Capítulo 2

Variables aleatorias y sus distribuciones

En un experimento aleatorio hay frecuentemente más interés por ciertos valores numéricos que se pueden deducir de los resultados de un experimento aleatorio que por los resultados en sí. Supóngase por ejemplo, que se lanza una moneda corriente seis veces consecutivas y que interesa conocer el número de caras obtenidas. En este caso se tiene que el espacio muestral es igual a:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : a_i \in \{C, S\}, i = 1, \cdots, 6\}.$$

Si se define $X :=$ "número de caras obtenidas", entonces se tiene que X es una aplicación de Ω en $\widetilde{\Omega}$ con $\widetilde{\Omega} = \{1, 2, \cdots, 6\}$. Así por ejemplo, se tiene que $X((C, C, S, C, C, S)) = 4$. La aplicación X es un ejemplo de variable aleatoria, concepto que se precisa a continuación.

Definición 2.1 (variable aleatoria) *Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$ un espacio medible. Una $\Im - \widetilde{\Im}$−variable aleatoria es una aplicación $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ tal que, para todo $A \in \widetilde{\Im}$ se tiene que $X^{-1}(A) \in \Im$. Si $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, entonces, se dice que X es una variable aleatoria real.*

Ejemplo 2.2 *Sean $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\Im = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$, P una medida de probabilidad arbitraria definida sobre $\Im$. Supóngase que $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$ es un espacio medible con $\widetilde{\Omega} = \{a, b\}$ y $\widetilde{\Im} = \wp(\widetilde{\Omega})$. La aplicación $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ dada por:*

$$X(\omega) = \begin{cases} a & si \quad \omega = 1 \\ b & si \quad \omega = 2 \text{ o } \omega = 3 \end{cases}$$

es una $\Im - \widetilde{\Im}$–variable aleatoria, pues:

$$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ X^{-1}(\{a\}) = \{1\},\ X^{-1}(\{b\}) = \{2,3\},\ X^{-1}(\widetilde{\Omega}) = \Omega,$$

en tanto que, la aplicación $Y : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ dada por:

$$Y(\omega) = \begin{cases} a & si \quad \omega = 2 \\ b & si \quad \omega = 1 \text{ o } \omega = 3 \end{cases}$$

no es una $\Im - \widetilde{\Im}$–variable aleatoria pues:

$$Y^{-1}(\{a\}) = \{2\} \notin \Im.$$

Si se toma como σ-álgebra en Ω, a $\Im' = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$, se tiene que Y es una $\Im' - \widetilde{\Im}$–variable aleatoria. ▲

Ejemplo 2.3 *Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad con $\Im = \wp(\Omega)$ y $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$ un espacio medible. Es claro que cualquier aplicación $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ es una $\Im - \widetilde{\Im}$–variable aleatoria.* ▲

Nota 2.4 *Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad arbitrario. Puesto que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}$ es generada por el conjunto de todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, se puede demostrar que una aplicación $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una $\Im$–$\mathcal{B}$ -variable aleatoria, si y sólo si, $X^{-1}((-\infty, x]) \in \Im$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.5 *Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \Im$ fijo. La aplicación $\mathcal{X}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\mathcal{X}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in A \\ 0 & si \quad \omega \notin A \end{cases}$$

es una variable aleatoria real. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}_A(\omega) \leq \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha < 0 \\ A^c & si \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ \Omega & si \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

La aplicación $\mathcal{X}_A$ se llama la función indicadora de A. Otras notaciones de uso frecuente, para esta aplicación, son: I_A y 1_A. ▲

Haciendo uso de las propiedades de la σ–álgebra y de la definición de variable aleatoria real, se puede demostrar que: si X y Y son variables aleatorias reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, y α es una constante real, entonces, $X+Y$, αX, XY, $\frac{X}{Y}$ (si está definida), $\max\{X, Y\}$ y $\min\{X, Y\}$ son también variables aleatorias.

Notación 2.6 *Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en un espacio medible $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$. Se define:*

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \quad \text{con } B \in \widetilde{\Im}$$

Teorema 2.7 *Supóngase que X es una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en el espacio medible $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$. La función P_X definida sobre la σ-álgebra $\widetilde{\Im}$ por medio de:*

$$P_X(B) := P(\{X \in B\}); \text{ para todo } B \in \widetilde{\Im}$$

es una medida de probabilidad sobre $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Im})$ llamada distribución de la variable aleatoria X.

Demostración. *Se debe verificar que P_X satisface las tres condiciones que definen una medida de probabilidad.*

1. *Es claro que para todo $B \in \widetilde{\Im}$, $P_X(B) \geq 0$.*
2. *$P_X(\widetilde{\Omega}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \widetilde{\Omega}\} = P(\Omega) = 1$.*
3. *Sean $A_1, A_2, \cdots$ elementos de $\widetilde{\Im}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Entonces,*

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\left\{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in A_i\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{X \in A_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.8 *Sean $\Omega = \{1,2,3\}, \Im = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ y P dada por:*

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P(\{1\}) &= \frac{1}{5} \\ P(\{2,3\}) &= \frac{4}{5} \\ P(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

Si $\widetilde{\Omega} = \{a, b\}$, $\widetilde{\Im} = \wp(\widetilde{\Omega})$ *y* $X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ *está dada por:*

$$X(\omega) = \begin{cases} a & si \quad \omega = 1 \\ b & si \quad \omega = 2 \quad o \quad \omega = 3 \end{cases}$$

entonces la distribución P_X *de* X *es igual a:*

$$\begin{aligned} P_X(\emptyset) &= 0 \\ P_X(\{a\}) &= P(\{1\}) = \tfrac{1}{5} \\ P_X(\{b\}) &= P(\{2,3\}) = \tfrac{4}{5} \\ P_X(\widetilde{\Omega}) &= 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

De ahora en adelante y mientras no se establezca lo contrario se trabajará con variables aleatorias reales exclusivamente.

Definición 2.9 (función de distribución) *Sea* X *una variable aleatoria real. La función* F_X *definida sobre* $\mathbb{R}$ *por medio de:*

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= P_X((-\infty, x]) \\ &= P(X \leq x) \end{aligned}$$

se llama función de distribución (o de distribución acumulativa) de la variable aleatoria X.

Ejemplo 2.10 *Sean* $(\Omega, \Im, P)$ *un espacio de probabilidad arbitrario y* $A \in \Im$ *fijo. La función de distribución* F *de la variable aleatoria* $\mathcal{X}_A$ *está dada por:*

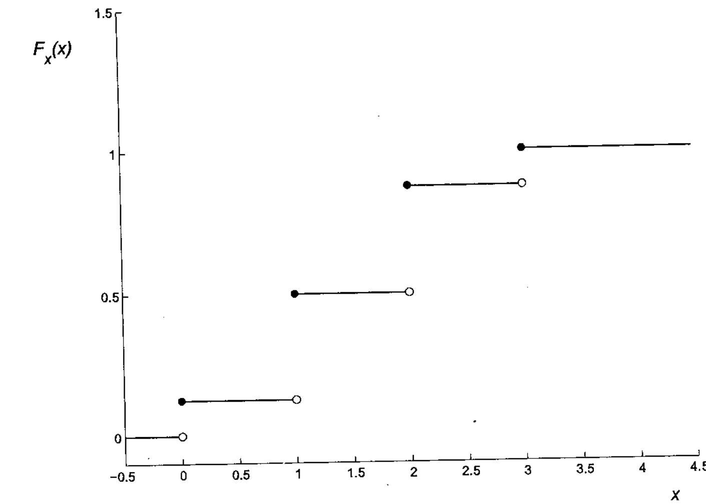
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ P(A^c) & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.11 *Supóngase que se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas y sea* X *la variable aleatoria definida por:*

$$X := \text{“número de caras obtenidas”}$$

En este caso se tiene que la función de distribución de X *es igual a:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$



cuya gráfica indica la figura.

Ejemplo 2.12 *Supóngase que se lanza un dado corriente dos veces consecutivas. Sea* Y *la variable aleatoria dada por:*

$$Y := \text{“diferencia absoluta de los resultados obtenidos”}.$$

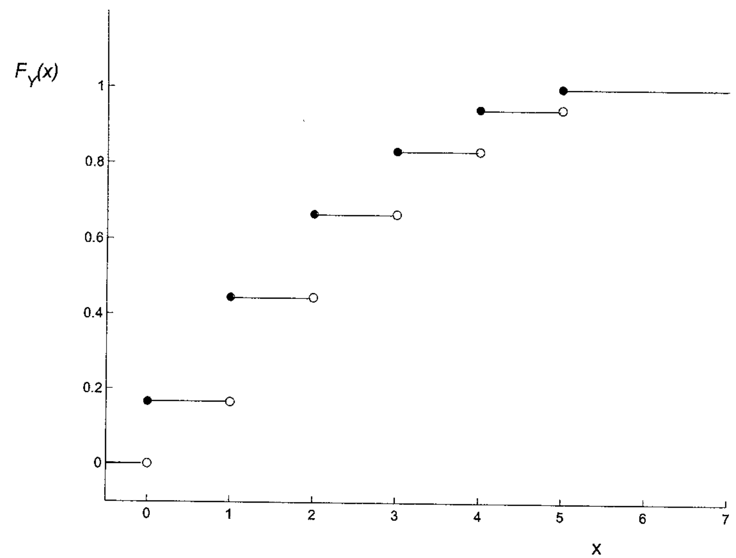
Esto es:

$$Y((x, y)) = |x - y| \qquad con\ x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

en este caso la función de distribución de la variable aleatoria Y *está dada por:*

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{6}{36} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{36} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{24}{36} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{30}{36} & si \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{34}{36} & si \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & si \quad x \geq 5. \end{cases}$$

cuya gráfica se presenta en la figura siguiente:



Un resultado importante de la teoría de la probabilidad, cuya demostración va más allá de los objetivos de estas notas, establece que la distribución P_X de una variable aleatoria real X queda completamente determinada por su función de distribución F_X [Mun]. Es por esto que, en el caso de variables aleatorias reales se acostumbra identificar la distribución de la variable, la cual como se vio anteriormente es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, con su función de distribución.

Se observa en los ejemplos anteriores, que la función de distribución de las variables aleatorias en consideración tienen ciertas características comunes como, por ejemplo: todas ellas son no decrecientes y continuas a derecha, el límite cuando x tiende a ∞, en todos los casos es 1; en tanto que el límite cuando x tiende a $-\infty$, en todos los casos es igual a 0. Estas propiedades son características de toda función de distribución como lo demuestra el teorema siguiente.

Teorema 2.13 *Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \Im, P)$. La función de distribución F_X satisface las siguientes condiciones:*

1. *Si $x \leq y$ entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$*
2. $F_X(x^+) := \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ *para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Demostración.

1. Si $x \leq y$ entonces
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq y\}$$
por lo tanto:
$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F_X(y).$$

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo. Supóngase que $(x_n)_n$ es una sucesión decreciente de números reales cuyo límite es x. Esto es:
$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots > x \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x$$
se observa que:
$$\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \cdots$$
y que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq x\}.$$
Por lo tanto, de las propiedades de la medida de probabilidad P, se sigue que:
$$F_X(x^+) = \lim_{n \to \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq x_n) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

3. Es evidente, que para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface:
$$\{X \leq n\} \subseteq \{X \leq (n+1)\}$$
además
$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\}.$$
Por lo tanto,
$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{n \to \infty} F_X(n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq n) = P(\Omega) = 1.$$

4. Es claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface:

$$\{X \leq -n\} \supseteq \{X \leq -(n+1)\}$$

y que además,

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq -n\}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to \infty} F_X(-n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq -n) = P(\emptyset) = 0.$$

■

Corolario 2.14 *Sean X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \Im, P)$, F_X su función de distribución y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:*

1. $F_X(x^-) := \lim_{h \to 0^+} F_X(x-h) = P(X < x)$
2. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$
3. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
4. $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
5. $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$
6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$
7. Si $P(a < X < b) = 0$ entonces F_X es constante en el intervalo (a, b).

Demostración. Se hacen sólo las demostraciones de los numerales 1. y 2., las demás quedan como ejercicio.

1. Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo. Supóngase que $(x_n)_n$ es una sucesión creciente de números reales cuyo límite es x. Esto es:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots < x \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

es claro que:

$$\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\} \subseteq \cdots$$

y que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X < x\}.$$

Por lo tanto:

$$F_X(x^-) = \lim_{n \to \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq x_n) = P(X < x)$$

2. Puesto que:

$$\Omega = \{X < a\} \cup \{a \leq X \leq b\} \cup \{X > b\}$$

se obtiene:

$$1 = P(X < a) + P(a \leq X \leq b\} + P(X > b).$$

Esto es:

$$P(a \leq X \leq b\} = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

■

Las variables aleatorias se clasifican de acuerdo con su función de distribución. Si la función de distribución F_X, de la variable aleatoria X, es una función escalonada, entonces se dice que X es una variable aleatoria *discreta,* si F_X es continua, entonces, se dice que X es una variable aleatoria *continua,* y si F_X se puede expresar como una combinación lineal de una función escalonada y una función continua, entonces, se dice que X es una variable aleatoria *mixta.*

Ejemplo 2.15 *Sea X una variable aleatoria real cuya función de distribución está dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -\sqrt{2} \\ \frac{3}{5} & si \quad -\sqrt{2} \leq x < \pi \\ 1 & si \quad x \geq \pi \end{cases}$$

entonces, X es una variable aleatoria discreta. Obsérvese que X toma sólo los valores $-\sqrt{2}$ y π con probabilidades $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$ respectivamente. ▲

Ejemplo 2.16 *Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución está dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & si \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

puesto que F_X es una función continua, se tiene que X es una variable aleatoria continua. ▲

Ejemplo 2.17 *Sea X la variable aleatoria cuya función de distribución está dada por:*

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\mathcal{X}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}(1 - e^{-3x})\mathcal{X}_{[0,\infty)}(x),$$

esto es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-3x}) & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Es claro que X es una variable aleatoria mixta. ▲

Nota 2.18 *Si X es una variable aleatoria real continua definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, entonces, $P(X = a) = 0$; para todo $a \in \mathbb{R}$.*

El siguiente teorema garantiza que toda función de distribución puede ser expresada como una combinación lineal de una función de distribución discreta y una continua.

Teorema 2.19 *(**Teorema de descomposición de Jordan**) Toda función de distribución F se puede expresar como una combinación lineal de la forma*

$$F = \alpha F_d + \beta F_c$$

donde α y β son constantes no negativas con $\alpha + \beta = 1$ y donde F_d es un función de distribución discreta y F_c es un función de distribución continua.

Demostración. Supóngase que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función de distribución F es no vacío. Si lo es, la función de distribución F es continua y no habría nada que demostrar. Sean $x_1, x_2, \cdots$ los puntos en los cuales se presentan las discontinuidades de la función de distribución F y sea $p_k := F(x_k) - F(x_k^-)$. Se define:

$$F_d(x) := \alpha^{-1} \sum_{x_k \leq x} p_k$$

con $\alpha := \sum_k p_k$. La función F_d es una función de distribución discreta. Obsérvese que si $\alpha = 1$ entonces F es discreta. Para $\alpha \neq 1$ se define:

$$F_c(x) := \frac{F(x) - \alpha F_d(x)}{\beta}$$

siendo $\beta := 1 - \alpha$. La función F_c es una función de distribución continua y es claro que:

$$F(x) = \alpha F_d(x) + \beta F_c(x)$$

■

Ejemplo 2.20 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & si & 1 \leq x < 2 \\ 1 & si & x \geq 2 \end{cases}$$

En este caso, $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$,

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 1 \\ \frac{2}{3} & si & 1 \leq x < 2 \\ 1 & si & x \geq 2 \end{cases}$$

y

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 1 \\ x - 1 & si & 1 \leq x < 2 \\ 1 & si & x \geq 2 \end{cases}$$

Nota 2.21 *Sea X una variable aleatoria real continua definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. Es claro que $P(X = a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Nota 2.22 *En estas notas se trabajarán básicamente variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas.*

2.1. Variables aleatorias discretas

Las funciones de distribución escalonadas tienen discontinuidades que son llamadas *saltos*. A continuación se establece de manera precisa, dicho concepto.

Definición 2.23 *Sean X una variable aleatoria real y F_X su función de distribución. Se dice que F_X presenta un salto en el punto $a \in \mathbb{R}$ si*

$$F_X(a) - F_X(a^-) \neq 0$$

La diferencia $F_X(a) - F_X(a^-)$ se llama magnitud del salto y por las propiedades desarrolladas anteriormente se tiene que es igual a $P(X = a)$.

Ejemplo 2.24 *En el ejemplo 2.12 se observa que la variable aleatoria Y presenta saltos en los puntos $x = i$ con $i = 0, \cdots, 5$. Las magnitudes de dichos saltos son, $\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ y $\frac{1}{18}$ respectivamente.* ▲

Nota 2.25 *Si X es una variable aleatoria real continua entonces el conjunto de saltos de F_X es el conjunto vacio.*

El resultado siguiente es muy importante pues, garantiza que el número de saltos de una variable aleatoria real discreta es a lo más numerable.

Teorema 2.26 *Sean X una variable real discreta definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y F_X su función de distribución entonces el número de saltos de F_X es a lo más numerable.*

Demostración. [HerA] Puesto que la magnitud de cada salto es un elemento del intervalo $(0,1]$ y la colección de intervalos I_n de la forma

$$I_n = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) \quad \text{con } n = 0, 1, ...$$

forma una partición de $(0,1]$, se tiene que la magnitud de cada salto debe pertenecer a alguno de los intervalos I_n. Como las magnitudes de los saltos son probabilidades, es claro que a lo más hay un salto cuya magnitud está en el intervalo I_0, hay a lo más tres saltos cuya magnitud está en el intervalo I_1, hay a lo más 7 saltos con magnitud en el intervalo I_2 y en general que hay a lo más $(2^{n+1}-1)$ saltos cuya magnitud está en el intervalo I_n. Por lo tanto, como existe un número numerable de intervalos I_n y a lo más $(2^{n+1}-1)$ saltos en el intervalo I_n, se concluye que el número de saltos es a lo más numerable. ■

Del resultado anterior se concluye que el rango de una variable aleatoria real discreta es a lo más un conjunto numerable.

Sea X una variable aleatoria real discreta y supóngase que X toma los valores $x_1, x_2, \cdots$ (todos diferentes). Sea x un número real arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(\bigcup_{x_i \leq x} (X = x_i)\right) \\ &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i). \end{aligned}$$

Esto es, la función de distribución de X queda completamente determinada por los valores p_i con $i = 1, 2 \cdots$ donde $p_i := P(X = x_i)$. Esta observación motiva la definición siguiente:

Definición 2.27 (función de probabilidad) *Sea X una variable aleatoria real discreta con valores $x_1, x_2, \cdots$ (todos diferentes).*

La función f_X, definida sobre $\mathbb{R}$, mediante:

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & si \quad x = x_1, x_2, \cdots \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

se llama función de probabilidad (o función másica de probabilidad) de la variable aleatoria X.

Ejemplo 2.28 *Supóngase que se lanza un dado corriente una vez y sea X la variable aleatoria que indica el resultado obtenido. En este caso se tiene que los posibles valores de X son $1, \cdots, 6$. La función másica de probabilidad de X está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si \quad x = 1, \cdots, 6 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Se ha visto que la función másica de probabilidad, de la variable aleatoria X, determina completamente su función de distribución. Recíprocamente se tiene que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se satisface:

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-),$$

esto es, la función de distribución de la variable aleatoria X, determina completamente su función másica de probabilidad

Ejemplo 2.29 *Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución está dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -2 \\ \frac{1}{7} & si \quad -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} & si \quad \frac{1}{2} \leq x < \sqrt{2} \\ 1 & si \quad x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

En este caso se tiene que la función másica de probabilidad, de la variable aleatoria X, está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & si\ x = -2 \\ \frac{3}{7} & si\ x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & si\ x = \sqrt{2} \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.30 *Sea X una variable aleatoria discreta con función másica de probabilidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{9} & si \quad x = -1 \\ \frac{4}{9} & si \quad x = \frac{3}{2} \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

En este caso se tiene que la función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \frac{5}{9} & si \quad -1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & si \quad x \geq \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

2.2. Variables aleatorias continuas

En el estudio de las variables aleatorias continuas, se hace especial énfasis en las absolutamente continuas, definidas como sigue:

Definición 2.31 (variable aleatoria absolutamente continua) *Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. Se dice que X es absolutamente continua, si y sólo si, existe una función real no negativa e integrable f_X tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se satisface:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \tag{2.1}$$

La función f_X recibe el nombre de función de densidad (f.d.d) de la variable aleatoria X.

Nota 2.32 *La integral dada en (2.1) es una integral de Riemann.*

Nota 2.33 *En la definición de función de densidad, para variables aleatorias absolutamente continuas, se habla de una función de densidad, ya que ésta no es única. De hecho, si $f_X(\cdot)$ es una f.d.d de X, entonces, cualquier función que se obtenga al modificar $f_X(\cdot)$ en un número finito de puntos es también una f.d.d de X.*

Ejemplo 2.34 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La función f_X definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

es una función de densidad de la variable aleatoria X. ▲

Ejemplo 2.35 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Es fácil verificar que la función f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

es una función de densidad de la variable aleatoria X. ▲

Supóngase que X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f_X. A continuación se van a deducir algunas de las propiedades que satisface dicha función.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt &= \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 \end{aligned}$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \\ &= \int_{a}^{b} f_X(x)dx. \end{aligned}$$

Obsérvese que por ser F_X una función continua, la integral anterior es igual también a $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X < b)$, etc. Más aún, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx \tag{2.2}$$

para todo conjunto Borel B. La demostración de este resultado va más allá de los objetivos de este curso. Es necesario aclarar que la integral dada en (2.2) debe ser interpretada como una integral de Lebesgue, pues la integral de Riemann no está definida para todos los conjuntos boreleanos. Sin embargo, si B es un intervalo o una unión de intervalos la integral de Riemann tiene sentido, lo cual, para efectos prácticos, es suficiente.

Finalmente, para todo $x \in \mathbb{R}$, donde F_X sea derivable, se satisface:

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x).$$

Esta última propiedad implica que, para $\Delta x \approx 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} P\left(x - \Delta x < X \leq x + \Delta x\right) &= F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x) \\ &\approx 2\Delta x f_X(x) \end{aligned}$$

esto es, la probabilidad de que X esté en un intervalo de longitud pequeña alrededor de x es igual a la función de densidad de X evaluada en x, multiplicada por la longitud del intervalo.

Cuando sea claro del contexto a qué variable aleatoria se hace referencia, se suprimirá el subíndice X tanto en la función de distribución como en la de densidad.

Ejemplo 2.36 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(2-x) & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Determinar:

1. *El valor de α.*
2. *La función de distribución de la variable aleatoria X.*
3. *$P(-1 \leq X \leq \frac{1}{2})$.*

Solución:

1. Puesto que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \alpha \int_0^2 (2x - x^2)dx = \alpha\frac{4}{3}$$

se obtiene que $\alpha = \frac{3}{4}$.

2.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{3}{4}\int_0^x (2t - t^2)dt & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2(3-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P\left(-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= F(\frac{1}{2}) - F(-1) \\ &= \frac{5}{32}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.37 *Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución está dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1+x)e^{-x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

1. *Determinar una función de densidad X.*
2. *Calcular $P(X \leq \frac{1}{3})$.*

Solución:

1.

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

2.

$$
\begin{aligned}
P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) &= F(\frac{1}{3}) \\
&= 1 - \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} \\
&= 4.4625 \times 10^{-2}. \quad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

2.3. Distribución de una función de una variable aleatoria

Supóngase que X es una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y sea g una función tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \Im, P)$. Interesa determinar (si es posible) la función de distribución de la variable aleatoria Y en términos de la función de distribución de la variable aleatoria X.

Para indicar el procedimiento se analizarán algunos casos particulares.

Ejemplo 2.38 *Sea X una variable aleatoria discreta con distribución dada por:*

x	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Sea $Y = X^2$. Se observa que los posibles valores de Y son $0, 1, 4$ y 9. Además:

y	0	1	4	9
$P(Y = y)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Las correspondientes funciones de distribución de X y de Y son:

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \frac{1}{7} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{7} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{7} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{7} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}
$$

y

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y < 0 \\ \frac{2}{7} & si \quad 0 \leq y < 1 \\ \frac{4}{7} & si \quad 1 \leq y < 4 \\ \frac{6}{7} & si \quad 4 \leq y < 9 \\ 1 & si \quad y \geq 9. \quad \blacktriangle \end{cases}
$$

Ejemplo 2.39 *Sea X una variable aleatoria real discreta o continua. Sea $Y := aX + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Es claro que:*

$$
\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P(aX + b \leq x) \\
&= \begin{cases} P(X \leq \frac{x-b}{a}) & si \quad a > 0 \\ P(X \geq \frac{x-b}{a}) & si \quad a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_X(\frac{x-b}{a}) & si \quad a > 0 \\ 1 - F_X((\frac{x-b}{a})^-) & si \quad a < 0. \quad \blacktriangle \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.40 *Sea X una variable aleatoria real con función de densidad dada por:*

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}
$$

Sea $Y = |X|$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= \begin{cases} P(|X| \leq y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} P(-y \leq X \leq y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, una función de densidad de la variable aleatoria Y está dada *por:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \le 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & si \quad 0 < y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases} \blacktriangle$$

Ejemplo 2.41 *Sea X una variable aleatoria real con función de densidad dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Sea $Y = e^X$. En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= \begin{cases} P(X \le \ln y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \le 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\ln y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una función de densidad de la variable aleatoria Y está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(\ln y) & si \quad y > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{y} & si \quad 0 < \ln y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases} \blacktriangle \end{aligned}$$

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 2.42 *Sea X una variable aleatoria real absolutamente continua, con función de densidad f_X. Si h es una función estrictamente monótona y diferenciable, entonces, una función de densidad de la variable aleatoria $Y = h(X)$ está dada por:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| & si \quad y = h(x) \quad para\ algún\ x \\ 0 & si \quad y \ne h(x) \quad para\ todo\ x \end{cases}$$

donde $h^{-1}(\cdot)$ es la inversa de $h(\cdot)$.

Demostración. Supóngase que h es una función estrictamente creciente y sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$ para algún x. Entonces:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(h(X) \le y) \\ &= P(X \le h^{-1}(y)) \\ &= F_X(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

diferenciando se obtiene:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h^{-1}(y)) \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \\ &= f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| \end{aligned}$$

pues la derivada de h es positiva. Sean h una función estrictamente decreciente y $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$ para algún x. Entonces:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(h(X) \le y) \\ &= P(X \ge h^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(h^{-1}(y)). \end{aligned}$$

diferenciando se obtiene:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -f_X(h^{-1}(y)) \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \\ &= f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| \end{aligned}$$

pues en este caso la derivada de h es negativa. Si $y \in \mathbb{R}$ es tal que $y \ne h(x)$ para todo x, entonces, $F_Y(y) = 0$ o $F_Y(y) = 1$, esto es, $f_Y(y) = 0$. ■

2.4. Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria real. Se sabe que sus propiedades de tipo probabilístico están determinadas por su función de distribución $F_X(\cdot)$. Sin embargo, interesa conocer un par de valores que "resuman" en cierta forma dicha información. Por ejemplo, se quiere definir un "promedio" de los valores asumidos por X y una cantidad que "mida" que tanto varían los valores de X con respecto a ese valor. Esta información estará dada por dos valores reales llamados esperanza (media, valor esperado) y varianza de la variable aleatoria, respectivamente. A continuación se precisan estos conceptos.

Definición 2.43 (valor esperado) *Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$.*

1. *Si X es una variable aleatoria discreta, con valores $x_1, x_2, \cdots$, se dice que X posee un valor esperado si:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, P(X = x_k) < \infty.$$

En tal caso, se define el valor esperado $E(X)$ (esperanza matemática, media) de X como:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k).$$

2. *Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X, se dice que X posee un valor esperado si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)dx < \infty.$$

En tal caso se define el valor esperado $E(X)$ (esperanza matemática, media) de X como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx.$$

Nota 2.44 *Si X es una variable aleatoria real que toma sólo un número finito de valores, entonces $E(X)$ existe siempre.*

Ejemplo 2.45 *Supóngase que se lanza un dado corriente una vez y sea X la variable aleatoria que denota el resultado obtenido. Es claro que:*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} = \frac{21}{6}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.46 *Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad arbitrario y $A \in \Im$ fijo. Se sabe que $X := \mathcal{X}_A$ es una variable aleatoria discreta que toma sólo los valores 0 y 1 con probabilidades $P(A^c)$ y $P(A)$ respectivamente. Por lo tanto $E(X)$ existe y es igual a $P(A)$.* ▲

Ejemplo 2.47 *Sea X una variable discreta con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3}\frac{3^x}{x!} & si \quad x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-3} \frac{3^k}{k!} \\ &= e^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3^{j+1}}{j!} \\ &= 3e^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3^j}{j!} \\ &= 3e^{-3} e^{3} = 3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.48 *Sea X una variable aleatoria con f.d.d dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}.$$

puesto que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx = \int_{0}^{\infty} 2xe^{-2x} = \frac{1}{2}.$$

se concluye que, el valor esperado de X existe y es igual a $\frac{1}{2}$. ▲

Ejemplo 2.49 *Sea X una variable aleatoria con valores en $\mathbb{Z}$. Supónga:*

$$P(X = j) = \begin{cases} \frac{c}{j^2} & si \quad j \neq 0 \\ 0 & si \quad j = 0 \end{cases}$$

donde $c > 0$ es una constante tal que

$$\sum_{j} \frac{c}{j^2} = 1.$$

puesto que:

$$\sum_j |j|\, P(X=j) = \infty,$$

$E(X)$ no existe. ▲

Ejemplo 2.50 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}; \quad si\ x \in \mathbb{R}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2+x^2}dx = \infty,$$

es decir $E(X)$ no existe. ▲

El resultado siguiente permite hallar el valor esperado de una variable aleatoria absolutamente continua a partir de su función de distribución.

Lema 2.51 *Sea Y una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f. Si $E(Y)$ existe, entonces:*

$$E(Y) = \int_0^{\infty} [1 - F_Y(y)]dy - \int_0^{\infty} F_Y(-y)dy.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx \\
&= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{x} dy\right) f(x)dx - \int_{-\infty}^{0}\left(\int_0^{-x} dy\right) f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f(x)dxdy - \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{-y} f(x)dxdy \\
&= \int_0^{\infty} P(Y>y)dy - \int_0^{\infty} P(Y\le -y)dy \\
&= \int_0^{\infty} [1-F_Y(y)]dy - \int_0^{\infty} F_Y(-y)dy.
\end{aligned}$$

Supóngase que X es una variable aleatoria y que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria cuyo valor esperado existe. Es claro que, para calcular $E(Y)$, se necesita hallar la función de densidad f_Y de Y. Este proceso puede ser complicado, afortunadamente existe un método, que permite hacer los cálculos de una manera más sencilla, conocido como *"ley del estadístico inconsciente"*. Dicho método se presenta en el lema siguiente.

Lema 2.52 *Sea X una variable aleatoria real y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Entonces:*

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x)P(X=x) & si\quad X \text{ es una variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx & si\quad \begin{array}{l} X \text{ es una variable aleatoria} \\ \text{absolutamente continua con} \\ \text{f.d.d } f_X \end{array} \end{cases}$$

siempre y cuando la suma, en el caso discreto, o la integral, en el caso continuo, converjan absolutamente.

Demostración.

1. Supóngase que X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \cdots$. En este caso la variable aleatoria $Y = g(X)$ toma los valores $g(x_1), g(x_2), \cdots$. Es claro que algunos de esos valores pueden ser iguales. Se va a suponer que y_j con $j \geq 1$, representan los diferentes valores de $g(x_i)$. Entonces agrupando todos los $g(x_i)$ que tengan el mismo valor se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_i g(x_i)P(X=x_i) &= \sum_j \sum_{\{i:g(x_i)=y_j\}} g(x_i)P(X=x_i) \\
&= \sum_j y_j \sum_{\{i:g(x_i)=y_j\}} P(X=x_i) \\
&= \sum_j y_j P(g(X)=y_j) \\
&= \sum_j y_j P(Y=y_j) \\
&= E(Y) = E(g(X)).
\end{aligned}$$

puesto que:

$$\sum_j |j| \, P(X = j) = \infty,$$

$E\,(X)$ *no existe.* ▲

Ejemplo 2.50 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}; \quad si\ x \in \mathbb{R}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f(x)dx = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2} dx = \infty,$$

es decir $E\,(X)$ no existe. ▲

El resultado siguiente permite hallar el valor esperado de una variable aleatoria absolutamente continua a partir de su función de distribución.

Lema 2.51 *Sea Y una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f. Si $E\,(Y)$ existe, entonces:*

$$E\,(Y) = \int_0^{\infty} [1 - F_Y(y)]dy - \int_0^{\infty} F_Y(-y)dy.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E\,(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} x f(x)dx + \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} dy \right) f(x)dx - \int_{-\infty}^{0} \left(\int_0^{-x} dy \right) f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f(x)dxdy - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-y} f(x)dxdy \\
&= \int_0^{\infty} P(Y > y)dy - \int_0^{\infty} P(Y \leq -y)dy \\
&= \int_0^{\infty} [1 - F_Y(y)]dy - \int_0^{\infty} F_Y(-y)dy.
\end{aligned}$$

Supóngase que X es una variable aleatoria y que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria cuyo valor esperado existe. Es claro que, para calcular $E\,(Y)$, se necesita hallar la función de densidad f_Y de Y. Este proceso puede ser complicado, afortunadamente existe un método, que permite hacer los cálculos de una manera más sencilla, conocido como *"ley del estadístico inconsciente"*. Dicho método se presenta en el lema siguiente.

Lema 2.52 *Sea X una variable aleatoria real y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $Y = g(X)$ es una variable aleatoria. Entonces:*

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x)P(X = x) & si \quad X \text{ es una variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx & si \quad \begin{array}{l} X \text{ es una variable aleatoria} \\ \text{absolutamente continua con} \\ \text{f.d.d } f_X \end{array} \end{cases}$$

siempre y cuando la suma, en el caso discreto, o la integral, en el caso continuo, converjan absolutamente.

Demostración.

1. Supóngase que X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \cdots$. En este caso la variable aleatoria $Y = g(X)$ toma los valores $g(x_1), g(x_2), \cdots$. Es claro que algunos de esos valores pueden ser iguales. Se va a suponer que y_j con $j \geq 1$, representan los diferentes valores de $g(x_i)$. Entonces agrupando todos los $g(x_i)$ que tengan el mismo valor se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_i g(x_i)P(X = x_i) &= \sum_j \sum_{\{i : g(x_i) = y_j\}} g(x_i)P(X = x_i) \\
&= \sum_j y_j \sum_{\{i : g(x_i) = y_j\}} P(X = x_i) \\
&= \sum_j y_j P(g(X) = y_j) \\
&= \sum_j y_j P(Y = y_j) \\
&= E\,(Y) = E(g(X)).
\end{aligned}$$

2. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f_X. Supóngase que g es una función no negativa, entonces:

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_0^\infty P(g(X) > y)dy - \int_0^\infty P(g(X) \leq -y)dy \\ &= \int_0^\infty P(g(X) > y)dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_B f_X(x)dx \right) dy \end{aligned}$$

donde $B := \{x : g(x) > y\}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_0^\infty \int_0^{g(x)} f_X(x)dydx \\ &= \int_0^\infty g(x)f_X(x)dx. \end{aligned}$$

La demostración del caso general requiere de resultados que van más allá de los objetivos de estas notas. El lector interesado puede consultar el texto de R. Ash [Ash].

■

Ejemplo 2.53 *Sea X una variable con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E\left(X^3\right) &= \int_{-\infty}^\infty x^3 f(x)dx \\ &= \int_0^1 2x^4 dx \\ &= \frac{2}{5}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes del valor esperado de una variable aleatoria.

Teorema 2.54 *Sea X una variable aleatoria real.*

1. *Si $P(X \geq 0) = 1$ y $E(X)$ existe, entonces, $E(X) \geq 0$.*

2. *$E(\alpha) = \alpha$; para cada constante α.*

3. *Si X es acotada, esto es, si existe una constante real $M > 0$ tal que $P(|X| \leq M) = 1$, entonces, $E(X)$ existe.*

4. *Si α y β son constantes y si g y h son funciones, tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen, entonces el valor esperado de $(\alpha g(X) + \beta h(X))$ existe y*

$$E(\alpha g(X) + \beta h(X)) = \alpha E(g(X)) + \beta E(h(X)).$$

5. *Si g y h son funciones tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen y si $g(x) \leq h(x)$ para todo x, entonces*

$$E(g(X)) \leq E(h(X)).$$

En particular se tiene que:

$$|E(X)| \leq E(|X|)$$

Demostración.

1. Supóngase que X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \cdots$. Como $P(X < 0) = 0$, se tiene que $P(X = x_j) = 0$ para todo $x_j < 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i P(X = x_i) \\ &= \sum_{i:x_i \geq 0} x_i P(X = x_i) \geq 0 \end{aligned}$$

Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f, entonces,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx - \int_0^\infty F_X(-x)dx \\ &= \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx \\ &= \int_0^\infty P(X > x)dx \geq 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \alpha P(X = \alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

3. Si X es una variable aleatoria discreta que toma valores $x_1, x_2, \cdots$, enton-ces, como $P(|X| > M) = 0$ se puede suponer que $\{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq [-M, M]$. Por lo tanto,

$$\sum_i |x_i| P(X = x_i) \le M \sum_i P(X = x_i) = M < \infty$$

Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f entonces, como $P(|X| > M) = 0$, se puede suponer que $f(x) = 0$ para todo $x \notin [-M, M]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx &= \int_{-M}^{M} |x| f(x)dx \\ &\le M \int_{-M}^{M} f(x)dx = M < \infty \end{aligned}$$

4. Se hace la demostración para el caso continuo. El caso discreto queda como ejercicio. Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha g(x) + \beta h(x)| f(x)dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} |ag(x)| f(x)dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} |\beta h(x)| f(x)dx \\ &= |\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)dx \\ &\quad + |\beta| \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x)dx < \infty. \end{aligned}$$

Luego el valor esperado de $(\alpha g(X) + \beta h(X))$ existe y es claro que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha g(x) + \beta h(x)] f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [ag(x)] f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} [\beta h(x)] f(x)dx \\ &= \alpha E(g(X)) + \beta E(h(X)). \end{aligned}$$

5. Se hace la demostración para el caso continuo. El caso discreto queda como ejercicio. Supóngase que X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f. Entonces,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \le \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx = E(h(X)).$$

Ahora bien, puesto que

$$-|X| \le X \le |X|$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} E(-|X|) &\le E(X) \le E|X| \\ -E|X| &\le E(X) \le E|X| \end{aligned}$$

esto es:

$$|E(X)| \le E|X|$$

■

El valor esperado de una variable aleatoria es el "primer momento central" de la variable alrededor de cero. En general, se tiene que los momentos centrales alrededor de cero de una variable aleatoria, son los valores esperados de las potencias de la variable. Más precisamente:

Definición 2.55 (momento central alrededor de *cero*) *Sea X una variable aleatoria real. El $r-$ésimo momento central de X alrededor de cero, denotado por μ_r', se define como sigue:*

$$\mu_r' := E(X^r)$$

siempre y cuando el valor esperado exista.

El resultado siguiente permite afirmar que si $s < r$ y μ_r' existe, entonces μ_s' existe.

Lema 2.56 *Sea X una variable aleatoria tal que μ_r' existe, entonces, μ_s' existe para todo $s < r$.*

Demostración. *Se hace la demostración para el caso continuo. El caso discreto queda como ejercicio para el lector. Puesto que*

$$|x|^s < 1 + |x|^r \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f_X(x)dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} [1+|x|^r] f_X(x)dx \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f_X(x)dx < \infty.\end{aligned}$$

■

Definición 2.57 (momento central alrededor de la media) *Sea X una variable aleatoria real cuyo valor esperado existe. El $r-$ésimo momento central de X alrededor de $E(X)$ se define como:*

$$\mu_r := E([X - E(X)]^r)$$

siempre y cuando el valor esperado exista.

El resultado siguiente permite relacionar los momentos de orden r, alrededor de la media, con los momentos de orden r, alrededor del origen.

Lema 2.58 *Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado existe. Si μ_r existe, entonces,*

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \mu_k'(-\mu_1')^{r-k}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mu_r &= E(X - E(X))^r \\ &= E(X - \mu_1')^r \\ &= E(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} X^k(-\mu_1')^{r-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} E(X^k)(-\mu_1')^{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \mu_k'(-\mu_1')^{r-k}.\end{aligned}$$

■

Se observa que para cualquier variable aleatoria, cuyo valor esperado existe, se satisface que $\mu_0 = 1$ y $\mu_1 = 0$. El segundo momento central de X, alrededor de su media, recibe el nombre de *varianza* de la variable

aleatoria X y se denota generalmente por σ_X^2; la raíz cuadrada de la varianza se llama *desviación estándar* de X y se denota usualmente por σ_X. Otras notaciones de uso frecuente para la varianza de X son: $Var(X)$ y $V(X)$. En este texto se usará indistintamente cualesquiera de ellas.

La varianza mide la dispersión de los valores de la variable alrededor de su media. El término $(X - E(X))^2$ es el cuadrado de la distancia de X a $E(X)$ y por lo tanto $E(X - E(X))^2$ representa el promedio de los cuadrados de las distancias de cada valor de X a $E(X)$. Luego si una variable aleatoria tiene una varianza pequeña los valores posibles de X están próximos a la media, en tanto que si X tiene una varianza grande los valores de X tienden a estar lejos de la media.

En las aplicaciones, ver [Osp] se acostumbra a utilizar una medida de dispersión relativa, llamada coeficiente de variación , definida como:

$$CV(X) := \frac{\sigma_X}{E(X)}; \text{ si } E(X) \neq 0.$$

Cuando $|E(X)|$ no está próximo a cero, se usa $CV(X)$ como un indicador de qué tan grande es la varianza. Empíricamente, se ha observado, que cuando $|CV(X)| < 0.1$ la varianza, por lo general, no es grande.

A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes de la varianza de una variable aleatoria.

Teorema 2.59 *Sean X una variable aleatoria, cuyo valor esperado existe, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Entonces:*

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(\alpha) = 0$
3. $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$
4. $Var(X + \beta) = Var(X)$
5. $Var(X) = 0$, *si y sólo si,* $P(X = E(X)) = 1$.

Demostración.

1. Es claro a partir de la definición de varianza y de las propiedades del valor esperado.
2. $$Var(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2 = E(0) = 0$$

3.

$$\begin{aligned} Var(\alpha X) &= E[\alpha X - E(\alpha X)]^2 \\ &= E(\alpha X - \alpha E(X))^2 \\ &= \alpha^2 E(X - E(X))^2 \\ &= \alpha^2 Var(X) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} Var(X+\beta) &= E[(X+\beta) - E(X+\beta)]^2 \\ &= E[X + \beta - E(X) - \beta]^2 \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

5.

a) Si $X = E(X)$ con probabilidad 1, es claro que $Var(X) = 0$.

b) Supóngase que $Var(X) = 0$, y sea $a := E(X)$. Si $P(X = a) < 1$ entonces, existe $c > 0$ tal que

$$P((X-a)^2 > c) > 0.$$

puesto que

$$(x-a)^2 \geq c\mathcal{X}_{\{(x-a)^2 > c\}}$$

entonces

$$\begin{aligned} E(X-a)^2 &\geq E(c\mathcal{X}_{\{(X-a)^2>c\}}) \\ Var(X) &\geq cE(\mathcal{X}_{\{(X-a)^2>c\}}) \\ Var(X) &\geq cP((X-a)^2 > c) > 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $P(X = E(X)) = 1$.

■

Para el cálculo de la varianza de una variable aleatoria resulta muy útil el resultado siguiente.

Lema 2.60 *Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado existe. Entonces:*

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Demostración.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E((EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.61 *Supóngase que se lanza un dado corriente una vez y sea X la variable aleatoria que denota el resultado obtenido. Se sabe que $E(X) = \frac{21}{6}$ y como*

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} k^2 = \frac{91}{6},$$

entonces,

$$Var(X) = \frac{35}{12} \approx 2.92. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.62 *Sea X como en el ejemplo 2.46, entonces:*

$$E(X^2) = P(X = 1) = P(A).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Var(X) &= P(A) - [P(A)]^2 \\ &= P(A)P(A^c). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.63 *Sea X como en el ejemplo 2.47, en este caso:*

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-3} \frac{3^k}{k!} \\ &= e^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{3^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{3^{j+1}}{j!} \\ &= e^{-3}[9e^3 + 3e^3] \\ &= 12. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = 12 - 9 = 3. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.64 *Sea X como en 2.48. Entonces:*

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x} dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto:

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2.65 *La calificación promedio en una prueba estadística fue de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor sospecha que el examen fue difícil y por lo tanto desea ajustar las calificaciones de manera que el promedio sea 70 y la desviación estándar 8. Si X representa la calificación obtenida por los estudiantes en la prueba. ¿Qué ajuste del tipo $\alpha X + \beta$ debe utilizar?*

Solución: En este caso se tiene que $E(X) = 62.5$ y que $Var(X) = 100$.
Sea $Y = \alpha X + \beta$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
70 &= E(Y) = \alpha E(X) + \beta = 62.5\alpha + \beta \\
64 &= Var(Y) = \alpha^2 Var(X) = 100\alpha^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$|\alpha| = \frac{4}{5}$$

de donde se deduce que hay dos posibles ajustes del tipo pedido:

$$Y = \frac{4}{5}X + 20$$

o

$$Y = -\frac{4}{5}X + 120. \quad \blacktriangle$$

Los momentos de una variable aleatoria X desempeñan un papel muy importante en la estadística tanto teórica como aplicada, por ello resulta muy conveniente tener un mecanismo que permita calcular fácilmente, en lo posible, los momentos de una variable aleatoria. Este mecanismo es proporcionado por la llamada función generadora de momentos, la cual se define a continuación.

Definición 2.66 (función generadora de momentos) *Sea X una variable aleatoria tal que $E(e^{tX})$ es finito para todo $t \in (-\alpha, \alpha)$, con α real positivo. Se define la función generadora de momentos de X, denotada por $m_X(\cdot)$ como:*

$$m_X(t) = E(e^{tX}); \quad \text{con } t \in (-\alpha, \alpha).$$

Esto es:

$$
m_X(t) = \begin{cases}
\sum_k e^{tx_k} P(X = x_k) & \text{si} \quad X \text{ es una v.a discreta con valores } x_1, x_2, x_3, \cdots \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{si} \quad X \text{ es una v.a continua con función de densidad } f
\end{cases}
$$

Es importante observar que no todas las distribuciones de probabilidad tienen asociada una función generadora de momentos (f.g.m). Más adelante se darán algunos ejemplos que ratifican esta afirmación.

Antes de dar las propiedades más importantes de la f.g.m, de una variable aleatoria X, se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 2.67 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada por:*

$$
f(x) = \begin{cases}
\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si} \quad x = 0, 1, \cdots, n \\
0 & \text{en otro caso}
\end{cases}
$$

donde n es un entero positivo y $p \in (0,1)$. En este caso:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (pe^t + q)^n \quad \text{donde } q := 1 - p. \quad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

Nota 2.68 *La distribución dada en el ejemplo 2.67 recibe el nombre de distribución binomial de parámetros n y p. En el próximo capítulo se estudiará esta distribución en detalle.*

Ejemplo 2.69 *Sea X la variable aleatoria dada en 2.47. En este caso:*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-3} \frac{3^k}{k!} \\ &= e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-3} \exp(3e^t) \\ &= \exp(3(e^t - 1)). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.70 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Es claro que:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} 2e^{-2x} dx \\ &= (1 - \frac{t}{2})^{-1}; \quad con \ \ t < 2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.71 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}]^2\} & si \quad x > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son constantes. Entonces:

$$E(e^{tX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \exp\{tx - \frac{1}{2}[\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}]\} dx$$

haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{te^{\mu+\sigma u} - \frac{u^2}{2}\right\} du \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{te^{\mu+\sigma u} - \frac{u^2}{2}\right\} du \end{aligned}$$

como $\exp(\sigma u) > \frac{(\sigma u)^3}{3!}$ se deduce que para $t > 0$

$$te^{\mu+\sigma u} - \frac{u^2}{2} > \frac{u^2}{2}\left[\frac{te^{\mu}\sigma^3}{3} u - 1\right].$$

Por lo tanto, si se toma $u > \frac{6}{te^{\mu}\sigma^3}$ se obtiene que:

$$\left[\frac{te^{\mu}\sigma^3}{3} u - 1\right] > 1$$

y en consecuencia tomando

$$a = \frac{6}{te^{\mu}\sigma^3}$$

se obtiene:

$$E(e^{tX}) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \exp(\frac{u^2}{2}) du = \infty,$$

es decir, no existe una vecindad del origen en la que $E(e^{tX})$ sea finito y en consecuencia la función generadora de momentos de X no existe. $\blacktriangle$

La existencia de la función generadora de momentos de una v.a X garantiza la existencia de todos los momentos de orden r alrededor de cero de X. Es más, si la función generadora de momentos existe, entonces, es diferenciable en una vecindad del origen y se satisface que:

$$\left.\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)\right|_{t=0} = E(X^r).$$

Más precisamente se tienen los dos teoremas siguientes, cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [Her].

Teorema 2.72 *Si X es una variable aleatoria cuya función generadora de momentos existe, entonces $E(X^r)$ existe para toda $r \in \mathbb{N}$*

Es importante aclarar que el recíproco del teorema anterior no es válido: el hecho de que existan todos los momentos de orden r de una v.a X no garantiza la existencia de la f.g.m de la variable. Por ejemplo, para la v.a dada en el ejemplo 2.71, se tiene que, para toda $r \in \mathbb{N}$:

$$E(X^r) = \exp\left\{r\mu + \frac{(r\sigma)^2}{2}\right\}.$$

Teorema 2.73 *Si X es una variable aleatoria cuya función generadora de momentos $m_X(.)$ existe, entonces, existe $h \in (0, \infty)$ tal que:*

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}; \quad \textit{para todo } t \in (-h, h)$$

y por lo tanto,

$$E(X^r) = \left. \frac{d^r}{dt^r} m_X(t) \right|_{t=0}$$

Una propiedad muy importante de la f.g.m de una variable aleatoria es que, cuando existe, ella caracteriza la distribución de la variable. Más precisamente se tiene el teorema siguiente cuya demostración va más allá de los objetivos de estas notas. El lector interesado puede consultar [Ash]

Teorema 2.74 *Sean X y Y variables aleatorias cuyas funciones generadoras de momentos existen. Si*

$$m_X(t) = m_Y(t); \ \textit{para todo } t,$$

entonces, X y Y tienen la misma distribución.

Como se ve, la función generadora de momentos de una variable aleatoria, cuando existe, es una herramienta muy útil para calcular los momentos de orden r alrededor de cero, de la variable. Desafortunadamente esta función no siempre existe, por esto, se hace necesario introducir una nueva clase de funciones que son igualmente útiles y que siempre existen.

Definición 2.75 *Sea X una variable aleatoria. La función característica de X es la función $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:*

$$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX); \quad \textit{donde } i = \sqrt{-1}.$$

Ejemplo 2.76 *Sea X una variable aleatoria con*

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{2}(\cos t + \cos(-t)) + \frac{i}{2}(\sin t + \sin(-t)) \\ &= \cos t. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ejemplo 2.77 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada en el ejemplo 2.47. Entonces:*

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-3}\frac{3^k}{k!} \\ &= e^{-3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3e^{it})^k}{k!} \\ &= e^{-3}\exp(3e^{it}) \\ &= \exp[3(e^{it} - 1)]. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ejemplo 2.78 *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{en} \quad \textit{otro caso} \end{cases}$$

Entonces, para $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_0^1 \cos(tx)dx + i\int_0^1 \sin(tx)dx \\ &= \frac{1}{t}(\sin t - i\cos t + i) \\ &= \frac{1}{it}(e^{it} - 1)\end{aligned}$$

y para $t = 0$

$$\varphi_X(0) = E(e^0) = 1. \quad \blacktriangle$$

Se presentan a continuación, sin demostración, las principales propiedades de la función característica. El lector interesado puede consultar las demostraciones en [Gri] y [Her].

Teorema 2.79 *Si X es una variable aleatoria discreta o absolutamente continua entonces $E(e^{itX})$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2.80 *Sea X una variable aleatoria. La función característica $\varphi_X(.)$ de X satisface:*

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$ *para todo* t.

3. Si $E\left(X^k\right)$ existe entonces:

$$\frac{d^k}{dt^k}\varphi_X(t)\mid_{t=0}= i^k E\left(X^k\right).$$

Por último, es importante observar que la función característica de una variable aleatoria, al igual que la f.g.m. (cuando ésta existe), determina la distribución de la variable. Esto es, se satisface:

Teorema 2.81 *Si X y Y son variables aleatorias y*

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t); \text{ para todo } t,$$

entonces, X y Y tienen la misma distribución.

2.5. Ejercicios

1. Sean $\Omega = \{1,2,3\}$, $\Im = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$. Para $A \in \Im$ se define

$$P(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A \\ 0 & \text{si } 1 \notin A \end{cases}$$

¿Es $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $X(\omega) = \omega^2$ una variable aleatoria real? Justificar.

2. Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Determinar la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual $X(\omega) := \omega + 1$ es una variable aleatoria real.

3. Se carga una moneda de tal manera que $P(C) = \frac{3}{7}$ y $P(S) = \frac{4}{7}$. Supóngase que se lanza la moneda tres veces consecutivas y sea X la variable aleatoria que indica el número de caras obtenidas. Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X y calcular $E(X)$.

4. El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\Omega = \{a,b,c,d,e,f\}$ y cada resultado es igualmente probable. Se define una variable aleatoria X como sigue:

ω	a	b	c	d	e	f
$X(\omega)$	0	0	1.5	1.5	2	3

Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(X = 1.5)$.

b) $P(|X-1| \leq 1.5)$.

c) $P(X \geq 0 \ \vee \ X < 2)$.

5. Demostrar que si todos los valores de una variable aleatoria real X están en el intervalo $[a,b]$ con $a < b$, entonces $F_X(x) = 0$ para todo $x < a$ y $F_X(x) = 1$ para todo $x \geq b$.

6. Se lanza una moneda corriente cuatro veces consecutivas. Sea X la variable aleatoria que denota el número de caras obtenidas. Hallar y graficar la función de distribución de la variable aleatoria $Y := X - 2$.

7. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad definido como sigue:

$$\Omega := \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}, \ \Im := \wp(\Omega) \text{ y } P(\omega) := \frac{1}{3}$$

para todo $\omega \in \Omega$. Considérense las variables aleatorias X_n definidas sobre Ω, por:

$$X_n(\omega) = \omega_n \text{ para } n = 1,2,3 \text{ y } \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$$

a) Determinar el conjunto de valores S que toman las variables aleatorias X_n.

b) Verificar que

$$P(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\}, \ X_1 = 3) \neq P(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\}).$$

8. Una urna contiene 5 bolas blancas y 10 negras. Un dado corriente es lanzado. Se extrae de la urna un número de bolas igual al resultado obtenido en el lanzamiento del dado. ¿A qué es igual la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean blancas?, ¿a qué es igual la probabilidad de que el resultado obtenido al lanzar el dado sea 3 si todas las bolas extraídas son blancas?

9. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0.2 + cx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c.

b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X.

c) Calcular $P(0 \leq X < 0.5)$

d) Determinar $P(X > 0.5 \mid X > 0.1)$

e) Calcular la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $Y := 2X + 3$

10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c(2-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de c.

b) Determinar la función de distribución de la variable aleatoria X.

c) Calcular $P(|X| \geq 0.2)$

11. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$ y $P\left(-2 \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$.

b) Determinar una función de densidad $f_X(\cdot)$.

12. Sean X, Y y Z variables aleatorias cuyas funciones de distribución son respectivamente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x < -1 \\ 0.2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0.7 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.8 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) ¿Cuáles variables son de tipo discreto?, ¿cuáles son de tipo continuo? Explicar.

b) Calcular $P(X = 0)$, $P(\frac{1}{2} < X \leq 2)$ y $P(X > 1.5)$

c) Calcular $P(Y = 0)$, $P(\frac{1}{2} < Y \leq 2)$ y $P(Y > 0)$

d) Calcular $P(Z = 0)$, $P(-\frac{1}{2} < Z \leq \frac{1}{2})$ y $P(Z \geq 2)$

13. Un tablero circular de radio 1 se zonifica en n discos concéntricos de radios $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1$. Un dardo se lanza, al azar, dentro del círculo. Si cae en el anillo entre los círculos con radios $\frac{i}{n}$ y $\frac{(i+1)}{n}$ para, $i = 0, \cdots, n-1$, se ganan $(n-i)$ unidades monetarias. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de dinero ganada. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

14. En cada uno de los ejercicios siguientes determinar los valores de la constante C, para los cuales las funciones dadas, son funciones de probabilidad discretas sobre los enteros positivos:

a) $f(x) = C2^{-x}$

b) $f(x) = \frac{C2^{-x}}{x}$

c) $f(x) = Cx^{-2}$

d) $f(x) = \frac{C2^{x}}{x!}$

15. En cada uno de los ejercicios siguientes determinar los valores de la constante C, para los cuales las funciones dadas, son funciones de densidad:

a) $f(x) = C\{x(1-x)\}^{-\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = C\exp(-x - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$

16. Una variable aleatoria absolutamente continua X toma valores en el intervalo $[0, 4]$ y su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} - cx$$

a) Determinar el valor de c.

b) Calcular $P(\frac{1}{2} \leq X < 3)$.

17. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f. Demostrar que las variables aleatorias X y $(-X)$ tienen la misma función de distribución, si y sólo si, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. En los casos siguientes, determinar la función de distribución de la variable aleatoria real discreta X cuya función de probabilidad está dada por:

    a) $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots$ con $p \in (0,1)$ fijo y $q := 1 - p$.

    b)
$$P(X = k) = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}, \quad k = 1, \cdots, n$$

19. Una persona pide prestado un llavero con siete llaves y no sabe cuál de ellas abre un candado. Por lo tanto, intenta con cada una hasta que consigue abrirlo. Sea X la variable aleatoria que indica el número de intentos necesarios para conseguir abrir el candado.

    a) Determinar la función de densidad de la variable aleatoria X.

    b) Calcular $P(X \leq 2)$ y $P(X = 5)$.

20. Cuatro bolas se extraen aleatoriamente y sin reemplazo de una urna que contiene 25 bolas numeradas del 1 al 25. Si usted apuesta a que por lo menos una de las cuatro bolas tiene una numeración menor o igual a 5, ¿cuál es la probabilidad de que usted gane la apuesta?

21. Un jugador extrae simultánea y aleatoriamente dos bolas de una urna que contiene 8 bolas blancas, 5 bolas negras y 3 bolas azules. Suponga que el jugador gana 5000 pesos por cada bola negra seleccionada y pierde 3000 pesos por cada bola blanca seleccionada. Sea X la variable aleatoria que denota la fortuna del jugador. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

22. Un comerciante tiene dos puntos de venta de computadores. La probabilidad de que venda, en un día, un computador en el primer punto de venta es de 0.4 e independientemente, la probabilidad de que venda, en un día, un computador en el segundo punto de venta es de 0.7. Supóngase además, que es igualmente probable que él venda un computador de marca o un clon. Un computador de marca tiene un costo de 1800 dólares, en tanto que un clon, con las mismas especificaciones, tiene un costo de 1000 dólares. Sea X la cantidad, en dólares, que el comerciante vende en un día. Hallar la distribución de la variable aleatoria X.

23. Demostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$
y usar el resultado para demostrar que
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}; \quad x \in \mathbb{R}$$
es una función de densidad si $\sigma > 0$.

24. Supóngase que f y g son funciones de densidad y que $0 < \lambda < 1$ es una constante. ¿Es $\lambda f + (1-\lambda) g$ una función de densidad?, ¿es fg una función de densidad? Explicar.

25. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulativa dada por:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{4}{3}x - 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$
Determinar una función de distribución acumulativa discreta $F_d(\cdot)$ y una continua $F_c(\cdot)$, así como constantes α y β tales que:
$$F_X(x) = \alpha F_d(x) + \beta F_c(x)$$

26. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulativa dada por:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$
Determinar una función de distribución acumulativa discreta $F_d(\cdot)$ y una continua $F_c(\cdot)$, así como constantes α y β tales que:
$$F_X(x) = \alpha F_d(x) + \beta F_c(x)$$

27. Se dice que una variable aleatoria real discreta X tiene distribución logarítmica de Fisher, de parámetro θ, si su función de densidad está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x} & \text{si} \quad x=1,2,\cdots\\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso}\end{cases}$$

con $\theta\in(0,1)$. Verificar que f es una función de densidad.

28. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x)=C.\frac{1}{1+x^2} \text{ si } x\in\mathbb{R}$$

   a) Determinar el valor de C.
   b) Calcular $P(X\geq 0)$.
   c) Hallar (si existen) $E(X)$ y $Var(X)$.
   d) Hallar la función de distribución de X.

29. Se lanza un dado corriente dos veces consecutivas. Sean X y Y las variables aleatorias definidas por:

X := "resultado del primer lanzamiento"
Y := "resultado del segundo lanzamiento"

Calcular $E(\text{máx}\{X,Y\})$ y $E(\text{mín}\{X,Y\})$

30. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x)=\begin{cases}2x^3 & \text{si} \quad 0<x\leq 1\\ 2(2-x)^3 & \text{si} \quad 1<x\leq 2\\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso}\end{cases}$$

   a) Calcular $\mu:=E(X)$ y $\sigma^2:=Var(X)$.
   b) Hallar $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)$.

31. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x)=\begin{cases}12x^3-21x^2+10x & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso}\end{cases}$$

   a) Calcular $\mu:=E(X)$ y $\sigma^2:=Var(X)$.
   b) Determinar el valor de c tal que $P(X>c)=\frac{7}{16}$.

32. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x)=\begin{cases}C\sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right) & \text{si} \quad 0\leq x\leq 5\\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso}\end{cases}$$

   a) Determinar el valor de C.
   b) Hallar (si existen) la media y la varianza de X.

33. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulativa dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2\\ 1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

y sea $Y:=X^2$.

   a) Determinar la función de distribución acumulativa de Y.
   b) Calcular $P(Y\leq X)$, $P(X+Y\leq\frac{3}{4})$ y $P(X\leq 2Y)$.

34. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulativa continua y estrictamente creciente.

   a) Determinar una función de densidad de la variable aleatoria $Y:=|X|$.
   b) Hallar la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria $Y:=X^3$.

35. Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 5 bolas rojas y 4 blancas, la urna B contiene 8 bolas rojas y 5 blancas y la urna C contiene 2 bolas rojas y 6 blancas. Se extrae al azar una bola de cada urna. Sea X el número de bolas blancas extraídas. Calcular la función de probabilidad de X.

36. Sea X una variable aleatoria con $P(X=0)=0$ y tal que $E(X)$ existe y es diferente de cero.

   a) ¿Es válido en general que

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{E(X)}\text{ ?} \tag{2.3}$$

b) ¿Existe alguna variable aleatoria X para la cual (2.3) se satisface? Explicar.

37. Sea X una variable aleatoria discreta con valores en los enteros no negativos y tal que $E(X)$ y $E(X^2)$ existen.

 a) Demostrar que:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

 b) Verificar que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}\left(E\left(X^2\right) - E(X)\right).$$

38. Determinar si las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas. Justificar la respuesta.

 a) Si $P(X > Y) = 1$, entonces, $E(X) > E(Y)$.

 b) Si $E(X) > E(Y)$, entonces, $P(X > Y) = 1$

 c) Si $Y = X + 1$, entonces, $F_X(x) = F_Y(x+1)$; para todo x.

39. Sea X una variable aleatoria con valores en $\mathbb{Z}^+$con $P(X = k) = \frac{C}{3^k}$.

 a) Determinar el valor de C.

 b) Hallar (si existe) $E(X)$.

40. Sea X una variable aleatoria con valores $\frac{3^k}{2^k}$; $k = 0, 1, \cdots$ y tal que $P\left(X = \frac{3^k}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k}$. ¿Existe $E(X)$?, ¿existe $Var(X)$? Explicar.

41. (Desigualdad de Markov) Sea X una variable aleatoria real con $X \geq 0$ y tal que $E(X)$ existe. Demostrar que para todo $\alpha > 0$ se satisface:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

42. (Desigualdad de Chebyschev) Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

 a) Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ se satisface:

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

 b) Si $\mu = \sigma^2 = 20$, ¿qué se puede decir acerca de $P(0 \leq X \leq 40)$?

43. Sea X una variable aleatoria con media 11 y varianza 9. Utilizar la desigualdad de Chebyschef para encontrar (si es posible):

 a) Un límite inferior para $P(6 < X < 16)$

 b) El valor de k para el cual $P(|X - 11| \geq k) \leq 0.09$

44. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Supóngase que H es una función dos veces diferenciable en $x = \mu$ y que $Y := H(X)$ es una variable aleatoria tal que $E(Y)$ y $E(Y^2)$ existen.

 a) Demostrar las siguientes aproximaciones para $E(Y)$ y $Var(Y)$:

$$E(Y) \approx H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2$$
$$Var(Y) \approx \left(H'(\mu)\right)^2 \sigma^2$$

 b) Haciendo uso de la parte a., calcular (de manera aproximada) el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria

$$Y := 2(1 - 0.005X)^{1.2}$$

 donde X es una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = 3000x^{-4}\mathcal{X}_{[10,\infty)}(x)$$

45. Hallar la función característica de una variable aleatoria X tal que $P(X = 1) = \frac{2}{5}$ y $P(X = 0) = \frac{3}{5}$.

46. Determinar la función característica de una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

 donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

47. Determinar la función característica de una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

48. (Cuantil de orden q) Para cualquier variable aleatoria X, un cuantil de orden q, con $0 < q < 1$, es cualquier número denotado por x_q, que satisface simultáneamente las condiciones:

$$\text{i) } P(X \leq x_q) \geq q$$
$$\text{ii) } P(X \geq x_q) \geq 1 - q$$

Los cuantiles de uso más frecuente son $x_{0.5}$, $x_{0.25}$ y $x_{0.75}$, llamados, respectivamente *mediana, cuartil inferior* y *cuartil superior*.

Un cuantil x_q no es necesariamente único. Cuando un cuantil no es único, existe un intervalo en el que cada punto satisface las condiciones i) y ii). En este caso, algunos autores sugieren considerar el menor valor del intervalo y otros sugieren el punto medio del intervalo. (ver [Her]). Con base en esta información, resolver los ejercicios planteados a continuación:

a) Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} & \text{si} \quad x = 0, \cdots, 5. \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Determinar un cuantil inferior, un cuantil superior y la mediana de X.

b) Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{800}\exp\left(-\frac{x}{800}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Determinar la media y la mediana de X.

c) Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{si} \quad x > 10 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Determinar (si existen) la media y la mediana de X.

49. (Moda) Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(.)$.Una moda de X (si existe) es un número real ζ tal que

$$f(\zeta) \geq f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

a) Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada por:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{40}$

Hallar (si existe) la moda de X

b) Supóngase que la edad a la que un hombre contrae matrimonio, por primera vez, es una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}\exp(-\lambda x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $r > 0$ y $\lambda > 0$ son constantes y Γ es la función definida por:

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty t^{r-1}\exp(-t)\,dt$$

Si la edad promedio es de 28 años y lo más común es que el hombre se case a los 24 años, determinar los valores de r y λ.

c) Verificar que si X es una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad 0 < x < b \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, entonces cualquier $\zeta \in (a, b)$ es una moda de X.

d) Verificar que si X es una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces la moda de X no existe.

50. Supóngase que el tiempo (en minutos) que dura una llamada teléfonica es una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}\exp\left(-\frac{t}{5}\right) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $C(t)$ el monto (en pesos) que debe pagar un usuario por una llamada de t minutos de duración. Si

$$C(t) = \begin{cases} 500 & \text{si} \quad 0 < t \leq 5 \\ 750 & \text{si} \quad 5 < t \leq 10 \\ 100t & \text{si} \quad t > 10 \end{cases}$$

Calcular el costo medio de una llamada.

51. Sea X una variable aleatoria que sólo toma los valores $x_1 = 1, x_2 = 3$ y $x_3 = 5$ con probabilidad positiva. Supóngase que $E(X) = 3.5$ y $Var(X) = 1.15$. Determinar (si es posible) la función de distribución de X.

52. El color de los ojos de una persona se determina por un solo par de genes, de los cuales el gen para los ojos cafés es dominante sobre el gen para los ojos azules. Ello significa que una persona que tenga dos genes para ojos azules, tendrá ojos azules; mientras que quien tenga, ya sea dos genes para ojos cafés o un gen para ojos cafés y otro para ojos azules tendrá ojos cafés. Cuando dos personas se casan, sus descendientes reciben de cada uno de los progenitores un gen tomado en forma aleatoria del par de genes del progenitor. Si el hijo mayor de un par de progenitores de ojos cafés tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los otros cuatro hijos (sin considerar gemelos) de la pareja tengan también ojos azules?

53. Sea N una variable aleatoria con valores en $\{0, 1, 2, \cdots\}$. Supóngase que

$$P(N = n) = \frac{2}{3^{n+1}}, \; n = 1, 2, \cdots$$

a. Calcular $P(N = 0)$.

b. Hallar (si existe) la función generadora de momentos de N.

c. Usar la parte b. para calcular $E(N)$ y $Var(N)$.

54. En una urna se encuentran 25 bolas que se distinguen por su color y por la figura que tienen impresa. Los colores son rojo,azul y amarillo. Las figuras son puntos y estrellas. Supóngase que hay 15 bolas con puntos de las cuales 4 son rojas. Cinco bolas son azules con estrellas y de las 10 bolas amarillas 6 tienen puntos. Se extraen al azar 3 bolas (sin sustitución) .

a. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

A :="se extraen bolas de tres colores diferentes",

B :="se extrae al menos una bola con estrella"

C :="las bolas extraídas tenían todas puntos"

b. ¿A qué es igual la probabilidad de A dado C?

c. Supóngase que se extrae una bola al azar de la urna. Se verifica si la figura impresa en la bola es una estrella o no y luego se retorna la bola a la urna.¿Cuántas extracciones son necesarias para que con una probabilidad mayor a 0.95 se extraíga al menos una bola con estrella?

d. Supóngase que se juega el siguiente juego: Un jugador apuesta x unidades monetarias y extrae al azar una bola de la urna. Si la bola extraída tiene como figura puntos, el juego termina y el jugador pierde su apuesta. Si la bola tiene como figura estrellas entonces la bola extraída se deja fuera de la urna y el jugador extrae una nueva bola. Si ésta tiene estrellas y el mismo color de la primera bola extraída, el jugador recibe x^2 unidades monetarias. Si la segunda bola extraída tiene estrellas pero un color diferente a la primera, el jugador recibe x unidades monetarias. Si la segunda bola extraída tiene puntos el jugador recibe 0 unidades monetarias. ¿Cómo debe escogerse x para que la ganancia esperada del jugador sea positiva?

e. Supóngase que se introducen en la urna k bolas azules con puntos. Luego de mezclar homogéneamente las bolas, se extrae una bola al azar. Calcular k de manera tal que los eventos:

D :="la bola extraída tiene puntos"

G :="la bola extraída es azul"

55. Sea $X : (\Omega, \Im, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria. Sea

$$\mathcal{G} = \left\{A : A = X^{-1}(B) \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$$

Demostrar que X es una función $\mathcal{G} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible.

56. Sea $X : (\Omega, \Im, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria tal que $X \geq 0$ c.s y $E(X) = 1$. Sea $Q : \Im \to \mathbb{R}$ definida por $Q(A) = E(X\mathcal{X}_A)$. Demostrar que Q define una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \Im)$.

57. El 10 % de los miembros de una cierta población sufren de una enfermedad contagiosa. A una persona, sospechosa de ser portadora de la enfermedad, se le aplican dos pruebas independientes. Cada una de las pruebas dá el diagnóstico correcto con probabilidad 0.9. Determinar la probabilidad de que la persona esté realmente enferma si:

    a. ambas pruebas fueron positivas.

    b. sólo una de las pruebas fue positiva.

58. El siguiente juego de azar conocido como juego de la ruleta, es muy popular en los casinos: Un jugador apuesta a uno de los números del 1 al 6.Una vez apuesta, se lanzan tres dados corrientes. Si el número apostado por el jugador aparece i veces con $i = 1, 2, 3$, entonces el jugador gana i unidades monetarias. Si el número apostado por el jugador no aparece en ninguno de los dados entonces el jugador pierde 1 unidad monetaria.¿ Es éste un juego justo para el jugador? Explique su respuesta.

59. Una empresa tiene una planta de 400 trabajadores de los cuales 240 son profesionales. Debido a la mala situación económica se debe reducir la planta de personal y en consecuencia, salvo 40 trabajadores profesionales y 40 trabajadores no profesionales, todos los demás trabajadores quedarán sin trabajo.

    a. Supóngase que un reportero entrevista a una de persona escogida aleatoriamente del grupo de los 400 trabajadores. Sean E y F los eventos definidos por:

    $E :=$ "la persona entrevistada será despedida"

    $F :=$"la persona entrevistada es profesional"

    ¿Son E y F independientes?. Explicar.

    b. Calcular $P(E \mid F^c)$ y $P(F^c \mid E^c)$ e interpretar los resultados.

Capítulo 3

Algunas distribuciones discretas

En este capítulo se presentan algunas de las distribuciones discretas de uso más frecuente.

3.1. Distribuciones discreta uniforme, binomial y de Bernoulli

Definición 3.1 (distribución discreta uniforme) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución discreta uniforme de parámetro N, donde N es un entero positivo, si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & si \quad x = 1, 2, \cdots, N \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

La función másica de probabilidad tiene la forma que presenta la figura 3.1.

Teorema 3.2 (propiedades de la distribución discreta) *Si X es una variable aleatoria con distribución discreta uniforme de parámetro N entonces:*

1. $E(X) = \frac{N+1}{2}$.

2. $Var(X) = \frac{(N^2-1)}{12}$.

3. $m_X(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} e^{tk}$.

21. $\frac{43}{84}$
22. $0.58\overline{3}$
23. 8.3479×10^{-5}
24. $\frac{5}{84}$
25. a) 0.5177 **b)** 0.1157 **c)** 0.1975 **d)** $0.\overline{2}$
26. a) $1 - p^5\left(2 - p^2\right)$ **b)** $1 - p^4\left(2 - p^2\right)$
27. 0.5687 **28.** $1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \simeq e^{-1}$
29. a) 6.3×10^{-12} **b)** 0.105
30. 0.09907
31. 0.43925
32. $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}$; 1; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{7}$
33. $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$
34. a) 1 **b)** 0.8748 **c)** 0.9318 , R y T no son independientes.
35. a) 0.1632 **b)** 6.2645×10^{-2} **c)** 0.85207
36. $\frac{1}{13}$; 0.7159
37. $7.3\,\%$
38. 0.2304
39. 0.205
40. $\frac{8}{13}$
41. 0.43; $\frac{35}{43}$
42. $\frac{5}{9}$
43. $\emptyset$, $\{1,3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$
50. a) 0.703704 **b)** 0.25926 **c)** $0.\overline{2}$
51. a) 6.12×10^{-3} **b)** 0.9939 **c)** 3.1874×10^{-2}
52. $\frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$
53. a) $p = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{12}\right]\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} p = \frac{1}{2}$.
58. 0.0826

Capítulo 2.

1. No
2. $\wp(\Omega)$
3. $E(X) = \frac{9}{7}$
4. a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{2}{3}$

6. $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < -2 \\ \frac{1}{16} & \text{si} \quad -2 \le y < -1 \\ \frac{5}{16} & \text{si} \quad -1 \le y < 0 \\ \frac{11}{16} & \text{si} \quad 0 \le y < 1 \\ \frac{15}{16} & \text{si} \quad 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si} \quad y \ge 2 \end{cases}$

7. a) $S = \{1,2,3\}$ **b)** $P\left(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\},\ X_1 = 3\right) = 0$ y
$P\left(X_3 = 3 \mid X_2 \in \{1,2\}\right) = \frac{1}{2}$
8. a) 7.5758×10^{-2} **b)** 4.8351×10^{-2}
9. a) $c = 1.2$ **c)** 0.25 **d)** 0.710

10. a) $c = \frac{2}{3}$ **b)** $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{3} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **c)** 0.74667

11. a) 0 ; 0.9375 **b)** $f_X(x) = (2 - 2x)\,\mathcal{X}_{(0,1)}(x)$ }
12. a) X discreta, Y mixta y Z continua. **b)** 0.5; 0.3; 0.2
c) 0.5; 0.75; 0.5 **d)** 0; 0.5; 0.
13. $P(X = k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$ para $k = 1, \cdots, n$.
14. a) $c = 1$ **b)** $c^{-1} = \ln 2$ **c)** $c^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$ **d)** $c^{-1} = e^2 - 1$
15. a) $c = \pi^{-1}$ **b)** $c = 1$
16. a) $c = \frac{1}{8}$ **b)** 0.70313
18. a) $F_X(x) = \sum\limits_{k=0}^{[x]} pq^{k-1}$ **b)** $F_X(x) = \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{n(n+1)(2n+1)}$
19. a) $P(X = i) = \frac{1}{7}$ para $i = 1, \cdots, 7$ **b)** $P(X \le 2) = \frac{2}{7}$;
$P(X = 5) = \frac{1}{7}$.
20. 0.617
21. $P(X = -6000) = 0.23333$,
$P(X = -3000) = 0.2$, $P(X = 0) = 0.025$, $P(X = 2000) =$
0.33333, $P(X = 5000) = 0.125$, $P(X = 10000) = 0.08334$
22. $P(X = 0) = 0.18$, $P(X = 1000) = 0.27$, $P(X = 1800) = 0.27$,
$P(X = 2000) = 0.07$, $P(X = 2800) = 0.14$, $P(X = 3600) = 0.07$
24. Si; No
25. $F_X(x) = \frac{2}{3}F_d(x) + \frac{1}{3}F_c(x)$ donde

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0.5 & \text{si} \quad 1 \le x < \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si} \quad x \ge \frac{5}{4} \end{cases}, \quad F_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x-4 & \text{si} \quad 1 \le x < \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si} \quad x \ge \frac{5}{4} \end{cases}$$

26. $F_X(x) = \frac{3}{4}F_d(x) + \frac{1}{4}F_c(x)$ donde

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}, \quad F_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

28. **a)** $c = \frac{1}{\pi}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $E(X)$ y $Var(X)$ no existen
d) $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1} x + \frac{\pi}{2}\right)$
29. $\frac{161}{36}$; $\frac{91}{36}$
30. **a)** $\mu = 1, \sigma^2 = 0.0667$ **b)** 0.94536
31. **b)** $c = 0.5$
32. **a)** $c = \frac{\pi}{10}$, **b)** $E(X) = \frac{5}{2}$ y $Var(X) = 50\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right)$
33.a) $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$ **b)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$
35. $P(X=0) = 0.08546$; $P(X=1) = 0.37821$; $P(X=2) = 0.40812$; $P(X=3) = 0.12821$ y $E(X) = 1.5791$
36. **a)** No **b)** Sea X con $P(X=-1) = \frac{1}{9}$; $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9}$ y $P(X=2) = \frac{4}{9}$
39. **a)** $c = 2$ **b)** 1.5
40. $E(X)$ existe, $Var(X)$ no existe.
42. **b)** $P(0 \le X \le 40) \ge \frac{19}{20}$
43. **a)** $\frac{16}{25}$ **b)** $k = 10$
44. **b)** $EY \simeq 1.82$ $Var(Y) \approx 0.003489$
45. $\phi_X(t) = \frac{2}{5}e^{it} + \frac{3}{5}$
46. $\phi_X(t) = \frac{1}{(b-a)it}\left(e^{itb} - e^{ita}\right)$ si $t \neq 0$, $\phi_X(t) = 1$ si $t = 0$
47. $\phi_X(t) = 1$ si $t = 0$, $\phi_X(t) = \frac{2-2\cos t}{t^2}$ si $t \neq 0$
48. **a)** cuantil inferior= 2; cuantil superior= 3; mediana cualquier valor en $[2,3]$ **c)** $E(X)$ no existe, mediana 5.
49. **a)** moda 1 **b)** $r = 7$, $\lambda = \frac{1}{4}$.

Capítulo 3

1. $\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. 0.608; 2.
3. 0.2248
4. **a)** 0.878 42 **b)** 0.121 58
5. $E(X) = Var(X) = 3.9$
6. 0.987 52
7. e^{-10}; 0.9897
8. 3.8812×10^{-4}
9. $X \overset{d}{=} \mathcal{G}\left(\frac{9}{19}\right)$
10. **a)** 3.8305×10^{-8} **b)** 4.4179×10^{-2} **c)** 1.2379×10^{-3}
11. 0.6767
12. 5
13. 15000
16. **a)** 2.861×10^{-5} **b)** 5 **c)** 4 **d)** 9.8877×10^{-2}
17. 0.9945
18. $P(X^2 = j) = pq^{\sqrt{j}-1}$ con $j = 1, 4, 9, \cdots$; $P(X+3 = j) = pq^{j-4}$ con $j = 4, 5, 6, \cdots$
19. **a)** 0.674 % **b)** 73.5 %
20. **a)** 5.06×10^{-4}
21. 0.0671
22. 0.968 01
23. 76
24. 0.43; 0.57
25. 816; 169; 15
26. 0.783 43
27. 2.07×10^{-5}
28. **a)** 0.0511 **b)** 0.12273 **c)** 4.366×10^{-2}
29. 6.8064×10^{-2}
30. 24; 120
31. $P(X=2) = 0.47368$, $P(X=4) = 0.11809$, $P(X=-2) = 0.26243$, $P(X=-8) = 0.1458$, $E(X) = -0.27154$
32. 13
33. **a)** 2 **b)** No existe
34. 240
35. $\lambda = k$
38. $p = \frac{k}{n}$
42. $\frac{-p\ln p}{1-p}$