

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA

ANTEPROYECTO DE TESINA

---

# Incorporación de covariables que varían en el tiempo a un modelo mixto

---

*Autor:* **Esteban Cometto**

*Directora:* Noelia Castellana

*Codirectora:* Cecilia Rapelli

11 de enero de 2023

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>3</b>
2.1. Objetivo Principal . . . . .	3
2.2. Objetivos Específicos . . . . .	3
<b>3. Datos Longitudinales</b>	<b>4</b>
<b>4. Covariables en datos longitudinales</b>	<b>4</b>
4.1. Covariables fijas en el tiempo . . . . .	5
4.2. Covariables variables en el tiempo . . . . .	5
4.2.1. Covariables estocásticas y no estocásticas . . . . .	5
4.2.2. Covariables exógenas y endógenas . . . . .	5
<b>5. Modelo lineal mixto</b>	<b>6</b>
5.1. Estimación de los parámetros del modelo . . . . .	7
5.1.1. Método de máxima verosimilitud (ML) . . . . .	8
5.1.2. Método de máxima verosimilitud restringida (REML) . . . . .	8
5.1.3. Problemas con la estimación . . . . .	9
<b>6. Formas de introducir una CVT al modelo</b>	<b>10</b>
6.1. Convertirla en CNVT . . . . .	10
6.2. Covariable variable en el tiempo . . . . .	10
6.3. Covariable rezagada . . . . .	10
6.4. Funcion de las covariables rezagadas . . . . .	11
6.5. Dividiendo efecto entre-unidad y efecto intra-unidad . . . . .	11
<b>7. Aplicación</b>	<b>12</b>
7.1. Análisis descriptivo . . . . .	12
7.2. Modelo propuesto . . . . .	14
7.2.1. Modelo propuesto para la media . . . . .	14
7.2.2. Modelo propuesto para la covariancia . . . . .	14
7.3. Evaluación de la exogeneidad . . . . .	15
7.4. Incorporación de la CVT . . . . .	16
7.4.1. Incorporación de covariable fija . . . . .	16
7.4.2. Incorporación como CVT . . . . .	17
7.4.3. Incorporación dividiendo efecto entre e intra . . . . .	18
<b>8. Conclusiones</b>	<b>20</b>

# 1. Introducción

Los datos longitudinales están conformados por mediciones repetidas sobre una unidad, las cuales pueden surgir por ser medidas en diferentes momentos o condiciones. Su principal objetivo es estudiar los cambios en el tiempo y los factores que influyen el cambio.

Los modelos mixtos permiten ajustar datos con estas características, donde la respuesta se modela por una parte sistemática que está compuesta por una combinación de características poblacionales que son compartidas por todas las unidades (efectos fijos), y una parte aleatoria que está constituida por efectos específicos de cada unidad (efectos aleatorios) y por el error aleatorio, las cuales reflejan las múltiples fuentes de heterogeneidad y correlación entre y dentro de las unidades.

En estos modelos pueden incorporarse covariables. Las mismas se pueden clasificar en 2 categorías: covariables no variables en el tiempo (CNVT) y covariables variables en el tiempo (CVT). La naturaleza diferente de estas covariables conduce a considerar distintos enfoques para cada una de ellas en el análisis.

Las CNVT son variables independientes que no tienen variación intra-unidad, es decir que el valor de la covariable no cambia para una unidad determinada en el estudio longitudinal. Este tipo de covariables se pueden utilizar para realizar comparaciones entre poblaciones y describir diferentes tendencias en el tiempo.

Las CVT son variables independientes que contienen ambas variaciones, intra y entre unidad, es decir que el valor de la covariable cambia para una unidad determinada a lo largo del tiempo y además puede cambiar para diferentes unidades. Este tipo de covariables tienen los mismos usos que las CNVT, pero además describen la relación dinámica entre la CVT y la respuesta. Sin embargo, esta relación puede estar confundida por valores anteriores y/o posteriores de la covariable y en consecuencia esto puede conducir a inferencias engañosas sobre los parámetros del modelo. Esta tesis realiza una introducción a la problemática de incorporar covariables que varían con el tiempo en modelos mixtos para datos longitudinales, presentando diferentes definiciones de las mismas y enfoques metodológicos.

Se aplican estos conceptos al Programa de Atención y Control de pacientes hipertensos de Fundación ECLA. Este estudio observacional se realizó entre 2014 y 2019 en Rosario y realiza un seguimiento de pacientes hipertensos, registrando en cada visita el tratamiento farmacológico dado al paciente, los valores de la tensión arterial sistólica (TAS) y la adherencia a dicho tratamiento entre otras características. Uno de los objetivos que persigue este estudio es evaluar si la adherencia al tratamiento influye en los valores de la TAS a lo largo del seguimiento. Como la variable adherencia es una CVT, se evaluarán diferentes enfoques para incluirla en un modelo longitudinal mixto que pueda explicar el cambio en la tensión arterial sistólica media a lo largo del tiempo.

## **2. Objetivos**

### **2.1. Objetivo Principal**

Presentar diferentes propuestas metodológicas respecto a la incorporación de covariables que varían con el tiempo en modelos mixtos para datos longitudinales.

### **2.2. Objetivos Específicos**

- Definir los tipos de covariables existentes.
- Describir propuestas de incorporación de covariables que varían en el tiempo en los modelos mixtos.
- Aplicar los conceptos vistos en un estudio sobre la tendencia de la presión arterial en el tiempo para pacientes que siguen cierto tratamiento.

### 3. Datos Longitudinales

Los datos longitudinales están conformados por mediciones repetidas de una misma variable realizadas a la misma unidad en diferentes momentos o condiciones experimentales.

Dado que las mediciones repetidas son obtenidas de la misma unidad, los datos longitudinales están agrupados. Las observaciones dentro de un mismo agrupamiento generalmente están correlacionadas positivamente. Por lo tanto, los supuestos usuales de independencia y homogeneidad de variancias no son válidos

Existen tres fuentes potenciales de variabilidad que influyen sobre la correlación entre medidas repetidas:

- *Heterogeneidad entre las unidades*: Refleja la propensión natural de las unidades a responder. las unidades tienen diferentes reacciones frente a los mismos estímulos.
- *Variación biológica intra-unidad*: Se espera que la secuencia de medidas repetidas de una unidad tenga un comportamiento determinado, que produce que las mediciones más cercanas sean más parecidas.
- *Error de medición*: Surge debido a los errores de medida.

Estas tres fuentes de variación pueden clasificarse en “*variabilidad entre unidades*” (heterogeneidad entre unidades) y “*variabilidad intra unidades*” (variación biológica intra-unidad y error de medición)

Con el fin de simplificar la notación, se asumirá que los tiempos de medición son los mismos para todas las unidades y que no hay datos faltantes.

Se obtiene una muestra de  $N$  unidades cada una con  $n$  mediciones repetidas de la variable en estudio, observadas en los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , siendo entonces el número total de observaciones  $N^* = Nn$ . Se denomina  $Y_{ij}$  a la medición sobre la unidad  $i$  en la ocasión  $j$ , con  $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$

A cada unidad se le observan las covariables  $X_{ij}$  medidas sobre la unidad  $i$  en la ocasión  $j$ . Se asume que  $Y_{ij}$  y  $X_{ij}$  son simultáneamente medidas. Esto quiere decir que en un análisis de corte transversal,  $Y_{ij}$  y  $X_{ij}$  se correlacionan directamente. Sin embargo, para un análisis longitudinal se debe asumir que existe un orden pre-establecido:  $(X_{i1}, Y_{i1}), (X_{i2}, Y_{i2}), \dots, (X_{in}, Y_{in})$

Dado que estas fuentes de variabilidad introducen correlación entre las mediciones repetidas, no se pueden utilizar las técnicas habituales, ya que llevarían a inferencias incorrectas sobre los parámetros del modelo.

### 4. Covariables en datos longitudinales

En los estudios longitudinales, las variables independientes pueden ser clasificadas en dos categorías: CNVT y CVT. La diferencia entre ellas puede conducir a diferentes enfoques de análisis así como también a diferentes conclusiones.

Tanto las CNVT como las CVT se pueden utilizar para realizar comparaciones entre poblaciones y describir diferentes tendencias a lo largo del tiempo. Sin embargo, sólo las CVT permiten describir una relación dinámica entre la covariable y la variable respuesta.

#### 4.1. Covariables fijas en el tiempo

Las CNVT son variables independientes que no presentan variación intra-unidad, es decir, los valores de estas covariables no cambian a lo largo del estudio para una unidad en particular.

Éstas covariables pueden ser fijas por naturaleza (por ejemplo, el sexo biológico de una persona o el grupo de tratamiento) o pueden ser covariables basales (es decir, medidas al inicio del estudio). Las covariables basales son fijas por definición pero pueden ser variables en el tiempo por naturaleza, por ejemplo, la edad varía en el tiempo pero la edad basal es fija.

#### 4.2. Covariables variables en el tiempo

Las CVT son variables independientes que incluyen tanto la variación intra-unidad como la variación entre-unidad. Esto significa que, para una unidad en particular, el valor de la covariable cambia a través del tiempo y puede cambiar también entre diferentes unidades. Por ejemplo, el valor de la presión arterial o la condición de fumador (sí/no).

A continuación se describen diferentes tipos de CVT.

##### 4.2.1. Covariables estocásticas y no estocásticas

Las CVT pueden clasificarse en estocásticas y no estocásticas. Las CVT no estocásticas son covariables que varían sistemáticamente a través del tiempo pero son fijas por diseño del estudio o bien su valor puede predecirse. En cambio, las CVT estocásticas son covariables que varían aleatoriamente a través del tiempo, es decir, los valores en cualquier ocasión no pueden ser estimados ya que son gobernados por un mecanismo aleatorio. Ejemplos de las primeras son: tiempo desde la visita basal, edad, grupo de tratamiento. Ejemplos de las segundas son: valor del colesterol, ingesta de alcohol (sí/no), ingesta de grasas, etc.

##### 4.2.2. Covariables exógenas y endógenas

Otra clasificación de las CVT es en exógenas y endógenas.

##### Covariables exógenas

Se dice que una CVT es exógena cuando los valores actuales y anteriores de la respuesta en la ocasión  $j$  ( $\mathbf{Y}_{i1}, \dots, \mathbf{Y}_{ij}$ ), dados los valores actuales y precedentes de la CVT ( $\mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{ij}$ ), no predicen el valor posterior de  $\mathbf{X}_{ij+1}$ . Formalmente, una CVT es exógena cuando:

$$f(\mathbf{X}_{ij+1} | \mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{Y}_{i1}, \dots, \mathbf{Y}_{ij}) = f(\mathbf{X}_{ij+1} | \mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{ij}) \quad (4.2.1)$$

Y en consecuencia:

$$E(\mathbf{Y}_i|\mathbf{X}_i) = E(\mathbf{Y}_i|\mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{in}) = E(\mathbf{Y}_i|\mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{ij}) \quad (4.2.2)$$

Esta definición implica que la respuesta en cualquier momento puede depender de los valores previos de la variable respuesta y de la CVT, pero será independiente de todos los demás valores de la covariable. Por ejemplo, en un estudio longitudinal en donde se evalúa si el nivel de polución en el aire está asociado a la función pulmonar, es de esperar que el nivel de polución del aire en una determinada ocasión dependa de los niveles observados previamente, pero no se espera que dependa de los niveles de la función pulmonar observados previamente en el sujeto.

Es posible examinar empíricamente la suposición de que una CVT es exógena al considerar modelos de regresión para la dependencia de  $X_{ij}$  en  $Y_{i1}, \dots, Y_{ij-1}$  (o en alguna función conocida de  $Y_{i1}, \dots, Y_{ij-1}$ ) y  $X_{i1}, \dots, X_{ij-1}$  (o en alguna función conocida de  $X_{i1}, \dots, X_{ij-1}$ ). La ausencia de cualquier relación entre  $X_{ij}$  y  $Y_{i1}, \dots, Y_{ij-1}$ , dado el perfil de la covariable anterior  $X_{i1}, \dots, X_{ij-1}$ , proporciona soporte para la validez de la suposición de que la CVT es exógena.

Cuando se puede asumir que las CVT son exógenas con respecto a la variable respuesta, se puede dar una interpretación causal a los parámetros de regresión.

### Covariables endógenas

Una CVT que no es exógena se define como endógena. Una variable endógena es una variable estocásticamente relacionada con otros factores medidos en el estudio. Esta también puede definirse como una variable generada por un proceso estocástico relacionado con el individuo en estudio. En otras palabras, las CVT endógenas están asociadas con un efecto individual y, a menudo, pueden explicarse por otras variables en el estudio. Cuando el proceso estocástico de una CVT endógena puede ser (al menos parcialmente) explicado por la variable de respuesta, se dice que hay *feedback* entre la respuesta y la CVT endógena. Por ejemplo, cuando se evalúa si la cantidad de actividad física está asociada al nivel de glicemia. El nivel de actividad física en un determinado momento puede estar (o no) asociado a niveles previos y también puede estar asociado a valores previos de glicemia (un paciente con valor de glicemia alto en una visita puede decidir aumentar su nivel de actividad física para ver si este valor se reduce).

## 5. Modelo lineal mixto

Los modelos lineales mixtos se utilizan habitualmente para analizar los datos longitudinales, debido a que permiten modelar las distintas fuentes de variabilidad presentes en los mismos. Cada unidad tiene una trayectoria individual caracterizada por parámetros y un subconjunto de esos parámetros se consideran aleatorios.

La respuesta media es modelada como una combinación de características poblacionales que son comunes a todos los individuos (efectos fijos) y efectos específicos de la unidad que son únicos de ella (efectos aleatorios).

El modelo lineal mixto para la unidad  $i$  se puede expresar en forma matricial como:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i; \quad i = 1, \dots, N; \quad \mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in})'$$

Donde:

- $\mathbf{Y}_i$ : Vector de la variable respuesta de la  $i$ -ésima unidad, de dimensión  $(n \times 1)$
- $\mathbf{X}_i$ : Matriz de diseño de la  $i$ -ésima unidad, que caracteriza la parte sistemática de la respuesta, de dimensión  $(n \times p)$
- $\boldsymbol{\beta}$ : Vector de parámetros de dimensión  $(p \times 1)$
- $\mathbf{Z}_i$ : Matriz de diseño de la  $i$ -ésima unidad, que caracteriza la parte aleatoria de la respuesta, de dimensión  $(n \times k)$
- $\mathbf{b}_i$ : Vector de efectos aleatorios de la  $i$ -ésima unidad, de dimensión  $(k \times 1)$
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ : Vector de errores aleatorios de la  $i$ -ésima unidad, de dimensión  $(n \times 1)$

Se supone que  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  y  $\mathbf{b}_i$  son independientes.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_n(0, \mathbf{R}_i)$$

$$\mathbf{b}_i \sim N_k(0, \mathbf{D})$$

$\mathbf{D}$  y  $\mathbf{R}_i$  son las matrices de variancias y covariancias de los vectores  $\mathbf{b}_i$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  respectivamente. A partir de este modelo se obtiene:

- $E(\mathbf{Y}_i/\mathbf{b}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i$  (media condicional o específica de la  $i$ -ésima unidad)
- $E(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$  (media marginal)
- $Cov(\mathbf{Y}_i/\mathbf{b}_i) = \mathbf{R}_i$  (variancia condicional)
- $Cov(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i' + \mathbf{R}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i$  (variancia marginal)

Generalmente, la matriz  $\mathbf{D}$  adopta una estructura de covariancia arbitraria, mientras que la matriz  $\mathbf{R}_i$  adopta cualquier otra estructura.

## 5.1. Estimación de los parámetros del modelo

Bajo el supuesto de que  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  y  $\mathbf{b}_i$  se distribuyen normalmente se pueden usar métodos de estimación basados en la teoría de máxima verosimilitud, cuya idea es asignar a los parámetros el valor más probable en base a los datos que fueron observados. Se usarán para estimar los parámetros de la parte media y los de las estructuras de covariancia los métodos de máxima verosimilitud (ML) y máxima verosimilitud restringida (REML) respectivamente



### 5.1.1. Método de máxima verosimilitud (ML)

Bajo el supuesto de que  $\mathbf{Y}_i \sim N_n(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_i)$  y las  $\mathbf{Y}_i$  son independientes entre sí, se obtiene la siguiente función de log-verosimilitud:

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})] \quad (5.1.1)$$

Siendo  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  función del vector  $\boldsymbol{\theta}$  que contiene los parámetros de covariancia.

Los estimadores de  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  son los valores que maximizan esta expresión. Cuando  $\boldsymbol{\theta}$  es desconocido (lo que generalmente sucede) se obtiene una ecuación no lineal, por lo que no se puede obtener una expresión explícita de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Para encontrar su solución se recurre a métodos numéricos. El estimador del vector  $\boldsymbol{\beta}$  resulta:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1} \mathbf{Y}_i$$

El estimador  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  resulta insesgado de  $\boldsymbol{\beta}$ . Cuando  $\boldsymbol{\theta}$  es desconocido no se puede calcular de manera exacta la matriz de covariancias de  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ . Si el número de unidades es grande se puede demostrar que asintóticamente (Fitzmaurice et al., 2004):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_p(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}_{\boldsymbol{\beta}}) \quad \text{donde} \quad \mathbf{V}_{\boldsymbol{\beta}} = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1}$$

### 5.1.2. Método de máxima verosimilitud restringida (REML)

El inconveniente que posee el método de ML es que los parámetros de covariancia resultan sesgados. Es decir, a pesar de que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  es un estimador insesgado de  $\boldsymbol{\beta}$ , no pasa lo mismo con  $\boldsymbol{\theta}$ . Si el tamaño de muestra es chico, los parámetros que representan las variancias van a ser demasiado pequeños, dando así una visión muy optimista de la variabilidad de las mediciones, es decir, se subestiman los parámetros de covariancia. El sesgo se debe a que en la estimación MV no se tiene en cuenta que  $\boldsymbol{\beta}$  es estimado a partir de los datos.

Distintos autores proponen el método de REML para estimar los parámetros del modelo. Este método es una modificación del método de máxima verosimilitud, en el que la parte de los datos usada para estimar  $\boldsymbol{\beta}$  está separada de aquella usada para estimar los parámetros de  $\boldsymbol{\Sigma}_i$ . La función de log-verosimilitud restringida que se propone es:

$$l^* = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N n \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})] - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right| \quad (5.1.2)$$

Maximizando esta función con respecto a  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  se obtiene:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i^{-1} \mathbf{Y}_i$$

Donde  $\hat{\Sigma}_i$  es el estimador REML de  $\Sigma_i$

### 5.1.3. Problemas con la estimación

Pepe y Anderson (1994) mostraron que las ecuaciones 5.1.1 y 5.1.2 llegan a cero solo si se cumple con el supuesto:

$$E[\mathbf{Y}_{ij}|\mathbf{X}_{ij}] = E[\mathbf{Y}_{ij}|\mathbf{X}_{ij}, j = 1, \dots, n] \quad (5.1.3)$$

Con las CNVT, esta suposición se mantiene necesariamente ya que  $X_{ij} = X_{ik}$  para todas las ocasiones  $k \neq j$ . Con las CVT que se fijan por diseño del estudio (por ejemplo, indicador de grupo de tratamiento en una prueba cruzada), la suposición también se cumple ya que los valores de las covariables en cualquier ocasión se determinan a priori por diseño del estudio y de manera completamente no relacionado con la respuesta longitudinal. Sin embargo, cuando una covariable es variable en el tiempo, puede que no necesariamente se mantenga.

En general, cuando (5.1.3) no se cumple, los valores precedentes y/o posteriores de la CVT confunden la relación entre  $Y_{ij}$  y  $X_{ij}$ , esto puede llevar a estimaciones sesgadas de los parámetros del modelo.

Frente a este escenario, Pepe y Anderson (1994) recomendaron plantear el modelo longitudinal marginal y realizar las estimaciones mediante GEE (ecuaciones de estimación generalizadas) con estructura de correlación independiente ya que este es siempre consistente. La estructura de correlación independiente generalmente tiene una alta eficiencia para la estimación de los coeficientes asociados a CNVT. Sin embargo, para las CVT, Fitzmaurice (1995) muestra que esta estructura puede resultar en una pérdida sustancial de eficiencia para la estimación de los coeficientes asociados a las CVT y proporciona un ejemplo en el que es sólo un 60 % eficiente en relación con la estructura de correlación verdadera.

Por otro lado, Lai y Small (2007) definieron 3 tipos de CVT y luego Lalonde et. al (2014) definieron un cuarto tipo de CVT. Además, propusieron utilizar el “Método generalizado de los momento” (GMM) (Hansen, 1982) en el cual se puede incorporar información sobre la naturaleza de la CVT que se está analizando según su tipo.

En conclusión, para poder utilizar las CVT en un modelo lineal mixto, esta debe cumplir la condición de exogeneidad

## 6. Formas de introducir una CVT al modelo

Si al evaluar el tipo de la CVT de la manera vista en 4.2.2 resulta ser exógena, se puede introducir en el modelo mixto sin consideraciones adicionales. Esto se debe a que no habrá problemas con la estimación de los parámetros, ya que se cumple el supuesto de independencia condicional.

A continuación, se presentan distintas maneras de introducir la CVT exógena al modelo mixto. De manera de ejemplo, se tomará un caso en el que la variable respuesta “Y” es la tensión arterial y la CVT “X” es el IMC en la ocasión  $j$ .

### 6.1. Convertirla en CNVT

Una solución rápida al problema de las CVT es transformarla en una CNVT, esto se puede lograr resumiendo la información de la misma mediante alguna función como el promedio de los valores de cada individuo y dejarlo fijo a través del tiempo. También podría usarse su valor máximo, mínimo o cualquier transformación que resulte de interés en el estudio. El problema de este enfoque es que se pierde mucha información, dado que se usa una covariable más simple que no refleja la relación dinámica entre la covariable y la respuesta en el tiempo.

En el ejemplo mencionado anteriormente, se podría calcular el IMC promedio de cada uno de los individuos y el modelo resultaría:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}_i + \epsilon_i$$

El coeficiente  $\beta_1$  se interpreta como el cambio en la tensión arterial por cada cambio de una unidad en el IMC promedio del individuo.

### 6.2. Covariable variable en el tiempo

Dado que la CVT es exógena, puede incorporarse sin ninguna transformación, el modelo resultaría:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{ij} + \epsilon_i$$

Como se mencionó anteriormente, las CVT contienen efecto intra-unidad y entre-unidad, sin embargo el modelo mixto va a tener solo un coeficiente  $\beta_1$ . Por lo tanto, el modelo mixto asume convergencia entre los efectos intra-unidad y entre-unidad (es decir, que son equivalentes y ambos pueden ser representados como un único efecto). Si bien el modelo es válido, para obtener una interpretación clara del efecto de la CVT se necesita dividir su efecto en dos coeficientes, como se explicará en la sección 6.5

### 6.3. Covariable rezagada

En algunas aplicaciones hay justificación previa para considerar la covariable en un rezago  $k$  momentos antes de la medición de la respuesta. Por ejemplo, podría interesarnos conocer el efecto del IMC en la ocasión anterior a la actual. Lo más común es que se desconozca el valor  $k$  apropiado y se consideren varias opciones diferentes. El modelo mixto se definiría de la siguiente manera:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_{1k}X_{ij-k}$$

En este modelo, el coeficiente  $\beta_{1k}$  depende explícitamente de la elección del rezago  $k$ .

#### 6.4. Funcion de las covariables rezagadas

Una alternativa cuando se quiere utilizar la información de las covariables rezagadas es resumir a través de una función la información de éstas en una sola covariable. Un ejemplo puede ser el valor promedio o acumulado hasta la ocasión actual. Sin embargo, la elección de esta función dependerá del tipo de problema a analizar. Cabe destacar que, al igual que con toda medida resumen, al usar este tipo de covariables se pierde parte de la información. En el ejemplo mencionado, podría ser de interés calcular el IMC promedio hasta la ocasión  $j$ , resultando el modelo:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1\bar{X}_{ij} + \epsilon_i$$

Donde  $\bar{X}_{ij}$  es el IMC promedio calculado hasta la ocasión  $j$

#### 6.5. Dividiendo efecto entre-unidad y efecto intra-unidad

Otra forma de incorporar la CVT es dividiéndola en dos componentes que reflejen la variación intra-unidad y la variación entre-unidad. Entonces, el coeficiente del modelo que representa a la covariable se puede descomponer en dos:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_W(X_{ij} - \bar{X}_i) + \beta_B\bar{X}_i + \epsilon_i$$

Donde,  $\bar{X}_i$  representa el promedio de todos los valores observados en el tiempo de la CVT para la unidad  $i$ ,  $\beta_W$  representa el cambio esperado en la media de la variable respuesta asociado con cambios de la CVT dentro de la unidad y  $\beta_B$  representa el cambio esperado en la media de la variable respuesta asociado con cambios de la CVT entre unidades

En el ejemplo del IMC y la tensión arterial,  $\beta_W$  se interpreta como el cambio en la tensión arterial por cada diferencia de una unidad en el IMC de la ocasión  $j$  comparado con el IMC promedio de la persona, manteniendo constante el IMC de las ocasiones restantes. Por otro lado,  $\beta_B$  se interpreta como el cambio en la tensión arterial por cada cambio de una unidad en el IMC promedio de la unidad, controlando por el valor del IMC de la ocasión  $j$ .

Estos dos efectos permiten medir entonces si la tensión arterial aumenta cuando una persona tiene un IMC mayor que el promedio de la población, y también permiten medir el cambio en la tensión arterial si dicha persona tiene IMC mayor que su promedio habitual.

## 7. Aplicación

Se cuenta con un programa de atención y control de pacientes hipertensos iniciado en el año 2014 en Rosario que realiza un seguimiento exhaustivo de 560 pacientes de entre 30 y 86 años ( $M=58.84$ ,  $DS=9.87$ ) y, de los cuales un 49.28 % son hombres. Las visitas se realizaron una vez por mes durante 7 meses desde asignado el tratamiento y en cada una de ellas se registró si la persona estaba adhiriendo correctamente al tratamiento y el valor de la tensión arterial sistólica (TAS) ( $M=134.10$ ,  $DS=16.07$ ). Es decir, el seguimiento comenzó a medirse luego de un mes de que los pacientes empezaron el tratamiento.

A fines de centrarse en la CVT se dejaron de lado algunas covariables fijas derivadas de estudios de laboratorio, manteniendo solo algunas covariables sociodemográficas de interés para lograr una estabilidad entre modelos interpretables pero no demasiado complejos, sin perder el objetivo principal de este informe.

### 7.1. Análisis descriptivo

En esta sección se presentaran diversos gráficos con el fin de describir la población en estudio.

En la figura 7.1.1 se puede observar que en general la TAS se mantiene constante (o con una muy leve pendiente decreciente) a través del tiempo. Esto a simple vista podría resultar desalentador, dado que el propósito del tratamiento es disminuir la TAS a niveles más saludables. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, los pacientes no adhirieron al 100 % el tratamiento, este efecto es el que estudiaremos más adelante. Cabe destacar que las mediciones de los pacientes son equiespaciadas en el tiempo, las desviaciones del eje en el tiempo se deben a una técnica llamada “jitter” que nos permite mover levemente los puntos en el eje x para poder observar mejor la densidad de los mismos.

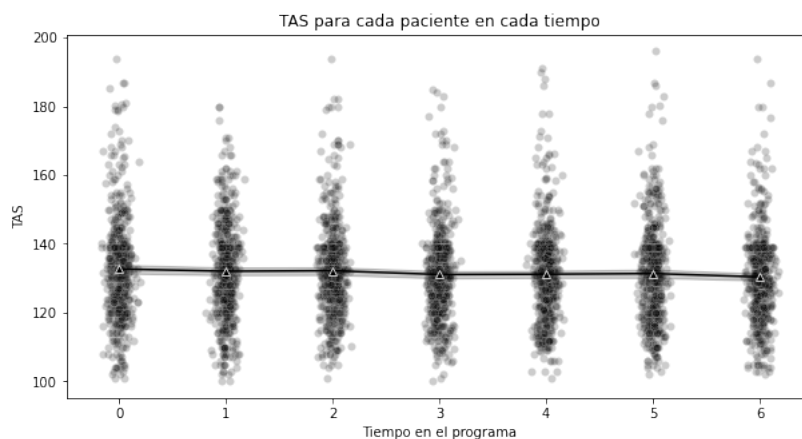


Figura 7.1.1: TAS de cada paciente en cada tiempo

En la figura 7.1.2 se pueden observar las trayectorias individuales de 15 pacientes seleccionados al azar, las pendientes son muy similares entre sí, sin embargo hay variación en la ordenada al origen.

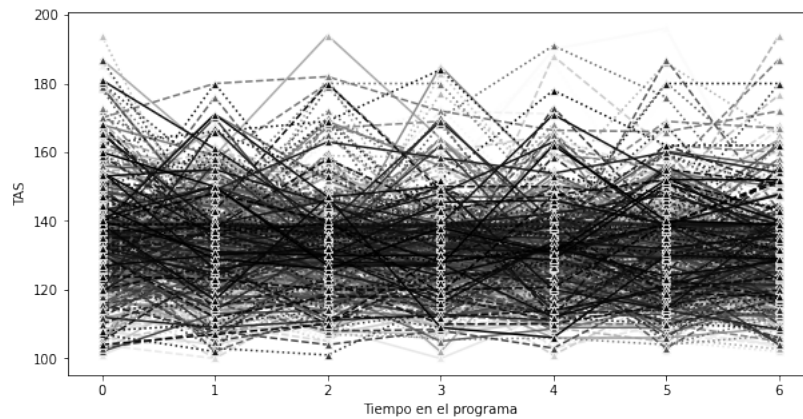


Figura 7.1.2: TAS a través del tiempo de 15 pacientes al azar

Otro gráfico que resulta de interés es observar la evolución de la TAS a través del tiempo pero sobre cada grupo de las covariables fijas, el resultado se expresa en la figura 7.1.3. Para las variables continuas, se utilizó como punto de corte para segmentar en grupos la mediana de sus valores. Podemos observar que en general la TAS disminuye, ya sea en mayor o menor medida, a los largo del tiempo. Analizando las covariables una por una, el IMC parece no tener un efecto significativo, dado que, aunque los pacientes con menor IMC presentan menor TAS, los promedios en cada tiempo caen dentro de los intervalos de confianza de ambos grupos. En cuanto a la edad y el sexo, no parece haber una diferencia significativa en las pendientes pero si parece haber una leve diferencia en las ordenadas al origen, presentando menor TAS los pacientes más jóvenes y de sexo femenino. Por último, los pacientes con antecedentes de diabetes parecen tener una TAS mayor en un comienzo con una pendiente negativa a través del tiempo, mientras que los pacientes que no tienen antecedentes de diabetes comienzan con una TAS mas inferior manteniendola más constante.

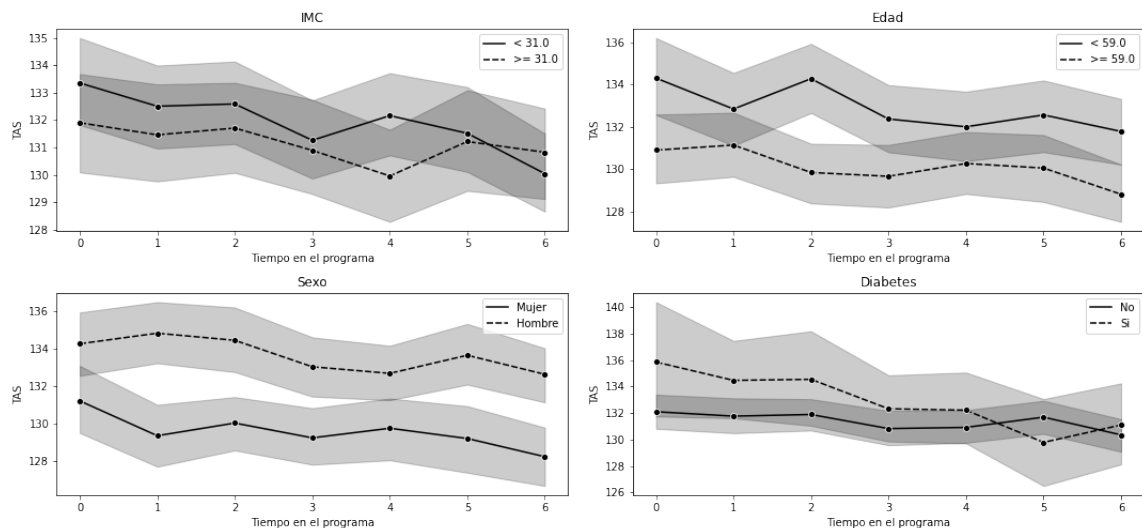


Figura 7.1.3: TAS a través del tiempo según grupos de covariables

Por último, la figura 7.1.4 refleja el efecto de la adherencia al tratamiento sobre la TAS. Para mantener

perfiles no variables en el tiempo, se usa la adherencia total al tratamiento y al igual que antes se divide en base a su mediana, teniendo por un lado los pacientes que adhieren correctamente a más del 86 % del tratamiento (al menos 6 de las 7 ocasiones) y por el otro a los pacientes que adhieren correctamente menos del 86 % del tratamiento (hasta 5 de las 7 ocasiones). Aquí se puede observar que los pacientes que adhieren correctamente al tratamiento parecen tener una pendiente negativa en la TAS a través del tiempo, mientras que los pacientes que no adhieren correctamente mantienen la TAS más constante.

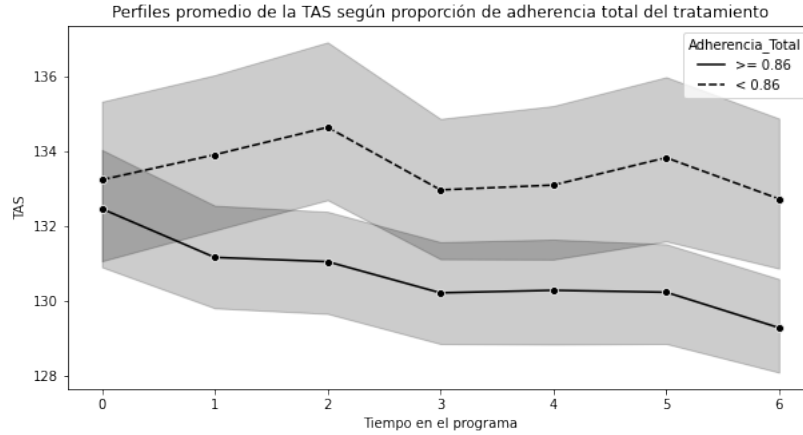


Figura 7.1.4: TAS a través del tiempo según adherencia al tratamiento

## 7.2. Modelo propuesto

### 7.2.1. Modelo propuesto para la media

El modelo propuesto 7.2.1 es un modelo simple sin interacciones entre covariables, a pesar de que algunas de ellas podían resultar significativas, con fines de facilitar las interpretaciones de las distintas maneras de incluir la CVT al modelo.

$$\hat{y}_{ij} = 121,311 + b_{0i} + 3,911 \text{ sexo}_i + 0,158 \text{ edad}_i - 0,332 \text{ mes}_i + b_{1i} * \text{mes}_i \quad (7.2.1)$$

### 7.2.2. Modelo propuesto para la covariancia

En la figura 7.2.1 puede notarse que la mayor parte de la variabilidad total está compuesta por el error de medición dado que la curva no inicia en el cero. Al no haber una pendiente muy pronunciada, la correlación serial también puede considerarse pequeña. Por último, como la curva no llega a la variancia total, esto nos indica que debe explicarse la variancia entre individuos agregando una ordenada aleatoria.

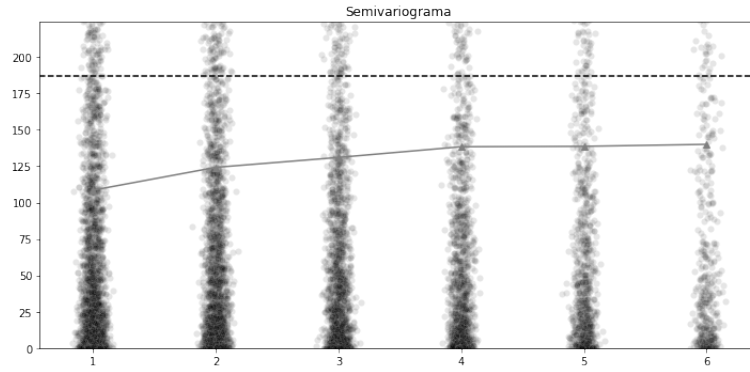


Figura 7.2.1: Semivariograma

Además, se realizaron tests de hipótesis para probar la significación de los efectos aleatorios para la ordenada y la pendiente, resultando ambos significativos. Por lo que la estructura de covariancia elegida para el modelos es una estructura independiente con ordenada y pendiente aleatoria.

Los resultados obtenidos con el modelo propuesto pueden observarse en la tabla 7.2.1.

Tabla 7.2.1: Modelo 1: Modelo propuesto sin CVT

Log-Likelihood			-15427.7627	
AIC			30871.52	
BIC			30921.72	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	121.311	2.355	51.520	< 0,001
Sexo	3.911	0.756	5.174	< 0,001
Edad	0.158	0.039	4.074	< 0,001
tpo programa	-0.332	0.106	-3.122	0,002

### 7.3. Evaluación de la exogeneidad

Para evaluar la exogeneidad de la adherencia se ajustaron modelos de regresion logística en cada ocasión, usando como variable respuesta la adherencia en dicha ocasión y como covariables la TAS y la adherencia en la ocasión anterior y el promedio y proporción hasta la ocasión anterior. En la tabla 7.3.1 se presentan los valores de los coeficientes para cada covariable y en paréntesis el p-value asociado a cada uno. Como se puede notar, en ninguna ocasión la adherencia depende de valores anteriores de la TAS, por lo tanto puede considerarse como una covariable exógena.



Tabla 7.3.1: Resultados de la prueba de exogeneidad

Ocasión (t)	$Adherencia_{t-1}$	$\overline{Adherencia}_{t-2}$	$TAS_{t-1}$	$\overline{TAS}_{t-2}$
1	1,9302 (< 0,001)	—	0,0057 (0,45)	—
2	2,3047 (< 0,001)	0,5683 (0,044)	-0,0088 (0,343)	0,0075 (0,419)
3	1,9689 (< 0,001)	1,0734 (0,002)	0,0138 (0,17)	-0,017 (0,138)
4	2,2945 (< 0,001)	1,0617 (0,007)	0,0092 (0,441)	-0,0141 (0,307)
5	2,2741 (< 0,001)	1,0698 (0,015)	-0,0008 (0,938)	< 0,0001 (0,996)
6	2,5812 (< 0,001)	1,4609 (0,003)	-0,0005 (0,966)	-0,0072 (0,678)

## 7.4. Incorporación de la CVT

Como se mencionó anteriormente, hay más de una manera de incorporar una CVT a un modelo mixto, en esta sección compararemos algunas de ellas.

### 7.4.1. Incorporación de covariable fija

Una de las transformaciones que puede aplicarse sobre la covariable “adherencia al tratamiento” es convertirla en una variable dicotómica, cuyo valor es 1 si el paciente adhirió correctamente en todo el estudio y 0 si adhirió de manera incorrecta en algún mes. Este modelo indica que, controlando por el resto de las variables, los pacientes con adherencia perfecta presentan una disminución promedio sobre la TAS de 0.666.

Tabla 7.4.1: Modelo 2: Incorporación adherencia perfecta

Log-Likelihood			-15418.7275	
AIC			30855.455	
BIC			30911.92	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	120.719	2.320	52.038	< 0,001
Sexo	3.845	0.743	5.176	< 0,001
Edad	0.169	0.038	4.414	< 0,001
tpo programa	-0.002	0.131	-0.017	0,986
tpo programa*Adherencia Perfecta	-0.666	0.155	-4.286	< 0,001

Otra manera de incorporar la covariable fija conservando más información es usar la proporción de adherencia correcta al final del estudio. Es decir, si de las 7 ocasiones el paciente adhiere correctamente al tratamiento en solo 5, el valor que se le asignará es  $\frac{5}{7}$  ( $\approx 0,71$ ). Los coeficientes de este modelo indican que, controlando por el resto de las variables, los pacientes presentan una disminución promedio en la TAS por mes de 1.410 proporcional a la adherencia correcta al tratamiento. Por ejemplo, un paciente que adhiere correctamente sólo al 50 % del tratamiento, tendrá una disminución promedio en su TAS de 0.705 ( $1,410 * 0,5$ ).

Tabla 7.4.2: Modelo 3: incorporación adherencia total

Log-Likelihood			-15418.5232	
AIC			30855.046	
BIC			30911.511	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	120.754	2.331	51.814	< 0,000
Sexo	3.776	0.747	5.054	< 0,000
Edad	0.169	0.038	4.391	< 0,000
tpo programa	0.826	0.287	2.876	0,004
tpo programa*Adherencia Total	-1.410	0.325	-4.335	< 0,000

#### 7.4.2. Incorporación como CVT

Como vimos anteriormente, la CVT puede considerarse exógena, por lo tanto puede introducirse al modelo en su forma natural. Los coeficientes de Adherencia de este modelo y de los siguientes no son fácilmente interpretables, dado que contienen los efectos tanto entre-unidad como intra-unidad.

Tabla 7.4.3: Modelo 4: incorporación la adherencia en cada ocasión

Log-Likelihood			-15388.2302	
AIC			30800.460	
BIC			30875.746	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	122.388	2.426	50.444	< 0.001
Sexo	3.768	0.746	5.054	< 0.001
Edad	0.164	0.038	4.271	< 0.001
DBT	3.212	1.485	2.163	0.031
Adherencia	-2.321	0.922	-2.517	0.012
tpo programa	0.442	0.242	1.828	0.067
tpo programa*DBT	-0.584	0.306	-1.906	0.057
tpo programa*Adherencia	-0.783	0.262	-2.984	0.003

Al comparar los criterios de AIC y BIC de este modelo con los anteriores se puede notar que han disminuido en gran medida, lo cual quiere decir que este modelo explica la variación de la TAS de mejor manera. Además, ambos efectos de adherencia (ordenada y pendiente) son significativos en este modelo, lo cual no ocurría en los modelos anteriores. Este comportamiento es el esperado, dado que se está usando toda la información disponible de la CVT en cada momento en vez de resumirla.

Además de incorporar la adherencia en cada ocasión, también puede acompañarse de la adherencia en momentos anteriores o algunas medidas resúmenes, algunos ejemplos pueden observarse en las siguientes tablas.

Tabla 7.4.4: Modelo 5: incorporación la adherencia en cada ocasión y en ocasión anterior

Log-Likelihood			-15387.1933	
AIC			30800.386	
BIC			30881.946	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	122.467	2.426	50.485	< 0.001
Sexo	3.755	0.745	5.038	< 0.001
Edad	0.166	0.038	4.309	< 0.001
DBT	3.205	1.486	2.157	0.031
Adherencia	-2.527	0.933	-2.709	0.007
tpo programa	0.543	0.252	2.157	0.031
tpo programa*DBT	-0.579	0.307	-1.888	0.059
tpo programa*Adherencia	-0.671	0.274	-2.451	0.014
tpo programa*Adherencia lag1	-0.232	0.161	-1.440	0.150

Tabla 7.4.5: Modelo 6: incorporación la adherencia en cada ocasión y adherencia acumulada

Log-Likelihood			-15387.1802	
AIC			30800.360	
BIC			30881.920	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	122.454	2.425	50.503	< 0.001
Sexo	3.735	0.745	5.011	< 0.001
Edad	0.168	0.039	4.370	< 0.001
DBT	3.199	1.486	2.153	0.031
Adherencia	-2.694	0.957	-2.816	0.005
tpo programa	0.678	0.291	2.328	0.020
tpo programa*DBT	-0.581	0.306	-1.896	0.058
tpo programa*Adherencia	-0.547	0.309	-1.772	0.076
tpo programa*Adherencia Acumulada	-0.527	0.364	-1.450	0.147

En las tablas 7.4.4 y 7.4.5 puede notarse que las covariables adicionales no son significativas. Otra forma de comparar estos modelos con el modelo 4 es a través del criterio BIC, que es mayor en ambos casos. Como conclusión, la mejor decisión hasta el momento es el modelo 4 que se mantiene más parsimonioso.

### 7.4.3. Incorporación dividiendo efecto entre e intra

El efecto de la CVT puede también dividirse en distintos coeficientes para el efecto entre-unidad y el efecto intra-unidad, los valores de éstos coeficientes pueden observarse en la tabla 7.4.6. El coeficiente -

0.607 quiere decir que, manteniendo constante la proporción de adherencia total al tratamiento, se espera que la TAS disminuya en promedio 0.607 los meses en los que se adhiere correctamente al tratamiento. Por otro lado, el coeficiente -0.481 se interpreta como, después de controlar por la adherencia al tratamiento en ese mes, se espera que la TAS disminuya en promedio en 0.481 relativo a la proporción de adherencia total.

Tabla 7.4.6: Modelo 7: incorporación la adherencia dividiendo efecto entre e intra persona

Log-Likelihood			-15387.3388	
AIC			30802.677	
BIC			30890.511	
Covariable	Coef.	Std. Err.	z	$P <  z $
Intercept	122.542	2.841	43.141	< 0.001
Sexo	3.729	0.746	4.997	< 0.001
Edad	0.168	0.039	4.348	< 0.001
DBT	3.220	1.487	2.166	0.030
Adherencia	-2.611	1.054	-2.478	0.013
Adherencia Total	-0.121	2.380	-0.051	0.959
tpo programa	0.689	0.378	1.822	0.068
tpo programa*DBT	-0.578	0.306	-1.887	0.059
tpo programa*Adherencia	-0.607	0.314	-1.930	0.054
tpo programa*Adherencia Total	-0.481	0.528	-0.911	0.362

## 8. Conclusiones

Tradicionalmente, los modelos longitudinales fueron pensados para ser ajustados sobre covariables fijas a través del tiempo, pero esto no es algo que suceda siempre en la vida real.

En este informe se ha introducido una manera de categorizar a las covariables variables en el tiempo, específicamente como *exógenas* o *endógenas*, como así también un método para verificar esta clasificación a través de ajustar distintos modelos individualmente para cada ocasión.

Cuando las variables son exógenas pueden añadirse al modelo de la manera tradicional. Sin embargo, se han propuesto diversas transformaciones que pueden ayudar tanto a ajustar de mejor manera los datos como a la interpretación de los coeficientes.

Como futuros pasos se propone estudiar de manera más profunda la incorporación de variables endógenas. Dado que muchas de las técnicas existentes hasta el momento no están basadas en el ajuste de modelos lineales mixtos, quedan fuera del alcance de esta tesina.

## Bibliografía

- [1] G. M. Fitzmaurice, N. M. Laird, and J. H. Ware, *Applied Longitudinal Analysis*. John Wiley & Sons, 2004.
- [2] P. J. Diggle, P. Heagerty, K.-Y. Liang, and S. L. Zeger, *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford University Press, 2002.
- [3] D.-G. Chen and J. R. Wilson, *Innovative Statistical Methods for Public Health Data*. Springer International Publishing, 2015.
- [4] L. Hoffman, *Longitudinal Analysis, Modeling Within-Person Fluctuation and Change*. Routledge, 2015.