56. Sea $X : (\Omega, \Im, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria tal que $X \geq 0$ c.s y $E(X) = 1$. Sea $Q : \Im \to \mathbb{R}$ definida por $Q(A) = E(X\mathcal{X}_A)$. Demostrar que Q define una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \Im)$.

57. El 10 % de los miembros de una cierta población sufren de una enfermedad contagiosa. A una persona, sospechosa de ser portadora de la enfermedad, se le aplican dos pruebas independientes. Cada una de las pruebas dá el diagnóstico correcto con probabilidad 0.9. Determinar la probabilidad de que la persona esté realmente enferma si:

    a. ambas pruebas fueron positivas.

    b. sólo una de las pruebas fue positiva.

58. El siguiente juego de azar conocido como juego de la ruleta, es muy popular en los casinos: Un jugador apuesta a uno de los números del 1 al 6.Una vez apuesta, se lanzan tres dados corrientes. Si el número apostado por el jugador aparece i veces con $i = 1, 2, 3$, entonces el jugador gana i unidades monetarias. Si el número apostado por el jugador no aparece en ninguno de los dados entonces el jugador pierde 1 unidad monetaria.¿ Es éste un juego justo para el jugador? Explique su respuesta.

59. Una empresa tiene una planta de 400 trabajadores de los cuales 240 son profesionales. Debido a la mala situación económica se debe reducir la planta de personal y en consecuencia, salvo 40 trabajadores profesionales y 40 trabajadores no profesionales, todos los demás trabajadores quedarán sin trabajo.

    a. Supóngase que un reportero entrevista a una de persona escogida aleatoriamente del grupo de los 400 trabajadores. Sean E y F los eventos definidos por:

    $E :=$ "la persona entrevistada será despedida"

    $F :=$"la persona entrevistada es profesional"

    ¿Son E y F independientes?. Explicar.

    b. Calcular $P(E \mid F^c)$ y $P(F^c \mid E^c)$ e interpretar los resultados.

Capítulo 3

Algunas distribuciones discretas

En este capítulo se presentan algunas de las distribuciones discretas de uso más frecuente.

3.1. Distribuciones discreta uniforme, binomial y de Bernoulli

Definición 3.1 (distribución discreta uniforme) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución discreta uniforme de parámetro N, donde N es un entero positivo, si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & si \quad x = 1, 2, \cdots, N \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

La función másica de probabilidad tiene la forma que presenta la figura 3.1.

Teorema 3.2 (propiedades de la distribución discreta) *Si X es una variable aleatoria con distribución discreta uniforme de parámetro N entonces:*

1. $E(X) = \frac{N+1}{2}$.

2. $Var(X) = \frac{(N^2-1)}{12}$.

3. $m_X(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} e^{tk}$.

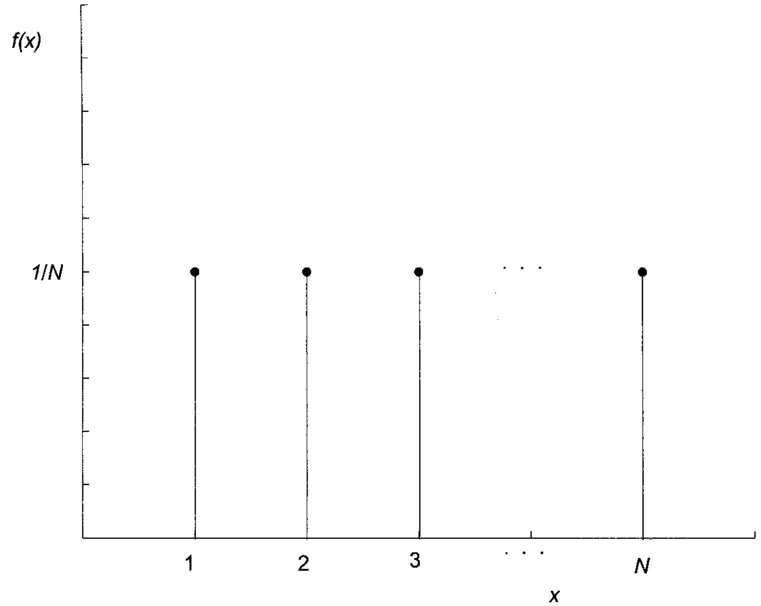

Figura 3.1: Función de probabilidad de una distribución uniforme discreta

Demostración.

1. $$E(X) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

2. Como ejercicio.

3. Inmediata a partir de la definición de f.g.m.

■

Definición 3.3 (distribuciones binomial y Bernoulli) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución binomial de parámetros n y p, si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & si \quad x = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $0 < p < 1$. Si $n = 1$, la distribución binomial recibe el nombre de distribución Bernoulli de parámetro p.

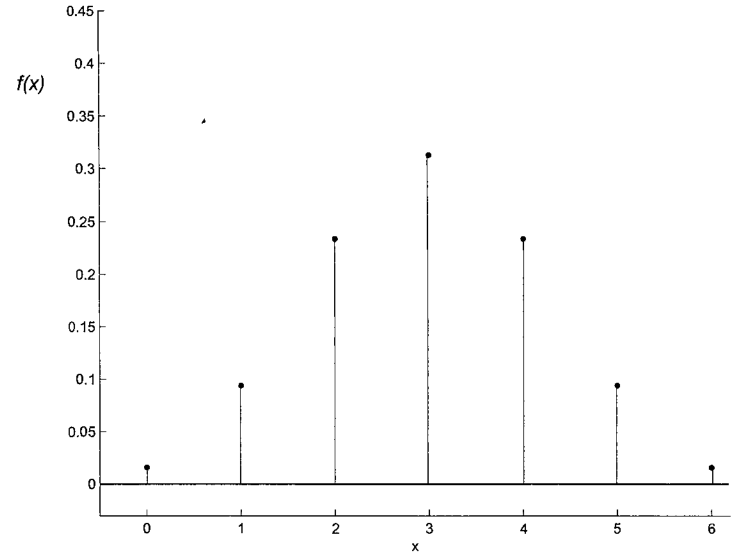

Figura 3.2: Función de probabilidad de una distribución binomial con parámetros $n = 6, \quad p = 0.5$.

Notación 3.4 *Se escribe $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(n, p)$ para indicar que la variable aleatoria X tiene distribución binomial de parámetros n y p.*

La distribución binomial se usa frecuentemente en la descripción de aquellos experimentos en los que el resultado es la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso. Si la variable aleatoria X denota el número de éxitos en n ensayos independientes del experimento, entonces X tiene distribución binomial de parámetros n y p; siendo p la probabilidad de éxito, es decir, la probabilidad de ocurrencia del suceso. Se acostumbra denotar la probabilidad de fracaso $(1-p)$ con la letra q.

Ejemplo 3.5 *Se lanza un dado corriente cinco veces consecutivas. Sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que se obtiene el número 5 como resultado. Hallar la función másica de probabilidad de X.*

Solución: La variable aleatoria X tiene distribución binomial de parámetros 5 y $\frac{1}{6}$. Por lo tanto,

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.40188$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.40188$$
$$P(X=2)=\binom{5}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.16075$$
$$P(X=3)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=0.03215$$
$$P(X=4)=\binom{5}{4}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)=3.215\times10^{-3}$$
$$P(X=5)=\binom{5}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^5\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=1.286\times10^{-4}.\quad\blacktriangle$$

Ejemplo 3.6 *Un vendedor de planes de turismo al Caribe, sabe, por experiencia, que la oportunidad de vender un plan es mayor, mientras más contactos realice con los clientes potenciales. Empíricamente él estableció que la probabilidad de que una persona compre un plan, luego de su visita, es constante e igual a* 0.01. *Si el conjunto de visitas que realiza el vendedor constituye un conjunto independiente de ensayos,¿cuántos compradores potenciales debe visitar para que la probabilidad de vender por lo menos un plan sea igual a* 0.85*?*

Solución: Sea

$X :=$ "Número de personas que compran un plan luego de la visita del vendedor"

Se tiene que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(n, 0.1)$. Se busca determinar n de tal manera que

$$P(X\geq 1)=0.85$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}0.85&=1-P(X=0)\\&=1-\binom{n}{0}(0.01)^0(0.99)^n.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}(0.99)^n&=0.15\\ n\ln(0.99)&=\ln(0.15)\\ n&=\frac{\ln(0.15)}{\ln(0.99)}\approx 188.76.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el vendedor debe visitar por lo menos a 189 personas para lograr su objetivo. ▲

Ejemplo 3.7 *La mejor amiga de Paula la invitó a una fiesta. Como Paula es aún muy pequeña, sus padres condicionaron el permiso a que su hermano la acompañe. El hermano de Paula le propone el siguiente trato: "tú escoges un número, el que quieras, entre* 1 *y* 6*; luego lanzamos cuatro veces un dado corriente, si el número que tú escogiste aparece por lo menos* 2 *veces, entonces, te acompaño a la fiesta. En caso contrario no te acompaño". ¿Cuál es la probabilidad de que Paula pueda ir a la fiesta?*

Solución: Sea

$X :=$ "número de veces que aparece el número escogido por Paula"

Es claro que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(4, \frac{1}{6})$. Entonces, la probabilidad pedida p es igual a:

$$\begin{aligned}p&=P(X\geq 2)\\&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^4-\binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^3\\&=0.13194.\quad\blacktriangle\end{aligned}$$

Ejemplo 3.8 *Un jugador apuesta a uno de los números del* 1 *al* 6*. Una vez apuesta, se lanzan tres dados corrientes. Si el número apostado por el jugador aparece i veces; con $i=1,2,3$, entonces el jugador gana $2i$ unidades monetarias. Si el número apostado por el jugador no aparece en ninguno de los dados, el jugador pierde* 3 *unidades monetarias. ¿Es éste un juego justo para el jugador?. Explique su respuesta.*

Solución: Sea X la variable aleatoria que denota la fortuna del jugador. Los valores que puede tomar X son $-3, 2, 4$ y 6. Es claro que:

$$P(X=-3)=\binom{3}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$
$$P(X=2)=\binom{3}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$$
$$P(X=4)=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$$
$$P(X=6)=\binom{3}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}.$$

Por lo tanto:

$$E(X) = \frac{(-3)\times 125 + 2\times 75 + 4\times 15 + 6}{216} = \frac{-159}{216}.$$

Esto indica que, a la postre, el jugador pierde 159 unidades monetarias por cada 216 juegos que realice. Por lo tanto, el juego no le es favorable.▲

Ejemplo 3.9 *Supóngase que n bolas se distribuyen al azar en r urnas. Hallar la probabilidad de que haya exactamente k bolas en las r_1 primeras urnas.*

Solución: Sea $X :=$ "número de bolas en las primeras r_1 urnas". Puesto que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(n,p)$ con $p = \frac{r_1}{r}$ entonces:

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{r_1}{r}\right)^k\left(1-\frac{r_1}{r}\right)^{n-k}. \quad ▲$$

A continuación se presentan las propiedades más importantes de la distribución binomial.

Teorema 3.10 (propiedades de la distribución binomial) *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Entonces:*

1. $E(X) = np.$
2. $Var(X) = npq$; *donde* $q := 1-p$.
3. $m_X(t) = \left(pe^t + q\right)^n.$

Demostración. En el ejemplo 2.67 se verificó que la f.g.m de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p, está dada por $m_X(t) = \left(pe^t+q\right)^n$. Por lo tanto:

$$E(X) = \frac{d}{dt}m_X(t)\mid_{t=0} = npe^t(pe^t+q)^{n-1}\mid_{t=0} = np$$

Además se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}m_X(t)\right|_{t=0} \\ &= \left.[n(n-1)(pe^t)^2(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}]\right|_{t=0} \\ &= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} Var(X) &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) \\ &= npq. \end{aligned}$$

■

Nota 3.11 *Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Sea*

$$B(k) := \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

Puesto que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

se obtiene para $k = 1,\cdots,n$:

$$\begin{aligned} B(k) &= \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}p\times p^{k-1}\times q^{n-k+1}\times\frac{1}{q} \\ &= \frac{n-k+1}{k}\times\frac{p}{q}\times B(k-1). \end{aligned}$$

Luego comenzando con $B(0) = q^n$ se obtienen en forma recurrente los valores de $B(k)$ para $k = 1,\cdots,n$.

Algoritmo 3.12

Entrada: *p, n, siendo n el número de términos.*

Salida: *$B(k)$ para $k = 0(1)n$.*

Inicialización:

$q := (1-p),$
$B(0) := q^n.$

Iteración:

Para $k = 0(1)n$ haga:
$B(k+1) = \frac{n-k}{k+1}\times\frac{p}{q}\times B(k)$ ▲

Así por ejemplo, con el algoritmo anterior, para $n = 5$ y $p = 0.3$ se obtiene:

k	$B(k)$
0	0.16807
1	0.36015
2	0.30870
3	0.13230
4	0.02835
5	0.00243

Nota 3.13 *De la observación anterior se obtiene que:*

$$B(k) > B(k-1), \text{ si y sólo si, } \frac{n-k+1}{k} \times \frac{p}{q} > 1$$

esto es:

$$B(k) > B(k-1) \text{ si y sólo si } (n+1)p > k$$

Por lo tanto, si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(n,p)$, *entonces,* $P(X = k)$ *crece inicialmente de manera monótona y luego decrece monótonamente, alcanzando su valor mayor cuando* $k = [(n+1)p]$ *donde* $[a]$ *denota la parte entera de* a.

3.2. Distribuciones hipergeométrica y Poisson

En el capítulo 1. se vió que si se tiene una urna con N bolas en total de las cuales R son rojas y $(N-R)$ blancas y si se extrae una muestra de tamaño r, sin reemplazo, entonces la probabilidad $P(A_k)$ de que exactamente k de las bolas extraídas son rojas es igual a:

$$P(k) := P(A_k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Si únicamente interesa el número k de bolas rojas entre las n bolas extraídas, se tiene que $P(k)$ define una medida de probabilidad sobre el conjunto $\{0, 1, \cdots, n\}$ llamada distribución hipergeométrica de parámetros n, R y N. Más precisamente se tiene la definición siguiente:

Definición 3.14 (distribución hipergeométrica) *Se dice que una variable aleatoria* X *tiene distribución hipergeométrica de parámetros* n, R *y* N, *si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{si} \quad x = 0, \cdots, n \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

donde N *es un entero positivo,* R *es un entero no negativo menor o igual a* N *y* n *es un entero positivo menor o igual a* N.

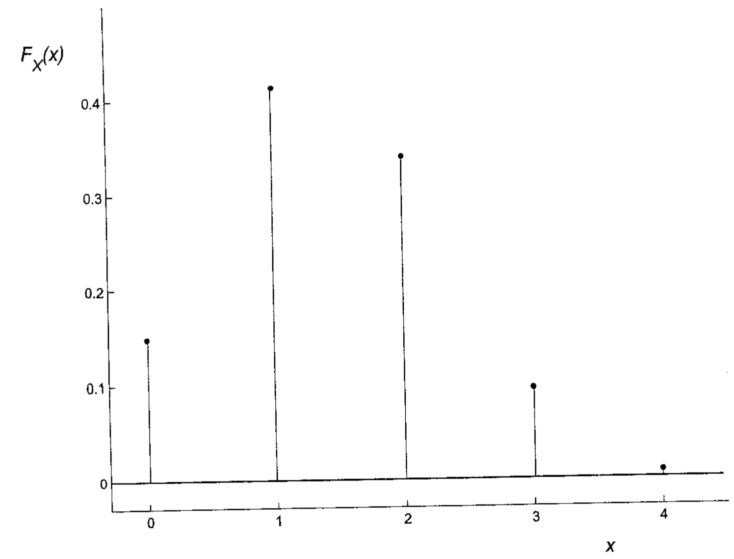

Figura 3.3: Función de probabilidad de una distribución hipergeométrica con parámetros: $n = 4$, $R = 7$, $N = 20$.

Notación 3.15 *La expresión* $X \stackrel{d}{=} Hg(n, R, N)$ *significa que la variable aleatoria* X *tiene una distribución hipergeométrica de parámetros* n, R *y* N.

Ejemplo 3.16 *La división de vigilancia de una institución universitaria ha adquirido* 50 *equipos de comunicación con el fin de optimizar el servicio en sus predios. Se seleccionan aleatoriamente* 8 *equipos y se someten a prueba para encontrar posibles defectos. Si* 3 *de los* 50 *equipos están defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga a lo más dos equipos defectuosos?*

Solución: Sea X :="número de equipos defectuosos en la muestra". Es claro que $X \stackrel{d}{=} Hg(8, 3, 50)$. Por lo tanto,

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{8}}{\binom{50}{8}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{7}}{\binom{50}{8}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{47}{6}}{\binom{50}{8}}$$
$$= 0.99714. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 3.17 *Un equipo de trabajo, establecido por el ministerio del medio ambiente, programó visitas a 25 fábricas para investigar posibles violaciones a los reglamentos para el control de la contaminación ambiental. Sin embargo, los recortes presupuestales han reducido drásticamente el tamaño del equipo de trabajo, por lo que, solamente se podrán investigar 5 de las 25 fábricas. Si se sabe que 10 de las fábricas están operando sin cumplir los reglamentos, calcule la probabilidad de que al menos una de las fábricas muestreadas esté operando en contravención a los reglamentos.*

Solución: Sea $X :=$ "número de fábricas en la muestra que operan sin cumplir los reglamentos". Se tiene que $X \stackrel{d}{=} Hg(5, 10, 25)$. Entonces:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \frac{\binom{10}{0} \times \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}}$$
$$= 0.94348. \quad \blacktriangle$$

Nota 3.18 *Supóngase que el tamaño N de una población es desconocido. Se desea determinar N sin tener que contar los individuos uno a uno. Un método para hacerlo es el llamado método de captura-recaptura, el cual consiste en capturar R individuos de la población, marcarlos y luego retornarlos a la población. Una vez los individuos, marcados y no-marcados, se mezclan homogéneamente, se toma una muestra de tamaño n. Sea X la variable aleatoria que denota al número de individuos marcados en la muestra. Es claro que: $X \stackrel{d}{=} Hg(n, R, N)$. Supóngase que se observa que X es igual a k. Entonces, $P_k(N) := P(X = k)$ representa la probabilidad de que en la muestra haya exactamente k individuos marcados cuando el tamaño de la población es N. Por lo tanto un estimador $\widehat{N}$ de N es aquel que maximiza la probabilidad de que X sea igual a k. Tal estimador se conoce como estimador de máxima verosimilitud de N. Para determinarlo, se observa que:*

$$P_k(N) \geq P_k(N-1), \text{ si y sólo si, } \frac{(N-R) \times (N-n)}{N \times (N-R-n+k)} \geq 1$$

esto es,

$$P_k(N) \geq P_k(N-1), \text{ si y sólo si, } \frac{R \times n}{k} \geq N$$

por lo tanto,

$$\widehat{N} = \left[\frac{R \times n}{k}\right].$$

Ejemplo 3.19 *Para establecer cuántos peces hay en un lago se procede como sigue: se capturan y marcan 1000 peces y luego se devuelven al lago. Días después se capturan de 150 peces y se observa que 10 de ellos están marcados. Entonces, de acuerdo a la observación anterior, se tiene que el estimador de máxima verosimilitud del tamaño N de la población es:*

$$\widehat{N} = \left[\frac{1000 \times 150}{10}\right] = 15000 \qquad \blacktriangle$$

A continuación se presentan algunas de las propiedades de la distribución hipergeométrica.

Teorema 3.20 (propiedades de la distribución hipergeométrica) *Sea $X \stackrel{d}{=} Hg(n, R, N)$, entonces:*

1. $E(X) = \frac{nR}{N}$.
2. $Var(X) = n \times \frac{R}{N} \times \frac{N-R}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$.

Demostración.

1.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} n \frac{R}{N} \frac{\binom{R-1}{x-1}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}$$
$$= n \frac{R}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{R-1}{k}\binom{N-R}{n-k-1}}{\binom{N-1}{n-1}}$$
$$= n \frac{R}{N},$$

puesto que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{R-1}{k}\binom{N-R}{n-k-1} = \binom{N-1}{n-1}.$$

2. Como

$$Var(X) = E(X(X-1)) + EX - (E(X))^2$$

se va a calcular $E(X(X-1))$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)P(X=x) \\
&= \sum_{x=2}^{n}\left[x(x-1)\frac{R(R-1)(R-2)!}{(R-x)!x(x-1)(x-2)!}\times \right.\\
&\qquad \left. \frac{(N-n)!n(n-1)(n-2)!}{N(N-1)(N-2)!}\times\binom{N-R}{n-x}\right] \\
&= n(n-1)\frac{R(R-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\left[\frac{\binom{R-2}{x-2}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N-2}{n-2}}\right] \\
&= n(n-1)\frac{R(R-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{\binom{R-2}{k}\binom{N-R}{n-k-2}}{\binom{N-2}{n-2}}\right] \\
&= n(n-1)\frac{R(R-1)}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

pues

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{R-2}{k}\binom{N-R}{n-k-2} = \binom{N-2}{n-2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= n(n-1)\frac{R(R-1)}{N(N-1)} + \frac{nR}{N} - \frac{n^2R^2}{N^2} \\
&= n\frac{R}{N}\left[\frac{(N-R)(N-n)}{N(N-1)}\right].
\end{aligned}$$

■

A continuación se verá que si el tamaño de la población N es grande, en comparación con el tamaño de la muestra n, entonces, la distribución hipergeométrica puede aproximarse por una distribución binomial. Más precisamente se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.21 *Sea* $0 < p < 1$. *Si* $N, R \longrightarrow \infty$ *de tal forma que* $\frac{R}{N} \longrightarrow p$, *entonces:*

$$Hg(n,R,N)(k) := \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)(k) := \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Demostración. Puesto que $\frac{N-R}{N} \longrightarrow (1-p) = q > 0$ cuando $N, R \longrightarrow \infty$, entonces, $(N-R) \longrightarrow \infty$ cuando $N \longrightarrow \infty$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \binom{n}{k}\frac{R(R-1)\cdots(R-k+1)(N-R)\cdots(N-R-(n-k)+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{R}{N}\right)^k\left(\frac{N-R}{N}\right)^{n-k}\frac{R(R-1)\cdots(R-k+1)}{R^k}\times \\
&\quad \frac{(N-R)\cdots(N-R-(n-k)+1)}{(N-R)^{n-k}} \times \frac{N^n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\
&\underset{N,R\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.22 *En una ciudad de 2 millones de habitantes, se tiene que el 60 % pertenecen al partido político A. Se eligen al azar 100 personas. La distribución del número de personas, entre los 100 elegidos, que pertenecen al partido A es una distribución hipergeométrica de parámetros* 100, 1'200.000 *y* 2'000.000. *Aplicando el resultado anterior se puede aproximar esta distribución por una binomial de parámetros* $n = 1000$ *y* $p = 0.6$. *Así, por ejemplo, la probabilidad de que entre los 100 elegidos exactamente 40 pertenezcan al partido A es igual a:*

$$\binom{100}{40}(0.6)^{40}(0.4)^{60} = 2.4425\times 10^{-5}. \quad ▲$$

La tabla siguiente compara las distribuciones binomial e hipergeométrica.

k	$Hg(4, 60, 100)$	$Hg(4, 600, 1000)$	$Hg(4, 6000, 10000)$	$\mathcal{B}(4, \frac{3}{5})$
0	0.02331	0.02537	0.02558	0.0256
1	0.15118	0.15337	0.15358	0.1536
2	0.35208	0.34624	0.34566	0.3456
3	0.34907	0.34595	0.34563	0.3456
4	0.12436	0.12908	0.12955	0.1296

Definición 3.23 (distribución Poisson) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$, si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & si \quad x = 0, 1, \cdots \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

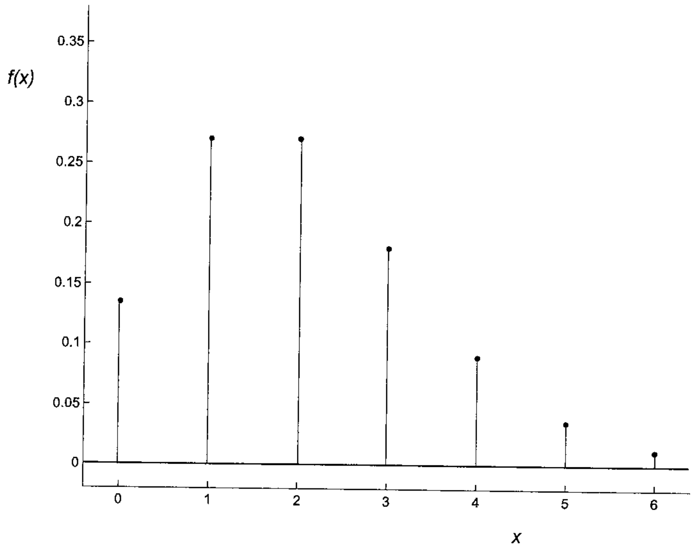

Figura 3.4: Función de probabilidad de una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 2$.

Notación 3.24 *Sea X una variable aleatoria. Se escribe $X \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda)$ para indicar que X tiene una distribución Poisson de parámetro λ.*

Nota 3.25 *Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda)$ y sea $\mathcal{P}(\lambda)(k) := P(X = k)$. Es fácil verificar que para $k = 1, 2, \cdots$*

$$\mathcal{P}(\lambda)(k) = \frac{\lambda}{k}\mathcal{P}(\lambda)(k-1),$$

luego, comenzando con $\mathcal{P}(\lambda)(0) = e^{-\lambda}$ se obtienen, recurrentemente, los valores de $\mathcal{P}(\lambda)(k)$ para $k = 1, 2, \cdots$

Un algoritmo sencillo para calcular los valores de la distribución Poisson, que utiliza la fórmula anterior, está dado por:

Algoritmo 3.26 (Cálculo de $\mathcal{P}(\lambda)(k)$)

Entrada: *λ, n, siendo n el número de términos.*

Salida: *$\mathcal{P}(\lambda)(k)$ para $k = 0(1)n$.*

Inicialización: *$\mathcal{P}(\lambda)(0) = e^{-\lambda}$.*

Iteración:

Para $k = 0(1)n$ haga:

$\mathcal{P}(\lambda)(k+1) = \frac{\lambda}{k+1}\mathcal{P}(\lambda)(k)$. ▲

Al analizar la gráfica de la función básica de probabilidad de una variable aleatoria con distribución Poisson, se observa que las probabilidades individuales son cada vez más pequeñas a medida que la variable toma valores cada vez más grandes. Ésta es, precisamente, una característica general de la distribución Poisson. Otras características de la distribución Poisson están dadas en el teorema siguiente.

Teorema 3.27 *Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Entonces:*

1. $E(X) = \lambda$.
2. $Var(X) = \lambda$.
3. $m_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$.

Demostración. Se hace, inicialmente, la demostración de 3. Luego, aplicando las propiedades de la f.g.m, se deducen 1. y 2. Se tiene que:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^k}{k!} \\ &= \exp(\lambda(e^t - 1)). \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt} m_X(t) \mid_{t=0} \\ &= \lambda e^t \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right) \mid_{t=0} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \mid_{t=0} \\ &= \left[\lambda e^t \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right) + \lambda^2 e^{2t} \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right)\right] \mid_{t=0} \\ &= \lambda(\lambda + 1), \end{aligned}$$

Entonces,

$$Var(X) = \lambda.$$

■

Ejemplo 3.28 *El número de personas que ingresan diariamente a la unidad de urgencias de un hospital, tiene una distribución Poisson de media 10. ¿A qué es igual la probabilidad de que, en un día en particular, el número de pacientes que ingresen a la unidad de urgencias, en dicho hospital, sea menor o igual a 3?*

Solución: Sea X := "número de pacientes que ingresan diariamente a la unidad de urgencias". Por los datos del problema, se sabe que $X \overset{d}{=} \mathcal{P}(10)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= e^{-10} + 10e^{-10} + 50e^{-10} + \frac{1000}{6} e^{-10} \\ &= 1.0336 \times 10^{-2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Se verá a continuación que la distribución de Poisson es una forma límite de la distribución binomial, cuando n es suficientemente grande y p suficiente y adecuadamente pequeño.

Teorema 3.29 *Si $p(n)$ es una sucesión con $0 < p(n) < 1$ y $n\,(p(n)) \longrightarrow \lambda$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces*

$$\mathcal{B}_{n,p(n)}(k) := \binom{n}{k} (p(n))^k (1 - p(n))^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =: \mathcal{P}(\lambda)(k)$$

Demostración. Sea $\lambda_n = n\,(p(n))$ entonces

$$\mathcal{B}_{n,p(n)}(k) = \frac{1}{k!} \times \frac{n}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} \times \lambda_n^k \times \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \times \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que los cocientes $\frac{n}{n}, \cdots, \frac{n-k+1}{n}$ y el factor $\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}$ tienden a 1, mientras que el factor $\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n$ tiende a $e^{-\lambda}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{B}_{n,p(n)}(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(\lambda)(k)$$

■

En la tabla siguiente se observa la "bondad" de la aproximación cuando $\lambda = np = 1$:

k	$\mathcal{P}(\lambda)(k)$	$\mathcal{B}_{100,\frac{1}{100}}(k)$	$\mathcal{B}_{10,\frac{1}{10}}(k)$
0	0.3678	0.3660	0.3486
1	0.3678	0.3697	0.3874
2	0.1839	0.1848	0.1937
3	0.0613	0.0609	0.0574
4	0.0153	0.0149	0.0112

El teorema anterior implica que la distribución de Poisson ofrece un modelo probabilístico adecuado para todos aquellos experimentos aleatorios en los que las repeticiones son independientes unas de otras y en los que sólo hay dos posibles resultados: éxito o fracaso, con probabilidad de éxito pequeña, y en los que el interés se centra en conocer el número de éxitos obtenidos al realizar el experimento un número suficientemente grande de veces. Empíricamente se ha establecido, que la aproximación se puede aplicar con seguridad si $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ y $np \leq 20$.

Ejemplo 3.30 *En un auditorio se encuentran 135 estudiantes. La probabilidad de que uno de los estudiantes se encuentre hoy de cumpleaños es igual a $\frac{1}{365}$. ¿Cuál es la probabilidad de que en el auditorio dos o más estudiantes estén hoy de cumpleaños?*

Solución: Sea $X :=$ "número de estudiantes que están de cumpleaños hoy". Se sabe que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(135, \frac{1}{365})$. Ésta última distribución se puede aproximar por una Poisson con parámetro $\lambda = \frac{27}{73}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - e^{-\frac{27}{73}} - \frac{27}{73} e^{-\frac{27}{73}} \\ &= 5.3659 \times 10^{-2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Una aplicación, muy importante, de la distribución Poisson se presenta en relación con la ocurrencia de un cierto tipo de eventos en un intervalo de tiempo determinado. Así por ejemplo, la distribución Poisson ha sido utilizada para describir la distribución del número de partículas α que llegan a un determinado punto del espacio, durante un período de tiempo t, y que son emitidas por una sustancia radioactiva. También se ha usado para hallar la distribución del número de individuos que llegan a una línea de espera, en un período de tiempo t. En estos casos se supone que se inicia el conteo en el tiempo $t = 0$ y que se hacen las suposiciones siguientes en relación con la llegada de los individuos (partículas):

1. Existe un parámetro $\lambda > 0$ tal que, para cualquier intervalo de longitud pequeña Δt, se tiene que la probabilidad de que llegue exactamente un individuo (partícula) es igual a $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$; donde $o(\Delta t)$ es una cantidad tal que $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$.
2. La probabilidad de que no lleguen individuos (partículas) en un intervalo de longitud pequeña Δt es igual a $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.
3. La probabilidad de que llegue más de un individuo (partícula) en un intervalo de longitud pequeña Δt es del orden $o(\Delta t)$.
4. El número de individuos (partículas) que llegan durante un intervalo de tiempo es independiente del número de individuos (partículas) que llegan antes de éste..

Si X_t es la variable aleatoria que denota el número de individuos (partículas) que llegan en el intervalo de tiempo $(0, t]$, entonces, se tiene que (ver[Ros]) X_t tiene una distribución Poisson con parámetro λt.

Ejemplo 3.31 *Supóngase que el número de llamadas que entran a una central teléfonica es de 30 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciban llamadas en un período de 3 minutos?. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de cinco llamadas en un intervalo de 5 minutos?*

Solución: Sea $X_t :=$ "número de llamadas que se reciben en el intervalo de tiempo $(0, t]$", donde el tiempo está medido en minutos.

Por los datos del problema, $X_t \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\frac{1}{2}t)$. Luego:

$$P(X_3 = 0) = e^{-0.5 \times 3} = 0.22313$$

y

$$P(X_5 \geq 6) = \sum_{k=6}^{\infty} e^{-2.5} \frac{(2.5)^k}{k!} = 0.042. \quad \blacktriangle$$

3.3. Distribuciones geométrica y binomial negativa

Al trabajar la distribución binomial, se procedió como sigue: se repitió el experimento aleatorio n veces y se calculó la probabilidad de obtener de manera exacta k éxitos. En este caso, el número de repeticiones permanece constante mientras que el número de éxitos es aleatorio. Supóngase que ahora la pregunta es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de tener que repetir el experimento n veces para obtener de manera exacta k éxitos? Es decir, ahora el número de éxitos permanece constante en tanto que el número de repeticiones X es una variable aleatoria.

¿A qué es igual la probabilidad de que X tome el valor j con $j = k, k+1, \cdots$? Si $X = j$ entonces el j-ésimo resultado es necesariamente un éxito, por lo tanto los restantes $(k-1)$ éxitos se obtienen en las restantes $(j-1)$ repeticiones del experimento. Esto es;

$$P(X = j) = \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k}; \; j = k, k+1, \cdots$$

donde $0 < p < 1$ es la probabilidad de éxito.

Definición 3.32 (distribución binomial negativa y geométrica) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución binomial negativa de parámetros k y p, si su función másica de probabilidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & \text{si} \quad x = k, k+1, \cdots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso especial $k = 1$, se dice que la variable aleatoria tiene distribución geométrica de parámetro p.

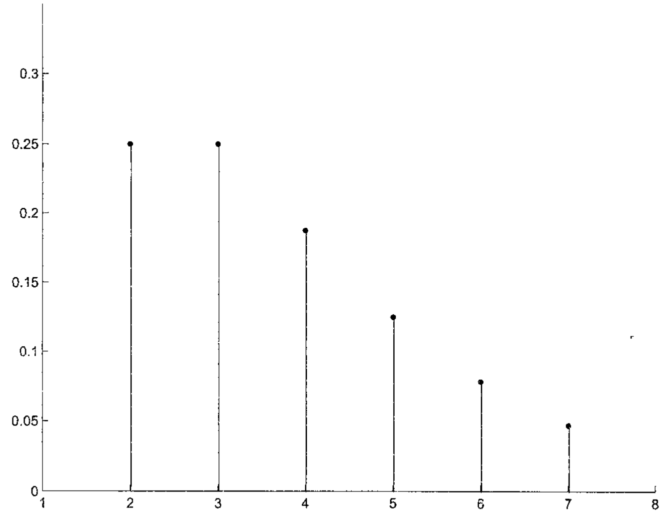

Figura 3.5: Función de probabilidad de una distribución binomial negativa con parámetros $k = 2$ y $p = \frac{1}{2}$.

Notación 3.33 *Las expresiones $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N(k,p)$ y $X \stackrel{d}{=} \mathcal{G}(p)$ indican que X tiene distribución binomial negativa de parámetros k y p y X tiene distribución geométrica de parámetro p, respectivamente.*

Nota 3.34 *Supóngase que no interesa conocer el número de ensayos necesarios hasta obtener de manera exacta k éxitos si no el número de fracasos Y ocurridos antes de obtener de manera exacta k éxitos. En este caso, se tiene que $X = k + Y$ y por lo tanto:*

$$P(Y = j) = \binom{k+j-1}{k-1} p^k (1-p)^j \quad con \ j = 0, 1, 2, \cdots$$

Algunos autores llaman a esta última la distribución binomial negativa y a la dada en la definición anterior la llaman distribución Pascal.

Ejemplo 3.35 *En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. Si la proporción de unidades defectuosas es de 0.03, ¿cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la tercera que se encuentra defectuosa?*

Solución: *Sea X := "número de unidades que es necesario inspeccionar hasta obtener de exactamente tres unidades defectuosas". Es claro que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N(3, 0.03)$. Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} P(X = 20) &= \binom{19}{2} (0.03)^3 (1-0.03)^{17} \\ &= 2.7509 \times 10^{-3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

A continuación se va a calcular el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución binomial negativa.

Teorema 3.36 *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial negativa de parámetros k y p. Entonces:*

1. $E(X) = \frac{k}{p}$.

2. $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

3. $m_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^k$.

Demostración. El $r-$ésimo momento de X, alrededor de 0, está dado por:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{j=k}^{\infty} j^r \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= \frac{k}{p} \sum_{j=k}^{\infty} j^{r-1} \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{j-k} \\ &= \frac{k}{p} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-1)^{r-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= \frac{k}{p} E\left((Y-1)^{r-1}\right) \end{aligned}$$

donde $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{B}_N(k+1, p)$. Por lo tanto,

$$E(X) = \frac{k}{p}$$

y

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \frac{k}{p}E(Y-1) \\ &= \frac{k}{p} \times \left[\frac{k+1}{p} - 1\right] \\ &= \frac{k}{p} \times \frac{k+1-p}{p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{k^2+k-kp}{p^2} - \frac{k^2}{p^2} \\ &= \frac{k(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{j=k}^{\infty} e^{tj}\binom{j-1}{k-1}p^k(1-p)^{j-k} \\ &= e^{tk}\sum_{l=0}^{\infty} e^{tl}\binom{l+k-1}{k-1}p^k(1-p)^l \\ &= e^{tk}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\binom{-k}{l}p^k\left((1-p)\,e^t\right)^l \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \binom{-k}{l} &:= (-1)^l\frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!} \\ &= (-1)^l\binom{l+k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Haciendo uso del desarrollo en serie de Taylor de la función $g(x) := (1-x)^{-k}$, alrededor de 0, se obtiene:

$$(1-x)^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty}\binom{-k}{j}(-x)^l.$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \left(pe^t\right)^k\left(1-(1-p)\,e^t\right)^{-k} \\ &= \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^k. \end{aligned}$$

■

Corolario 3.37 *Si X es una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p entonces:*

1. $E(X) = \frac{1}{p}$.
2. $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
3. $m_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]$.

Nota 3.38 *Para la variable aleatoria $Y = X - k$ se obtiene que:*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{k}{p} - k = \frac{k(1-p)}{p} \\ Var(Y) &= Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2} \\ m_Y(t) &= \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k \end{aligned}$$

Nota 3.39 *Supóngase que el tamaño N de una población es desconocido. Se desea determinar N sin tener que contar los individuos uno a uno. Un método para hacerlo es el llamado método inverso de captura-recaptura, el cual consiste en capturar R individuos de la población, marcarlos y luego retornarlos a la población. Una vez los individuos marcados y no-marcados se mezclan homogéneamente, se extraen individuos de la población hasta que un número predeterminado de individuos marcados, digamos k, se obtiene. Sea X la variable aleatoria que denota el número de extracciones necesarias hasta obtener k individuos marcados. Es claro que: $X \overset{d}{=} \mathcal{B}_N(k,p)$; donde $p = \frac{R}{N}$. Supóngase que se observa que X es igual a j. Entonces, $P_k(N) := P(X = j)$ representa la probabilidad de que haya sido necesario hacer j extracciones para obtener exactamente k individuos marcados, cuando el tamaño de la población es N. Por lo tanto, un estimador $\widehat{N}$ de N es aquel* *que maximiza la probabilidad de que X sea igual a j. Tal estimador, llamado estimador de máxima verosimilitud de N, es igual a*

$$\widehat{N} = \left[\frac{R \times j}{k}\right].$$

Ejemplo 3.40 *Para establecer cuántos peces hay en un lago se procede como sigue: se capturan y marcan 1000 peces y se luego se devuelven al lago. Días después se capturan peces hasta obtener 15 peces marcados. Si se necesitaron 120 extracciones para obtener los 15 peces marcados, entonces, de acuerdo a la observación anterior, se tiene que el estimador de máxima verosimilitud del tamaño N de la población es:*

$$\widehat{N} = \left[\frac{1000 \times 120}{15}\right] = 8000. \quad \blacktriangle$$

Nota 3.41 *Sean X una variable aleatoria con distribución binomial negativa con parámetros k y p y Y una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Entonces:*

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} P(X = j) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= P(Y < k). \end{aligned}$$

3.4. Ejercicios

1. Se lanza una moneda corriente un número par de veces. ¿A qué es igual la probabilidad de que la mitad de las veces se obtenga como resultado "cara"?

2. En un club nacional de automovilistas comienza una campaña telefónica con el propósito de aumentar su número de miembros. Con base en la experiencia previa, se sabe que una de cada 10 personas que reciben la llamada se une al club. Si en un día 20 personas reciben la llamada teléfonica, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellas se inscriban al club?, ¿cuál es el número esperado?

3. Se lanza un dado corriente 10 veces consecutivas. Calcular la probabilidad de obtener por lo menos 3 veces el número 5.

4. En una sala de cómputo, de un centro educativo, hay 20 computadores. La probabilidad de que en horas pico un computador esté ocupado es de 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos un computador desocupado en horas pico?, ¿cuál es la probabilidad de que todos los computadores estén ocupados en horas pico?

5. Supóngase que el número de clientes X que llegan a un banco en una hora es una variable aleatoria Poisson, y que $P(X = 0) = 0.02$. Calcular la media y la varianza de X.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Si $P(X = 0) = 0.4$, hallar $P(X \leq 3)$.

7. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Si:
$$P(X = 1) = \frac{1}{5} P(X = 2)$$
Calcular $P(X = 0)$ y $P(X \geq 4)$.

8. En un departamento de control de calidad, se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una linea de ensamble. Se piensa que la proporción de unidades defectuosas es de 0.01. ¿Cuál es la probabilidad de que la quinta unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentre defectuosa?

9. Las ruletas que se usan en los casinos, tienen 38 lugares de los cuales 18 son negros, 18 son rojos y 2 son verdes. Sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que es necesario hacer girar la ruleta, para obtener por primera vez un número rojo. Hallar la función de probabilidad de X.

10. Un examen de opción múltiple contiene 30 preguntas, cada una con cinco respuestas posibles. Supóngase que un estudiante sólo adivina las respuestas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste de manera correcta más de 20 preguntas?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste de manera correcta menos de 3 preguntas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste todas las preguntas de manera incorrecta?

11. Mediante estudios recientes se determinó que la probabilidad de morir a causa de cierta vacuna contra la gripe es de 0.00002. Si se administra la vacuna a 100000 personas y se supone que éstas constituyen un conjunto independiente de ensayos, ¿cuál es la probabilidad de que mueran a lo más dos personas a causa de la vacuna?

12. Un profesor desea hacer el examen final de su materia en forma de test. El examen debe contener 15 preguntas y, por reglamento interno, un estudiante lo aprueba si el número de respuestas correctas es de por lo menos 10. Para minimizar, en lo posible, el "riesgo" de que un estudiante apruebe el examen adivinando las respuestas, el profesor desea colocar k posibles respuestas a cada pregunta siendo sólo una de ellas correcta. ¿qué valor debe tener k para que un estudiante, que responda al azar todas las preguntas, tenga una probabilidad igual a 0.001 de aprobar el examen?

13. Para un experimento médico se requieren 15 personas que sean daltónicas, si se sabe que sólo el 0.1 % de la población tiene ésta característica, ¿cuál es el número esperado de personas que deben ser entrevistadas para encontrar las 15 requeridas?

14. En un lago se encuentran N peces de los cuales R ($\leq N$) están marcados. Supongamos que se pescan n ($\leq R$) peces uno a uno, sin sustitución y sea $M_i :=$ "el $i-$*ésimo* pez capturado está marcado", $i = 1, 2, ..., n$. ¿A qué es igual $p(M_i)$?, ¿son M_1 y M_3 independientes?

15. En una central teléfonica se reciben llamadas, según las leyes de un proceso de Poisson, con un promedio de diez llamadas por hora, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna llamada sea recibida entre las 8 am y las 12m?

16. En cierta entidad estatal, la probabilidad de que una llamada sea atendida en menos de 30 segundos es de 0.25. Supóngase que las llamadas son independientes.

    a) Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que 9 de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?

    b) Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número promedio de llamadas que serán contestadas en menos de 30 segundos?

    c) ¿Cuál es el número promedio de llamadas que hay que hacer, hasta tener una respuesta en menos de 30 segundos?

    d) ¿Cuál es la probabilidad de tener que llamar seis veces para que dos de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?

17. Supóngase que el 5 % de los artículos producidos en una fábrica son defectuosos. Se escogen 15 artículos al azar y se inspeccionan, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren a lo sumo tres artículos defectuosos?

18. Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Hallar la función de probabilidad de X^2 y de $X + 3$.

19. En una biblioteca hay tres ejemplares del libro "Hágase rico en menos de 24 horas" los cuales son prestados a los usuarios por un día. El número de solicitudes diarias por un ejemplar, es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 5. Calcular:

    a) La proporción de días en los que la demanda por un ejemplar del libro es cero.

    b) La proporción de días en los que la demanda por un ejemplar del libro supera la oferta.

20. Cierto sistema de un vehículo espacial debe funcionar correctamente para que la nave pueda reingresar en la atmósfera terrestre. Un componente del sistema opera sin problemas sólo el 85 % de las veces. Al fin de aumentar la confiabilidad del sistema, cuatro de estos componentes se instalan de modo tal que el sistema opere sin problemas, si por lo menos uno de los componentes está funcionando sin problemas.

    i) ¿Qué probabilidad hay de que falle el sistema? Suponga que los componentes operan de forma independiente.

    ii) Si el sistema falla, ¿qué se infiere acerca de la tasa de éxito de 85 % que se dice tiene un solo componente?

21. Una compañía de seguros descubrió que sólo alrededor del 0.1 % de la población tiene cierto tipo de accidente cada año. Si los 10000 asegurados fueran seleccionados aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que no más de 5 de estos clientes tenga un accidente de este tipo el próximo año?

22. En un bosque hay 20 osos de anteojos de los cuales 5 son capturados, marcados y dejados nuevamente en libertad. Unas semanas más tarde, 4 de los 20 osos son capturados. Calcular la probabilidad de que a lo más dos de los osos capturados estén marcados.

23. Una compañía analiza los embarques de sus proveedores con la finalidad de detectar productos que no cumplen con las especificaciones. Se sabe que el 3 % de los productos no satisfacen las especificaciones de la compañía. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de seleccionar al menos un artículo que no cumple con las especificaciones, sea al menos 0.90? Supóngase que en este caso resulta adecuado el uso de la aproximación de la distribución hipergeométrica por la binomial.

24. Un libro de 300 páginas tiene 253 errores tipográficos. Supóngase que cada página tiene 5000 caracteres. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera página no haya errores tipográficos?, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera página haya por lo menos un error tipográfico?

25. En una fábrica se producen cartuchos de tinta para estilógrafo. Uno de cada 30 cartuchos producidos por la fábrica resulta ser defectuoso. Los cartuchos son empacados en cajitas de seis cartuchos cada una. Calcular el número esperado de cajitas que contienen, respectivamente, ningún cartucho defectuoso, un cartucho defectuoso, dos o más cartuchos defectuosos, en un envío de 1000 paquetes.

26. La policía sospecha que en un camión cargado con 40 bultos de arroz se han camuflado paquetes de cocaína. Para confirmar su sospecha, la policía escoge al azar 5 bultos para inspeccionarlos. Si en efecto, de los 40 bultos de arroz, que contiene el camión, 10 tienen camuflada cocaína, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los bultos de la muestra contenga cocaína?

27. En un concurso se propone el siguiente juego: en una urna se encuentran 5 boletas premiadas y 9 boletas no premiadas. El concursante debe extraer simultáneamente y al azar 3 boletas; si las tres boletas están premiadas, el concursante tiene dos opciones: puede escoger uno de los premios y retirarse del concurso o bien puede repetir el ensayo tres veces más y si en las tres repeticiones ocurre que las 3 boletas extraídas están premiadas entonces el concursante recibe un automóvil último modelo, además de los premios indicados en las boletas. Si un concursante, opta por esta última opción, ¿cuál es la probabilidad de que gane?

28. El promedio de homicidios mensuales en un país es de 1 por cada 100000 habitantes.

    a) Determinar la probabilidad de que en una ciudad de dicho país, de 300000 habitantes, haya 5 o más homicidios en un mes dado.
    b) Calcular la probabilidad de que haya, por lo menos, dos meses durante el año en los que, en dicha ciudad, ocurran 5 o más homicidios.
    c) Contando el presente mes como el mes número 1, ¿cuál es la probabilidad de que el primer mes en tener 5 o más homicidios sea el cuarto?

29. El número de veces que una persona contrae un resfriado en un año constituye una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3$. Supóngase que acaba de salir al mercado un nuevo medicamento (basado en grandes cantidades de vitamina C) que reduce el parámetro de Poisson, en el 85 % de la población, a $\lambda = 2$, y en el 15 % restante no tiene efectos apreciables sobre resfriados. Si una persona toma el medicamento durante un año y en este lapso tiene 2 resfriados, ¿qué tan posible es que el medicamento no haya surtido efecto en esa persona?

30. Determinar el número esperado y la varianza del número de veces que es necesario lanzar un dado corriente hasta que el resultado "1" ocurra 4 veces.

31. Un jugador tiene la siguiente estrategia de juego a la ruleta: él apuesta dos unidades monetarias al color rojo, si en el primer giro de la ruleta aparece un número rojo, él toma el dinero ganado y se retira del juego; si en el primer giro de la ruleta aparece un número negro o verde, él hace girar la ruleta dos veces más y apuesta cada vez tres unidades monetarias al color rojo y luego se retira del juego. Sea X la variable aleatoria que denota la fortuna del jugador. Calcular $E(X)$ (ver problema 9).

32. Para financiarse sus estudios en la universidad, un joven ha decidido vender emparedados de jamón y queso a sus compañeros. El costo de elaboración de cada emparedado es de 500 pesos y el joven los vende

a 1500 pesos. Sin embargo, los emparedados que no logra vender en un día, no los puede vender al día siguiente. Si la demanda diaria de emparedados es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 20$ y $p = \frac{2}{3}$, ¿cuántos emparedados debe elaborar diariamente para maximizar su ganancia diaria esperada?

33. Se lanza una moneda corriente tantas veces como sea necesario hasta obtener por primera vez "cara". Sea X el número de lanzamientos requeridos.

    a) Calcular $E(X)$.

    b) Hallar (si existe) $E(2^X)$.

34. Se carga una moneda de tal manera que la probabilidad de obtener "cara" es igual a 0.4. Usar la desigualdad de Chebyschev para determinar cuántas veces debe lanzarse la moneda, de tal manera que, con una probabilidad de por lo menos 0.9, el cociente entre el número de veces que se obtiene cara y el número total de lanzamientos, esté entre 0.3 y 0.5.

35. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Encontrar el valor de λ para el cual $P(X = k)$ sea máxima.

36. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Demostrar que:

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-x}x^n dx \qquad n = 0, 1, \cdots$$

37. Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Demostrar que:

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

38. Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p. Encontrar el valor de p que maximiza $P(X = k)$ para $k = 0, \cdots, n$.

39. Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros n, R y N.

    a) Demostrar que:

$$P(X = j+1) = \frac{(R-j)(n-j)}{(j+1)((N-R)-n+j+1)}P(X = j).$$

    b) Verificar que:

$$P(X = j+1) > P(X = j),$$

    si y sólo si,

$$j < \frac{(n+1)(R+1)}{N+2} - 1.$$

40. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Demostrar que:

$$E(X^n) = \lambda E\left((X+1)^{n-1}\right).$$

41. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Demostrar que:

$$P(X = n+k \mid X > n) = P(X = k).$$

42. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Determinar $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

43. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ. Demostrar:

    a) $E(X^2) = \lambda E(X+1)$.

    b) Si $\lambda = 1$ entonces $E(|X-1|) = \frac{2}{e}$.

44. Determinar la función característica de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p.

45. Determinar la función característica de una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ.

46. ¿Cuántos hijos debe tener una pareja para que, con probabilidad 0.95, ella tenga por lo menos un hijo y una hija?

47. En una cierta aereolínea se sabe por experiencia que el 5 % de las personas que hacen un reservación no toman el vuelo. Por esta razón se aceptan 100 reservaciones aún cuando sólo se tienen 95 sillas disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que a todas las personas que se presenten a abordar el vuelo se les asigne una silla en el avión?

48. En una urna se encuentran N boletos de los cuales unos están premiados y otros no. Supóngase que cada boleto tiene, independientemente de los demás, probabilidad igual a p de ser ganador de un premio. Calcular la probabilidad de que el sexto boleto extraído sea el ganador del tercer premio.

49. Un cargamento de 20 unidades de una cierta mercancia se considera de buena calidad cuando él contiene a lo más dos unidades defectuosas y se considera de mala calidad si contiene por lo menos 4 unidades defectuosas. El vendedor y el comprador del cargamento acuerdan tomar una muestra aleatoria de cuatro unidades para analizarla. Si todos los cuatro elementos de la muestra son de buena calidad entonces se realiza el negocio. El vendedor corre el riesgo, bajo este acuerdo, de no vender un cargamento de buena calidad, en tanto que el comprador corre el riesgo de comprar un cargamento de mala calidad. ¿Quién corre el mayor riesgo en esta transacción?

50. En una masa para hacer pan se han mezclado M uvas pasas. Supóngase que se usa la totalidad de la masa para elaborar N panecillos. ¿Cuántas uvas pasas se deben utilizar para que con probabilidad 0.95 cada panecillo contenga por lo menos una uva pasa?

Capítulo 4

Algunas distribuciones continuas

En este capítulo se estudiarán algunas de las distribuciones de tipo absolutamente continuo de uso más frecuente.

4.1. Distribución uniforme

Supóngase que un bus escolar llega siempre a cierto paradero entre las 6 a.m y las 6 : 10 a.m y que la probabilidad de que el bus llegue en cualquier subintervalo de tiempo, del intervalo $[0, 10]$, es sólo proporcional a la longitud del subintervalo. Es decir, es igualmente probable que el bus llegue entre las 6 : 00 a.m y las 6 : 02 a.m, a que llegue entre las 6 : 07 a.m y las 6 : 09 a.m. Sea X el tiempo, medido en minutos, que un escolar debe esperar en el paradero del bus, si llega exactamente a las 6 : 00 a.m. Si se miden cuidadosamente, durante muchas mañanas, la hora en la que llega el bus, se puede construir, con los datos obtenidos, un histograma de frecuencias relativas. De la descripción anterior, se tiene que las frecuencias relativas con que se observa a X entre 6 : 00 y 6 : 02, y entre 6 : 07 y 6 : 09, son practicamente las mismas. La variable X es un ejemplo de una variable aleatoria con distribución uniforme. Más precisamente se tiene la definición siguiente:

Definición 4.1 (distribución uniforme) *Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo $[a, b]$, con $a < b$*

$$F_d(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<1\\ 0.5 & \text{si} \quad 1\le x<\frac{5}{4}\\ 1 & \text{si} \quad x\ge\frac{5}{4}\end{cases},\quad F_c(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<1\\ 4x-4 & \text{si} \quad 1\le x<\frac{5}{4}\\ 1 & \text{si} \quad x\ge\frac{5}{4}\end{cases}$$

26. $F_X(x)=\frac{3}{4}F_d(x)+\frac{1}{4}F_c(x)$ donde

$$F_d(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le x<2\\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases},\quad F_c(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ 4x^2 & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ 1 & \text{si} \quad x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

28. **a)** $c=\frac{1}{\pi}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $E(X)$ y $Var(X)$ no existen
d) $F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)$
29. $\frac{161}{36}$; $\frac{91}{36}$
30. **a)** $\mu=1,\sigma^2=0.0667$ **b)** 0.94536
31. **b)** $c=0.5$
32. **a)** $c=\frac{\pi}{10}$, **b)** $E(X)=\frac{5}{2}$ y $Var(X)=50\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}\right)$
33.a) $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{si} \quad 0\le x<4\\ 1 & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$ **b)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$
35. $P(X=0)=0.08546$; $P(X=1)=0.37821$; $P(X=2)=$ 0.40812; $P(X=3)=0.12821$ y $E(X)=1.5791$
36. **a)** No **b)** Sea X con $P(X=-1)=\frac{1}{9}$; $P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}$ y $P(X=2)=\frac{4}{9}$
39. **a)** $c=2$ **b)** 1.5
40. $E(X)$ existe, $Var(X)$ no existe.
42. **b)** $P(0\le X\le 40)\ge\frac{19}{20}$
43. **a)** $\frac{16}{25}$ **b)** $k=10$
44. **b)** $EY\simeq 1.82$ $Var(Y)\approx 0.003489$
45. $\phi_X(t)=\frac{2}{5}e^{it}+\frac{3}{5}$
46. $\phi_X(t)=\frac{1}{(b-a)it}\left(e^{itb}-e^{ita}\right)$ si $t\neq 0$, $\phi_X(t)=1$ si $t=0$
47. $\phi_X(t)=1$ si $t=0$, $\phi_X(t)=\frac{2-2\cos t}{t^2}$ si $t\neq 0$
48. **a)** cuantil inferior= 2; cuantil superior= 3; mediana cualquier valor en $[2,3]$ **c)** $E(X)$ no existe, mediana 5.
49. **a)** moda 1 **b)** $r=7$, $\lambda=\frac{1}{4}$.

Capítulo 3

1. $\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. 0.608; 2.
3. 0.2248
4. **a)** 0.878 42 **b)** 0.121 58
5. $E(X)=Var(X)=3.9$
6. 0.987 52
7. e^{-10}; 0.9897
8. $3.881\,2\times 10^{-4}$
9. $X\overset{d}{=}\mathcal{G}\left(\frac{9}{19}\right)$
10. **a)** $3.830\,5\times 10^{-8}$ **b)** $4.417\,9\times 10^{-2}$ **c)** $1.237\,9\times 10^{-3}$
11. 0.6767
12. 5
13. 15000
16. **a)** 2.861×10^{-5} **b)** 5 **c)** 4 **d)** $9.887\,7\times 10^{-2}$
17. 0.9945
18. $P\left(X^2=j\right)=pq^{\sqrt{j}-1}$ con $j=1,4,9,\cdots$; $P(X+3=j)=pq^{j-4}$ con $j=4,5,6,\cdots$
19. **a)** 0.674 % **b)** 73.5 %
20. **a)** 5.06×10^{-4}
21. 0.0671
22. 0.968 01
23. 76
24. 0.43; 0.57
25. 816; 169; 15
26. 0.783 43
27. 2.07×10^{-5}
28. **a)** 0.0511 **b)** 0.12273 **c)** 4.366×10^{-2}
29. $6.806\,4\times 10^{-2}$
30. 24; 120
31. $P(X=2)=0.473\,68$, $P(X=4)=0.118\,09$, $P(X=-2)=$ $0.262\,43$, $P(X=-8)=0.145\,8$, $E(X)=-0.27154$
32. 13
33. **a)** 2 **b)** No existe
34. 240
35. $\lambda=k$
38. $p=\frac{k}{n}$
42. $\frac{-p\ln p}{1-p}$

44. $\phi_X(t) = \left(q + pe^{it}\right)^n$
45. $\phi_X(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right)$
46. 6.

Capítulo 4

1. **a)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $x = 1.3$
2. **a)** 0.1 **b)** 0.1 **c)** 0.1
4. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$
5. $\frac{3}{5}$
6. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $f_Y(x) = \mathcal{X}_{(0,1)}(x)$
7. **a)** $f_Y(x) = \exp(x)\,\mathcal{X}_{(-\infty,0)}(x)$ **b)** $f_Y(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}\,\mathcal{X}_{(2,3)}(x)$
c) $f_Y(x) = \frac{1}{x^2}\mathcal{X}_{(1,\infty)}(x)$
8. 5.2
9. **a)**0.422 2 **b)**0.267 3 **c)** 0.892 44 **d)** 0.129 24 **e)** 0.382 92
10. **a)** 5 **b)** 6.46 **c)** 14.36
11. **a)** 15.50 **b)** 0.0241 **c)** 12.549 **d)** 6.31
12. **a)** 0 **b)** 2.41 %
13. **a)** 92 **b)** 57
14. 89.97 %; 5.82 %; 84.2 %
15. Normal con media $(5\mu - 1)$ y varianza $25\sigma^2$
16. No. Calcular, por ejemplo, $P(4 \leq X \leq 9)$.
17. 0.17619
18. $\alpha = 2.14$
20. 54000
22. 0.283 47
23. 0.606 53
25. **a)** e^{-3} **b)** e^{-1}
26. $f_Y(y) = \lambda\exp(y - \lambda\exp(y))$, $y \in \mathbb{R}$
27. **a)** $F(t) = 1 - \exp\left(-\eta\left(\beta^t - 1\right)\right); t \geq 0$ con $\eta = \frac{\alpha}{\ln\beta}$
b) $F(t) = 1 - \exp\left(-\gamma t - \eta\left(\beta^t - 1\right)\right); t \geq 0$ con $\eta = \frac{\alpha}{\ln\beta}$
30. $F(t) = \left(1 - \frac{1}{t+1}\right), t \geq 0$
31. $F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta+1}t^{\beta+1}\right), t \geq 0$
32. 0.275
33. Cada 7 semanas aproximadamente.
34. **a)** $\frac{1}{26}$; 1.3697×10^{-3} **b)** 3.555×10^{-4}
35. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
37. $Exp(1)$

38. $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.
39. g es la inversa de la función de densidad de una normal estándar
44. Cauchy estándar.

Capítulo 5

1. **a)** 0.3 **b)** 0.9 **d)** $P(Z=-2) = 0.1$, $P(Z=-1) = 0.2$, $P(Z=0) = 0.3$, $P(Z=1) = 0.4$
2. $\alpha = \beta = 0.1$, $\gamma = \eta = \kappa = 0$, $\delta = 0.2$
3. **a)** $P(X=0, Y=0) = \frac{1}{55}$, $P(X=0, Y=1) = \frac{2}{11}$,
$P(X=0, Y=2) = \frac{2}{11}$, $P(X=1, Y=0) = \frac{8}{55}$, $P(X=1, Y=1) = \frac{4}{11}$, $P(X=2, Y=0) = \frac{6}{55}$ **b)** $E(X) = \frac{8}{11}$, $E(Y) = \frac{10}{11}$
4. **b)** $E(X) = \frac{88}{121}$, $E(Y) = \frac{110}{121}$
5. **a)** 6 **b)** 6
7. **a)** 3.7308×10^{-3} **b)** 9
8. $a = b = k = h = \frac{1}{6}$, $d = e = f = 0$; $E(XY) = 0$
9. **a)** $\mathcal{P}(9.4)$ **b)** 0.29
10. $P(Z=-1, W=1) = \frac{1}{16}$, $P(Z=0, W=0) = \frac{1}{4}$,
$P(Z=0, W=2) = \frac{3}{16}$, $P(Z=1, W=1) = \frac{1}{8}$,
$P(Z=1, W=3) = \frac{1}{16}$, $P(Z=2, W=0) = \frac{3}{16}$,
$P(Z=2, W=2) = \frac{1}{16}$, $P(Z=3, W=1) = \frac{1}{16}$.
11. $\frac{41}{324}$; 0.125 1
13. -1
14. 0.351 85
15. No
16. $\rho = \frac{-\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$
17. $9 - 2\sqrt{2}$
19. $EX = m\left(\frac{n+1}{2}\right)$
20. $EX = \binom{r}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^{k-1}\left(\frac{364}{365}\right)^{r-k}$
21. $EY = 365 - \left(\frac{1}{365}\right)^{-1}\left(\frac{364}{365}\right)^{r} - r\left(\frac{364}{365}\right)^{r-1}$
29. Si, $f(x,y) = \frac{e^{-x}}{\pi(1+y^2)}$, $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$.
30. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
31. **b)** $\frac{1}{25}$
32. **b)** $\frac{1}{4}$ **c)**0.305 56
34. $\frac{1}{2}$
35. $\frac{1}{8}$
37. $f_Z(x) = \frac{1}{2}(x-4)\,\mathcal{X}_{(4,5]}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{(5,6]}(x) + \frac{1}{2}(7-x)\,\mathcal{X}_{(6,7]}(x)$.
38. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}$