *modelo*.

Con la construcción de un modelo, Y_t se descompone en dos partes: parte sistemática (PS) e innovación (a).

$$Y_t = PS_t + a_t$$

La *innovación* es un componente aleatorio en el que sus valores no tienen ninguna relación o dependencia entre sí. La innovación y la parte sistemática son independientes. No es posible ningún tipo de descomposición de la innovación con fines predictivos: es impredecible. Por eso también se la llama *sorpresas* o *ruido*. Una innovación sólo será auténticamente tal si es impredecible para cualquier conjunto de información existente.

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS

Se denomina *proceso estocástico* a la sucesión infinita de variables aleatorias ordenadas

$$..., Y_1, Y_2, ..., Y_T, ...$$

Si se dispone de un conjunto finito de estas variables, $Y_1, Y_2, ..., Y_T$, se dice que esta sucesión de observaciones (realizaciones) forma una serie temporal.

2.1. RUIDOS BLANCOS

Un tipo especial de proceso estocástico es el denominado *ruido blanco*.

Una variable a_t se denomina "ruido blanco" si cumple las siguientes condiciones:

$$i) \quad E(a_t) = 0 \quad \forall t \quad [2.1.1]$$

$$ii) \quad V(a_t) = E(a_t^2) = \sigma^2 \quad \forall t \quad [2.1.2]$$

$$iii) \quad COV(a_t, a_s) = E(a_t \cdot a_s) = 0 \quad \forall t \neq s \quad [2.1.3]$$

Esto es, la variable x_t presenta una esperanza constante en el tiempo, e igual a 0; varianza constante e incorrelación temporal (autocorrelación nula). Si se agrega la condición de que la variable x_t se distribuye normal, la condición (iii) de incorrelación implica independencia.

Supondremos, salvo que se exprese lo contrario, que la distribución de probabilidad asociada a un ruido blanco es normal. Ello significa que las 3 condiciones anteriores pueden sintetizarse en la siguiente expresión:

$$a_t \sim Niid (0, \sigma^2) \quad \forall t$$

Niid: normales independientes e idénticamente distribuidas

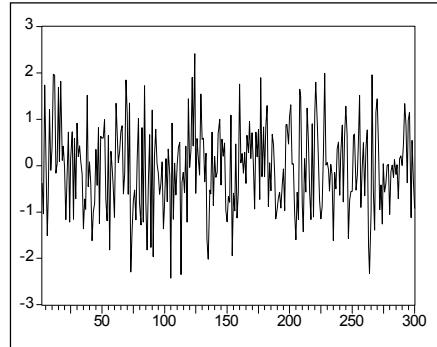
El término *ruido* ha sido tomado de la teoría de la comunicación. En esta disciplina, un ruido corresponde a perturbaciones aleatorias que vienen en función de la señal enviada, que es diferente de la señal recibida. Se denomina *ruido blanco* a una perturbación aleatoria con las características antes planteadas, por analogía con la distribución de energía continua en luz blanca de un cuerpo incandescente.

A continuación se presenta el gráfico de una serie temporal artificial de 100 observaciones, que es una realización del proceso estocástico:

$$Y_t = a_t \quad ; \quad a_t \sim Niid (0, 1)$$

Es decir, Y_t es, en sí mismo, un ruido blanco normal, con varianza igual a 1.

Gráfico 2.1.1. Proceso de ruido blanco
 $a_t \sim \text{Niid}(0 ; 1)$



2.2. PROCESOS ESTACIONARIOS EN SENTIDO AMPLIO

Se dice que una serie temporal Y_t ha sido generada por un proceso estocástico *estacionario en sentido amplio* si se cumplen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- i) cada observación tiende a oscilar alrededor de una media que es constante a lo largo del tiempo. Es decir, todas las variables del proceso tienen la misma esperanza matemática:

$$E(Y_t) = \mu \quad \forall t \quad [2.2.1]$$

- ii) la dispersión alrededor de esa media constante a lo largo del tiempo también es constante. Es decir, todas las variables del proceso tienen la misma varianza:

$$V(Y_t) = \sigma_Y^2 \quad \forall t \quad [2.2.2]$$

- iii) la covarianza entre dos variables que disten k periodos de tiempo (autocovarianza de orden k) es la misma que existe entre cualesquiera otras dos variables que disten también k periodos entre sí, independientemente del momento del tiempo al que estén referidas:

$$\text{COV}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{COV}(Y_{t+j}, Y_{t+j+k}) = \gamma_k \quad \forall t \quad [2.2.3]$$

Debe tenerse mucho cuidado en no confundir un proceso *ESTACIONARIO* con un proceso que presenta *ESTACIONALIDAD* (fluctuaciones regulares dentro del año).

2.3. EJEMPLOS

A. Claramente un proceso de ruido blanco corresponde a un fenómeno estacionario en sentido amplio (y en sentido estricto, como se verá más adelante).

Su media es *invariante* en el tiempo, al igual que su varianza. Las autocovarianzas, al ser nulas, también cumplen con la condición (iii).

B. Considérese la serie Y_t generada por el proceso siguiente:

$$Y_t = \mu + a_t \quad ; \quad a_t \sim \text{Niid} (0, \sigma^2)$$

En adelante, la variable a_t se entenderá como un ruido blanco normal.

Obsérvese que Y_t es una serie generada por un proceso estacionario, ya que:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu \\ V(Y_t) &= \sigma^2 \\ COV(Y_t, Y_{t+k}) &= 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

C. Considérese la serie Y_t generada por el proceso siguiente:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + a_t \quad [2.3.1]$$

La variable t representa al tiempo. Y_t no corresponde a un proceso estacionario, ya que:

$$E(Y_t) = \alpha + \beta \cdot t$$

Es decir, su media (esperanza) no es invariante en el tiempo.

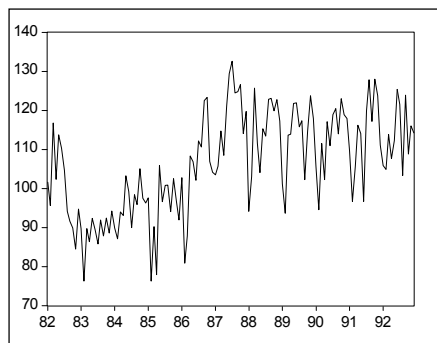
Obsérvese que la variable Y_t presenta tendencia, por lo que no puede ser generada por un proceso estacionario.

Téngase en cuenta que las series con tendencia no necesariamente deben ser generadas por procesos del tipo [2.3.1]. Como se verá más adelante, este proceso corresponde a un tipo muy particular, de tendencia determinística.

D. La serie del Índice de Volumen Físico (IVF) de la Industria Manufacturera, calculado por el Instituto Nacional de Estadísticas, en el período 1982-1992.

Corresponde a una serie con tendencia. Por lo tanto, es un proceso no estacionario.

Gráfico 2.3.1. IVF Industria Manufacturera
Índices Mensuales – Año 1982 = 100



Podríamos decir que afortunadamente la serie del IVF industrial no corresponde a un proceso estacionario (aunque quizás estemos planteando un juicio de valor respecto a la estructura productiva deseable). Analice en la misma forma el Producto Bruto Interno.

E. Las series de precios, monetarias, fiscales, de producción, a precios corrientes, presentan claramente una tendencia creciente, especialmente en países con alta inflación como en Uruguay. Evidentemente estas series no pueden considerarse generadas por procesos estacionarios. Obsérvese que si bien la inflación en los países desarrollados (y en EE.UU. en particular) es muy inferior a los registros uruguayos, de todas maneras se observan una tendencia creciente de los precios, especialmente luego de la Segunda Guerra Mundial. Ello indica que aún variables medidas en dólares corrientes (como las relativas al comercio exterior), posiblemente presenten un comportamiento no estacionario.

F. Varios investigadores han encontrado que la varianza de los índices de retornos (ganancias) de las acciones cambia a lo largo del tiempo. Por ejemplo, los retornos diarios del portafolio compuesto del Standard & Poor's fueron estudiados. Se encontró que la desviación estándar en el período 1929-1933 fue alrededor de 4 veces más grande que en 1953-1970¹.

Sin disponer de más datos sobre la serie, ¿qué podría afirmar sobre la estacionariedad del proceso generador?

¹ SCHWERT, G. William y SEGUIN, Paul J. - "Heteroskedasticity en Stock Returns" - The Journal of Finance, Vol. XLV, No. 4 - Setiembre 1990.

2.4. FUNCION DE AUTOCORRELACION

Por analogía con [2.2.3], que se presenta a continuación:

$$\text{COV}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{COV}(Y_{t+j}, Y_{t+j+k}) = \gamma_k \quad \forall t \quad [2.2.3]$$

usualmente se nota la varianza como:

$$V(Y_t) = \gamma_o \quad [2.4.1]$$

que, por [2.2.2] es constante (invariante) en el tiempo.

De esta forma, la condición (iii) de estacionariedad (en sentido amplio) puede escribirse alternativamente como:

$$\text{corr}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{corr}(Y_{t+j}, Y_{t+j+k}) = \rho_k \quad \forall t, j, k \quad [2.4.2]$$

Es decir, la correlación entre dos momentos de la variable que disten **k** períodos de tiempo (autocorrelación de orden **k**) es la misma que existe entre cualesquiera otras dos momentos que disten también **k** períodos entre sí, independientemente del período del tiempo al que estén referidas.

El coeficiente de correlación de orden **k** se define alternativamente como:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} \quad \forall k \quad [2.4.3]$$

Por las propiedades de la covarianza y la definición del coeficiente de correlación, se tiene:

$$\rho_k = \rho_{-k} \quad \forall k \quad [2.4.4]$$

$$\rho_o = \frac{\gamma_o}{\gamma_o} \equiv 1 \quad [2.4.5]$$

El conjunto (infinito) de los valores de los coeficientes de autocorrelación se denomina *función de autocorrelación* (FAC), que es una función en **k**, cuyos valores son las autocorrelaciones definidas.

2.5. ESTIMACION DE LOS MOMENTOS

Como puede apreciarse, las definiciones anteriores han sido referidas a los momentos poblacionales, que obviamente son no observables.

A partir de una muestra de **T** observaciones, se definen las estimaciones de estos momentos poblacionales a partir de la muestra como:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^T Y_t}{T}$$

$$V(Y) = C_o = \hat{\gamma}_o = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}{T}$$

$$C_k = \hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{Y}) \cdot (Y_{t+k} - \bar{Y})}{T}$$

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{C_k}{C_o} = \frac{COV(Y_t, Y_{t+k})}{V(Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{Y}) \cdot (Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

A partir de los datos de una serie temporal, se puede estimar un número finito (K) de las autocorrelaciones muestrales.

Como se observa en [2.4.4], sólo es necesario estimar los coeficientes de autocorrelación para $k=1, 2, \dots, K$. El gráfico de las autocorrelaciones muestrales recibe el nombre de *correlograma*.

A continuación se incluyen el histograma y el correlograma para el ruido blanco presentado en el gráfico 2.1.1

En las salidas incluidas, la función de autocorrelación se denomina "ac". También se incluye la función de autocorrelación parcial ("pac"). Esta última mide la autocorrelación de orden k cuando se elimina el efecto de las variables retrasadas en 1, 2, ..., $k-1$ periodos. Más adelante se vuelve sobre estos aspectos así como sobre otras estadísticas incluidas en la salida.

```

SMPL range: 1 - 200
Number of observations: 200
=====
Variable           Mean           S.D.           Maximum           Minimum
=====
EPSI                -0.0394907     0.9194777     2.6638090     -2.3261690
=====
INTERVAL           COUNT           HISTOGRAM
=====
-2.4 >= EPSI < -2.1      1      | *
-2.1 >= EPSI < -1.8      5      | *****
-1.8 >= EPSI < -1.5      6      | *****
-1.5 >= EPSI < -1.2     10     | *****
-1.2 >= EPSI < -0.9     12     | *****
-0.9 >= EPSI < -0.6     20     | *****
-0.6 >= EPSI < -0.3     19     | *****
-0.3 >= EPSI < 0.0      36     | *****
0.0 >= EPSI < 0.3       19     | *****
0.3 >= EPSI < 0.6       27     | *****
0.6 >= EPSI < 0.9       14     | *****
0.9 >= EPSI < 1.2       12     | *****
1.2 >= EPSI < 1.5        9     | *****
1.5 >= EPSI < 1.8        5     | *****
1.8 >= EPSI < 2.1        2     | **
2.1 >= EPSI < 2.4        2     | **
2.4 >= EPSI < 2.7        1     | *
=====
Skewness  0.088156                                Kurtosis  2.884407
Jarque-Bera normality test stat.  0.370399          Probability  0.830939
=====

```

IDENT EPSI

SMPL range: 1 - 200

Number of observations: 200

Autocorrelations			Partial Autocorrelations			ac	pac
.	*	.	.	*	.	1	-0.072 -0.072
.	.	*	.	.	*	2	0.046 0.041
.	3	0.001 0.007
.	4	0.011 0.009
***	.	.	***	.	.	5	-0.195 -0.196
.	.	*	.	.	*	6	0.077 0.052
.	*	.	.	*	.	7	-0.114 -0.094
.	*	.	**	.	.	8	-0.107 -0.128
.	9	-0.021 -0.030
.	*	.	.	*	.	10	-0.063 -0.102
.	11	-0.033 -0.021
.	.	.	.	*	.	12	-0.012 -0.062
.	.	*	.	.	.	13	0.048 0.010
.	*	.	.	*	.	14	-0.059 -0.068
.	.	*	.	.	.	15	0.060 -0.006
Box-Pierce Q-Stat 18.19			Prob 0.2527			SE of Correlations 0.071	
Ljung-Box Q-Stat 19.02			Prob 0.2130				

2.6. ESTACIONARIEDAD EN SENTIDO ESTRICTO

Un *proceso estacionario en sentido estricto* cumple una condición más restrictiva que las 3 características planteadas en 2.2. La función de distribución de probabilidad de cualquier conjunto de k (número finito) variables del proceso debe mantenerse estable (inalterable) al desplazar las variables j periodos de tiempo.

Es decir, si $p(Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k})$ es la función de distribución acumulada de probabilidad, entonces:

$$\begin{aligned} p(Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k}) &= \\ &= p(Y_{t+1+s}, Y_{t+2+s}, \dots, Y_{t+k+s}) \quad \forall t, k, s \end{aligned}$$

Los procesos estacionarios en sentido estricto también lo son en sentido amplio. Es decir, cumplen las condiciones [2.2.5] a [2.2.7]. No es cierta la afirmación inversa.

Obsérvese el caso de una variable ruido blanco. Si Y_t sigue una distribución conjunta $Niid(0, \sigma^2)$, entonces:

$$\begin{aligned} p(Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k}) &= \\ &= \prod_{i=1}^k p(Y_{t+i}) = \\ &= [p(Y_t)]^k = [p(Y_{t+s})]^k = \\ &= p(Y_{t+s+1}, Y_{t+s+2}, \dots, Y_{t+s+k}) \quad \forall k, t, s \end{aligned}$$

En realidad, la deducción anterior sólo requiere que la serie en cuestión sea generado por un proceso asociado a una distribución de variables independientes e idénticamente distribuidas.

2.7. IMPORTANCIA DE LA ESTACIONARIEDAD

La identificación y estimación de modelos de series temporales han sido desarrolladas para procesos estacionarios. A partir del capítulo siguiente se analizan estos modelos, que pueden clasificarse en autoregresivos (AR), de medias móviles (MA) o procesos mixtos (ARMA).

En la realidad, y especialmente para las variables económicas, se encuentran muy raramente series generadas a partir de procesos estacionarios. Como se explicó, las series a precios corrientes, las series de Cuentas Nacionales, generalmente presentan tendencia y, por lo tanto, no corresponden a procesos estacionarios.

El hecho de que una gran cantidad de fenómenos económicos correspondan a procesos no estacionarios, no debe llevar a pensar de que no reviste interés el estudio de los procesos estacionarios.

Como se verá más adelante, una gran cantidad de procesos no estacionarios pueden ser fácilmente transformados en procesos estacionarios y, a partir de esta transformación, les son aplicables los métodos de identificación y estimación que se verán más adelante.

2.8. OPERADOR DE RETARDO Y DIFERENCIACIÓN DE UNA SERIE.

Introduciremos a continuación el operador polinomial de retardos, L . El operador L determina que:

$$LY_t = Y_{t-1}$$

Es decir, el resultado de aplicar el operador L corresponde a la observación en el período anterior de la variable (serie).

Aplicada dos veces sobre la variable Y_t

$$L(LY_t) = L^2 Y_t = Y_{t-2}$$

y, en general:

$$L^k Y_t = Y_{t-k}$$

La diferencia de una serie es:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

En general:

$$\Delta^k Y_t = \Delta(\Delta^{k-1} Y_t) = (1 - L)^k Y_t$$

3. PROCESOS AUTORREGRESIVOS

3.1. MODELO AR(p)

Si el valor corriente de la variable Y_t depende de sus valores pasados y de la innovación corriente, puede plantearse:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

$$\text{donde } a_t \sim \text{Niid } (0, \sigma^2) \quad [3.1.1]$$

La expresión anterior corresponde a la forma general del modelo autoregresivo de orden p , que se nota como AR(p).

A partir del uso del operador de retardo L , la expresión [3.1.1] puede plantearse como:

$$Y_t = C + \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + a_t$$

Realizando algunas transformaciones, tenemos:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = C + a_t$$

Por analogía, podemos definir la expresión entre paréntesis como un polinomio en el operador de retardos L :

$$\Phi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

Y de esta forma, la expresión [3.1] puede plantearse sintéticamente como:

$$\Phi(L) Y_t = C + a_t$$

Comenzaremos por analizar el modelo más sencillo, el correspondiente al modelo autoregresivo de 1er. orden, AR(1).

3.2. MODELO AR(1)

El caso más sencillo corresponde a un modelo autoregresivo de 1er. orden, donde el parámetro C se supone igual a cero:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t \quad [3.2.1]$$

donde $|\phi| < 1$

El supuesto respecto al parámetro ϕ , como veremos después, está relacionado a la estacionariedad del proceso.

Partiendo de la base que [3.2.1] corresponde a un proceso estacionario, podemos derivar las expresiones de la esperanza, la varianza y las auto-covarianzas de Y_t .

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\phi Y_{t-1} + a_t) = \\ &= \phi E(Y_{t-1}) + E(a_t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_y = \phi \mu_y \end{aligned}$$

Excepto en el caso $\phi=0$, que es trivial y que no daría lugar a un AR(1), se deduce:

$$E(Y_t) = \mu_y = 0$$

La varianza del proceso:

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= \sigma_Y^2 = E(Y_t^2) = \\ &= E[(\phi Y_{t-1} + a_t)^2] = \\ &= \phi^2 E(Y_{t-1}^2) + E(a_t^2) + 2\phi E(Y_{t-1} a_t) \end{aligned}$$

El tercer término del segundo miembro de la expresión anterior es igual a 0. La fundamentación rigurosa quedará clara más adelante cuando se analicen los procesos de medias móviles. Sin embargo, es posible razonarlo en los siguientes términos.

$E(Y_{t-1} \cdot a_t)$ corresponde a la correlación (poblacional) entre Y_{t-1} y el ruido blanco a_t . Y_{t-1} depende de los valores pasados del ruido blanco (es decir, de a_{t-1}, a_{t-2}, \dots) pero no del valor “futuro”, ya que, justamente, a_t es una “sorpresa”. De ahí que la correlación es nula.

Por el hecho de ser estacionaria la serie, $V(Y_t) = V(Y_{t-1}) = \gamma_0$. De donde:

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= \sigma_y^2 = \phi^2 \sigma_y^2 + \sigma^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V(Y_t) &= \sigma_y^2 = \gamma_o = \frac{\sigma^2}{(1 - \phi^2)} \end{aligned}$$

La condición de Φ en valor absoluto menor que 1 es necesaria para la existencia de la varianza de Y_t .

Las autocovarianzas pueden deducirse de una manera análoga. La autocovarianza de orden 1 es:

$$\begin{aligned} COV(Y_t, Y_{t-1}) &= E(Y_t \cdot Y_{t-1}) = \\ &= E[(\phi Y_{t-1} + a_t) \cdot Y_{t-1}] = \\ &= \phi V(Y_{t-1}) + E(a_t \cdot Y_{t-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \phi \gamma_o \end{aligned}$$

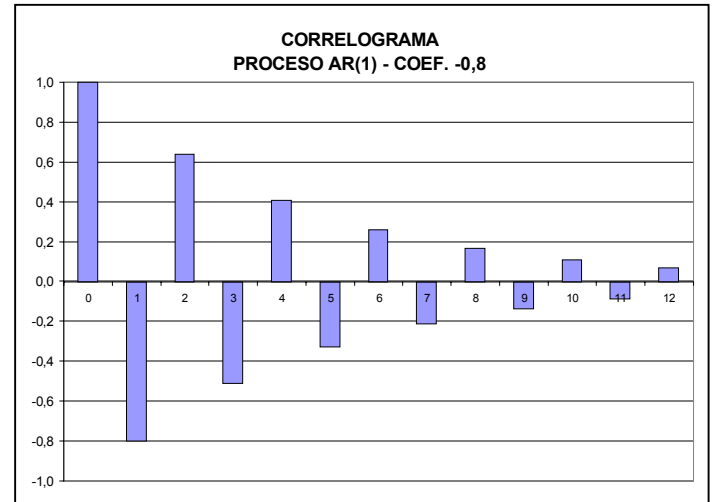
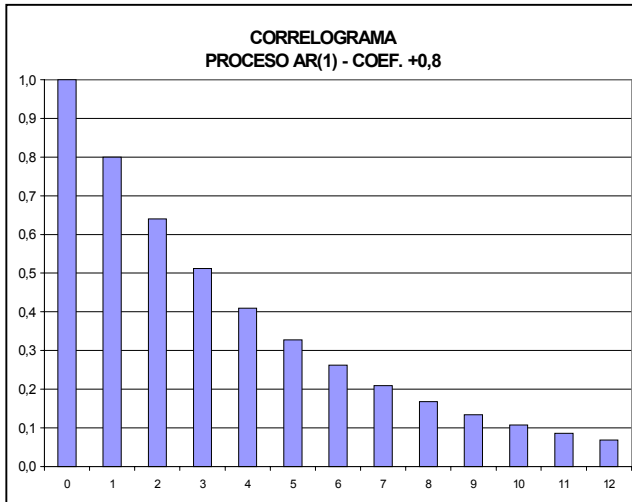
La autocovarianza de orden k es:

$$\gamma_k = \phi^k \gamma_o$$

Como resulta inmediato de las ecuaciones anteriores, el coeficiente de autocorrelación de orden k es:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$$

A continuación se presenta el correlograma para un proceso AR(1) de coeficiente positivo y negativo.



A continuación se presenta el correlograma de una variable artificial generada a partir de:

$$Y_t = 0.8 Y_{t-1} + a_t$$

Correlogram of Y1

Sample: 1 300

Included observations: 300

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *****	. *****	1 0.780	0.780	184.35	0.000
. *****	. .	2 0.602	-0.016	294.53	0.000
. *****	. .	3 0.463	-0.003	359.96	0.000
. ****	. .	4 0.351	-0.013	397.69	0.000
. **	. *	5 0.296	0.078	424.63	0.000
. **	. .	6 0.263	0.036	446.01	0.000
. **	. .	7 0.231	0.001	462.52	0.000
. **	. .	8 0.200	-0.002	474.92	0.000
. *	. .	9 0.167	-0.005	483.61	0.000
. *	. .	10 0.145	0.020	490.20	0.000
. *	. .	11 0.148	0.058	497.09	0.000
. *	* .	12 0.097	-0.123	500.04	0.000
. .	. .	13 0.068	0.019	501.50	0.000
. .	. .	14 0.029	-0.048	501.78	0.000
. .	. .	15 0.014	0.036	501.84	0.000
. .	. .	16 0.008	-0.008	501.86	0.000
. .	. .	17 -0.013	-0.049	501.91	0.000
. .	. .	18 -0.029	-0.012	502.18	0.000
. .	. .	19 -0.037	0.005	502.62	0.000
* .	. .	20 -0.058	-0.037	503.72	0.000
* .	. .	21 -0.068	-0.005	505.23	0.000
. .	. .	22 -0.043	0.061	505.82	0.000
. .	* .	23 -0.055	-0.060	506.80	0.000
. .	. .	24 -0.050	0.017	507.63	0.000
* .	. .	25 -0.063	-0.034	508.94	0.000
* .	* .	26 -0.114	-0.117	513.22	0.000
* .	. .	27 -0.127	0.033	518.53	0.000
* .	. .	28 -0.142	-0.033	525.28	0.000
* .	. .	29 -0.122	0.060	530.28	0.000
* .	. .	30 -0.110	-0.038	534.35	0.000
* .	. .	31 -0.112	-0.026	538.60	0.000
* .	. .	32 -0.127	-0.044	544.02	0.000
* .	. *	33 -0.074	0.150	545.89	0.000
. .	. .	34 -0.052	-0.026	546.83	0.000
. .	* .	35 -0.052	-0.065	547.76	0.000
. .	. *	36 -0.027	0.073	548.01	0.000

A continuación se presenta el correlograma de una variable artificial generada a partir de:

$$Y_t = -0.8 Y_{t-1} + a_t$$

Correlogram of Y2

Sample: 1 300

Included observations: 300

Autocorrelation		Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
*****	.	*****	.	1-0.776-0.776	182.57	0.000
.	*****	.	.	2 0.594-0.021	289.97	0.000
***	.	.	.	3-0.447 0.020	350.92	0.000
.	**	.	.	4 0.319-0.042	382.06	0.000
**	.	*	.	5-0.252-0.067	401.60	0.000
.	*	.	.	6 0.186-0.036	412.26	0.000
*	.	.	.	7-0.114 0.059	416.24	0.000
.	.	.	.	8 0.062-0.007	417.44	0.000
.	.	.	.	9 0.001 0.065	417.44	0.000
*	.	*	.	10-0.064-0.065	418.70	0.000
.	*	.	.	11 0.113 0.043	422.71	0.000
*	.	.	*	12-0.110 0.076	426.51	0.000
.	*	.	.	13 0.097-0.005	429.49	0.000
*	.	.	.	14-0.076 0.013	431.34	0.000
.	.	.	.	15 0.038-0.055	431.79	0.000
.	.	.	.	16-0.020-0.008	431.92	0.000
.	.	.	.	17 0.013 0.019	431.98	0.000
.	.	.	.	18-0.016-0.028	432.06	0.000
.	.	.	.	19 0.004-0.039	432.06	0.000
.	.	.	.	20 0.021 0.026	432.20	0.000

Obsérvese que los coeficientes de autocorrelación decrecen en forma geométrica. En un modelo AR(1), si el coeficiente Φ es negativo, los coeficientes de autocorrelación alternan de signo.

Media no nula

Si el proceso presenta constante, esto es: $Y_t = C + \phi Y_{t-1} + a_t \quad |\phi| < 1$

resulta directo demostrar que:

$$E(Y_t) = \mu = \frac{C}{(1-\phi)}$$

3.3. MODELOS AR(2)

Sin demostración, se presentan a continuación los momentos poblacionales para un modelo AR(2):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$$

$$E(Y_t) = \mu_y = 0$$

$$V(Y_t) = \sigma_y^2 = \gamma_o = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \cdot \gamma_o$$

$$\gamma_2 = \left(\phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} \right) \cdot \gamma_o$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2}$$

3.4. CONDICIONES DE ESTACIONARIEDAD

Volviendo a escribir el modelo AR de orden p (donde omitimos la constante por simplicidad en la exposición):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Utilizando el operador de retardos L :

$$Y_t = \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + \dots + \phi_p L^p Y_t + a_t$$

$$(Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \dots - \phi_p L^p Y_t) = a_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = a_t$$

y, en forma sintética,:

$$\Phi(L) Y_t = \Phi_p(L) Y_t = a_t \quad [3.4.1]$$

La estacionariedad de la serie Y_t requiere, entre otras condiciones, una media invariante. Es decir, la no observación de una tendencia. La serie no puede presentar un crecimiento (o decrecimiento) sostenido en el tiempo.

La expresión [3.4.1] puede interpretarse como una ecuación en diferencias finitas en la variable Y_t . Como la variable a_t es un ruido blanco y, por consiguiente, no influye sobre la existencia de una tendencia en la variable Y_t , la trayectoria en el tiempo de Y_t estará determinada por el polinomio autoregresivo (miembro izquierdo de la ecuación). En otras palabras, lo que interesa analizar es la ecuación homogénea:

$$\Phi_p(L) Y_t = 0$$

Para ejemplificar, consideremos un modelo AR(2):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = a_t$$

La ecuación homogénea en Y_t es:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = 0$$

Con la sustitución habitual de Y_t por r^t se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 - \phi_1 r - \phi_2 = 0 \quad [3.4.2]$$

El polinomio autorregresivo (en el operador de retardos L) es:

$$\Phi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 \quad [3.4.3]$$

Obsérvese que las raíces de la ecuación característica [3.4.2] corresponden a las inversas de las raíces del polinomio autorregresivo [3.4.3].

Para el caso general, la ecuación característica queda planteada como:

$$r^p - \phi_1 r^{p-1} - \phi_2 r^{p-2} - \dots - \phi_p = 0 \quad [3.4.4]$$

El polinomio Autoregresivo:

$$\Phi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \quad [3.4.5]$$

y admite p raíces, en general complejas, en la forma r_i . La solución general de la ecuación homogénea (que es la que determina la trayectoria en el tiempo de Y_t) puede plantearse como:

$$Y_t = A_1 r_1^t + A_2 r_2^t + \dots + A_p r_p^t$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ la trayectoria en el tiempo para Y_t va a estar determinada por la raíz de mayor módulo.

Supongamos que las “p” raíces son reales. Si existe r_i tal que $|r_i| > 1$ entonces Y_t no tiene límite (o no tiene límite finito).

Si dentro de las raíces de la ecuación característica hay soluciones complejas, lo mismo vale para el módulo de las raíces.

En resumen, las raíces de la ecuación característica [3.4.4] deben ser, en módulo, inferiores a 1. Como las raíces del polinomio autoregresivo son las inversas de las correspondientes a la ecuación característica, llegamos a la regla general de estacionariedad de un proceso AR(p).

Las raíces del polinomio autoregresivo deben ser, en módulo, superiores a la unidad.

Las raíces del polinomio autoregresivo deben caer fuera del círculo unidad.

La última expresión hace referencia al círculo unidad en el plano complejo.

3.5. ECUACION DE YULE-WALKER

Para el modelo general AR(p), donde omitimos la constante por simplicidad en la exposición:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Suponiendo que el modelo es estacionario, se multiplica ambos miembros por Y_{t-k} y se toman esperanzas:

$$Y_t \cdot Y_{t-k} = \phi_1 Y_{t-1} \cdot Y_{t-k} + \phi_2 Y_{t-2} \cdot Y_{t-k} + \dots + \phi_p Y_{t-p} \cdot Y_{t-k} + a_t \cdot Y_{t-k}$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

ya que $COV(Y_{t-i} Y_{t-j}) = COV(Y_{t-j} Y_{t-i}) = \gamma_{i-j} = \gamma_{j-i}$

Dividiendo a su vez por γ_0 se tiene:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad [3.5.1]$$

Para $k=1, 2, \dots, p$ se obtiene un sistema de “p” ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \dots + \phi_{p-1} \rho_{p-2} + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \dots + \phi_{p-1} \rho_{p-3} + \phi_p \rho_{p-2} \end{aligned} \quad [3.5.2]$$

...

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \dots + \phi_{p-1} \rho_1 + \phi_p$$

De la propiedad de $\gamma_k = \gamma_{-k}$ surge también $\rho_k = \rho_{-k}$

El sistema [3.5.2] recibe el nombre de “ecuaciones de Yule-Walker”, por los aportes de ambos autores (entorno a 1930) a la teoría de series de tiempo.

El sistema [3.5.2] puede ser considerado tanto en términos de los coeficientes de autocorrelación ρ_i conocidos (con lo cual pueden deducirse los coeficientes ϕ_i) como a la inversa.

En particular, si en lugar de los coeficientes de autocorrelación poblacionales ρ_i se dispone de sus estimaciones $\hat{\rho}_i$ puede plantearse el siguiente sistema para la estimación de los coeficientes ϕ_i

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \dots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \dots & \hat{\rho}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}$$

4. PROCESOS DE MEDIAS MOVILES

4.1. DEFINICIÓN GENERAL

Los procesos de orden q de medias móviles, o abreviadamente $MA(q)$, se definen de la siguiente forma:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad [4.1.1]$$

donde a_t es un ruido blanco con las propiedades ya definidas.

Obsérvese que el proceso de medias móviles corresponde a una combinación lineal de variables ruido blanco (para la expresión [4.1.1], de $q+1$ variables), siendo los coeficientes “theta” los “ponderadores” de la combinación lineal. Esto es, se asemeja a la definición de un “promedio” de las variables ruido blanco (aunque los coeficientes no sumen en general la unidad, una propiedad que deben cumplir los promedios).

Como las variables que forman parte de este promedio varían a lo largo del tiempo, se definen como “móviles” (*moving average* en inglés).

Otros aspectos de la definición [4.1.1]:

- Los coeficientes van precedidos por el signo negativo, cuestión meramente de conveniencia en la notación. Algunos paquetes econométricos asumen, para la estimación del modelo, que no se ha modificado el signo del coeficiente.
- La representación [4.1.] corresponde al caso general para procesos de medias móviles finitos. Como se verá más adelante, en distintas aplicaciones se consideran modelos de infinitos términos (que se notan como $MA(\infty)$).

Utilizando el operador de retardos L , el modelo [4.1.1] puede escribirse como:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 L a_t - \theta_2 L^2 a_t - \dots - \theta_q L^q a_t$$

$$Y_t = \mu + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) a_t$$

$$Y_t = \mu + \Theta_q(L) a_t$$

El polinomio $\Theta_q(L)$ recibe el nombre de polinomio de medias móviles.

4.2. PROPIEDADES DEL MODELO MA(q)

Calculando los momentos del proceso, a partir de [4.1.1], se tiene:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\mu + a_t - \theta_1 L a_t - \theta_2 L^2 a_t - \dots - \theta_q L^q a_t) = \\ &= E(\mu) + E(\Theta_q(L) a_t) = \mu + \Theta_q(L) E(a_t) \end{aligned}$$

ya que la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas.

$$\Rightarrow E(Y_t) = \mu + \Theta_q(L) 0 = \mu$$

En los procesos de medias móviles, la media (o esperanza) del proceso coincide con el término independiente.

Sin pérdida de generalidad, podemos redefinir el caso general [4.1.1] sin término independiente. Bastaría transformar el modelo para una variable:

$$X = Y - \mu$$

Es decir, volvemos a plantear [4.1.1] como:

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad [4.1.2]$$

Respecto de la varianza, con la formulación [4.1.2] se tiene:

$$V(Y_t) = E(Y_t^2) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q})^2]$$

La expresión entre paréntesis curvos, una vez que se desarrolla el cuadrado, dará lugar a términos en los cuadrados de $a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$ (Parte A de la expresión siguiente) y en productos cruzados de variables a_t en distintos períodos de tiempo (Parte B). Es decir:

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= E[(a_t^2 + \theta_1^2 a_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2 a_{t-q}^2) + \\ &\quad \text{Parte A} \\ &\quad + (-\theta_1 a_t a_{t-1} - \theta_2 a_t a_{t-2} + \dots + \theta_1 \theta_2 a_{t-1} a_{t-2} + \dots)] \\ &\quad \text{Parte B} \end{aligned}$$

Al aplicar el operador esperanza, los términos que contienen productos cruzados se anulan (recuérdese que, por definición, el ruido blanco a_t está incorrelacionado temporalmente).

De esta forma:

$$\begin{aligned}
 V(Y_t) &= E(a_t^2 + \theta_1^2 a_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2 a_{t-q}^2) = \\
 &= E(a_t^2) + \theta_1^2 E(a_{t-1}^2) + \dots + \theta_q^2 E(a_{t-q}^2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow V(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2
 \end{aligned}$$

Para la deducción de las autocovarianzas se sigue un procedimiento similar:

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= COV(Y_t, Y_{t-k}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}) \times \\
 &\quad \times (a_{t-k} - \theta_1 a_{t-1-k} - \theta_2 a_{t-2-k} - \dots - \theta_q a_{t-q-k})] = \\
 &\quad = \text{términos con cuadrados} + \\
 &\quad \text{Parte A} \\
 &\quad + \text{términos de productos cruzados} \\
 &\quad \text{Parte B}
 \end{aligned}$$

Cuando se toma esperanza a la PARTE B de la expresión de la derecha, los distintos términos son nulos, ya que corresponden a covarianzas entre distintos períodos de tiempo de los ruidos blancos.

La covarianza resulta de aplicar el operador esperanza a la PARTE A.

Más adelante se presenta la deducción de las covarianzas para procesos MA(1) y MA(2).

4.3. EJEMPLO

Supóngase que se está modelizando el precio de un cierto producto agrícola en un contexto no inflacionario. Para ello se dispone de una serie de tiempo donde la periodicidad se corresponde con el ciclo de cultivo del producto (es decir, semestral, anual, según corresponda). Un ejemplo de un modelo que podría describir este proceso es un MA(1):

$$Y_t = 10 + a_t + 0,8a_{t-1}$$

donde a_t es Niid $(0, 2^2)$

Es decir, el ruido blanco o innovación es normal, independiente e idénticamente distribuido con desvío estándar de 2.

Supongamos que en el momento T se produce un hecho extraordinario (una sequía, por ejemplo) que repercute en un valor “extraordinario” de la innovación (usualmente llamado *outlier*). En el ejemplo presentado, supongamos que en el momento T toma el valor de 7 (3,5 desvíos estándar).

Para simplificar la exposición, supongamos que en los períodos previos a T (T-1, T-2) el valor de a_t fue “0”, y que luego de T (T+1, T+2, ...) también toma valores “0” (esta es una simplificación, para la presentación del ejemplo bastaría que no ocurrieran nuevos *outliers*).

De esta forma tenemos:

$$a_{T-2} = 0 \quad Y_{T-2} = 10,0$$

$$a_{T-1} = 0 \quad Y_{T-1} = 10,0$$

$$a_T = 7 \quad Y_T = 17,0$$

$$a_{T+1} = 0 \quad Y_{T+1} = 15,6$$

$$a_{T+2} = 0 \quad Y_{T+2} = 10,0$$

$$a_{T+3} = 0 \quad Y_{T+3} = 10,0$$

Es decir, se observó un valor extraordinario en la serie (en T) que repercutió en el período siguiente (T+1) pero que deja de producir efectos a partir de T+2.

En el ejemplo, la sequía impulsó un incremento del precio en el período contemporáneo, que es parcialmente absorbido en el siguiente (por ejemplo, porque los demandantes deben recomponer el *stock* o porque el área sembrada en T+1 fue inferior a la de T-1) y se recompone el equilibrio en t+2, superado el efecto del *outlier*.

Si en lugar de especificar un modelo MA(1) se hubiera especificado el siguiente modelo AR(1):

$$X_t = 2 + 0,8X_{t-1} + a_t$$

donde a_t es Niid $(0, 2^2)$

Obsérvese que el modelo AR(1) se definió de manera que la esperanza de ambos modelos fuera la misma.

$$E(X_t) = \frac{2}{1-0,8} = 10$$

Para comparar con el ejemplo anterior, suponemos el mismo comportamiento del ruido (y el valor de Y en T-1 y T-2):

$$\begin{array}{ll} & X_{T-2} = 10,0 \\ a_{T-1} = 0 & X_{T-1} = 10,0 \\ a_T = 7 & X_T = 17,0 \\ a_{T+1} = 0 & X_{T+1} = 15,6 \\ a_{T+2} = 0 & X_{T+2} = 14,5 \\ a_{T+3} = 0 & X_{T+3} = 13,6 \\ \dots & \\ a_{T+10} = 0 & X_{T+10} = 10,8 \\ \dots & \\ a_{T+20} = 0 & X_{T+20} = 10,1 \\ \dots & \\ a_{T+30} = 0 & X_{T+30} = 10,0 \end{array}$$

Como puede apreciarse en el ejemplo, el valor de equilibrio (la esperanza del proceso) es, al igual que en el caso del MA(1), $Y=10$.

En los dos procesos, una vez ocurrido un hecho que lo “aparta” del equilibrio, la serie tiende a retornar a éste (obsérvese que esta es una característica de las series estacionarias: la media es invariante). La diferencia radica en la trayectoria hacia el equilibrio. En la ausencia de nuevos choques, el proceso de MA retorna a su equilibrio en número finito de períodos (de acuerdo al orden “q” del proceso), usualmente un número pequeño de períodos.

Por otro lado, el proceso AR retorna al equilibrio con movimientos decrecientes, requiriéndose “infinitos” períodos para alcanzarlo. (Como ejercicio, calcular, por ejemplo en una planilla Excel, los valores de X_t con una precisión mayor que la presentada antes y verificar que $X_{T+30} = 10,0086656$). De todos modos, X_t estará lo suficientemente próxima del valor de equilibrio en un número finito de períodos, con lo que a los efectos prácticos el punto anterior no es sustantivo.

Aún con esta precisión, como puede observarse en el ejemplo, se requiere de un número mayor de períodos para obtener un valor cercano al equilibrio. La precisión es válida en general, aunque en los casos concretos dependerá del orden de los modelos AR y MA y de los valores de los coeficientes.

En el gráfico siguiente se presentan las dos series. Los valores de $T-2$ a $T+1$ coinciden para ambas series.

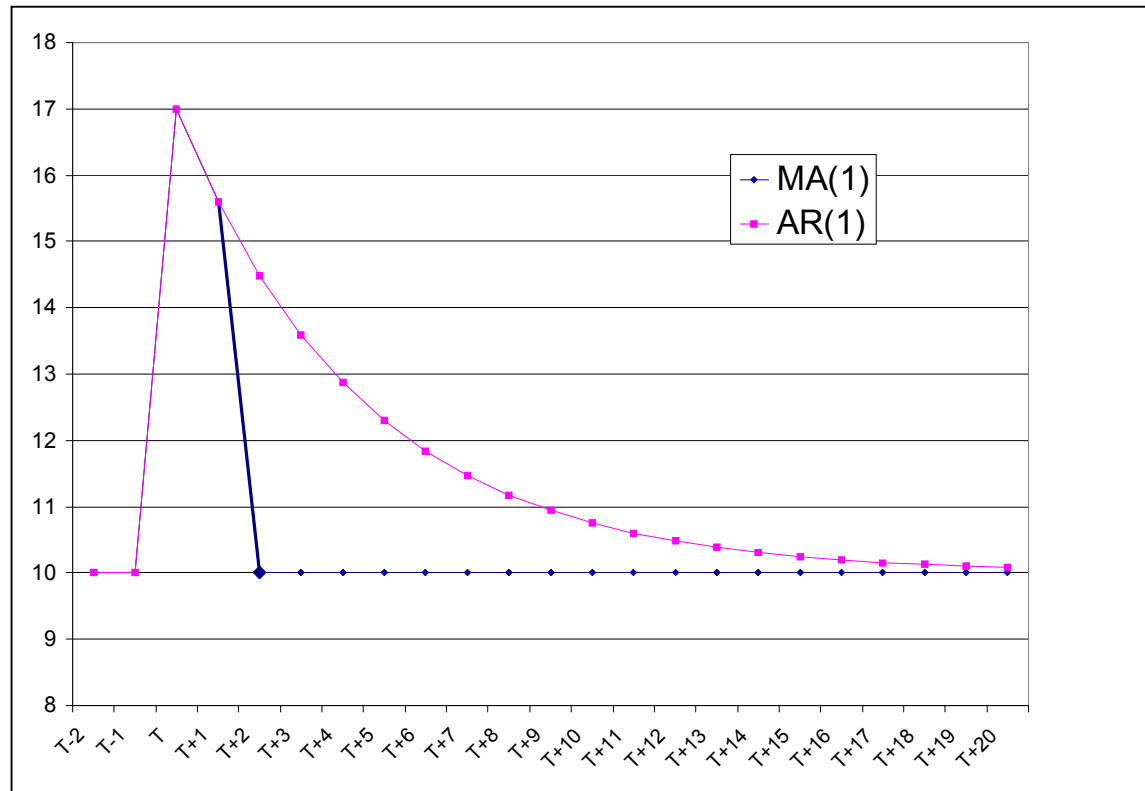


Figura 4.3.1 - Comparación de la trayectoria de una AR(1) y un MA(1).

4.4. PROCESOS MA(1) Y MA(2)

Un modelo MA(1) viene definido por:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad [4.4.1]$$

donde a_t es un ruido blanco con las propiedades ya definidas.

Ejercicios.

a) Demuestre que:

$$E(Y_t) = \mu$$

$$V(Y_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2) \sigma^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma^2$$

$$\gamma_k = 0 \quad k > 1$$

$$\rho_k = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

b) Grafique el correlograma de los siguientes procesos MA(1):

$$Y_t = a_t - 0,8a_{t-1}$$

$$Y_t = a_t + 0,8a_{t-1}$$

c) En el caso de un modelo MA(2):

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad [4.4.2]$$

Probar que la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} -\frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & k = 1 \\ -\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

4.5. ESTACIONARIEDAD E INVERTIBILIDAD DE LOS PROCESOS MA

Los modelos de medias móviles finitos son siempre estacionarios. Como puede apreciarse de las deducciones anteriores, los momentos de los procesos (esperanza, varianza y autocovarianzas) son invariantes en el tiempo. A diferencia de los procesos AR, para la deducción de los momentos no es necesario suponer la estacionariedad de la serie. Si las raíces del polinomio de medias móviles caen fuera del círculo unidad, el proceso será también invertible.

Veamos el caso de un proceso MA(1). Volviendo a escribir el proceso [4.4.1] (omitiendo la constante para simplificar la exposición) se tiene:

$$\begin{aligned}a_t &= Y_t + \theta a_{t-1} \\a_{t-1} &= Y_{t-1} + \theta a_{t-2}\end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera:

$$a_t = Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 a_{t-2}$$

y continuando con la sustitución recursiva:

$$\begin{aligned}a_t &= Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots + \theta^i Y_{t-i} + \dots \\Y_t &= a_t - (\theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots + \theta^i Y_{t-i} + \dots) \\ \Rightarrow Y_t &= -\sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i Y_{t-i} + a_t\end{aligned}$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}a_t &= Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots + \theta^i Y_{t-i} + \dots \\(1 + \theta L + \theta^2 L^2 + \dots + \theta^i L^i + \dots)Y_t &= a_t\end{aligned}$$

Es decir, en principio es posible expresar el modelo MA(1) como un $AR(\infty)$

Para que efectivamente ambos modelos sean equivalentes se requiere que el modelo AR sea estacionario, lo que impone la condición de que $|\theta| < 1$

De esta forma, cuando el polinomio de medias móviles $\Theta_q(L)$ tiene sus raíces fuera del círculo unidad, el proceso de medias móviles puede transformarse en un proceso AR estacionario.

Otra forma de mostrar la invertibilidad para procesos MA(1).

$$Y_t = a_t + \theta a_{t-1} = (1 - \theta L) a_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{1}{(1 - \theta L)} Y_t$$

La expresión que pre-multiplica a Y_t puede considerarse como la suma de una progresión geométrica de razón “theta” solamente si “theta” es, en valor absoluto, inferior a 1.

$$a_t = \frac{1}{(1 - \theta L)} Y_t =$$

$$= (1 + \theta L + \theta^2 L^2 + \theta^3 L^3 + \dots) Y_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t = -\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - \theta^3 Y_{t-3} - \dots + a_t$$

4.6. TEOREMA DE WOLD

Cualquier proceso estacionario Y_t puede representarse unívocamente como la suma de dos procesos mutuamente incorrelacionados.

$$Y_t = D_t + X_t$$

donde D_t es linealmente determinista y X_t es un proceso MA infinito. En contraposición al proceso determinista, a la parte de medias móviles se le denomina puramente no determinista.

La parte D_t puede ser una función exacta del tiempo (por ejemplo, una función sinusoidal). En el caso más simple, D_t es simplemente una constante.

Ejemplos.

1) Modelo AR(1) estacionario:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + a_t \quad |\phi_1| < 1$$

El modelo puede reescribirse como:

$$(1 - \phi_1 L)(Y_t - \mu) = a_t$$

$$\text{donde} \quad \mu = \frac{C}{1 - \phi_1}$$

La expresión anterior puede transformarse en:

$$Y_t - \mu = \frac{1}{1 - \phi_1 L} a_t = \mu + \frac{1}{1 - \phi_1 L} a_t$$

que da lugar a un proceso MA infinito, aunque estacionario, que se descompone en los dos términos de Wold.

2) Modelo ARMA(1,1) estacionario (los modelos ARMA se presentan más adelante) :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad |\phi_1| < 1$$

La condición de que $|\phi_1| < 1$ asegura la estacionariedad del proceso.

El modelo puede transformarse como:

$$(1 - \phi_1 L)Y_t = (1 - \theta_1 L)a_t$$

y, finalmente, como un MA infinito (estacionario):

$$Y_t = \frac{(1 - \theta_1 L)}{(1 - \phi_1 L)} a_t$$

3) Deduzca la forma general del proceso MA correspondiente al siguiente modelo:

$$Y_t = 0,3Y_{t-1} + a_t + 0,8a_{t-1}$$

5. PROCESOS ARMA

5.1. PRESENTACIÓN GENERAL

La combinación de procesos AR y MA da lugar a los procesos **mixtos** ARMA.

La formulación general de un proceso ARMA , ARMA(p,q), es:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} +$$

$$+ a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad [5.1.1]$$

Los momentos del proceso se derivan de la misma forma que se vio para los procesos AR y MA.

En particular, es importante analizar el correlograma de la serie. Lo haremos para el proceso ARMA(1,1).

5.2. ARMA(1,1)

Un proceso ARMA(1,1) (se excluye la constante por simplicidad) :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad [5.2.1]$$

Multiplicando ambos miembros de [5.2.1] por Y_{t-k} y tomando esperanzas, tenemos:

$$\gamma_k = E[Y_t Y_{t-k}] = \phi_1 \gamma_{k-1} + E[a_t Y_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} Y_{t-k}] \quad [5.2.2]$$

Teniendo en cuenta que:

$$E[a_t Y_t] = \sigma^2$$

$$E[a_{t-1} Y_t] = E[a_{t-1} (\phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] =$$

$$= (\phi_1 - \theta_1) \sigma^2$$

la expresión [5.2.2] se reduce a las siguientes expresiones:

Para $k=0$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma^2$$

Para $k=1$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2$$

Sustituyendo este valor en la expresión de la varianza (γ_0) se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 (\phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2) + \sigma^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma^2 = \\ \Rightarrow \gamma_0 &= \frac{1 - 2\theta_1 \phi_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

que vuelve a sustituirse en la expresión de la covarianza de primer orden (γ_1).

Para $k > 1$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$$

De esta forma, los coeficientes de autocorrelación quedan como:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - 2\theta_1 \phi_1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} & k > 1 \end{cases}$$

Es decir, los coeficientes de autocorrelación de un ARMA(1,q) se comportan como un AR(1) puro para $k > 1$.
Recuérdese que los procesos MA tienen “memoria finita”.

A continuación se presentan los correlogramas de distintos procesos ARMA.

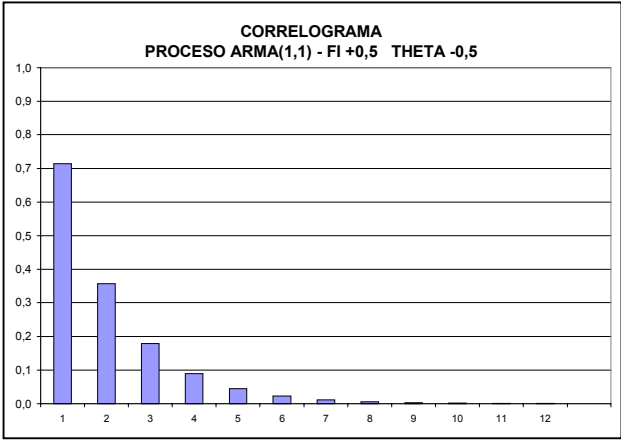


Gráfico 5.2.1

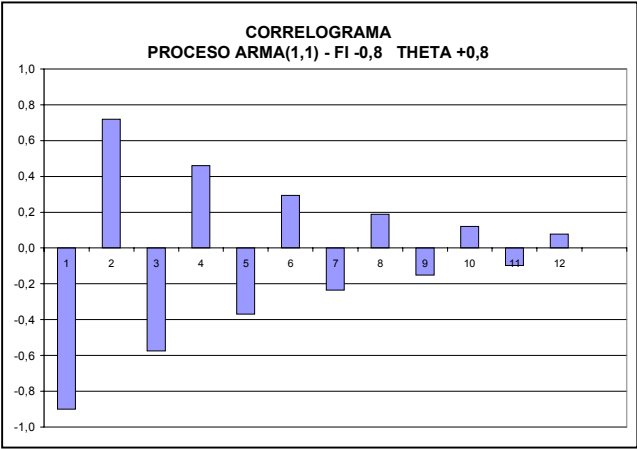


Gráfico 5.2.2

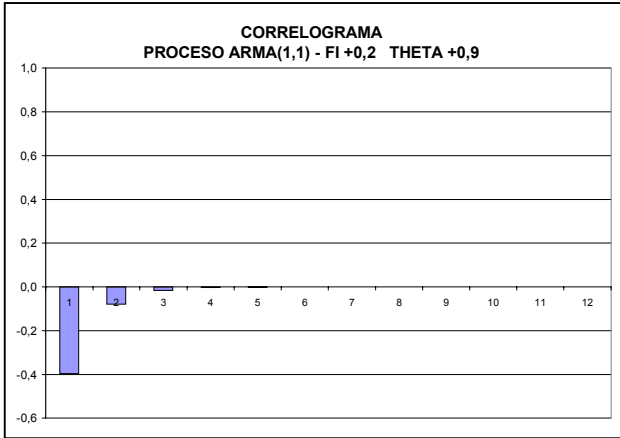


Gráfico 5.2.3

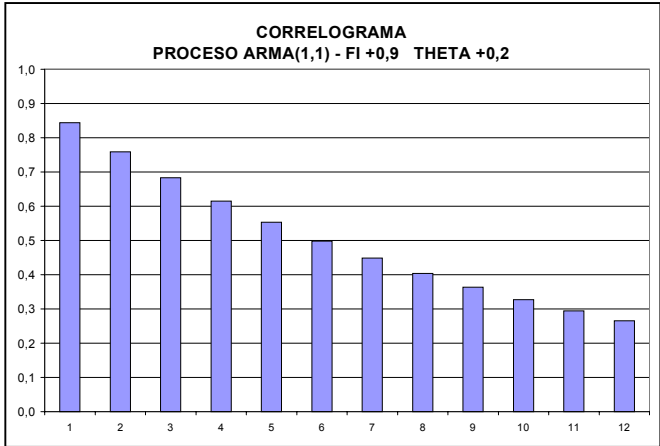


Gráfico 5.2.4

En los gráficos siguientes se presentan simultáneamente el correlograma de un proceso ARMA(1,1) y de un AR(1) de igual coeficiente en el término AR.

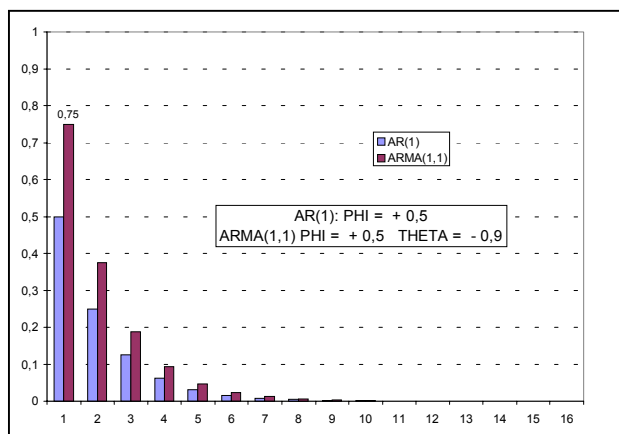


Gráfico 5.2.5

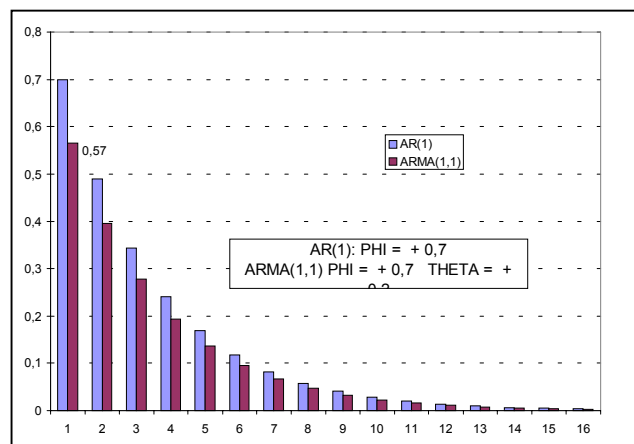


Gráfico 5.2.6

Si se estuviera analizando exclusivamente el correlograma del ARMA(1,1) la evolución decreciente de tipo exponencial podría llevar a pensar de que se trata de un AR(1). Sin embargo, tiene que tenerse en cuenta que el primer coeficiente de autocorrelación no se condice con el coeficiente de reducción.

Así, por ejemplo, en el caso del Gráfico 5.2.5, el primer coeficiente es 0,75. Si se tratara de un AR(1), el segundo coeficiente debería ser de 0,5625 y el valor resulta inferior a 0,4.

6. PROCESOS ARIMA – NO ESTACIONARIOS

La mayor parte de las series económicas corresponden a procesos **no estacionarios**. Así, si se desea obtener un tratamiento de las series basado en el “análisis de series de tiempo” (modelos ARMA), es necesario discutir mecanismos de transformación de las series a procesos estacionarios.

En principio pueden presentarse distintas (infinitas) formas por las que se introduce la no estacionariedad en un proceso estocástico. Sin embargo, interesa considerar solo algunas formas de la no estacionariedad que sean adecuados para describir el comportamiento de series económicas y, al mismo tiempo, pasibles de ser transformados en procesos estacionarios.

En primer lugar, analizaremos el proceso de “caminata al azar”.

6.1. CAMINATA AL AZAR

El proceso de caminata al azar (o “random walk” en inglés) se define como:

$$Y_t = Y_{t-1} + a_t \quad [6.1.1]$$

donde a_t es un ruido blanco con las propiedades ya definidas.

Una variante de la expresión anterior es:

$$Y_t = C + Y_{t-1} + a_t \quad [6.1.2]$$

El modelo [6.1.1] se denomina “caminata al azar **sin deriva**” (“random walk without drift”) y el [6.1.2] es **con deriva** (“with drift”).

A diferencia de los procesos estacionarios (por ejemplo, de los procesos autoregresivos estacionarios) la presencia de constante determina un cambio sustancial en el comportamiento de la serie, como se verá más adelante. De todas formas, para las consideraciones siguientes la existencia de constante no es relevante, por lo que desarrollaremos los conceptos a partir de [6.1.1].

Momentos no condicionales

Supongamos que la serie comienza en el período “0”, y el valor de Y_t viene dado para dicho período: Y_0 . Es decir, Y_0 es no estocástica. Tomando esperanzas en ambos miembros de [6.1.1] se tiene:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(Y_{t-1}) + E(a_t) = E(Y_{t-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow E(Y_t) &= E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-2}) = \dots = E(Y_0) = Y_0 \end{aligned}$$

Lo que implica que, bajo los supuestos antes planteados, la **esperanza no condicional** de Y_t existe y es invariante en el tiempo. Es decir, se cumple la primera condición de la estacionariedad en sentido amplio. Sin embargo, como se verá enseguida, no se cumplen las condiciones de varianzas y autocovarianzas invariantes, por lo que el proceso de caminata al azar no es estacionario.

A los procesos que cumplen con la condición de esperanza invariante (**aunque no con las restantes**) se les denomina **procesos estacionarios en media**. No debe perderse de vista que estos procesos son **no estacionarios**. A los procesos estacionarios (es decir, que cumplen con las tres condiciones) también se les denomina **estacionarios en covarianzas**.

Las consideraciones anteriores no son válidas para el modelo [6.1.2]. Ello se verá más adelante.

Cambiando el supuesto respecto de Y_0 , y suponiendo que el proceso se inicia en un pasado remoto, a partir de la expresión [6.1.1] también puede observarse que:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + a_t = (Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = a_t + a_{t-1} + Y_{t-2} = \\ &= a_t + a_{t-1} + (Y_{t-3} + a_{t-2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{t-j} \end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior, se observa directamente que la varianza del proceso es infinita (estrictamente, no existe) y el proceso es no estacionario.

Si se hubiera mantenido el supuesto de Y_0 no aleatorio (y a_0 de la misma forma), se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a_{t-j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(Y_t) = V(Y_0) + t\sigma_a^2 = t\sigma_a^2 \end{aligned}$$

La varianza de Y_t existe, pero es variable en el tiempo (con lo que proceso es no estacionario).

De manera análoga se obtiene la autocovarianza de orden “k”.

$$COV(Y_t, Y_{t-k}) = (t-k)\sigma_a^2$$

El coeficiente de autocorrelación de orden “k” para el momento “t” (ya que es variable en el tiempo), es:

$$\begin{aligned}\rho_k(t) &= \frac{COV(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{V(Y_t)}\sqrt{V(Y_{t-k})}} = \frac{(t-k)\sigma_a^2}{\sqrt{t\sigma_a^2}\sqrt{(t-k)\sigma_a^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(t-k)}{t}} = \sqrt{1 - \frac{k}{t}}\end{aligned}$$

Por lo que, para “t” suficientemente grande, los coeficientes de autocorrelación resultan próximos a 1 y descienden muy lentamente a cero (a medida que aumenta “k”). Esta es, justamente, una de las características que distinguen a los procesos no estacionarios cuando se observa su correlograma.

En el caso del proceso [6.1.2], la serie presenta tendencia (creciente o decreciente, según del signo de C). Realizando sustituciones recursivas en [6.1.2], se tiene:

$$\begin{aligned}Y_t &= C + Y_{t-1} + a_t = C + (C + Y_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = \\ &= 2C + a_t + a_{t-1} + Y_{t-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_t = t * C + \sum_{j=0}^t a_{t-j}\end{aligned}$$

De otra forma:

$$\begin{aligned}Y_t &= C + Y_{t-1} + a_t \Rightarrow \\ \Delta Y_t &= C + a_t\end{aligned}$$

Y_t crece aproximadamente a una “tasa” C en cada período. “Aproximadamente” porque la presencia del ruido a_t puede provocar apartamientos (transitorios). La esperanza de la diferencia es de Y_t es constante (e igual a C) pero la esperanza de Y_t será variable en el tiempo. De hecho, la serie Y_t registra tendencia.

Momentos condicionales

Se derivó la esperanza matemática (no condicionada) de la serie Y_t . Sin embargo, resulta relevante calcular la esperanza condicional de la variable, dados los valores pasados.

Llamaremos Y_{t-1} al conjunto de los valores pasados de Y_t . De esta forma, para el proceso [6.1.1]:

$$E(Y_t / Y_{t-1}) = E(Y_{t-1} / Y_{t-1}) + E(a_t) = Y_{t-1}$$

Es decir, una vez que se observa el valor de Y_t en “t-1”, Y_{t-1} , el valor esperado condicional a dicho valor es, justamente, Y_{t-1} .

Resulta directo demostrar, también, que:

$$E(Y_{T+p} / Y_T) = \hat{Y}_{T+p} = Y_T \quad [6.1.3]$$

Es decir, si la última observación corresponde al período “T”, la proyección puntual de Y_t en “T+p” será el último valor observado, Y_T .

Para el proceso [6.1.2]:

$$E(Y_t / Y_{t-1}) = C + E(Y_{t-1} / Y_{t-1}) + E(a_t) = C + Y_{t-1}$$

$$E(Y_{T+p} / Y_T) = \hat{Y}_{T+p} = p * C + Y_T \quad [6.1.4]$$

Transformación estacionaria

En el caso de una caminata al azar, tanto en el modelo [6.1.1] como [6.1.2], la transformación estacionaria resulta directa:

$$\begin{aligned} z_t &= \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = C + a_t && \text{para [6.1.2] o} \\ z_t &= \Delta Y_t = a_t && \text{para [6.1.1]} \end{aligned}$$

Es decir, la primera diferencia de la serie es un ruido blanco (eventualmente, con media no nula, para el modelo [6.1.2]).

En múltiples ocasiones la transformación estacionaria corresponde a la primera diferencia luego de tomar logaritmos, lo que comúnmente es denominado “deltalog”.

$$z_t = \Delta \log Y_t = \log Y_t - \log Y_{t-1}$$

Más adelante se presenta la transformación de Box-Cox, de aplicación más general.

La transformación deltaglog es especialmente aplicable cuando la serie en cuestión tiene una **tasa de crecimiento** relativamente estable en el tiempo (estrictamente, estacionaria). Es el caso, en general, de los índices de precios, aún para países con baja inflación.

Al resultado de aplicar deltaglog a la serie original se le denomina **tasa de variación natural**, siendo una aproximación a la tasa de variación relativa.

Diferenciación estacionaria

Supongamos el siguiente proceso:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \quad [6.1.5]$$

donde u_t es un proceso estacionario, aunque no necesariamente ruido blanco.

La expresión anterior no puede considerarse estrictamente una caminata al azar, aunque el tratamiento es muy similar. Supongamos que u_t puede expresarse como un proceso autoregresivo en las primeras diferencias de Y_t . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + u_t = Y_{t-1} + \phi \Delta Y_{t-1} + a_t \quad \text{con } |\phi| < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta Y_t &= \phi \Delta Y_{t-1} + a_t \end{aligned} \quad [6.1.6]$$

De esta forma, puede transformarse el proceso original y se obtiene un AR(1) en la primera diferencia de Y_t . A pesar de que estrictamente no correspondería denominarlas de esta manera, los procesos como [6.1.5] a menudo son definidos como “caminatas al azar”.

Utilizando el operador de retardos, la expresión [6.1.6] puede reescribirse como:

$$(1 - \phi L) \Delta Y_t = (1 - \phi L)(1 - L) Y_t = [1 - (1 + \phi)L + \phi L^2] Y_t = \Phi_2(L) Y_t = a_t$$

Como puede observarse, en los valores originales de Y_t el proceso puede definirse como AR(2), pero no estacionario, ya que el polinomio autoregresivo incluye una **raíz unitaria**. En la primera diferencia de Y_t corresponde a un proceso AR(1) estacionario (ya que el coeficiente “phi” es inferior a 1 en valor absoluto).

6.2. CASO GENERAL

Dada una serie Y_t , que eventualmente corresponde a los logaritmos de los valores originales, si su diferencia de orden “d” puede ser representada por un proceso ARMA(p,q) estacionario, se dice que la serie Y_t sigue un proceso ARIMA(p,d,q).

La letra “I” en ARIMA corresponde a “Integración”, la operación inversa a la diferenciación.

Si $z_t = \Delta^d Y_t$ y Z_t sigue un proceso ARMA(p,q) estacionario:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) z_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) a_t$$

$$\Phi_p(L) z_t = \Theta_q(L) a_t$$

entonces Y_t sigue un proceso ARIMA(p,d,q).

También se escribe en la variable original Y_t como:

$$\Phi_p(L)(1-L)^d Y_t = \Theta_q(L) a_t$$

Generalmente no son necesarias diferencias regulares de orden superior a 2, excepto en el caso de variables que presentan estacionalidad, como se verá más adelante.

6.3. TRANSFORMACIÓN DE BOX-COX

Box y Cox (1964) definieron una transformación instantánea –en el sentido de que no están involucrados simultáneamente varios períodos de tiempo- de carácter más general que la transformación logarítmica. Esta transformación se define por:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} (Y_t^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

La transformación Box-Cox requiere definir el parámetro λ de la transformación.

Cuando el parámetro es $\lambda=1$, la transformación de Box-Cox consiste prácticamente en tomar logaritmos.

Cuando el parámetro es $\lambda=0$, se define por la segunda igualdad (transformación logarítmica).

La primera igualdad vale también, en el límite, el logarítmico de la serie original.

6.4. HETEROCEDASTICIDAD

Una fuente importante de no estacionariedad corresponde a la presencia de heterocedasticidad en una serie dada. En ciertos casos ello puede corregirse con la aplicación de logaritmos (si la serie presenta tendencia creciente, es muy probable que la varianza de los valores originales también sea creciente en el tiempo).

En otros casos, como sucede a menudo para series financieras, no es posible transformar la serie para volverla homocedástica. Estos casos son abordados a través de la familia de modelos ARCH (AutoRegressive Conditional Heterocedasticity). A continuación se presentan los delta log de datos diarios (desde agosto de 1990 a abril de 2001) de la cotización de la libra esterlina en el mercado de Nueva York.

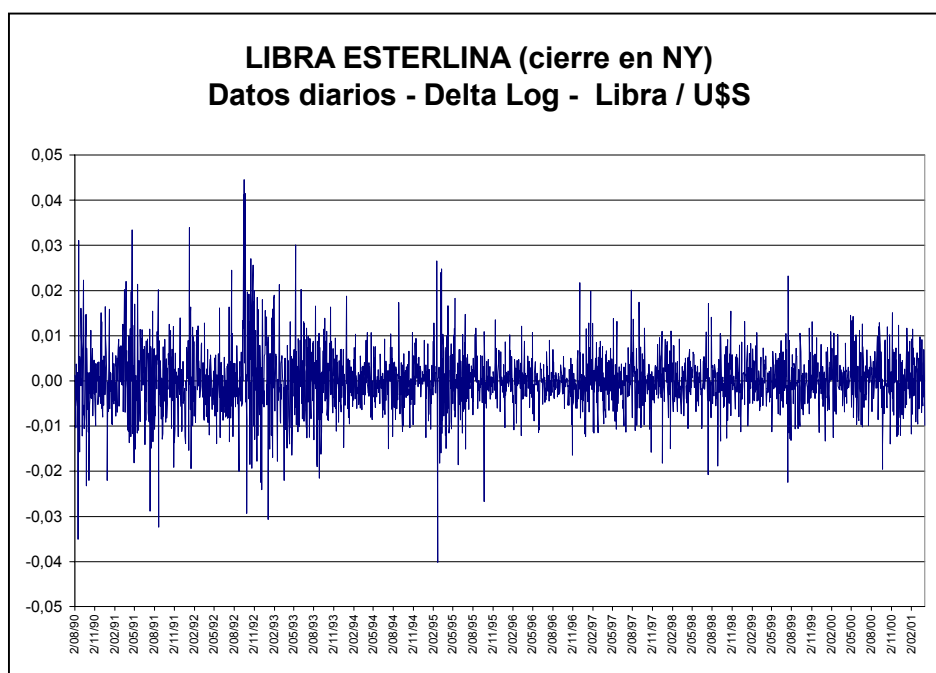


Ilustración 6.4.1

Como puede apreciarse en la ilustración, en la primera mitad del período se aprecia una varianza más elevada que en la segunda (relacionada con el sistema cambiario adoptado). A pesar de que la serie transformada (delta log) parecería estacionaria en media, claramente no lo es en varianzas, por lo que es **no estacionaria**.

6.5. EJEMPLOS

Cotización del Marco Alemán

Se presenta a continuación la ilustración de la cotización del Marco Alemán respecto del dólar de EE.UU. (valores de cierre diarios en NY) desde agosto de 1990 a abril de 2001 (encadenando con la cotización del euro).

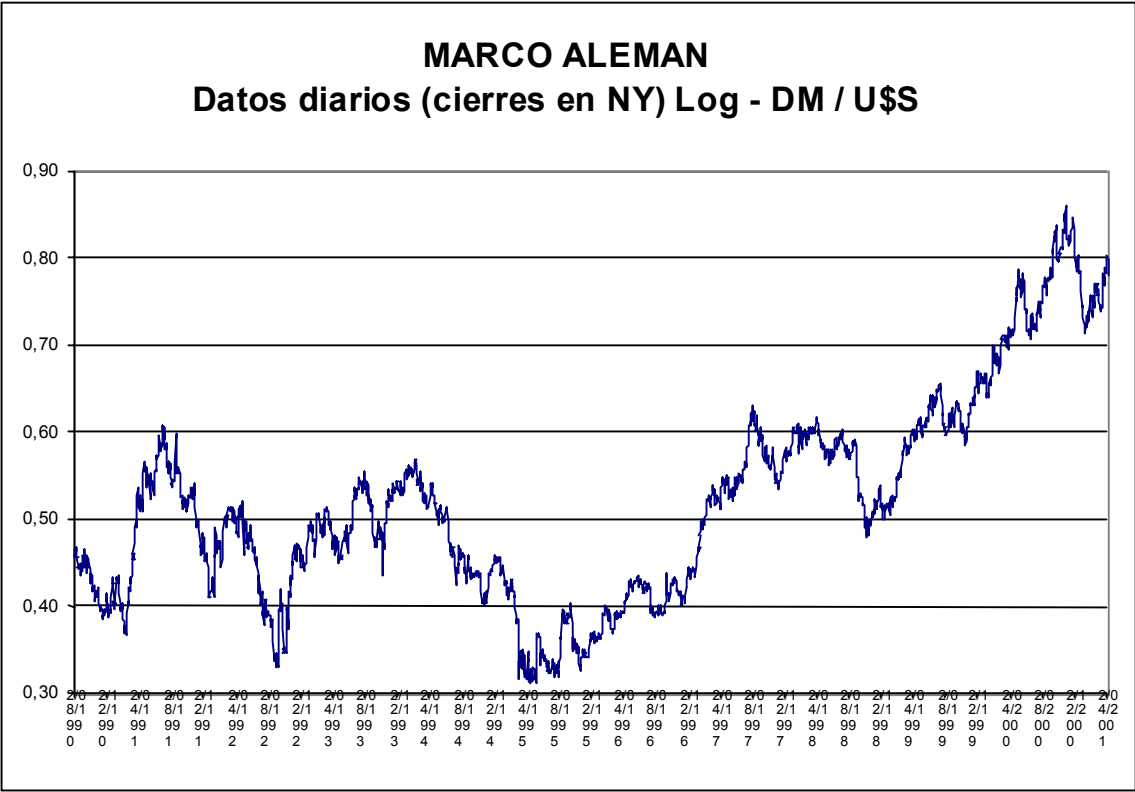


Ilustración 6.5.1.

A continuación se presenta el histograma y distintos momentos de la serie original (en logaritmos) y de la primera diferencia (deltalog), para el último año de la serie (308 observaciones - días hábiles -), realizados con el programa EViews.

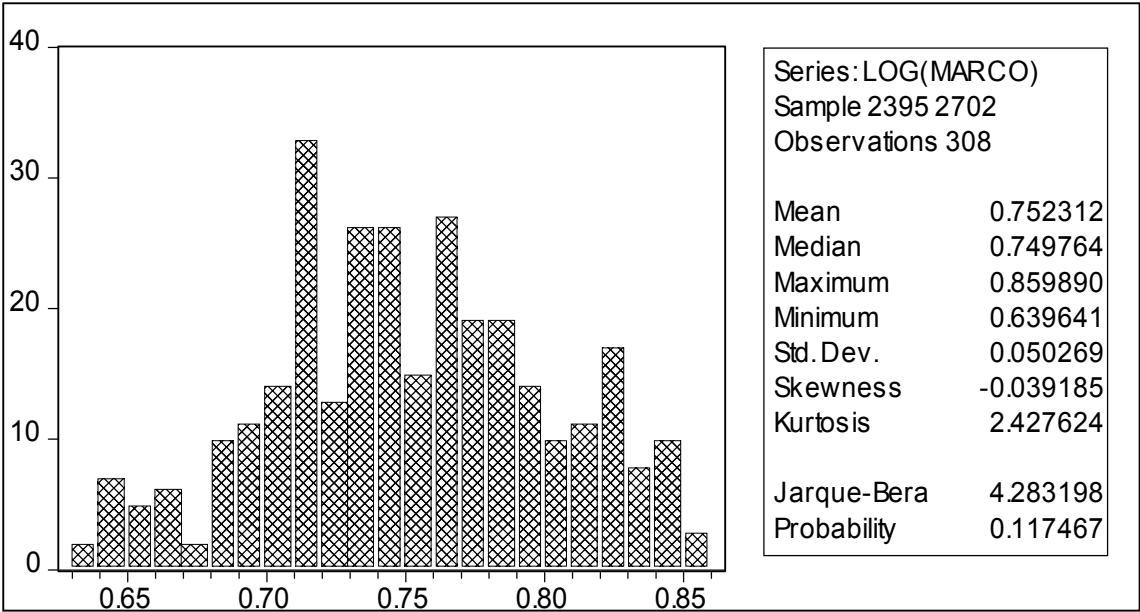


Ilustración 6.5.2.

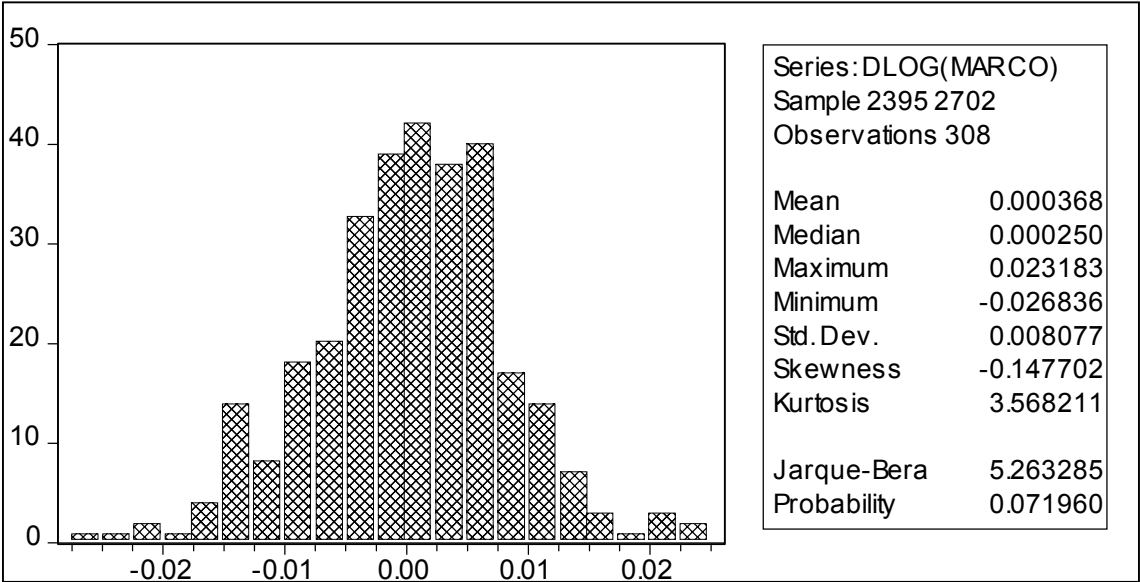


Ilustración 6.5.3.

Como puede apreciarse, para la serie del talog no puede rechazarse que sea un ruido blanco (sería necesario realizar otras pruebas adicionales, como el Box-Ljung, que se presenta más adelante, pero efectivamente no se rechaza la hipótesis de ruido blanco).

De esta forma, si la transformación del talog da lugar a un ruido blanco y la serie no presenta tendencia (como puede observarse en el primer gráfico del marco), se está ante una caminata al azar “pura”, modelo [6.1.1].

Índice Dow Jones

Se presenta a continuación el índice de acciones principales de la Bolsa de Nueva York, denominado Dow Jones Industriales, en la ilustración a la izquierda, y el logaritmo natural del anterior, en la ilustración a la derecha. Los datos corresponden a promedios mensuales de valores de cierre diarios desde Diciembre de 1950 a Marzo de 2002.

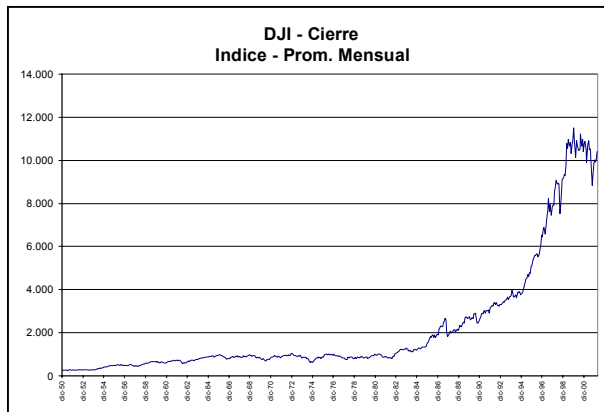


Ilustración 6.5.4

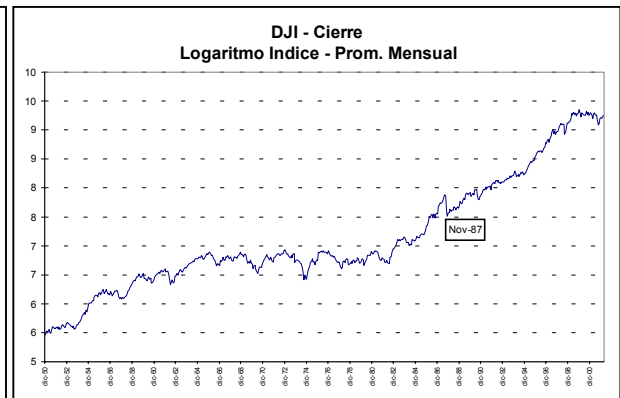


Ilustración 6.5.5

Como puede apreciarse, más allá de algunos episodios en que el índice presentó un descenso (particularmente desde diciembre de 1999) la tendencia general del índice es creciente. **Analice las razones por las cuales el índice debe necesariamente tener tendencia creciente.**

Tomando logaritmos el comportamiento del índice se asemeja más a una recta en el tiempo. Se aprecian también episodios de descenso (o de crecimiento) relevantes del índice que antes pasaban desapercibidos, como el de Noviembre de 1987.

Finalmente, se presenta a continuación la primera diferencia del logaritmo del índice (transformación deltalog).

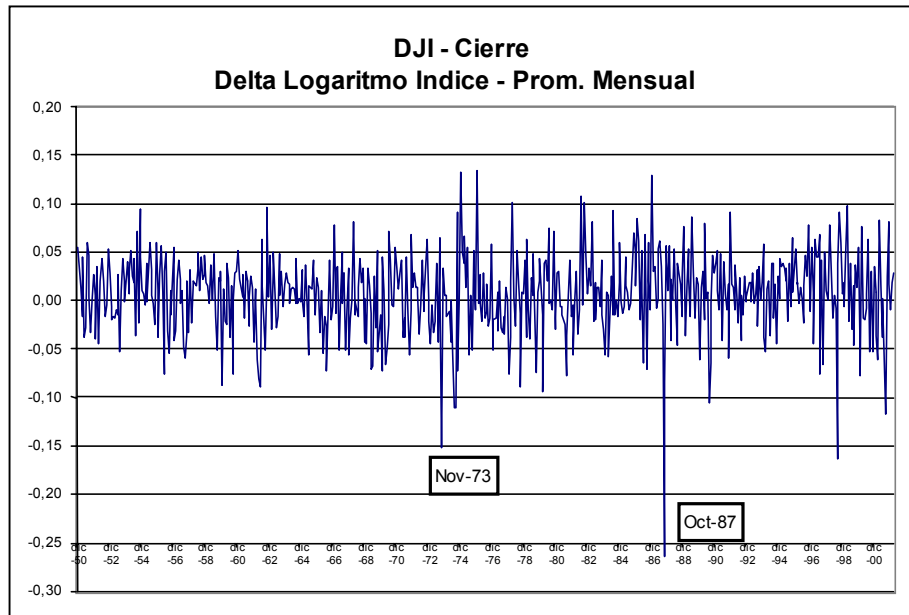


Ilustración 6.5.6

7. PROCESOS ARIMA ESTACIONALES

7.1. Presentación

Series de tiempo de frecuencia menor al año (mensuales, trimestrales) pueden presentar estacionalidad. Es decir, son series con ciclos u oscilaciones estrictamente periódicas, donde el período es igual o inferior al año.

La presencia de este componente se explica por la existencia de las estaciones y su impacto sobre la actividad económica (por ejemplo, en la producción agropecuaria, el turismo), las costumbres (el fin de año, que es estrictamente cultural), procesos físicos (temperatura, pluviosidad), etc.

7.2. Modelos estacionales estacionarios puros

Supóngase un fenómeno donde solamente existe relación entre las observaciones de un mismo mes (trimestre, semestre, etc.) en dos años consecutivos. Por ejemplo, para datos trimestrales se tiene el siguiente modelo:

$$Y_t = C + \phi Y_{t-4} + a_t \quad \text{con } |\phi| < 1 \quad [7.2.1]$$

Es decir, el valor corriente de Y se explica por el ruido contemporáneo y por el valor de Y cuatro trimestres atrás (el mismo trimestre del año anterior). El modelo recoge exclusivamente factores estacionales.

El modelo puede ser escrito como:

$$Y_t - \phi Y_{t-4} = C + a_t$$

$$(1 - \phi L^4)Y_t = C + a_t \Rightarrow \Phi_4(L)Y_t = C + a_t$$

donde $\Phi(L)$ es el polinomio autoregresivo.

Designamos como “s” el período estacional (s=4 para datos trimestrales, s=12 para mensuales, etc.). El modelo [7.2.1] se nota como SAR(1)s, o modelo autoregresivo estacional (*Seasonal*, en inglés) de primer orden.

Es suficiente que ϕ en valor absoluto sea menor que 1 para que el modelo sea

estacionario. En efecto, el polinomio $\Phi_4 \equiv (1 - \phi L^4)$ tiene 4

raíces complejas de la forma (verificarlo):

$$z_1 = +\sqrt[4]{1/\phi} \quad |z_1| > 1 \quad z_2 = -\sqrt[4]{1/\phi} \quad z_3 = +\sqrt[4]{-1/\phi} \quad z_4 = -\sqrt[4]{-1/\phi}$$

Es suficiente que para que las raíces caigan fuera del círculo unidad.

A continuación se presenta el correlograma de:

modelo AR(1): $Y_t = 0,8 * Y_{t-1} + a_t$

modelo SAR(1)₄: $Y_t = 0,8 * Y_{t-4} + a_t$

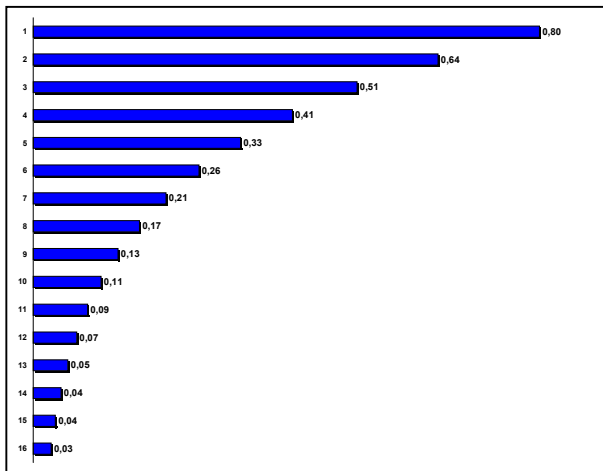


Figura 7.1.1. – Correlograma AR(1)

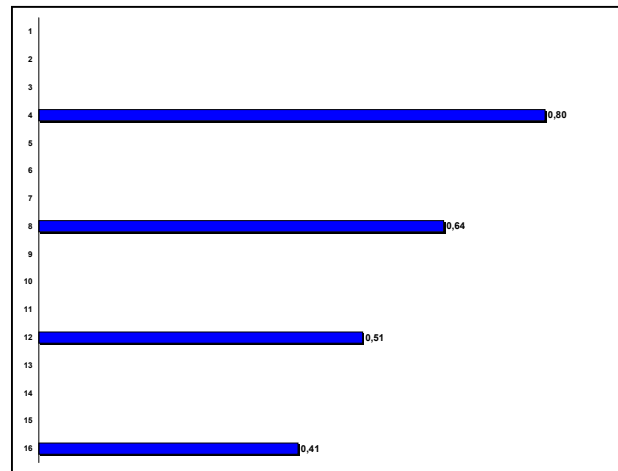


Figura 7.1.2. – Correlograma SAR(1)₄

La Función de Auto Correlación (FAC) del proceso estacional puro SAR(1)₄ considerado en [7.2.1] es:

$$\rho_k = \begin{cases} \phi \rho_{k-s} = \phi^{k/s} & \text{para } k = s, 2s, 3s, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $s=4$

Otros modelos estacionales puros

Modelo SAR(2)_s:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-s} + \phi_2 Y_{t-2s} + a_t$$

De la misma forma que se definen los procesos estacionales puros autoregresivos, puede hacerse lo mismo con procesos de medias móviles:

$$Y_t = C + a_t - \theta a_{t-4}$$

$$Y_t = C + a_t - \theta a_{t-12}$$

que corresponde al modelo SMA(1)₄ y SMA(1)₁₂, para datos trimestrales o mensuales, respectivamente.

7.3. Modelos estacionales estacionarios multiplicativos

Supóngase que se está modelizando el consumo de refrescos con datos de frecuencia trimestral. En el proceso de identificación del modelo se observa que los choques en el trimestre “t” repercuten también en el período o trimestre siguiente, y en el mismo trimestre del año siguiente. Es decir, provoca cambios en el componente estacional de la serie.

El modelo siguiente podría reflejar este comportamiento:

$$Y_t = C + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_4 a_{t-4}$$

Es decir, el ruido en “t” influye en “t+1” y en “t+4”. El modelo planteado tiene la importante limitación que no recoge la influencia que tendrá el efecto en “t+4” sobre el valor de la variable en “t+5”. Es decir, el efecto “un trimestre después” se modeliza solamente en “t+1”.

Una manera de salvar este problema es con la formulación de modelos estacionarios multiplicativos estacionales.

$$Y_t = C + (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_4 L^4) a_t \quad [7.3.1]$$

Obsérvese que este modelo puede reescribirse como:

$$Y_t = C + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_4 a_{t-4} + \theta_1 \theta_4 a_{t-5} \quad [7.3.2]$$

Es decir, el modelo justamente “captura” la interacción de los dos efectos sobre el período “t+5”. Una forma alternativa de escribir [7.3.2] es como un MA(5):

$$Y_t = C + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_4 a_{t-4} - \theta_5 a_{t-5} \quad [7.3.3]$$

El modelo [7.3.3] es la versión “no restringida”. Contiene un parámetro más que el modelo [7.3.2] ya que justamente no impone la interacción entre los dos efectos. Si los modelos tuvieran un poder explicativo similar, siempre es preferible el primero porque es más parsimonioso.

La práctica ha llevado a adoptar los modelos multiplicativos como la representación general de efectos ordinarios y estacionales en procesos estacionarios. En todo caso, siempre es posible estimar ambos modelos y realizar pruebas de hipótesis para decidir por uno u otro.

De la misma forma pueden plantearse modelos AR multiplicativos o modelos ARMA multiplicativos. Se presentan a continuación dos ejemplos para la frecuencia mensual:

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_{12} L^{12}) Y_t = C + a_t \quad [7.3.4]$$

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_{12} L^{12}) Y_t = C + (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_{12} L^{12}) a_t \quad [7.3.5]$$

Como en los modelos ARMA ordinarios, la estacionariedad del proceso está asociada a las raíces del polinomio autoregresivo.

7.4. FAC para modelos estacionales estacionarios multiplicativos

Considérese el modelo [7.3.1] para la frecuencia mensual. Por simplicidad, se plantea sin constante.

$$Y_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_{12} L^{12}) a_t \quad [7.4.1]$$

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_{12} a_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-13} \quad [7.4.2]$$

El modelo se describe como MA(1) x SMA(1)₁₂

Las covarianzas del proceso son:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= COV(Y_t, Y_{t-1}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_{12} a_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-13}) \times \\ &\quad \times (a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} - \theta_{12} a_{t-13} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-14})] = \\ &= E[-\theta_1 a_{t-1}^2 - \theta_1 \theta_{12}^2 a_{t-13}^2] = (-\theta_1 \sigma_a^2)(1 + \theta_{12}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= COV(Y_t, Y_{t-2}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_{12} a_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-13}) \times \\ &\quad \times (a_{t-2} - \theta_1 a_{t-3} - \theta_{12} a_{t-14} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-15})] = 0 \end{aligned}$$

Y, de la misma forma, se deduce que: $\gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_{10} = 0$

Las autocovarianzas en torno al retardo 12 son:

$$\gamma_{11} = COV(Y_t, Y_{t-11}) = E(\theta_1 \theta_{12} a_{t-12}^2) = \theta_1 \theta_{12} \sigma_a^2$$

$$\gamma_{12} = E(-\theta_{12} a_{t-12}^2 - \theta_1^2 \theta_{12} a_{t-13}^2) = -\theta_{12} \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2)$$

$$\gamma_{13} = E(\theta_1 \theta_{12} a_{t-13}^2) = \theta_1 \theta_{12} \sigma_a^2$$

$$\gamma_k = 0 \text{ para } k > 13$$

De esta forma, el correlograma tendrá valores no nulos para $k=1, 11, 12$ y 13 .

Suponiendo modelos MA de orden bajo, tanto para la parte ordinaria como para la parte estacional, el correlograma tendrá coeficientes no nulos para los primeros retardos (hasta el orden de la parte ordinaria) y en torno a la frecuencia estacional: en torno a 12 si es $SMA(1)_{12}$, en torno a 12 y 24 si es $SMA(2)_{12}$, etc.

Los coeficientes de autocorrelación no nulos para $k=11$ y 13 se denominan “satélites” porque surgen de la interacción de la parte ordinaria y estacional.

La FAC para modelos AR o ARMA estacionales es más compleja, pero en general, para modelos de orden bajo, se observa una situación similar a la planteada anteriormente. Los coeficientes de autocorrelación de orden bajo se comportan como un modelo no estacional, mientras que se observan coef. de autocorr. no nulos en torno a las frecuencias estacionales.

Figura 7.4.1. Correlograma de SARMA (0,1)(0,1)₁₂:
 $Y_t = (1-0.3*L) (1-0.5*L^{12}) a_t$

Autocorrelation		Partial	Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
**		**		1-0.261	-0.261	68.388	0.000
*		*		2-0.061	-0.139	72.171	0.000
.		*		3-0.004	-0.064	72.183	0.000
.		.		4 0.047	0.022	74.420	0.000
.		.		5-0.014	0.002	74.613	0.000
.		.		6 0.020	0.028	75.034	0.000
.		.		7-0.042	-0.030	76.804	0.000
.		.		8-0.017	-0.039	77.111	0.000
.		.		9 0.005	-0.021	77.132	0.000
.		.		10 0.035	0.025	78.389	0.000
.	*	.	*	11 0.092	0.123	87.001	0.000
***		***		12-0.395	-0.363	245.35	0.000
.	*	*		13 0.113	-0.090	258.41	0.000
.		*		14 0.013	-0.064	258.60	0.000
.		.		15 0.034	0.014	259.80	0.000
.		.		16-0.027	0.021	260.53	0.000
.		.		17-0.018	-0.030	260.87	0.000
.		.		18-0.008	-0.004	260.94	0.000
.	*	.		19 0.092	0.065	269.59	0.000
.		.		20-0.036	-0.011	270.95	0.000
.		.		21 0.006	0.008	270.98	0.000
.		.		22-0.031	-0.017	271.97	0.000
.		.		23 0.004	0.034	271.98	0.000
.		*		24 0.018	-0.157	272.30	0.000
.		.		25-0.006	-0.043	272.34	0.000
.		.		26-0.021	-0.050	272.80	0.000
.		.		27-0.014	-0.006	273.00	0.000
.		.		28 0.044	0.051	274.98	0.000
.		.		29-0.014	-0.024	275.18	0.000
.		.		30 0.006	0.006	275.22	0.000
*		.		31-0.064	-0.012	279.49	0.000
.	*	.		32 0.071	0.043	284.77	0.000
.		.		33-0.019	0.014	285.15	0.000
.		.		34 0.017	-0.003	285.47	0.000
.		.		35-0.031	-0.013	286.48	0.000
.		*		36 0.002	-0.085	286.49	0.000

Included observations: 1000								
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.	***	.	***	1	0.459	0.459	210.89	0.000
.	*	.	*	2	0.150	-0.077	233.43	0.000
.	*	.	.	3	0.070	0.039	238.29	0.000
.	*	.	*	4	0.102	0.081	248.75	0.000
.	.	.	.	5	0.061	-0.026	252.51	0.000
.	*	.	*	6	0.099	0.098	262.42	0.000
.	*	.	.	7	0.070	-0.018	267.31	0.000
.	*	.	.	8	0.078	0.052	273.42	0.000
.	.	.	.	9	0.018	-0.048	273.76	0.000
.	*	.	*	10	0.072	0.089	279.06	0.000
.	**	.	**	11	0.294	0.296	366.80	0.000
.	*****	.	*****	12	0.690	0.599	850.04	0.000
.	***	**	.	13	0.335	-0.297	963.69	0.000
.	*	.	.	14	0.112	0.020	976.52	0.000
.	.	.	.	15	0.048	-0.038	978.82	0.000
.	*	.	.	16	0.074	-0.011	984.47	0.000
.	.	.	.	17	0.042	0.019	986.25	0.000
.	*	.	.	18	0.098	0.024	996.01	0.000
.	*	.	.	19	0.100	0.055	1006.2	0.000
.	*	.	.	20	0.080	-0.022	1012.7	0.000
.	.	.	.	21	-0.012	-0.032	1012.9	0.000
.	.	.	.	22	0.021	-0.001	1013.3	0.000
.	*	.	.	23	0.177	-0.019	1045.4	0.000
.	*****	.	.	24	0.466	0.000	1268.1	0.000
.	**	.	.	25	0.239	0.005	1326.6	0.000
.	*	.	.	26	0.076	-0.017	1332.6	0.000
.	.	.	.	27	0.010	-0.033	1332.7	0.000
.	.	.	.	28	0.043	0.024	1334.5	0.000
.	.	.	.	29	0.024	0.000	1335.1	0.000
.	*	.	.	30	0.073	-0.029	1340.6	0.000
.	*	.	.	31	0.083	-0.025	1347.7	0.000
.	*	.	.	32	0.069	0.021	1352.6	0.000
.	.	.	.	33	-0.033	-0.022	1353.7	0.000
.	.	.	.	34	0.000	0.040	1353.7	0.000
.	*	.	.	35	0.101	-0.026	1364.4	0.000
.	**	.	.	36	0.305	-0.010	1461.3	0.000

Included observations: 1000								
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.	**	.	**	1	0.311	0.311	97.092	0.000
.	***	.	***	2	0.428	0.366	280.79	0.000
.	**	.		3	0.198-0.001	320.03	0.000	
.	**	.	*	4	0.320	0.159	422.97	0.000
.	*	.		5	0.154-0.007	446.99	0.000	
.	**	.	*	6	0.273	0.109	521.97	0.000
.	*	.		7	0.148	0.014	544.06	0.000
.	**	.	*	8	0.263	0.099	613.95	0.000
.	*	.		9	0.133-0.007	631.79	0.000	
.	**	.	*	10	0.300	0.151	723.14	0.000
.	**	.	*	11	0.210	0.084	767.73	0.000
.	*****	.	*****	12	0.699	0.628	1263.9	0.000
.	**	.	*	13	0.231-0.165	1318.1	0.000	
.	**	.	**	14	0.308-0.243	1414.4	0.000	
.	*	.		15	0.139-0.026	1434.1	0.000	
.	**	.		16	0.238-0.035	1491.9	0.000	
.	*	.		17	0.107	0.022	1503.6	0.000
.	**	.		18	0.213	0.013	1549.9	0.000
.	*	.		19	0.131	0.043	1567.4	0.000
.	**	.		20	0.203-0.001	1609.7	0.000	
.	*	.	*	21	0.071-0.058	1614.9	0.000	
.	**	.		22	0.199-0.012	1655.3	0.000	
.	*	.		23	0.124-0.011	1671.1	0.000	
.	****	.		24	0.474-0.008	1901.2	0.000	
.	*	.		25	0.156	0.002	1926.2	0.000
.	**	.		26	0.211	0.003	1972.2	0.000
.	*	.		27	0.070-0.040	1977.2	0.000	
.	*	.		28	0.164	0.009	2004.9	0.000
.		.		29	0.059	0.013	2008.5	0.000
.	*	.		30	0.152-0.009	2032.3	0.000	
.	*	.		31	0.082-0.044	2039.4	0.000	
.	*	.		32	0.156	0.031	2064.6	0.000
.		.		33	0.015-0.015	2064.9	0.000	
.	*	.		34	0.135	0.024	2083.9	0.000
.		.		35	0.063	0.006	2088.0	0.000
.	**	.		36	0.311-0.035	2188.5	0.000	

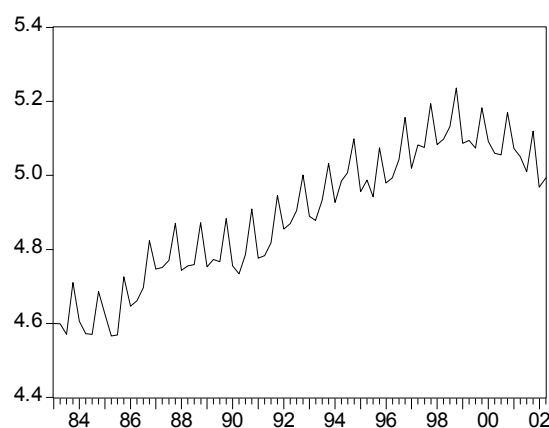
Included observations: 1000								
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.	***	.	***	1	0.441	0.441	195.23	0.000
.	**	.	*	2	0.264	0.087	265.40	0.000
.	**	.	*	3	0.199	0.067	305.02	0.000
.	*	.		4	0.161	0.047	331.19	0.000
.	*	.		5	0.086	-0.028	338.58	0.000
.		.		6	0.037	-0.024	339.96	0.000
.		*		7	-0.034	-0.073	341.12	0.000
.		.		8	-0.057	-0.034	344.44	0.000
*		.		9	-0.067	-0.024	348.96	0.000
*		.		10	-0.088	-0.040	356.88	0.000
*		*		11	-0.165	-0.113	384.46	0.000
***		***		12	-0.379	-0.321	530.41	0.000
*		.	*	13	-0.150	0.190	553.24	0.000
*		.		14	-0.082	0.038	560.12	0.000
.		.		15	-0.042	0.055	561.91	0.000
.		.		16	-0.049	-0.005	564.39	0.000
.		.		17	-0.030	-0.023	565.32	0.000
.		.		18	0.008	0.030	565.38	0.000
.		.		19	0.058	0.017	568.83	0.000
.		*		20	0.001	-0.073	568.83	0.000
.		.		21	-0.010	-0.022	568.92	0.000
.		.		22	-0.029	-0.052	569.79	0.000
.		.		23	-0.014	-0.041	569.98	0.000
.		*		24	-0.005	-0.129	570.00	0.000
.		.	*	25	-0.019	0.075	570.38	0.000
.		.		26	-0.028	0.012	571.17	0.000
.		.		27	-0.014	0.045	571.38	0.000
.		.		28	0.016	0.025	571.63	0.000
.		.		29	-0.006	-0.042	571.67	0.000
.		.		30	-0.011	0.025	571.79	0.000
.		.		31	-0.026	-0.001	572.51	0.000
.		.		32	0.035	0.021	573.75	0.000
.		.		33	0.010	-0.043	573.85	0.000
.		.		34	0.011	-0.036	573.99	0.000
.		.		35	-0.008	-0.033	574.05	0.000
.		.		36	0.012	-0.032	574.20	0.000

7.5. Modelos estacionales no estacionarios

PIB Uruguay

El siguiente gráfico corresponde al logaritmo del PIB trimestral (estrictamente, el Índice de Volumen Físico del Producto Interno Bruto).

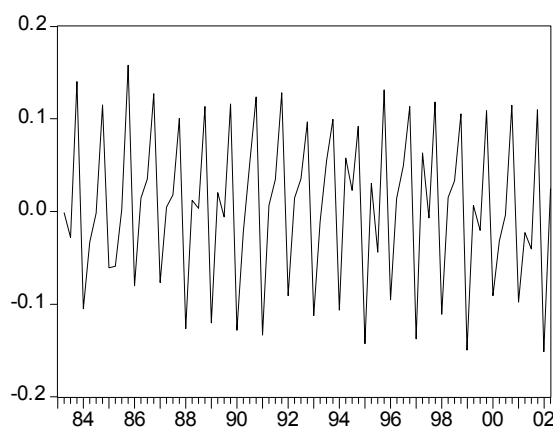
Figura 7.5.1
 Log PIB_t



Como puede observarse, la serie es claramente no estacionaria: presenta tendencia pero, como se comprobará a continuación, existen otros elementos que determinan la no estacionariedad de la serie.

El gráfico de la primera diferencia de la serie ($\Delta \log \text{PIB}_t$) es:

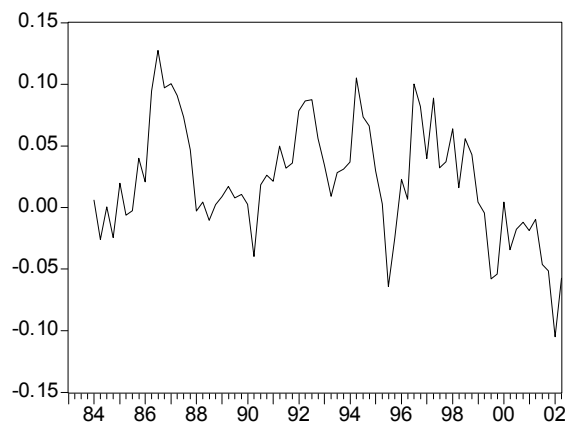
Figura 7.5.2
 $\Delta \log \text{PIB}_t$



Si bien la serie no parece presentar tendencia, se observa un “pico” regular en el cuarto trimestre de cada año, mientras que se produce un “valle” en el primer trimestre. Es decir, la media de la serie no es constante, sino sistemáticamente más alta en el cuarto trimestre, más baja en el primero, etc.

Si en lugar de haber realizado la primera diferencia de la serie hubiéramos aplicado una diferencia estacional (Δ_4 $\log \text{PIB}_t = \log \text{PIB}_t - \log \text{PIB}_{t-4}$) su gráfico es:

Figura 7.5.3
 $\Delta_4 \log \text{PIB}_t$



Es posible que la aplicación de la diferencia estacional no sea suficiente para transformar en estacionaria a la serie. En el gráfico previo la serie resultante parece seguir un proceso del tipo de caminata al azar, aunque serían necesarios otros elementos de análisis (análisis del correlograma, por ejemplo) para concluir sobre la conveniencia de una diferencia adicional.

Modelo de aerolíneas

En el texto clásico de Box y Jenkins se analizan los datos de los pasajeros transportados por aerolíneas (vuelos internacionales) de EE.UU., con frecuencia mensual desde 1949 a 1960. A continuación se presentan gráficos de la serie original (en logaritmos) y de distintas transformaciones.

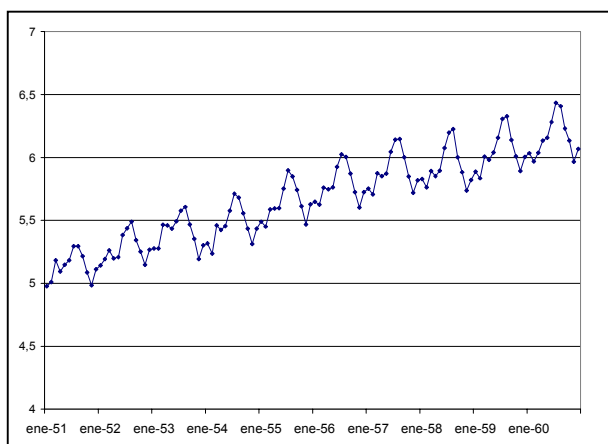


Figura 7.5.4. Y_t - Logaritmo (natural) de pasajeros transportados

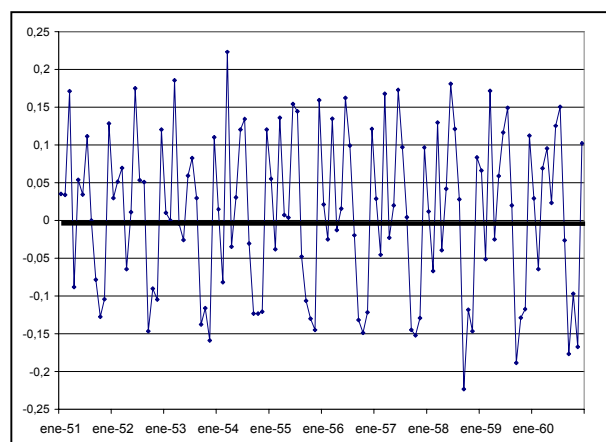


Figura 7.5.5. $\Delta \ln Y_t$

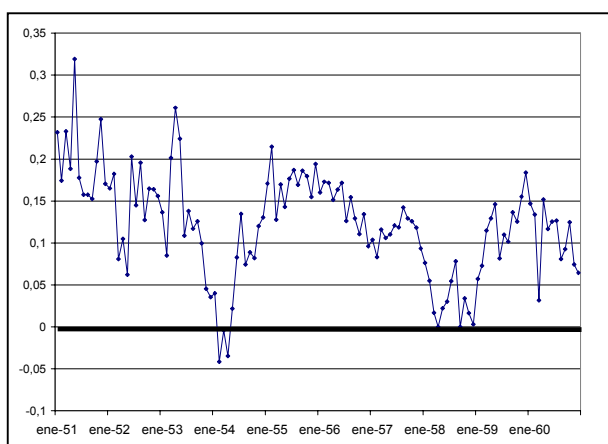


Figura 7.5.6. $\Delta^{12} \ln Y_t$

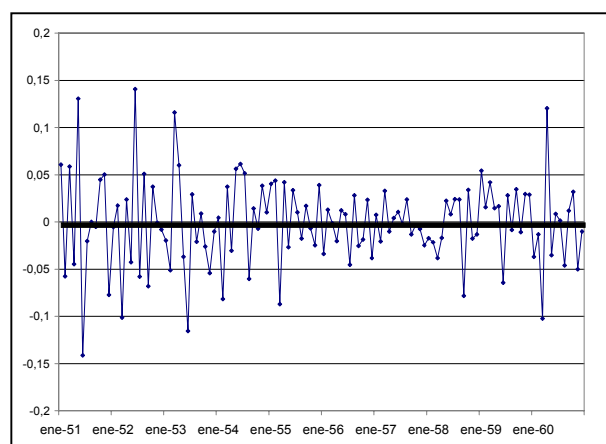


Figura 7.5.7. $\Delta \Delta^{12} \ln Y_t$

La primera diferencia de la serie ($\Delta \ln Y_t$) no resuelve la estacionariedad de la serie ya que la media difiere de acuerdo al mes considerado (por ejemplo, en junio y diciembre los valores son sistemáticamente más altos).

La diferencia 12ava. ($\Delta^{12} \ln Y_t$), si bien aparentemente “filtra” la estacionalidad (al menos, la estacionalidad regular), genera una serie con un comportamiento de “caminata al azar”. Es decir, una serie no estacionaria con una raíz unitaria.

Finalmente, la transformación $\Delta \Delta^{12} \ln$ genera un gráfico donde no se advierten comportamientos no estacionarios.

Una vez transformada la serie ($\Delta \Delta^{12} \ln$) Box y Jenkins ajustan un modelo SARMA(0,1)(0,1)₁₂.

La notación del modelo ajustado sobre (el logaritmo de) la serie original es:

SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₁₂

Modelización determinista de la estacionalidad

Una forma alternativa de modelizar la estacionalidad regular es de forma determinística.

Considere el siguiente modelo para una serie de frecuencia trimestral:

$$Y_t = C + \delta_1 D_{1t} + \delta_2 D_{2t} + \delta_3 D_{3t} + u_t \quad [7.5.1]$$

donde u_t es una variable aleatoria estacionaria (no necesariamente ruido blanco) y:

$$D_{1t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \text{1er. trimestre} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y análogamente para D_{2t} y D_{3t} (no se incluye D_{4t} , que está implícito en los valores anteriores y el término constante).

A continuación se presenta el gráfico de una serie generada con un modelo [7.5.1]: $Y_t = 10 + 3,2 * D_{1t} + 2 * D_{2t} - 2,4 * D_{3t} + a_t$ (datos trimestrales) con a_t normal estándar.

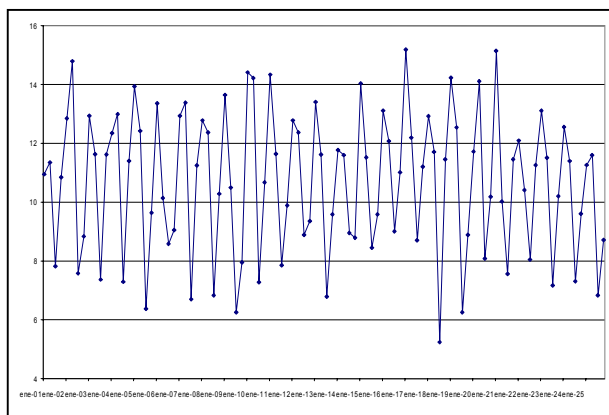


Figura 7.5.8. Estacionalidad determinista

En general realizaciones de modelos con estacionalidad regular aleatorio (como el modelo de aerolíneas) o estacionalidad regular regular determinista pueden resultar similares, por lo que la elección de un modelo u otro no es directa.

Si se selecciona un modelo con estacionalidad regular aleatoria, debe realizarse una diferencia estacional (Δ_4 o Δ_{12} , según la frecuencia) para transformarla en estacionaria (además de la o las diferencias regulares, Δ , si correspondiera).

Si, por el contrario, el modelo elegido es de estacionalidad determinista, la transformación apropiada consiste en la estimación de los parámetros δ_i y la modelización ARIMA (o ARMA) de los residuos.

Es decir, si el modelo es [7.5.1], la serie:

$$RES_t = Y_t - \hat{C} - \hat{\delta}_1 D_{1t} - \hat{\delta}_2 D_{2t} - \hat{\delta}_3 D_{3t}$$

resulta estacionaria.

7.6. Notación de los Modelos SARIMA

Un proceso ARIMA(p,d,q) se plantea como:

$$\Phi_p(L)(1-L)^d(Y_t - \mu) = \Theta_q(L)a_t \quad [7.6.1]$$

$$\text{con } a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

Un proceso SARIMA (p,d,q) (P,D,Q)s se plantea como:

$$\Phi_P(L)\Phi_p(L)(1-L^s)^D(1-L)^d(Y_t - \mu) = \Theta_Q(L)\Theta_q(L)a_t \quad [7.6.2]$$

$$\text{con } a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$