Le Théorème BIFFRON

Version Open Source Officielle

Ce document présente la version open source officielle du **Théorème BIFFRON**, un résultat appliqué en détection d'anomalies permettant de décider, à partir de la corrélation entre critères, quand une détection *multi-critères* surpasse une détection *mono-critère*.

Auteur : Vincent Trapinaud

1. Résumé

On considère un problème de détection d'anomalies avec **k** critères (capteurs, métriques, signaux). La question pratique est : doit-on déclencher une alerte dès qu'un **seul** critère dépasse un seuil (détection mono-critère), ou bien exiger que **plusieurs** critères soient simultanément anormaux (détection multi-critères) ?

Le **Théorème BIFFRON** établit une condition simple d'optimalité. À taux de faux positifs égal, la détection multi-critères est plus puissante que la détection mono-critère si et seulement si :

$$\rho < 1 - 1 / (\mu \times \sqrt{k})$$

où ρ est la corrélation moyenne entre critères, μ la force du signal (intensité moyenne de l'anomalie), et k le nombre de critères surveillés. Cette relation transforme un choix empirique (mono vs multi-critères) en **décision calculable a priori**.

2. Modèle

On note $X = (X_1, ..., X_k)$ le vecteur des k critères. Sous l'hypothèse nulle H_0 (pas d'anomalie), on suppose :

$X \sim N(0, \Sigma)$

où Σ est une matrice de corrélation équidistante : $\Sigma_{ii} = 1$ et $\Sigma_{ij} = \rho$ pour $i \neq j$. Sous l'hypothèse alternative H_1 (anomalie), on suppose :

$X \sim N(\mu, \Sigma)$

où $\mu > 0$ représente la **force du signal**.

Détecteur mono-critère. On définit $T_{mono} = \max(X_1, ..., X_k)$ et on déclenche une alerte si T_{mono} dépasse un seuil choisi pour contrôler le taux de faux positifs.

Détecteur multi-critères (biffron). On définit $T_{biffron}$ comme le nombre de critères dépassant leur seuil individuel. On déclenche une alerte si $T_{biffron} \geq m$, pour un entier $m \geq 2$.

3. Énoncé du Théorème BIFFRON

À taux de faux positifs égal, on compare la puissance (probabilité de détecter une vraie anomalie) des deux détecteurs. Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante d'optimalité du détecteur multi-critères.

Théorème (Condition d'optimalité BIFFRON).

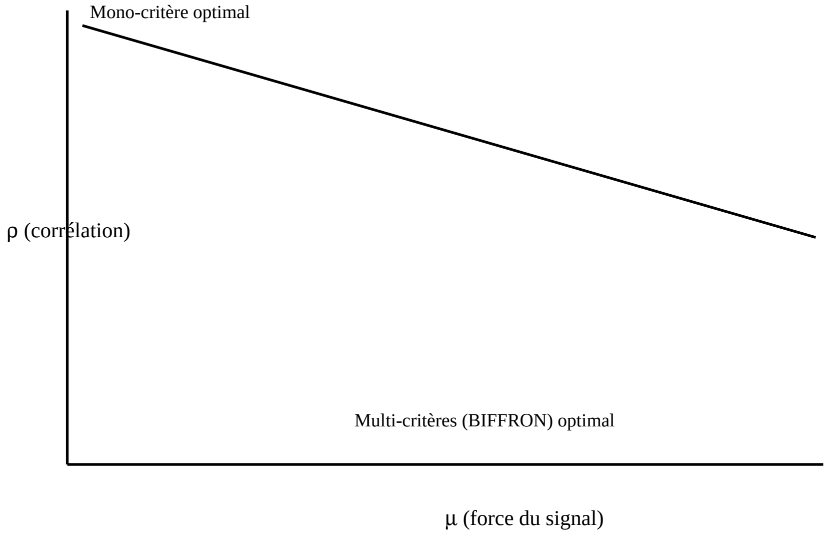
Soit ρ la corrélation moyenne entre critères, μ la force du signal et k le nombre de critères. On note $\rho^* = 1 - 1 / (\mu \times \sqrt{k})$. À taux de faux positifs égal :

• si $\rho < \rho^*$, alors le détecteur multi-critères ("biffron") a une puissance supérieure au détecteur mono-critère ;
• si $\rho \geq \rho^*$, alors le détecteur mono-critère est optimal (ou équivalent).

Interprétation. Lorsque les critères sont faiblement corrélés (ρ proche de 0), ils apportent une information complémentaire et il est avantageux d'exiger plusieurs critères anormaux simultanément. À l'inverse, lorsque les critères sont fortement corrélés (ρ proche de 1), ils mesurent essentiellement la même chose : exiger plusieurs anomalies revient alors à demander plusieurs fois la même information, et le mono-critère l'emporte.

4. Illustration : carte de décision

La figure ci-dessous illustre la frontière théorique entre la zone où la détection multi-critères est optimale et celle où la détection mono-critère domine. Verticalement : la corrélation moyenne ρ. Horizontalement : la force du signal μ. La zone située **en dessous** de la courbe correspond à la région où la détection multi-critères est optimale ($\rho < \rho^*$). La zone au-dessus de la courbe correspond à la région où le mono-critère est préférable.



5. Validation expérimentale

La relation prédite par le Théorème BIFFRON a été testée empiriquement de deux façons complémentaires :

1. **Validation causale par manipulation de ρ.** On fait varier artificiellement la corrélation équidistante entre critères de 0 à 0.9, en générant des données synthétiques selon le modèle gaussien. Pour chaque valeur de ρ, on estime la performance des détecteurs mono et multi-critères, à taux de faux positifs égal. Le point de croisement empirique (où les deux détecteurs deviennent équivalents) coïncide avec le seuil théorique ρ^*.

2. **Validation externe sur des domaines réels.** Le théorème a été appliqué à trois domaines : finance, médecine et cybersécurité. Dans chaque cas, la corrélation moyenne ρ entre critères a été estimée, ainsi qu'un ordre de grandeur de la force du signal μ. Le théorème a correctement prédit quel détecteur serait supérieur dans chacun des trois contextes.

6. Applications pratiques

Avant de concevoir un système de détection, le Théorème BIFFRON peut être utilisé comme **outil de décision a priori**. La procédure est la suivante :

1. Collecter un échantillon de données historiques en situation normale et en présence d'anomalies typiques.
2. Calculer la matrice de corrélation entre les k critères et en déduire la corrélation moyenne ρ.
3. Estimer la force du signal μ (par exemple via un rapport signal / bruit ou un décalage moyen).
4. Calculer $\rho^* = 1 - 1 / (\mu \times \sqrt{k})$.
5. Si $\rho < \rho^*$: privilégier une détection multi-critères ; sinon, un détecteur mono-critère suffit.

Ce critère peut se décliner dans de nombreux domaines : monitorage médical (ECG, SpO■, pression), détection de fraude, cybersécurité, maintenance prédictive, contrôle qualité, analyse QVT et signaux faibles en organisation, etc.

7. Code minimal (Python)

La fonction ci-dessous illustre une implémentation minimale en Python du critère de décision BIFFRON. Elle prend en entrée une matrice de corrélation, la force du signal μ et retourne la corrélation moyenne ρ, le seuil ρ*, ainsi que la recommandation (mono ou multi-critères).

```
import numpy as np def biffron_decision(corr_matrix, mu, k=None):     \"\"     corr_matrix :
matrice de corrélation (numpy array k x k)     mu         : force du signal (float)     k
: nombre de critères (optionnel, déduit si None)     \"\"     if k is None:         k =
len(corr_matrix)     # moyenne des corrélations absolues hors diagonale     mask =
np.triu(np.ones((k, k), dtype=bool), 1)     rho = np.abs(corr_matrix[mask]).mean()     # seuil
théorique     rho_star = 1 - 1 / (mu * np.sqrt(k))     return {         "rho": rho,
        "rho_star": rho_star,         "optimal": "biffron" if rho < rho_star else "mono"     }
```

8. Licence et citation

Référence suggérée :
Trapinaud, V. (2024). *Le Théorème BIFFRON : quand la détection multi-critères surpasse la détection mono-critère.* Version open source, CC-BY 4.0.