1.4. Ejercicios

1. Se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas. Sean:

$$A := \text{“En el primer lanzamiento se obtiene cara”}$$
$$B := \text{“En el tercer lanzamiento se obtiene sello”}$$

Describir en palabras los eventos $A \cap B$, $A \cup B$, A^c, $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$ y determinar sus elementos.

2. Sean A, B y C tres eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C los siguientes eventos: A y B pero no C; todos los tres; sólo A; por lo menos uno de los tres; a lo más uno de los tres; a lo más dos de los tres.

3. Se lanza un dado corriente dos veces consecutivas. Sean A, B y C los eventos dados por:

$$A := \text{“el primer resultado obtenido es un número par”}$$
$$B := \text{“la suma de los resultados obtenidos es menor que 7”}$$
$$C := \text{“el segundo resultado obtenido es un número primo”}$$

Determinar los elementos que pertenecen a los siguiente eventos:

   a) $A \cap B \cap C$
   b) $B \cup (A \cap C^c)$
   c) $(A \cap C) \cap [(A \cup B)^c]$

4. Un experimento aleatorio consiste en extraer tres bombillos al azar y clasificarlos como defectuoso “D” o no defectuoso “N”. Considere los eventos

$$A_i := \text{“el } i\text{-ésimo bombillo extraído es defectuoso”},\ i = 1, 2, 3$$

   a) Describir el espacio muestral para este experimento.
   b) Listar todos los resultados que están en A_1, A_2, $A_1 \cup A_3$, $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ y $(A_1 \cup A_2^c) \cap A_3$.

5. Un trabajador fabrica n artículos. El evento “el i-ésimo artículo es defectuoso” se denotará por A_i con $i = 1, 2, \cdots, n$. Describir los si-

   a) $B :=$ “Por lo menos un artículo es defectuoso”.
   b) $C :=$ “Ninguno de los n artículos es defectuoso”.
   c) $D :=$ “Exactamente un artículo es defectuoso”.
   d) $E :=$ “A lo más un artículo es defectuoso”.

6. Sean A, B y C eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C los siguientes eventos:

   a) $E_1 :=$ “Por lo menos uno de los eventos A, B, C ocurre”.
   b) $E_2 :=$ “Exactamente dos de los eventos A, B, C ocurren”.
   c) $E_3 :=$ “Por lo menos dos de los eventos A, B, C ocurren”.
   d) $E_4 :=$ “A lo más uno de los eventos A, B, C ocurre”.

7. Un total de 35 % de los estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia están inscritos en un curso de inglés, 7 % están inscritos en un curso de alemán y 2 % están inscritos en cursos de inglés y alemán. ¿Qué porcentaje de los estudiantes están inscritos en cursos de inglés pero no de alemán? ¿Qué porcentaje de los estudiantes no está inscrito en inglés ni en alemán?

8. Sea $\Omega \neq \emptyset$ y $\Im$ una σ-álgebra en Ω. Demostrar:

   a) Si $A_1, A_2, ... \in \Im$ entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$.
   b) Si $A, B \in \Im$ entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $A \triangle B$ pertenecen a $\Im$.

9.

   a) Sean Ω y $\widetilde{\Omega}$ conjuntos no vacios, $\widetilde{\Im}$ una σ-álgebra en $\widetilde{\Omega}$ y $T : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ una función. Demostrar que:

$$T^{-1}(\widetilde{\Im}) := \{T^{-1}(\widetilde{A}) : \widetilde{A} \in \widetilde{\Im}\}$$

   es una σ-álgebra en Ω.
   b) Determinar la $\sigma-$álgebra sobre $\Omega = \{1, 2, 3\}$ generada por $\{\{2\}, \{3\}\}$.
   c) Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos familias de subconjuntos de un conjunto no vacio

d) Sea $\Omega = \{1,2\}$, $\Im = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}\}$ y μ definida sobre $\Im$ por:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ \mu(\Omega) &= 1 \\ \mu(\{1\}) &= \frac{1}{3} \\ \mu(\{2\}) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

¿Es $(\Omega, \Im, \mu)$ un espacio de probabilidad? Explicar.

10. Sean $\Omega = \{a,b,c,d\}$, $\Im = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b,c\}, \{d\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,d\}\}$ y P una aplicación de $\Im$ en $[0,1]$ con $P(\{a\}) = \frac{2}{7}$, $P(\{b,c\}) = \frac{4}{9}$ y $P(\{d\}) = \alpha$.

    a) Determinar el valor de α de tal manera que P sea una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \Im)$.

    b) Calcular $P(\{a,b,c\})$, $P(\{b,c,d\})$ y $P(\{a,d\})$.

11. Sean $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad definidas sobre el espacio medible $(\Omega, \Im)$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ y $P : \Im \to \mathbb{R}$ definida por:

$$P(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n P_n(A) \qquad \text{para todo } A \in \Im$$

    Demostrar que P es una medida de probabilidad definida sobre $(\Omega, \Im)$.

12. Determinar si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas. Justificar brevemente la respuesta:

    a) Si $P(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$

    b) Si $P(A) = P(B) = 0$ entonces $P(A \cup B) = 0$.

    c) Si $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{3}$ entonces $\frac{1}{2} \leq P(A \cup B) \leq \frac{5}{6}$

    d) Si $P(A) = P(B) = p$ entonces $P(A \cap B) \leq p^2$

    e) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

    f) Si $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$ entonces $P(A^c \cap B) = 0.1$

13. Sean A y B dos eventos con $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B^c) = \frac{1}{4}$ ¿Pueden ser A y

14. Se carga un dado de manera que los números pares tienen el doble de probabilidad de salir que los impares. ¿A qué es igual la probabilidad de obtener un número par?, ¿un número primo?, ¿un número primo impar?

15. De los 100 estudiantes de la carrera de Filología y Lenguas clásicas del Departamento de Idiomas de una universidad, se tiene que 28 estudiantes asisten a clases de latín, 26 a clases de griego y 16 a clases de hebreo. Hay 12 estudiantes que asisten tanto a las clases de latín como a las clases de griego, 4 están asistiendo a las de latín y hebreo y 6 están en las de griego y hebreo. Además se tiene que 2 estudiantes asisten a los tres cursos mencionados.

    a) Si se escoge un estudiante de Filológía y Lenguas clásicas, aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de él o ella asista sólo a clase de hebreo?

    b) Si se escoge un estudiante de Filología y Lenguas clásicas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella asista a clases de griego y de hebreo pero no de latín?

    c) Si dos estudiantes de Filología y Lenguas clásicas son escogidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos asista a uno de los cursos?

16. Se contrató una empresa para realizar una encuesta entre los 1000 suscriptores de una revista. Los datos suministrados en el informe presentado fueron los siguientes: 550 suscriptores son profesionales, 630 son casados, 650 son mayores de 35 años, 127 son profesionales y mayores de 35 años, 218 son casados y mayores de 35 años, 152 son profesionales y casados y 100 son casados, profesionales y mayores de 35 años. ¿Son los datos presentados en este reporte correctos? Explicar la respuesta.

17. Se lanza una moneda corriente n veces. Sea

$$A_k := \text{“se obtiene cara por primera vez en el } k-\text{ésimo lanzamiento”}$$

    donde $k = 1, 2, \cdots, n$. ¿A qué es igual $P(A_k)$?

18. Se distribuyen 10 bolas distinguibles en 7 urnas distinguibles. ¿A qué es igual la probabilidad de que todas las urnas tengan por lo menos una bola?, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de las

19. Un grupo de 40 estudiantes está conformado por 20 hombres y 20 mujeres. Si se divide al grupo en dos grupos iguales. ¿Cuál es la probabilidad de que cada grupo tenga el mismo número de hombres que de mujeres?

20. Los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son determinados lanzando un dado corriente tres veces consecutivas. ¿A qué es igual la probabilidad de que las dos raíces de la ecuación sean reales?. ¿A qué es igual la probabilidad de que las dos raíces sean complejas?

21. Se tienen dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 4 negras y la urna B contiene 5 bolas rojas y 7 negras. Se selecciona al azar una bola de cada urna. ¿A qué es igual la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas sean del mismo color?

22. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 negras. Los jugadores A y B extraen consecutivamente una bola de la urna, hasta que una bola roja es seleccionada.¿A qué es igual la probabilidad de que el jugador A extraiga la bola roja? Suponga que la extracción se hace sin sustitución y que el jugador A inicia el juego.

23. En un lago hay 200 peces ornamentales. Se capturan 50 de ellos, se marcan y se regresan al lago. Días más tarde, se capturan 40 peces, ¿cuál es la probabilidad de que 20 de esos 40 peces estén marcados?

24. Se ordenan 5 hombres y 5 mujeres de acuerdo con sus calificaciones en un examen. Suponga que no hay dos calificaciones iguales y que los 10! órdenes posibles son igualmente probables. ¿A qué es igual la probabilidad de que la posición más alta alcanzada por un hombre sea la cuarta?

25. Un estudiante está tan entusiasmado con su curso de probabilidad que decide planear sus actividades de fin de semana de acuerdo con el resultado que obtenga al lanzar un dado corriente una vez. Si el resultado del lanzamiento es menor o igual a 4 el entonces sale de rumba con sus amigos, si el resultado es 5 se queda en casa estudiando probabilidad y si el resultado es 6 invita a su pareja a cine.

    Para hacerse a una idea de cómo será su actividad de fin de semana, el estudiante divide el año en trece periodos de cuatro semanas cada

    a) estudiar probabilidad por lo menos una vez.
    b) ir dos veces a cine.
    c) salir cuatro veces de rumba con sus amigos.
    d) realizar cada actividad por lo menos una vez.

    ¿Puede usted ayudarlo a calcular estas probabilidades?

26. Para iluminar una escalera han sido colocadas 7 lámparas y se han literado con las letras $A, B, \cdots, G$. Para garantizar la iluminación de la escalera deben funcionar las lámparas A o B y las lámparas F o G, o alguna de las lámparas C, D o E. La probabilidad de estar fuera de servicio es igual a p para todas las lámparas.

    a) ¿A qué es igual la probabilidad de que la iluminación de la escalera esté garantizada?
    b) ¿Cómo cambia la probabilidad pedida en **a.**, si la lámpara D no se usa?

27. ¿A qué es igual la probabilidad de que entre 25 personas por lo menos dos tengan cumpleaños el mismo día? Supóngase que cada año tiene 365 días y que todos los días tienen la misma probabilidad de ser un día de cumpleaños.

28. A una fiesta de navidad asisten n personas cada una de las cuales lleva un regalo. Los regalos se introducen en una bolsa y se mezclan homogéneamente, luego cada persona extrae al azar un regalo de la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna persona extraiga su propio regalo?

29. En el juego del bridge se reparte la baraja completa de 52 cartas entre 4 jugadores.

    a) ¿A qué es igual la probabilidad de que uno de los jugadores reciba todas las trece picas?
    b) ¿A qué es igual la probabilidad de que cada jugador reciba un as?

30. Una urna contiene 15 bolas de las cuales 9 son rojas y 6 son blancas. Se juega el siguiente juego: se extrae una bola al azar de la urna, se anota su color y se devuelve a la urna junto con dos bolas adicionales del otro color. ¿A qué es igual la probabilidad de que en las primeras

31. Calcular la probabilidad de que en un grupo de trece cartas, de una baraja normal de 52 cartas, haya exactamente dos reyes y un as. ¿A qué es igual la probabilidad de que en dicho grupo haya exactamente un as dado que que el grupo contiene exactamente dos reyes?

32. Sean A y B eventos tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$. Calcular $P(A \mid B)$, $P(A \mid B^c)$, $P(A \mid A \cap B)$, $P(A^c \mid A \cup B)$ y $P(A \cap B \mid A \cup B)$.

33. Un estudiante de matemáticas tiene que presentar el mismo día un examen de probabilidad y uno de álgebra. Sean:

$A :=$ "el estudiante reprueba el examen de probabilidad "

$B :=$ "el estudiante reprueba el examen de álgebra"

Si $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.2$. ¿A qué es igual la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen de álgebra dado que aprobó el de probabilidad?, ¿a qué es igual que el estudiante apruebe el examen de probabilidad dado que reprobó el de álgebra?

34. A través de una encuesta se pudo establecer lo siguiente:

90 % de las familias bogotanas poseen radio y televisor.

8 % de las familias bogotanas poseen radio pero no poseen televisor.

2 % de las familias bogotanas poseen televisor pero no poseen radio.

95 % de las familias bogotanas que poseen radio y televisor saben quién es el alcalde de la ciudad.

80 % de las familias bogotanas que poseen radio pero no televisor saben quién es el alcalde de la ciudad.

1 % de las familias bogotanas que poseen televisor pero no radio, no saben quién es el alcalde de la ciudad.

Se escoge una familia bogotana al azar. Sean:

$T :=$ "La familia tiene televisor"

$R :=$ "La familia tiene radio"

$B :=$ "La familia sabe quién es el alcalde de la ciudad"

a) $P(T \cup R)$

b) $P(B \cap T)$

c) $P(T \mid B)$

35. Un número aleatorio N de dados corrientes es lanzado. Sea A_i el evento de que $N = i$ y suponga que $P(A_i) = 2^{-i}$ con $i \geq 1$. Sea S la suma de los resultados. Determinar la probabilidad de que:

a) $N = 2$ dado que $S = 4$.

b) $S = 4$ dado que N es par.

c) $N = 2$ dado que $S = 4$ y el resultado del primer dado es 1.

36. Supóngase que se tiene una población que se desarrolla de la siguiente manera: una partícula inicial, que constituye la 0-ésima generación, tiene 0, 1 o 2 hijas con probabilidades $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente. Luego de reproducirse la partícula muere. Las hijas se reproducen independientemente unas de otras e independientemente de la historia familiar, de la misma manera que la partícula original. La primera generación está compuesta por las hijas de la partícula inicial, la segunda por las nietas y así sucesivamente. Dado que en la segunda generación hay una partícula, ¿a qué es igual la probabilidad de que en la primera haya habido dos partículas?. ¿Cuál es la probabilidad de que en la segunda generación haya por lo menos una partícula?

37. El 5 % de las personas de una población sufren de tensión arterial alta. De las personas con tensión arterial alta se tiene que el 75 % son consumidores asiduos de bebidas alcohólicas, mientras que sólo el 50 % de las personas sin tensión arterial alta consumen frecuentemente bebidas alcohólicas. ¿Cuál es el porcentaje de personas que consumen asiduamente bebidas alcohólicas con tensión arterial alta?

38. Se tienen dos urnas A y B. La urna A contiene 7 bolas rojas y 5 blancas y la urna B contiene 2 bolas rojas y 4 blancas. Se lanza un dado corriente. Si se obtiene un 3 o un 6 se toma una bola de B y se coloca en A y luego se toma una bola de A; si aparece otro número se toma una bola de A y se coloca en B y luego de extrae una bola de B. ¿A qué es igual la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

39. Supóngase que usted le pide a un compañero de curso que lo inscriba

semestre en su universidad. Si su compañero olvida hacer la inscripción en los plazos estipulados por el Departamento de Matemáticas, la probabilidad de que usted consiga cupo en dicha asignatura es de sólo el 2 %, en tanto que si su compañero hace la inscripción a tiempo, la probabilidad de que usted consiga cupo es del 80 %. Usted está seguro, en un 95 %, de que su compañero hará la inscripción a tiempo. Si usted no obtuvo cupo, ¿a qué es igual la probabilidad de que su compañero haya olvidado inscribirlo a tiempo?

40. La probabilidad de que en un parto gemelar ambos bebés sean de género masculino es de 0.32, en tanto que la probabilidad de que sean ambos de género femenino es de 0.28. ¿A qué es igual la probabilidad de que en un parto gemelar, el segundo niño en nacer sea de género masculino dado que el primero en nacer es de género masculino? Supóngase que es tan probable que el primer niño en nacer sea de género femenino como de género masculino.

41. Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de acciones en la bolsa durante los seis meses anteriores es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto (PNB). Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el precio de las acciones aumente es de 0.7. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0.2, en tanto que si el PNB disminuye entonces la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de sólo 0.1. Si las probabilidades de que el PNB aumente, siga siendo el mismo o disminuya son respectivamente 0.5, 0.3 y 0.2, ¿a qué es igual la probabilidad de que las acciones aumenten su valor? Si las acciones aumentaron su valor, ¿cuál es la probabilidad de que el PNB haya aumentado?

42. En una urna hay ocho monedas. Dos de ellas tienen dos sellos, tres monedas son corrientes y tres están "cargadas" de tal manera que la probabilidad de obtener sello es igual a $\frac{3}{5}$. Se escoge una moneda al azar de la urna y se lanza. Si el resultado del lanzamiento es "cara", ¿cuál es la probabilidad de que haya sido lanzada una moneda corriente?

43. Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\Im = \wp(\Omega)$ y $P(\omega) = \frac{1}{4}$ para todo $\omega \in \Omega$. Sea $A = \{2,3\}$. Determinar todos los elementos $B \in \Im$ tales que A y B sean independientes.

Demostrar que si A y B son elementos de $\Im$ independientes y A tiene 3 elementos entonces B debe tener un número par de elementos.

45. Demostrar que si $A = B$ y A y B son independientes (esto es A es independiente de si mismo) entonces $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$.

46. Sea A un evento. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

    a) A y B son independientes para cualquier evento B.
    b) $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$.

47. Sean A, B y C eventos independientes. Demostrar que A y $B \cup C$, A y $B \cap C$, A y $(B - C)$ son independientes.

48. Demostrar que los eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son independientes si y sólo si

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)$$

para toda posible elección de $B_1, B_2, \cdots, B_n$ con $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

49. Una moneda corriente se lanza tres veces consecutivas. Considerar los siguientes eventos:

$A :=$ "los resultados de los lanzamientos 1 y 2 son diferentes"
$B :=$ "los resultados de los lanzamientos 2 y 3 son diferentes"
$C :=$ "los resultados de los lanzamientos 1 y 3 son diferentes"

    a) Verificar que $P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid C)$ y que $P(A) \neq P(A \mid B \cap C)$.
    b) ¿Son A, B y C dos a dos independientes?, ¿son A, B y C independientes? Explicar las respuestas.

50. Sean A, B y C eventos independientes con $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Calcular la probabilidad de que:

    a) Por lo menos uno de los eventos ocurra.
    b) Por lo menos dos de los eventos ocurran.

51. Determinar la probabilidad de que entre siete personas:

    a) No hay dos que hayan nacido el mismo día de la semana (domingo, lunes, martes, etc.)
    b) Por lo menos dos nacieron el mismo día.
    c) Hay dos que nacieron el domingo y dos el martes.

52. Supóngase que se tiene una urna que contiene N bolas numeradas del 1 al N. Una muestra aleatoria, sin reemplazo, de tamaño n, es sacada de la urna y se anotan los números de las bolas extraídas. Luego de devolver las bolas extraídas a la urna, se extrae una segunda muestra, sin reemplazo, de tamaño m. Calcular la probabilidad de que las dos muestras tengan k bolas en común.

53. Una urna contiene bolas numeradas del 1 al n. Se selecciona una bola al azar.

    a) ¿A qué es igual la probabilidad de que el número que aparece en la bola sea divisible por 3 o 4 ?
    b) ¿Qué ocurre con la probabilidad calculada en el literal anterior cuando $n \to \infty$?

54. En una urna 20 bolas: 4 azules, 3 rojas, 7 blancas y 6 verdes. Se extraen dos bolas (sin sustitución).

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea azul y la segunda roja?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda sea verde?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul o roja?
    e. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea verde dado que la primera no era blanca?

55. Un biólogo desea capturar un tipo especial de rana venenosa que sólo se encuentra en una región del Chocó. Se sabe que de todas las ranas de dicha región sólo el 5 % pertenecen a esta clase. ¿Cuál es la probabilidad de que el biólogo tenga que capturar 10 ranas antes de encontrar el primer ejemplar de la clase deseada?, ¿Cuál es la probabilidad de que el biólogo tenga que capturar 10 ranas antes de encontrar tres

56. Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B, C \in \Im$ con $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.4$ y $P(A \cap C) = 0.2$.

    a. Supóngase que A y B son independientes. Calcular: $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A \mid B)$.
    b. ¿Son los eventos A y C independientes?. Explicar.
    c. Calcular $P(A \cup C^c)$, $P(A \mid C^c)$ y $P(C \mid A)$.

57. Sean A y B eventos con $P(A) > 0$. Demostrar que:

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leq P(A \cup B \mid A)$$

58. Se sabe que si a una persona que padece cierta enfermedad infecto-contagiosa se le realiza determinado examen, entonces la probabilidad de que su condición sea detectada es de 0.9. Se sabe además que si a una persona que no padece de dicha enfermedad se le practica el mismo examen, entonces la probabilidad de que, incorrectamente, se le diagnostique la enfermedad es de 0.01. En una cierta ciudad, el 0.1 % de los habitantes padecen de dicha enfermedad. Si con

    base en el examen, a un individuo de la ciudad se le diagnostica la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo esté realmente enfermo?

59.

    a) Demostrar que si $\Omega \neq \emptyset$ es finito o numerable y si $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra sobre Ω que contiene todos los conjuntos unitarios entonces $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$.
    b) Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes. Demostrar que:

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

60. En una competencia de atletismo participan Andrés, Ramón y Carlos. Por experiencia se sabe que la probabilidad de que Andrés gane es el doble de la de Ramón y la probabilidad de que Ramón gane es el triple que la de Carlos. Calcular las probabilidades de que:

    a. Andrés no gane

c. Carlos gane.

61. De un grupo de 100 estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia se van a contratar 20 para colaborar en la inducción de primiparos. Como todos tienen los mismos méritos, se va a dejar al azar a quién contratar. Suponga que el grupo de los cien estudiantes está compuesto por 20 estudiantes de química, 15 de física, 15 de matemáticas, 12 de estadística, 8 de geología, 18 de biología y 12 de farmacia.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que de los 20 contratados 5 sean de química, 3 de física, 2 de matemáticas, 4 de estadística, 2 de geología, 3 de biología y 1 de farmacia?

   b. Si la Facultad contrató 5 estudiantes de química, 4 de física, 3 de matemáticas, 2 de geología, 4 de biología y 2 de farmacia, tenemos evidencia de que hubo discriminación hacia los estudiantes de estadística?

62. La sangre se clasifica por factores en Rh positivo y Rh negativo y también de acuerdo al tipo. Si la sangre contiene un antígeno A, es de tipo A; si tiene un antígeno B es de tipo B; si tiene ambos antígenos es de tipo AB; si carece de antígenos es de tipo O. En una encuesta a 80 individuos se encontró que 70 tenían Rh positivo, de los cuales 30 con antígeno A, 25 con antígeno B ,5 con ambos antígenos y 10 sin antígenos; de los 10 con Rh negativo, 4 tenían antígeno A, 3 tenían antígeno B, 2 tenían ambos antígenos y 1 carecía de antígenos. Si selecciona al azar una de las 80 personas, calcular la probabilidad de que ella tenga sangre de tipo:

   a. factor Rh+ y tipo A.

   b. factor Rh+ y tipo AB.

   c. factor Rh+ y tipo O.

   d. factor Rh- y tipo B.

   e. factor Rh- y tipo O.

63. Supóngase que se realiza el siguiente experimento aleatorio: se lanza una moneda para la cual la probabilidad de obtener cara es igual a $\frac{2}{3}$. Si el resultado del lanzamiento es cara, entonces se extrae una pelota

Si el resultado del lanzamiento es sello, se extrae una pelota de otra urna que contiene 2 pelotas rojas, 3 verdes y 6 azules. Calcular la probabilidad de extraer una pelota de color rojo.

64. El año marciano tiene 686 días. El marciano ZZ desea hacer una fiesta. ¿Cuántos marcianos debe invitar ZZ para que, con probabilidad mayor a $\frac{1}{2}$,se satisfaga que:

   a. por lo menos dos de ellos tengan cumpleaños el mismo día?

   b. por lo menos uno de los invitados tenga cumpleaños el mismo día que el anfitrión?

65. Supóngase que se selecciona un punto al azar en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. ¿A qué es igual la probabilidad de que el punto seleccionado esté en el triángulo acotado por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$?

66. Sean A, B y C eventos. Demostrar que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$$

67. Sean A_r, $r \geq 1$ eventos tales que $P(A_r) = 1$ para todo $r \geq 1$. Demostrar que

$$P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} A_r\right) = 1$$

68. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad. Para $A, B \in \Im$ se define:

$$d(A, B) := P(A \Delta B)$$

donde $A\Delta B := (A - B) \cup (B - A)$.

¿Es d es una métrica sobre $\Im$? Explicar.

69. Una compañía de seguros posee la siguiente información:

   a. Todos sus clientes aseguran por lo menos un auto.

   b. El 70 % de los clientes aseguran más de un auto.

   c. El 20 % de los clientes aseguran un auto de alta gama.

   d. De todos los clientes que aseguran más de un auto, el 15 % asegura un auto de alta gama.

Calcular la probabilidad de que un cliente, seleccionado al azar, asegure exactamente un auto y que éste no sea un auto de alta gama.

$\alpha = 0.99$

$n \diagdown m$	12	14	16	18	20	24	30	40	60	100
27	2.93	2.82	2.75	2.68	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.22
28	2.90	2.79	2.72	2.65	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.19
29	2.87	2.77	2.69	2.63	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.16
30	2.84	2.74	2.66	2.60	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.13
34	2.76	2.66	2.58	2.51	2.46	2.38	2.30	2.21	2.12	2.04
40	2.66	2.56	2.48	2.42	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.94
50	2.56	2.46	2.38	2.32	2.27	2.18	2.10	2.01	1.91	1.82
70	2.45	2.35	2.27	2.20	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78	1.70
100	2.37	2.27	2.19	2.12	2.07	1.98	1.89	1.80	1.69	1.60
200	2.27	2.17	2.09	2.03	1.97	1.89	1.79	1.69	1.58	1.48
500	2.22	2.12	2.04	1.97	1.92	1.83	1.74	1.63	1.52	1.41

Respuestas a ejercicios seleccionados

Capítulo 1.

1. $A \cap B = \{(c,c,s), (c,s,s)\}$; $A \cup B = \{(c,c,c), (c,s,c), (s,c,s), (s,s,s), (c,c,s), (c,s,s)\}$; $A^c = \{(s,c,c), (s,s,c), (s,c,s), (s,s,s)\}$; $A^c \cap B^c = \{(s,c,c), (s,s,c)\}$; $A \cap B^c = \{(c,s,c), (c,c,c)\}$.

2. $A \cap B \cap C^c$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B^c \cap C^c$; $A \cup B \cup C$;
$E = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$;
$D = E \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C)$.

3. a) $\{(2,2), (2,3), (4,2)\}$ **c)** $\emptyset$

5. a) $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ **b)** $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ **c)** $D = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(A_i \cap A_j^c\right)$ **d)** $E = C \cup D$.

6. a) $E_1 = A \cup B \cup C$
b) $E_2 = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$
c) $E_3 = E_2 \cup (A \cap B \cap C)$
d) $E_4 = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

7. 33 %; 60 %.

9. b) $\sigma(\{2\}, \{3\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$ **c)** Si

10. a) $\alpha = \frac{17}{63}$ **b)** $\frac{46}{63}$; $\frac{45}{63}$; $\frac{35}{63}$

13. No

14. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{9}$.

15. a) $\frac{8}{100}$ **b)** $\frac{4}{100}$ **c)** $\frac{149}{198}$.

16. No.

17. $P(A_k) = \frac{1}{2^k}$, para $k = 1, \cdots, n$.

18. a) $1 - \sum_{j=0}^{10} (-1)^j \binom{7}{j} \left(1 - \frac{j}{7}\right)^{10}$ **b)** 0.37937

21. $\frac{43}{84}$
22. $0.58\overline{3}$
23. 8.3479×10^{-5}
24. $\frac{5}{84}$
25. **a)** 0.5177 **b)** 0.1157 **c)** 0.1975 **d)** $0.\overline{2}$
26. **a)** $1 - p^5 \left(2 - p^2\right)$ **b)** $1 - p^4 \left(2 - p^2\right)$
27. 0.5687 **28.** $1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \simeq e^{-1}$
29. **a)** 6.3×10^{-12} **b)** 0.105
30. 0.09907
31. 0.43925
32. $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}$; 1; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{7}$
33. $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$
34. **a)** 1 **b)** 0.8748 **c)** 0.9318 , R y T no son independientes.
35. **a)** 0.1632 **b)** 6.2645×10^{-2} **c)** 0.85207
36. $\frac{1}{13}$; 0.7159
37. $7.3\,\%$
38. 0.2304
39. 0.205
40. $\frac{8}{13}$
41. 0.43; $\frac{35}{43}$
42. $\frac{5}{9}$
43. $\emptyset$, $\{1,3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$
50. **a)** 0.703704 **b)** 0.25926 **c)** $0.\overline{2}$
51. **a)** 6.12×10^{-3} **b)** 0.9939 **c)** 3.1874×10^{-2}
52. $\frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$
53. **a)** $p = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{12}\right]\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} p = \frac{1}{2}$.
58. 0.0826

Capítulo 2.

1. No
2. $\wp\left(\Omega\right)$
3. $E\left(X\right) = \frac{9}{7}$
4. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{2}{3}$
6. $F_Y\left(y\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < -2 \\ \frac{1}{16} & \text{si} \quad -2 \le y < -1 \\ \frac{5}{16} & \text{si} \quad -1 \le y < 0 \\ \frac{11}{16} & \text{si} \quad 0 \le y < 1 \\ \frac{15}{16} & \text{si} \quad 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si} \quad y \ge 2 \end{cases}$
7. **a)** $S = \{1,2,3\}$ **b)** $P\left(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\},\ X_1 = 3\right) = 0$ y $P\left(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\}\right) = \frac{1}{2}$
8. **a)** 7.5758×10^{-2} **b)** 4.8351×10^{-2}
9. **a)** $c = 1.2$ **c)** 0.25 **d)** 0.710
10. **a)** $c = \frac{2}{3}$ **b)** $F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{3} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **c)** 0.74667
11. **a)** 0 ; 0.9375 **b)** $f_X\left(x\right) = \left(2 - 2x\right)\mathcal{X}_{(0,1)}\left(x\right)$ }
12. **a)** X discreta, Y mixta y Z continua. **b)** 0.5; 0.3; 0.2 **c)** 0.5; 0.75; 0.5 **d)** 0; 0.5; 0.
13. $P\left(X = k\right) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$ para $k = 1, \cdots, n$.
14. **a)** $c = 1$ **b)** $c^{-1} = \ln 2$ **c)** $c^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$ **d)** $c^{-1} = e^2 - 1$
15. **a)** $c = \pi^{-1}$ **b)** $c = 1$
16. **a)** $c = \frac{1}{8}$ **b)** 0.70313
18. **a)** $F_X\left(x\right) = \sum\limits_{k=0}^{[x]} pq^{k-1}$ **b)** $F_X\left(x\right) = \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{n(n+1)(2n+1)}$
19. **a)** $P\left(X = i\right) = \frac{1}{7}$ para $i = 1, \cdots, 7$ **b)** $P\left(X \le 2\right) = \frac{2}{7}$; $P\left(X = 5\right) = \frac{1}{7}$.
20. 0.617
21. $P\left(X = -6000\right) = 0.23333$, $P\left(X = -3000\right) = 0.2$, $P\left(X = 0\right) = 0.025$, $P\left(X = 2000\right) = 0.33333$, $P\left(X = 5000\right) = 0.125$, $P\left(X = 10000\right) = 0.08334$
22. $P\left(X = 0\right) = 0.18$, $P\left(X = 1000\right) = 0.27$, $P\left(X = 1800\right) = 0.27$, $P\left(X = 2000\right) = 0.07$, $P\left(X = 2800\right) = 0.14$, $P\left(X = 3600\right) = 0.07$