Economia Intertemporal

Nelson Seixas dos Santos

Núcleo de Ciência de Dados e Computacional em Economia e Finanças
Faculdade de Ciências Econômicas
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

1 de Novembro de 2024

Sumário

Introdução

Problema

Determinar como uma economia evolui ao longo do tempo do curto prazo para o médio e longo prazo.

Importância do problema

- A teoria econômica prevalente a partir da década de 1870 até a década de 1920 - conhecida como teoria neoclássica - apresentava a dinâmica econômica prioritariamente por meio de argumentação verbal.
- Nesta década, há um esforço teórico no sentido de formalizar os argumentos produzidos por neoclássicos, tais como, Wicksell, Böhm-Bawerk e, em um certo sentido, até mesmo Schumpeter.
- Este esforço é empreendido principalmente em trabalhos de Irving Fisher e complementado por Frank Ramsey.

Método de solução

Constrói-se um modelo de economia intertemporal onde os agentes tomam decisões ótimas, respeitando suas restrições orçamentárias intertemporais.

Resultados

- Definição precisa das noções de valor presente e estrutura a termo das taxas de juros
- Explicação do processo de transição de uma economia em equilíbrio geral do curto prazo para o longo prazo
- Criação de bases para a formação de teoria da previdência

A evolução do tempo

Tempo e informação

- Existem T+1 datas.
- As datas são elementos do conjunto $\Upsilon = \{0, 1, 2, 3, ..., T-1, T\}$.
- Existem T períodos de tempo.
- Não há incerteza sobre os eventos futuros é perfeita, significando que todos eles são conhecidos na data 0..

Mercadorias e mercados

Bem

- Em cada período, existe uma único bem chamado consumo.
- A quantidade de consumo no período t é denotado por C_t.
- O consumo atende a todas as necessidades dos indivíduos.

- O consumo pode ser entendido como sendo a cesta composta por todos os bens da economia nas quantidades necessárias para atender a todas as necessidades de cada um dos indivíduos em um dado período.
- Poder-se-ia pensar o consumo como sendo uma cesta básica estendida.

Mercados de commodities

- O consumo no início do período s pode ser trocado por consumo inicio do período v em mercados comumente conhecidos pela termo em inglês "mercado de commodities".
- Tais mercados abrem para negociação no início do período e permanecem abertos até que todos os indivíduos tenham realizado suas transações. Após isso, os mercados fecham e só voltam a abrir no início do próximo período.

Tipos de contratos

- Como não existe incerteza sobre o futuro, em cada instante, há mercados para todas as mercadorias presentes e futuras;
- Isto é, podem-ser realizados os seguintes contratos a vista e contratos a termo no mercado de commodities

- Contratos a vista - Compra-se um bem e se paga por ele imediatamente.
- Contratos a termo - Acerta-se hoje a compra de uma determinada quantidade de um bem por um preço determinado também hoje, mas cujo pagamento e entrega do bem se dará em um período futuro.[1]

[1] Contratos a termo estritamente padronizados em bolsa são chamados de contratos futuros.

Mercados a Vista

- Cada mercadoria C_t tem um preço a vista p_t.
- Os preços unitário (P.U.) dos bens podem ser representados por:

$$(p_1, p_2, p_3, ..., p_{T-1}, p_T) \tag{1}$$

Mercados a Termo

- Um contrato a termo que onde se negocia no início do período s a compra e pagamento de uma unidade do bem na data futura v tem preço denotado por $p_{s,v}$.
- Em cada período t, posterior a s e anterior a v (isto é, $s < t < v$), o valor do contrato a termos será $p_{t,v}$
- O preço dos contratos a termo será determinado pelo equilíbrio do mercado.

Títulos de renda fixa

- Como não há incerteza na economia, mercados a termo de commodities são equivalentes a mercados de ativos financeiros onde se negociam apenas transferência dos valores destas mercadorias de qualquer data presente para qualquer data futura.
- Consequentemente, estes ativos financeiros também podem trazer valores de qualquer data futura para a data presente.
- Os papéis que fazem esta transferência de valores entre datas são chamados de títulos de renda fixa.

- Então, para quem vende o contrato, isto é, vende consumo futuro, tais ativos tem seus fluxos de caixa denotados pelo preço da mercadoria no período em que ela é consumida e seu preço atual.
- Assim, um contrato a vista realizado no início do período t (data t - 1), custa p_t, pois período de consumo e atual são idênticos.
- Analogamente, um contrato a termo realizado no início do período s (data s-1) para liquidação no início do período v tem fluxo de caixa (p_v, p_s).

- Como em contratos a termo não há pagamento no período inicial, p_s representa o valor que deverá ser poupado no início do período s para que renda o valor p_v no início do período v (data v - 1).

- Estes contratos tem, portanto, uma taxa de juros implícita dada por

$$r_{s,v} = \frac{p_s - p_v}{p_v} = \frac{p_s}{p_v} - 1 \tag{2}$$

- Em particular, um contrato a termo realizado no início do período 1 com liquidação no início do período t tem fluxo de caixa equivalente (p_1, p_t)

Risco de mercado

- Nesta economia, não há risco de qualquer natureza.
- Porém, pode-se estudar o efeito do risco de mercado, fazendo estatíca comparativa nos preços do consumo.

Agentes econômicos

Cesta de Consumo Intertemporal

- Os indivíduos escolhem entre diferentes alternativas de trajetórias de consumo ao longo do tempo.
- Cada trajetória é uma cesta de consumo intertemporal tal como mostrado abaixo.

$$(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T) \tag{3}$$

Preferências

Os indivíduos tem preferências entre diferentes alternativas de trajetórias de consumo ao longo do tempo, que podem ser sintetizadas por uma função de utilidade como a mostrada abaixo.

$$U : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R} \tag{4}$$

definida por

$$V = U\left(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T\right) \tag{5}$$

Impaciência

- As pessoas preferem consumir no presente a consumir no futuro. (Hipótese da impaciência)
- Economicamente, isto significa que a taxa marginal de substituição entre dois períodos $s < v$ é sempre menor do que -1. Matematicamente:

$$TMS_{s,v} = \frac{\Delta C_v}{\Delta C_s} = -\frac{\frac{\Delta U}{\Delta c_s}}{\frac{\Delta U}{\Delta c_v}} < -1 \tag{6}$$

Renda dos Indivíduos

Fluxo Intertemporal de Renda

- Os indivíduos recebem rendas no início de cada período de sua vida.
- A renda do início do período t é denotada por y_t.
- O fluxo intertemporal de renda pode ser representado por:

$$(y_1, y_2, y_3, ..., y_{T-1}, y_T) \tag{7}$$

Poupança e herança

- Observe que y_1, por ser recebido no início do período 1, deve ser entendido como um estoque de bens que inicialmente existe na economia.
- Em cada período, a **poupança** s_t dos indivíduos é dada por $s_t = y_t - c_t$.
- Em modelagens com múltiplas gerações de pessoas, y_1 seria uma **herança**. Nestas modelagens, esclarece-se que a motivação principal da poupança é justamente deixar herança aos filhos.

Restrição Orçamentária dos Indivíduos

A restrição orçamentária é a equação que informa o quanto os indivíduos podem gastar sem entrar em default (isto é, sem quebrar). Este valor de gasto dado pela sua própria renda intertemporal.

- Valor do fluxo intertemporal de despesa de consumo:

$$C = \sum_{t=1}^{T} p_t.C_t = p_1.C_1 + p_2.C_2 + p_3.C_3 + ... + p_T.C_T \quad (8)$$

- Valor do fluxo intertemporal de Renda:

$$Y = \sum_{t=1}^{T} p_t.y_t = p_1.y_1 + p_2.y_2 + p_3.y_3 + ... + p_T.y_T \qquad (9)$$

- Restrição orçamentária: C = Y

Problema de Escolha dos Indivíduos

$$MaxU\left(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T\right) \tag{10}$$

sujeito à restrição

$$C = \sum_{t=1}^{T} p_t.C_t = \sum_{t=1}^{T} p_t.y_t = Y \tag{11}$$

Solução do Problema de Escolha do Consumidor

Sabe-se da teoria microeconômica que a solução do problema do consumidor é dada $\forall s < v \in \Upsilon$, pela equação:

$$TMS_{s,v} = -\frac{p_s}{p_v} < -1 \tag{12}$$

$$\forall s < v, \quad \frac{p_s}{p_v} > 1 \tag{13}$$

Ou seja:

$$\forall s < v, \quad p_s > p_v \tag{14}$$

Isto é:

$$\forall s < v, \quad \exists r_{s,v}, \quad p_s = p_v.(1 + r_{s,v}) \tag{15}$$

Logo:

$$\forall s < v, \quad \exists r_{s,v}, \quad \frac{p_v}{p_s} = \frac{1}{1 + r_{s,v}} \tag{16}$$

Observe que estas taxas de juros $r_{s,v}$ referem-se a contratos de ativos que levam recursos do início do período s para o início do período v. Ou, o que é o mesmo, consumo do período s para o período v.

Por exemplo, $r_{1,3}$ leva recursos do período 1 para o período 3, tendo um fluxo de caixa dado pela saída p_3 unidades monetárias na data 0 (início do período 1) e a entrada de p_1 unidades monetárias na data 2 (início do período 3), não fazendo qualquer pagamento intermediário.

Como os pagamentos intermediários em títulos são denominados de cupons, o ativos (títulos) que aqui tratamos são chamados de "zero cupom".

Restrição Orçamentária

Dividindo por p_1 a restrição orçamentária, obtemos:

$$C_1 + \frac{p_2}{p_1}.C_2 + \frac{p_3}{p_1}.C_3 + ... + \frac{p_{T-1}}{p_1}.C_{T-1} + \frac{p_T}{p_1}.C_T = \frac{Y}{p_1} \tag{17}$$

Ou ainda:

Restrição orçamentária simplificada

$$C_1 + \frac{1}{1+r_{1,2}}.C_2 + \frac{1}{1+r_{1,3}}.C_3 + ... + \frac{1}{1+r_{1,T}}.C_T = \frac{Y}{p_1} \tag{18}$$

Estrutura a termo das taxas de juros

Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ)

Definição

A estrutura a termo da taxa de juros é a curva que liga os pontos $(T - t, r_{t,T})$ no plano tempo-taxa.

$$(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{1,4}, ..., r_{1,T-1}, r_{1,T}) \tag{19}$$

Esta curva de juros é chamada de curva zero cupom, porque relaciona taxas de juros de ativos que não pagam qualquer valor intermediário (cupons).

Observações

- Esta curva de juros é chamada de curva zero cupom.
- A teoria de Fisher foi construída supondo não haver riscos de crédito, liquidez, ficando o risco de mercado relegado à estática comparativa, por isso seus resultados são equivalentes ao caso de indiferença ao risco.
- Em virtude de não existirem títulos sem risco na prática, constróem-se curvas de juros, normalmente, utilizando títulos públicos federais prefixados ou com o DI futuro.

Determinação da ETTJ: interpolação polinomial

Problema

Determinar o polinômio que que liga os pontos $(t - t, r_{t,T})$ no plano tempo-taxa.

Um método de solução: interpolação polinomial

Para determinar o polinômio que passa pelos n+1 pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, basta lembrar que um polinômio de n grau $y = P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ tem n+1 coeficientes.

Formalmente, basta resolver o sistema:

1. $y_0 = P(x_0)$
2. $y_1 = P(x_1)$
3. ...
4. $y_{n-1} = P(x_{n-1})$
5. $y_n = P(x_n)$

Exemplo

Encontre o polinômio que passa pelos pontos $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, 4)$ e $(x_2, y_2) = (5, 6)$.

Solução

Como há três pontos, precisamos de um polinômio de segundo grau o qual é representado pela expressão $y = a.x^2 + b.x + c$. Com isso, basta substituir as coordenadas dos pontos dados no polinômio para obter:

- $a + b + c = 2$
- $9a + 3b + c = 4$
- $25a + 5b + c = 6$

Exercício

Resolva o sistema acima em Excel, usando fórmulas matriciais.

Apreçamento de contratos a termo

Arbitragem e preços dos contratos a termo

- A otimização dos agentes econômicos se dá pela compra de contratos a vista cujo fluxo de caixa é do tipo (P_1, P_t) que pagam taxas de juros determinadas como segue:

$$r_{1,t} = \frac{P_t - P_1}{P_1} \tag{20}$$

- Um operação com contratos a vista ou a termo que proporcionem ganhos líquidos (isto é, ganhos financeiros obtidos sem sacrifício de consumo em algum período é chamada de **arbitragem**.

- Os preços dos contratos a vista são determinados pelo equilíbrio de mercado.
- Em equilíbrio, todos os agentes estão maximizando utilidade,
- Se fosse possível, operando contratos a vista ou a termo no mercado, fazer arbitragens, isto significaria que os agentes não estariam maximizando utilidade.
- Então, os preços dos contratos a termo tem de ser tais que impeçam arbitragens.

Determinação dos Preços dos Contratos a Termo: exemplos

Exemplo 1

$$1 + r_{1,3} = (1 + f_{2,3}) \,.\, (1 + r_{1,2}) \tag{21}$$

Exemplo 2

$$1 + r_{1,4} = (1 + r_{1,3}) \,.\, (1 + f_{3,4}) \tag{22}$$

Exemplo 3

$$1 + f_{4,7} = (1 + f_{4,6}) \, . \, (1 + f_{6,7}) \tag{23}$$

Exemplo 4

$$1 + r_{1,7} = (1 + r_{1,4}) \, . \, (1 + f_{4,5}) \, . \, (1 + f_{5,7}) \tag{24}$$

Matemática financeira e taxas constantes

Matemática financeira e Taxas Constantes

Se $\forall t = 2, 3, ..., T - 1, T$, tem que $r_{1,2} = f_{t,t+1} = r$, então, $\forall t > 3$, vale que:

$$(1 + r_{1,t}) = (1 + r)^t \tag{25}$$

Preços de contratos e Taxa interna de retorno (TIR)

Preços de contratos

Considere um contrato cujo fluxo de caixa seja $(-P, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T)$. Então, pela impossibilidade de arbitragem, sabemos que o preço P é dado por:

$$P = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{1 + r_{1,t}} \tag{26}$$

TIR

A TIR é a taxa constante que traz a valor presente os pagamentos C_t de um título de modo a tornar o somatório destes valores igual ao preço do título. Isto é:

$$P = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{27}$$

Curva de Juros Revisitada

Os preços dos títulos que pagam cupons como na equação 26 podem ser obtidos, por arbitragem, a partir das taxas dos títulos sem cupon e dos contratos a termo.

Determinação da curva de juros no Brasil: modelo de Svenson

- Curva de Juros
- Metodologia ETTJ ANBIMA.
- Curva de Juros ANBIMA.
- Interpolação da ETTJ.

Preço unitário e rentabilidade de contratos de renda fixa

- Metodologia de cálculo de rentabilidade
- Precificação de Títulos Públicos Federaistext

Noções de Mensuração de Risco de Contratos de Renda Fixa

Duration

- Mede o tempo médio necessário para o retorno do investimento.
- Diferencia-se do prazo médio por considerar os fluxos a valor presente.
- A fórmula de cálculo é dada por:

$$D = \sum_{t=2}^{T} t.w_t \tag{28}$$

Onde:

$$w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}} = \frac{1}{P} . \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{29}$$

- Serve também como medida de risco de variação da curva de juros
- Para verificar o observado no item anterior, determine a derivada do preço do título em relação a TIR.
- No cálculo da duration, pressupõe-se que a curva de juros é plana (dada pela TIR).

Convexidade (C)

- Mede a sensibilidade da duration a variações na TIR.
- Como consequência do item anterior, também mede a sensibilidade de segunda ordem da variação do preço do título à sua TIR.
- Formalmente, fazendo $D^* = \frac{D}{1+r}$, temos que:

$$C = -\frac{dD^*}{dr} \tag{30}$$