para todo $0 \leq c < d \leq \infty$, donde Z denota a una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1.

49. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[-1, 1]$. Determinar la función de densidad de $Y = X^k$ donde k es un entero positivo.

    Sugerencia: Considérese dos casos: k es par, k es impar.

50. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. ¿Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria $Y := \lambda X$? Explicar.

Capítulo 5

Vectores Aleatorios

En este capítulo se estudiará el comportamiento conjunto de dos o más variables aleatorias.

5.1. Distribución conjunta de variables aleatorias

En muchos casos es necesario considerar el comportamiento conjunto de dos o más variables. Supóngase, por ejemplo, que se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas y que se desea analizar el comportamiento conjunto de las variables aleatorias X e Y definidas como:

$X :=$ "número de caras obtenidas en los primeros dos lanzamientos"

$Y :=$ "número de caras obtenidas en los dos últimos lanzamientos"

Es claro que:

$$P(X = 0, Y = 0) = P((S, S, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 0, Y = 1) = P((S, S, C)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 1, Y = 0) = P((C, S, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 1, Y = 1) = P(\{(C, S, C), (S, C, S)\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1, Y = 2) = P((S, C, C)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 2, Y = 1) = P((C, C, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 2, Y = 2) = P((C, C, C)) = \frac{1}{8}$$

Esta información se puede resumir en la tabla siguiente:

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Definición 5.1 (vector aleatorio $n-$dimensional) *Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$, n variables aleatorias reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. La $\Im - \mathcal{B}_n-$variable aleatoria $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:*

$$\mathbf{X}(\omega) := (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

se llama vector aleatorio $n-$dimensional.

Definición 5.2 (distribución de un vector aleatorio) *Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio n-dimensional. La medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{B}_n$ por:*

$$P_{\mathbf{X}}(B) := P(\mathbf{X} \in B) \ ; \ B \in \mathcal{B}_n$$

se llama distribución del vector aleatorio $\mathbf{X}$.

Definición 5.3 (función de probabilidad conjunta)
Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional. Si las variables aleatorias X_i; con $i = 1, \cdots, n$, son todas discretas, se dice que el vector aleatorio $\mathbf{X}$ es discreto. En tal caso, se define la función másica de probabilidad de $\mathbf{X}$, o función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_n$, como:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) & si \quad \mathbf{x} \text{ pertenece al rango de } \mathbf{X} \\ 0 & en \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Nota 5.4 *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas. Entonces:*

$$\begin{aligned} P(X_1 = x) &= P\left((X_1 = x) \cap \bigcup_y (X_2 = y)\right) \\ &= P\left(\bigcup_y (X_1 = x, X_2 = y)\right) \\ &= \sum_y P(X_1 = x, X_2 = y). \end{aligned}$$

En general, se tiene que:

Teorema 5.5 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional discreto. Entonces, para todo $j = 1, \cdots, n$ se satisface:*

$$\begin{aligned} &P(X_j = x) \\ &= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \cdots, X_{j-1} = x_{j-1}, X_j = x, \\ &\qquad X_{j+1} = x_{j+1}, \cdots, X_n = x_n). \end{aligned}$$

La función

$$f_{X_j}(x) := \begin{cases} P(X_j = x) & si \quad x \text{ pertenece al rango de } X_j \\ 0 & en \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

se llama distribución marginal de la variable aleatoria X_j.

Ejemplo 5.6 *Sean X e Y variables aleatorias discretas con distribución conjunta dada por:*

$X\backslash Y$	0	1	2	3
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	0

Las distribuciones marginales de X y de Y están dadas, respectivamente, por:

x	-1	1
$P(X = x)$	$\frac{10}{16}$	$\frac{6}{16}$

y

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$

▲

Ejemplo 5.7 *Supóngase que se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas y sean X e Y las variables aleatorias definidas como sigue: $X :=$ "número de caras obtenidas"$Y :=$ "número de lanzamiento en el que se obtiene por primera vez cara", ($Y = 0$ si no hay).*

1. *Hallar la distribución conjunta de X e Y.*
2. *Hallar las distribuciones marginales de X e Y.*
3. *Calcular $P(X \leq 2, Y = 1)$, $P(X \leq 2, Y \leq 1)$ y $P(X \leq 2$ o $Y \leq 1)$.*

Solución:

1. La distribución conjunta de X e Y está dada por:

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0	0

2. Las distribuciones marginales de X e Y están dadas, respectivamente, por:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

3. De los numerales anteriores se deduce:

$$\begin{aligned}
P(X\leq 2, Y=1) &= P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)\\
&\quad +P(X=2,Y=1)\\
&=\frac{3}{8}\\
P(X\leq 2, Y\leq 1) &= P(X\leq 2,Y=1)+P(X\leq 2,Y=0)\\
&=\frac{3}{8}+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)\\
&\quad +P(X=2,Y=0)\\
&=\frac{1}{2}\\
P(X\leq 2 \text{ o } Y\leq 1) &= P(X\leq 2)+P(Y\leq 1)-P(X\leq 2,Y\leq 1)\\
&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\
&\quad +P(Y=0)+P(Y=1)-\frac{1}{2}\\
&=\frac{7}{8}+\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=1. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8 *Una caja contiene tres puntillas, cuatro tachuelas y dos tornillos. Se extraen, al azar, tres objetos(sin reemplazo). Sea X el número de tachuelas y Y el número de puntillas extraídas. Hallar la distribución conjunta de X e Y.*

Solución: Puesto que:

$$P(X=x,Y=y)=\frac{\binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{2}{3-(x+y)}}{\binom{9}{3}}; \text{ para } x,y=0,1,2,3,$$

se tiene que la distribución conjunta de las variables X e Y está dada por:

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0

Las distribuciones marginales de X e Y son, respectivamente,

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

y

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$

▲

Ejemplo 5.9 *Se lanza un dado corriente dos veces consecutivas. Sean:*

$$X_1 := \text{"máximo valor obtenido"}$$
$$X_2 := \text{"suma de los resultados obtenidos"}$$

La función de probabilidad del vector aleatorio $\mathbf{X}=(X_1,X_2)$ está dada por:

$X_1\backslash X_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Las distribuciones marginales de X_1 y X_2 son, respectivamente,

x	1	2	3	4	5	6
$P(X_1=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

y

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_2 = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Asi mismo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 \leq \frac{3}{2}, X_2 \leq \frac{11}{3}\right) &= P\left(X_1 = 1, X_2 = 2\right) + P\left(X_1 = 1, X_2 = 3\right) \\
&= \frac{1}{36} \\
P\left(X_1 \leq \pi, X_2 \leq 2\right) &= P\left(X_1 = 1, X_2 = 2\right) + P\left(X_1 = 2, X_2 = 2\right) \\
&\quad + P\left(X_1 = 3, X_2 = 2\right) \\
&= \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

y en general:

$X_2 \backslash X_1$	$x_1 < 1$	$1 \leq x_1 < 2$	$2 \leq x_1 < 3$	$3 \leq x_1 < 4$	$4 \leq x_1 < 5$	$5 \leq x_1 < 6$	$x_1 \geq 6$
$x_2 < 2$	0	0	0	0	0	0	0
$2 \leq x_2 < 3$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$3 \leq x_2 < 4$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$
$4 \leq x_2 < 5$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
$5 \leq x_2 < 6$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$
$6 \leq x_2 < 7$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$
$7 \leq x_2 < 8$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{21}{36}$
$8 \leq x_2 < 9$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{26}{36}$
$9 \leq x_2 < 10$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{30}{36}$
$10 \leq x_2 < 11$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{33}{36}$
$11 \leq x_2 < 12$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{35}{36}$
$x_2 \geq 12$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	1

donde cada componente, de la tabla, indica la probabilidad de que

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

para los valores de x_1 y x_2, indicados en la primera fila y primera columna, respectivamente. ▲

Lo anterior, motiva la definición siguiente:

Definición 5.10 (función de distribución acumulativa conjunta) *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional. La función definida por:*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) := P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n),$$

para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; se llama función de distribución acumulativa conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ o función de distribución del vector aleatorio $n-$dimensional $\mathbf{X}$.

Nota 5.11 *Al igual que en el caso unidimensional, se tiene que, la distribución del vector aleatorio $\mathbf{X}$ queda completamente determinada por su función de distribución.*

Nota 5.12 *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con función de distribución acumulativa conjunta F. Entonces:*

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= P\left(X_1 \leq x\right) \\
&= P\left((X_1 \leq x) \cap \bigcup_k (X_2 \leq k)\right) \\
&= P\left(\bigcup_k (X_1 \leq x, X_2 \leq k)\right) \\
&= \lim_{k \to \infty} P\left(X_1 \leq x, X_2 \leq k\right) \\
&= \lim_{k \to \infty} F(x, k).
\end{aligned}$$

Análogamente, se deduce que $F_{X_2}(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$. En general, se tiene el teorema siguiente:

Teorema 5.13 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional, con función de distribución acumulativa conjunta F. Para cada $j = 1, \cdots, n$; se tiene que la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X_j está dada por:*

$$F_{X_j}(x) = \lim_{x_1 \to \infty} \cdots \lim_{x_{j-1} \to \infty} \lim_{x_{j+1} \to \infty} \cdots \lim_{x_n \to \infty} F(x_1, \cdots, x_n).$$

La función de distribución F_{X_j} se llama función de distribución acumulativa marginal de la variable aleatoria X_j.

El teorema anterior indica entonces que, si se conoce la función de distribución acumulativa conjunta de las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$, se conocen las marginales. El recíproco, en general, no es válido.

A continuación se presentan algunas de las propiedades de la función de distribución conjunta.

Teorema 5.14 *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *un vector aleatorio n-dimensional. La función de distribución acumulativa conjunta* F *de las variables aleatorias* $X_1, X_2, ..., X_n$ *posee las siguientes propiedades:*

1. $\Delta_a^b F \geq 0$; *para todo* $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *con* $a \leq b$, *donde:*

$$\Delta_a^b F := \sum_{\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\right)} F\left(\epsilon_1 a_1 + (1-\epsilon_1) b_1, \cdots, \epsilon_n a_n + (1-\epsilon_n) b_n\right).$$

2. *F es continua a derecha en cada componente.*

3. *Para todo* $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots a_n \in \mathbb{R}$; $i = 1, \cdots, n$, *se satisface:*

$$\lim_{x \searrow -\infty} F\left(a_1, \cdots, a_{i-1}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lugar } i}}{x}, a_{i+1}, \cdots a_n\right) = 0.$$

4. $$\lim_{(x_1, \cdots, x_n) \to (\infty, \cdots, \infty)} F(x_1, \cdots, x_n) = 1.$$

Demostración. Se hace la demostración para el caso $n = 2$. El caso general se trabaja de manera análoga.

1. Sean $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$; con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$, y:

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq b_1, y \leq b_2\} \\
B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_1, y \leq a_2\} \\
C &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_1, y \leq b_2\} \\
D &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq b_1, y \leq a_2\}.
\end{aligned}$$

Si $I := (A - C) - (D - B)$, entonces, es claro que:

$$\begin{aligned}
0 \leq P_{\mathbf{X}}(I) &= (P_{\mathbf{X}}(A) - P_{\mathbf{X}}(C)) - (P_{\mathbf{X}}(D) - P_{\mathbf{X}}(B)) \\
&= P_{\mathbf{X}}(A) + P_{\mathbf{X}}(B) - P_{\mathbf{X}}(C) - P_{\mathbf{X}}(D) \\
&= F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) \\
&= \Delta_a^b F
\end{aligned}$$

2. Se debe verificar que:

$$\lim_{x \searrow x_0} F(x, y) = F(x_0, y) \tag{5.1}$$

y que

$$\lim_{y \searrow y_0} F(x, y) = F(x, y_0).$$

Se hace la demostración de 5.1. La otra queda como ejercicio para el lector.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow x_0} F(x, y) &= \lim_{x \searrow x_0} P(X \leq x, Y \leq y) \\
&= P\left(\lim_{x \searrow x_0} (X \leq x, Y \leq y)\right) \\
&= P(X \leq x_0, Y \leq y) \\
&= F(x_0, y)
\end{aligned}$$

3. Puesto que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow -\infty} [X \leq x, Y \leq y] &= \lim_{x \searrow -\infty} ([X \leq x] \cap [Y \leq y]) \\
&= \emptyset \cap [Y \leq y] = \emptyset
\end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow -\infty} P[X \leq x, Y \leq y] &= P\left(\lim_{x \searrow -\infty} [X \leq x, Y \leq y]\right) \\
&= P(\emptyset) = 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, se verifica que:

$$\lim_{y \searrow -\infty} P[X \leq x, Y \leq y] = 0$$

4. Es claro que:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x,y) = \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} P(X\leq x, Y\leq y)\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} P(X\leq x) = 1.$$

■

Definición 5.15 (Variables aleatorias conjuntamente continuas) *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aleatorias reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Se dice que las variables son conjuntamente continuas, si existe una función f definida para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, no negativa e integrable, tal que:*

$$P((X_1, X_2, ..., X_n) \in C) = \int_C \cdots \int f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1...dx_n,$$

para todo conjunto Borel C de $\mathbb{R}^n$. La función f se llama función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Nota 5.16 *De la definición anterior se tiene, en particular, que:*

1. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1...dx_n = 1.$

2.
$$P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, ..., t_n)dt_1..dt_n. \quad (5.2)$$

La observación anterior indica que, si se conoce la función de densidad de probabilidad conjunta f, de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$, entonces, se conoce la función de distribución conjunta F. ¿Es válido el recíproco? Esto es, ¿es posible determinar, a partir de la función de distribución conjunta F, la función de densidad conjunta f? La respuesta a esta pregunta la ofrece el teorema siguiente:

Teorema 5.17 *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta F y función de densidad conjunta f. Entonces:*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}$$

en los puntos (x,y) donde $f(x,y)$ es continua.
Demostración. *Al aplicar el teorema fundamental del cálculo a 5.2 se obtiene:*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv$$

luego:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right) = f(x,y)$$

Puesto que, $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}$ existen y son continuas, entonces,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}$$

con lo cual queda demostrado el teorema. ■

Es más, si $X_1, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias con función de distribución conjunta F, se tiene que la función $g(\cdot, \cdots, \cdot)$, definida sobre $\mathbb{R}^n$, por:

$$g(u_1, \cdots, u_n) := \begin{cases} \left.\frac{\partial^n F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}\right|_{(x_1,x_2,...,x_n)=(u_1,\cdots,u_n)}, & \text{donde las derivadas existen} \\ 0, & \text{donde las derivadas no existen.} \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$.

Supóngase ahora que X e Y son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta f y sea g la función, de variable real, definida por:

$$g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Es claro que:

$$\int_{-\infty}^{x} g(u)du = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)dydu$$
$$= \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{t} f(u,y)dydu$$
$$= \lim_{t\to\infty} F(x,t) = F_X(x).$$

Además, como $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$, entonces, g es una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, llamada *función de densidad marginal de* X y denotada por $f_X(x)$.

Análogamente,

$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

es una función de densidad de la variable aleatoria Y.

En general, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 5.18 *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son n variables aleatorias reales, con f.d.p conjunta f, entonces,*

$$f_{X_j}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n)dx_1...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n$$

para $j = 1, 2, ..., n$; es una función de densidad de la variable aleatoria X_j.

Ejemplo 5.19 *Sean X e Y variables aleatorias con f.d.p conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy^2 & si \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases}$$

1. *Calcular $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4},\ 0 < Y \leq \frac{1}{3}\right)$.*
2. *Determinar $P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4})$.*

Solución:

1.

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4},\ 0 < Y \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6xy^2 dxdy = 1.1574 \times 10^{-2}$$

2.

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_0^1 6xy^2 dydx = 0.3125. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.20 *Sean X e Y variables aleatorias con f.d.p conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x}{y^3} & si \quad 0 < x < 1;\ y > 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Determinar:

1. *$P\left(X < \frac{1}{2} \mid Y > 6\right)$.*
2. *Las funciones de densidad marginales de X e Y.*

Solución:

1.

$$P\left(X < \frac{1}{2} \mid Y > 6\right) = \frac{P(X < \frac{1}{2}, Y > 6)}{P(Y > 6)} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \int_6^{\infty} \frac{4x}{y^3} dydx}{\int_6^{\infty} \int_0^1 \frac{4x}{y^3} dxdy} = \frac{6.9444 \times 10^{-3}}{2.7778 \times 10^{-2}} = 0.25$$

2.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{4x}{y^3} dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 \frac{4x}{y^3} dx & \text{si} \quad y > 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{y^3} & \text{si} \quad y > 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.21 *Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) & si \quad 0 < x < 1;\ 0 < y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Hallar:

1. *La función de distribución acumulativa conjunta de X e Y.*

2. Las funciones de densidad marginales de X e Y.

Solución:

1.
$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,t)dudt$$
$$= \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{2} & \text{si} \quad 0<x<1;\ 0<y<1 \\ \frac{x^2+x}{2} & \text{si} \quad 0<x<1;\ y\geq 1 \\ \frac{y+y^2}{2} & \text{si} \quad x\geq 1;\ 0<y<1 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 1;\ y\geq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

2.
$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

y
$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & \text{si} \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.22 *Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*
$$f(x,y) = \begin{cases} k & si \quad 0\leq x\leq 2;\ 0\leq y\leq 1 \ y \ 2y\leq x \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Hallar:

1. *El valor de k.*
2. *La función de distribución acumulativa conjunta de X e Y.*
3. *Las funciones de densidad marginales de X y de Y.*
4. *$P(X\leq 3Y)$.*

Solución:

1.
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}} kdydx = k$$

2.
$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,t)dudt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0,\ y<0 \\ xy-y^2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \frac{x}{2},\ 0\leq y\leq 1 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2,\ \frac{x}{2}\leq y\leq 1 \\ 2y-y^2 & \text{si} \quad x>2,\ 0\leq y\leq 1 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2,\ y\geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 2,\ y\geq 1 \end{cases}$$

3.
$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\frac{x}{2}} dy & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

y
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{2y}^{2} dx & \text{si} \quad 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2-2y & \text{si} \quad 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

4.
$$P(X\leq 3Y) = \int_0^2\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} dydx = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangle$$

A continuación se define el valor esperado de una función de una variable aleatoria n-dimensional.

Definición 5.23 ***(valor esperado de una función de un vector aleatorio)***
Sean $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional y $g(\cdot,\cdots,\cdot)$ una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ y de valor real. El valor esperado de la función $g(X_1,\cdots,X_n)$, denotado por $E(g(X_1,\cdots,X_n))$, se define como:
$$E(g(X_1,\cdots,X_n)) :=$$
$$\begin{cases} \sum_{x_1}\cdots\sum_{x_n} g(x_1,\cdots,x_n)\,P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n), & \textit{en el caso discreto.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n, & \textit{en el caso continuo.} \end{cases}$$

siempre y cuando, la suma múltilple, en el caso discreto, o la integral múltiple, en el caso continuo, converjan absolutamente.

Ejemplo 5.24 *Supóngase que se lanza un dado corriente dos veces consecutivas. Sean $X :=$ "máximo valor obtenido" e $Y :=$ "suma de los valores obtenidos". En este caso, $E(XY) = \frac{1232}{36}$* ▲

Ejemplo 5.25 *Sea (X, Y, Z) un vector aleatorio tridimensional, con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz & si \quad 0 < x < 1;\ 0 < y < 1 \ y\ 0 < z < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Se tiene que $E(5X - 2Y + Z) = \frac{8}{3}$ y $E(XY) = \frac{4}{9}$. ▲

Teorema 5.26 *Si X e Y son variables aleatorias cuyos valores esperados existen, entonces, el valor esperado de $(X+Y)$ también existe y es igual a la suma de los valores esperados.*
Demostración. *Se hace la demostración para el caso continuo. El caso discreto se trabaja de manera análoga. Supóngase que f es la función de densidad de probabilidad conjunta de X e Y. Entonces:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x+y|\, f(x,y)dxdy &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (|x|+|y|)\, f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y| \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_Y(y)dy < \infty.
\end{aligned}$$

por lo tanto, $E(X+Y)$ existe. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy \\
&= E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

■

Nota 5.27 *Si X es una variable aleatoria de tipo discreto y Y es una variable aleatoria de tipo continuo, el resultado sigue siendo válido.*

En general se tiene que:

Teorema 5.28 *Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias cuyos valores esperados existen, entonces, el valor esperado de la suma de las variables aleatorias también existe y es igual a la suma de los valores esperados.*
Demostración. *Como ejercicio.* ■

Ejemplo 5.29 *Se tiene una urna con N bolas de las cuales R son de color rojo y las restantes $(N-R)$ son de color blanco. Se extrae una muestra de tamaño n, sin sustitución. Sea X el número de bolas rojas extraídas en la muestra. De la teoría, vista en el capítulo 3, se sabe que la variable aleatoria X tiene una distribución hipergeométrica de parámetros n, R y N; y que por lo tanto $EX = \frac{nR}{N}$. A continuación, se va a deducir este mismo resultado, pero expresando a X como una suma de variables aleatorias y aplicando el teorema anterior. Sean X_i; con $i = 1, \cdots n$, las variables aleatorias definidas como sigue:*

$$X_i := \begin{cases} 1 & si \quad la\ i\text{-ésima bola extraída es roja} \\ 0 & si \quad la\ i\text{-ésima bola extraída es blanca} \end{cases}$$

es claro que:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

por lo tanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R}{N} = \frac{nR}{N}.$$ ▲

5.2. Variables aleatorias independientes

Definición 5.30 (variables aleatorias independientes) *Sean X e Y dos variables aleatorias reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, se dice que ellas son independientes, si se satisface que:*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B),$$

para todo A y B conjuntos Borel de $\mathbb{R}$.

Nota 5.31 (vectores aleatorios independientes) *La definición de variables aleatorias independientes puede generalizarse a vectores aleatorios, de la siguiente manera: dos vectores aleatorios n -dimensionales* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *definidos sobre el mismo espacio de probabilidad* $(\Omega, \Im, P)$, *se dicen independientes, si se satisface que:*

$$P(\mathbf{X} \in A,\ \mathbf{Y} \in B) = P(\mathbf{X} \in A)\, P(\mathbf{Y} \in B),$$

para todo A *y* B *conjuntos Borel de* $\mathbb{R}^n$.

Supóngase que X e Y son variables aleatorias independientes, entonces, de la definición anterior, se sigue que:

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y); \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

esto es,

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y); \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Recíprocamente, si la condición 5.3 se satisface, entonces, las variables son independientes.

Supóngase ahora que X e Y son variables aleatorias discretas independientes, entonces:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y); \tag{5.4}$$

para todo x en el rango de X y todo y en el rango de Y.

Recíprocamente, si la condición 5.4 se satisface, entonces, las variables aleatorias son independientes.

Si X e Y son variables aleatorias independientes, con función de densidad conjunta $f(x, y)$, entonces:

$$P(x < X \le x{+}dx,\ y < Y \le y{+}dy) = P(x < X \le x{+}dx)P(y < Y \le y{+}dy).$$

esto es:

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y); \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

Recíprocamente, si la condición 5.5 se satisface, entonces, las variables son independientes. Más en general, se tiene que las variables aleatorias X e Y son independientes, si y sólo si, su función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ puede expresarse como el producto de dos funciones: una en términos solamente de la primera variable y otra en términos sólo de la segunda variable. En otras palabras, X e Y son independientes si existen $h(x)$ y $g(y)$, funciones reales, tales que:

$$f(x,y) = h(x)g(y); \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty.$$

Teorema 5.32 *Si* X *e* Y *son variables aleatorias independientes cuyos valores esperados existen, entonces, el valor esperado de* XY *también existe y es igual al producto de los valores esperados.*

Demostración. *Se hace la demostración para el caso continuo. El caso discreto se trabaja de manera análoga. Supóngase que* f *es la función de densidad de probabilidad conjunta de* X *e* Y. *Entonces:*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |xy|\, f(x,y)dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|y|\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_Y(y)\, dy\right) f_X(x)\, dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_Y(y)\, dy\right) < \infty\end{aligned}$$

por lo tanto, $E(XY)$ *existe. Suprimiendo las barras de valor absoluto, en la prueba anterior, se obtiene que:*

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

■

Nota 5.33 *Supóngase que* X *y* Y *son variables aleatorias independientes y que* f *y* g *son funciones medibles de variable y valor real, esto es,* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *y* $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *para todo* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *entonces se tiene que* $f(X)$ *y* $g(Y)$ *son variables aleatorias independientes.*

Nota 5.34 *Supóngase ahora que* X *e* Y *son variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de momentos existen. Sea* $Z := X + Y$, *entonces, se tiene que:*

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= E(\exp tZ) \\ &= E(\exp(tX + tY)) \\ &= E(\exp(tX)\exp(tY)) \\ &= E(\exp(tX))E(\exp(tY)) \\ &= m_X(t)m_Y(t), \end{aligned}$$

esto es, la función generadora de momentos de Z *existe y es igual al producto de las funciones generadoras de momentos de* X *e* Y.

A continuación se presentan ejemplos en los que se aplican los resultados anteriores.

Ejemplo 5.35 *En una urna hay tres bolas rojas y seis azules. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño dos (con reemplazo). Sean X e Y las variables aleatorias definidas por:*

$$X := \begin{cases} 1 & \textit{si la primera bola extraída es roja} \\ 0 & \textit{si la primera bola extraída es azul} \end{cases}$$

$$Y := \begin{cases} 1 & \textit{si la segunda bola extraída es roja} \\ 0 & \textit{si la segunda bola extraída es azul} \end{cases}$$

¿Son X e Y independientes? Explicar.

Solución: La distribución conjunta de X e Y está dada por:

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Es fácil verificar que:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y); \text{ para todo } x, y \in \{0, 1\},$$

esto es, X e Y son variables aleatorias independientes, lo cual era de esperarse, pues la composición de la urna, tanto en la primera como en la segunda extracción, es la misma. ▲

Ejemplo 5.36 *Se va a resolver el mismo ejemplo anterior, pero suponiendo que la extracción se hace sin sustitución. En este caso se tiene que la distribución conjunta de X e Y está dada por:*

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$
1	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

Como:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{5}{12} \neq \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = P(X = 0)P(Y = 0),$$

entonces, X e Y no son independientes. ▲

Ejemplo 5.37 *Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad dadas por:*

$$f(x) = \frac{3x^2}{8}\mathcal{X}_{(0,2)}(x)$$
$$g(y) = y^{-2}\mathcal{X}_{(1,\infty)}(y)$$

Calcular $P(XY > 1)$.

Solución: Como X e Y son independientes, su función de densidad de probabilidad conjunta está dada por:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8y^2} & \text{si} \quad 0 < x < 2;\ y > 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$P(XY > 1) = \int_1^\infty \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{3x^2}{8y^2} dx dy = \frac{31}{32}. \quad ▲$$

Nota 5.38 *Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes. Es claro que:*

$$\begin{aligned} P(X + Y = z) &= \sum_{x=0}^{z} P(X = x, Y = z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} P(X = x)P(Y = z - x). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.39 *Supóngase que X e Y son variables aleatorias independientes con $X \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda)$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\mu)$. Hallar la distribución de $Z = X + Y$.*

Solución: Las variables aleatorias X e Y toman los valores $0, 1, \cdots$. Por lo tanto, la variable aleatoria Z toma también los valores $0, 1, \cdots$. Sea $z \in \{0, 1, \cdots\}$, entonces:

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{x=0}^{z} P(X = x)P(Y = z - x) \\ &= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= \frac{1}{z!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\lambda^x\mu^{z-x} \\ &= \frac{1}{z!}e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^z. \end{aligned}$$

Esto es, $Z \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. ▲

Nota 5.40 *Supóngase que X e Y son variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ y funciones de* *densidad marginales f_X y f_Y, respectivamente. La función de distribución de la variable aleatoria $Z = X + Y$, puede obtenerse como sigue:*

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\
&= \iint_{\{x+y\leq z\}} f(x,y)dxdy \\
&= \iint_{\{x+y\leq z\}} f_X(x) f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y)dxdy \qquad (5.6) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y)dy
\end{aligned}$$

Al derivar, la ecuación 5.6, se obtiene que la función de densidad de la variable aleatoria Z está dada por:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} F_X(z-y) f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria Z se llama la convolución de las funciones de densidad f_X y f_Y y se denota por $f_X * f_Y$.

Ejemplo 5.41 *Sean X y Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. La función de densidad de $Z = X + Y$ está dada por:*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= (f_X * f_Y)(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(z-u)} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(z-u) \lambda e^{-\lambda u} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda z} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(z-u) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(u)du.
\end{aligned}$$

Puesto que:

$$\mathcal{X}_{(0,\infty)}(z-u)\mathcal{X}_{(0,\infty)}(u) = \begin{cases} 1 & si \quad z > u > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(f_X * f_Y)(z) &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(z) \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(2)} (\lambda z) e^{-\lambda z} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(z)
\end{aligned}$$

esto es, $Z \overset{d}{=} \Gamma(2,\lambda)$. ▲

Ejemplo 5.42 *Sean X y Y variables aleatorias independientes tales que $X \overset{d}{=} \mathcal{U}\ [0,2]$ y $Y \overset{d}{=} Exp(1)$. Calcular $P(X+Y \geq 2.5)$.*

Solución: La función de densidad de probabilidad conjunta de X e Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2;\ y > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(X+Y \geq 2.5) &= \iint_{\{(x,y):x+y\geq 2.5\}} f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^2 \int_{\frac{5}{2}-x}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y} dydx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-(\frac{5}{2}-x)} dx \\
&= 0.26222.
\end{aligned}$$ ▲

El concepto de independencia puede generalizarse a n variables aleatorias como sigue:

Definición 5.43 (independencia de n variables aleatorias) *n variables aleatorias reales $X_1, X_2, \cdots, X_n$ definidas sobre el mismo espacio de probabilidad se llaman independientes, si y sólo si, se satisface que:*

$$P(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n),$$

para todos los conjuntos Borel $A_1, A_2, ..., A_n$ de $\mathbb{R}$.

Nota 5.44 (independencia de n vectores aleatorios) *La definición anterior puede generalizarse a vectores aleatorios de la manera siguiente: n vectores aleatorios k-dimensionales $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$, definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, se dicen independientes, si y sólo si, se satisface que:*

$$P(\mathbf{X}_1 \in A_1, ..., \mathbf{X}_n \in A_n) = P(\mathbf{X}_1 \in A_1)...P(\mathbf{X}_n \in A_n),$$

para todos los conjuntos Borel $A_1, A_2, ..., A_n$ de $\mathbb{R}^n$.

Nota 5.45 *Si $X_1, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de momentos existen, entonces, la función generadora de momentos de $Z := X_1 + \cdots + X_n$ también existe y es igual al producto de las funciones generadoras de momentos de las X_i. Un resultado similar se tiene para las funciones características.*

Ejemplo 5.46 *Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$, n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, entonces, $Z := X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución gamma de parámetros n y λ. En efecto, la función generadora de momentos de $Z := X_1 + \cdots + X_n$ está dada por:*

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= E(\exp tZ) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E(\exp tX_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right); \quad si\ t < \lambda \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n; \quad si\ t < \lambda \end{aligned}$$

la cual corresponde a la función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros n y λ. ▲

Ejemplo 5.47 *Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$, n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución normal estándar. Sea*

$$Z := X_1^2 + \cdots + X_n^2.$$

Se sabe que si una variable aleatoria tiene distribución normal estándar, entonces, su cuadrado tiene distribución ji-cuadrado con 1 grado de libertad.

Por lo tanto, la función generadora de momentos de Z está dada por:

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \prod_{k=1}^{n} m_{X_k}(t) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad si\ t < \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}; \quad si\ t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

esto es, $Z \overset{d}{=} \mathcal{X}^2_{(n)}$. ▲

Ejemplo 5.48 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aleatorias independientes y supóngase que $X_k \overset{d}{=} \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$; para $k = 1, \cdots, n$. Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, n constantes reales. Entonces, la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Z := \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n$ está dada por:*

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= E\left(\exp t\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right)\right) \\ &= E\left(\prod_{k=1}^{n} \exp(t\alpha_k X_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E(\exp(t\alpha_k X_k)) \\ &= \prod_{k=1}^{n} m_{X_k}(t\alpha_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \exp\left(t\alpha_k\mu_k + \frac{(t\alpha_k)^2}{2}\sigma_k^2\right) \\ &= \exp\left(t\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\mu_k) + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\sigma_k)^2\right) \end{aligned}$$

esto es, $Z \overset{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; donde $\mu := \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\mu_k)$ y $\sigma^2 := \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\sigma_k)^2$. ▲

Ejemplo 5.49 *Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$, n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución normal de parámetros μ y σ^2. La* *variable aleatoria* $\overline{X}$ *definida por:*

$$\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$$

tiene distribución normal de parámetros μ *y* $\frac{\sigma^2}{n}$. *En consecuencia:*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1). \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.50 (distribución del máximo y el mínimo) *Sean* $X_1, \cdots, X_n$, n *variables aleatorias reales definidas sobre* $(\Omega, \Im, P)$ *y considérense las variables aleatorias* Y *y* Z *definidas como sigue:*

$$\begin{array}{rcl} Y := \text{máx}(X_1, \cdots, X_n) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \text{máx}(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} Z := \text{mín}(X_1, \cdots, X_n) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \text{mín}(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \end{array}.$$

Es claro que:

$$F_Y(y) := P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y, \cdots, X_n \leq y)$$

y que:

$$F_Z(z) := P(Z \leq z) = 1 - P(X_1 > z, \cdots X_n > z).$$

Por lo tanto, si las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$ *son independientes, entonces:*

$$F_Y(y) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq y) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(y)$$

y

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - P(X_k \leq z)] \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - F_{X_k}(z)] \end{aligned}$$

siendo $F_{X_k}(\cdot)$ *la función de distribución de la variable aleatoria* X_k, *con* $k = 1, \cdots, n$. $\blacktriangle$

Ejemplo 5.51 *Sean* X *y* Y *variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial de parámetro* a. *Determinar la función de densidad de la variable aleatoria* $Z := \text{máx}\{X, Y^3\}$

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria $U = Y^3$ está dada por:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{a}{3\sqrt[3]{u^2}} e^{-a\sqrt[3]{u}} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como las variables aleatorias X y Y^3 son independientes, entonces, la variable aleatoria $Z = \text{máx}\{X, Y^3\}$ tiene como función de distribución acumulativa a:

$$F_Z(z) = F_X(z) F_{Y^3}(z).$$

Por lo tanto, la función de densidad de Z está dada por:

$$f_Z(z) = f_X(z) F_{Y^3}(z) + F_X(z) f_{Y^3}(z),$$

esto es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} ae^{-az} + \frac{a}{3\sqrt[3]{z^2}} e^{-a\sqrt[3]{z}} - a(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}) e^{-a\sqrt[3]{z} - az} & \text{si} \quad z > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Nota 5.52 *Si* $X_1, X_2, ..., X_n$ *son* n *variables aleatorias independientes, entonces,* X_1, $X_2, ..., X_k$ *;con* $k \leq n$, *también son independientes. En efecto, si* $A_1, A_2, ..., A_k$ *son conjuntos Borel de* $\mathbb{R}$, *entonces:*

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, ..., X_k \in A_k) &= P(X_1 \in A_1, \cdots, X_k \in A_k, X_{k+1} \in \mathbb{R}, \\ &\qquad \cdots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_k \in A_k) P(X_{k+1} \in \mathbb{R}) \\ &\qquad \cdots P(X_n \in \mathbb{R}) \\ &= P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_k \in A_k). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Supóngase que X_1, X_2 y X_3 son variables aleatorias discretas independientes y sean $Y_1 := X_1 + X_2$ y $Y_2 := X_3^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = z, Y_2 = w) &= \sum_x P(X_1 = x, X_2 = z - x, X_3^2 = w) \\ &= \sum_x P(X_1 = x) P(X_2 = z - x) P(X_3 = \pm\sqrt{w}) \\ &= P(X_3 = \pm\sqrt{w}) \sum_x P(X_1 = x) P(X_2 = z - x) \\ &= P(X_1 + X_2 = z) P(X_3^2 = w). \end{aligned}$$

Esto es, $Y_1 := X_1 + X_2$ y $Y_2 := X_3^2$ son variables aleatorias independientes. ¿Es este resultado válido en general? La respuesta a esta pregunta la da el teorema siguiente, cuya demostración se omite, pues ella requiere de resultados de teoría de la medida.

Teorema 5.53 *Sean $X_1, \cdots, X_n$, n variables aleatorias independientes. Sean Y una variable aleatoria definida en términos de $X_1, \cdots, X_k$ y Z una variable aleatoria definida en términos de $X_{k+1}, \cdots, X_n$; donde $1 \leq k < n$. Entonces, Y y Z son independientes.*

Ejemplo 5.54 *Sean $X_1, \cdots, X_5$ variables aleatorias independientes. Entonces, $Y = X_1X_2 + X_3$ y $Z = e^{X_5} \sin X_4$ son variables aleatorias independientes.* ▲

5.3. Covarianza y coeficiente de correlación

Definición 5.55 (covarianza) *Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y tales que $E(X^2) < \infty$ y $E(Y^2) < \infty$. La covarianza entre X e Y se define como:*

$$Cov(X,Y) := E((X - EX)(Y - EY)).$$

Nota 5.56 *Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y tales que $E\left(X^2\right) < \infty$ y $E\left(Y^2\right) < \infty$. Como $|X| \leq 1 + X^2$, entonces, se obtiene la existencia de $E(X)$. Por otra parte, como $|XY| \leq X^2 + Y^2$, entonces, se sigue la existencia del valor esperado de $(X - E(Y))(Y - E(Y))$.*

Teorema 5.57 *Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y tales que $E\left(X^2\right) < \infty$ y $E\left(Y^2\right) < \infty$. Entonces:*

1. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
3. $Var(X) = Cov(X,X)$.
4. $Cov(aX + b, Y) = aCov(X,Y)$; *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración. *Sólo se hace la demostración de 4. Las demás quedan como ejercicio.*

$$\begin{aligned} Cov(aX + b, Y) &= E(((aX + b) - E(aX + b))(Y - E(Y))) \\ &= E((aX + b - aE(X) - b)(Y - E(Y))) \\ &= aCov(X,Y). \end{aligned}$$

■

Nota 5.58 *De la primera propiedad de la covarianza se deduce que si X e Y son independientes, entonces, $Cov(X,Y) = 0$. El recíproco no es válido en general, como lo demuestra el ejemplo siguiente.*

Ejemplo 5.59 *Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\Im = \wp(\Omega)$ y P dada por: $P(1) = P(2) := \frac{2}{5}$, $P(3) = P(4) := \frac{1}{10}$. Las variables aleatorias X e Y definidas por: $X(1) = Y(2) := 1$, $X(2) = Y(1) := -1$, $X(3) = Y(3) := 2$ y $X(4) = Y(4) := -2$ no son independientes, pero $Cov(X,Y) = 0$.* ▲

Teorema 5.60 (desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sean X e Y dos variables con $E\left(X^2\right) < \infty$ y $E\left(Y^2\right) < \infty$, entonces, $|E(XY)|^2 \leq E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$. Se tiene la igualdad, si y sólo, si existen constantes reales a y b no simultáneamente cero tales que $P(aX + bY = 0) = 1$.*

Demostración. *Sea $\alpha = E\left(Y^2\right)$ y $\beta = -E(XY)$. Es claro que $\alpha \geq 0$. Como el resultado se tiene trivialmente para $\alpha = 0$, se considera únicamente el caso $\alpha > 0$. Se tiene que:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq E((\alpha X + \beta Y)^2) = E(\alpha^2X^2 + 2\alpha\beta XY + \beta^2Y^2) \\ &= \alpha(E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) - E(XY)E(XY)) \end{aligned}$$

como $\alpha > 0$, entonces, se obtiene el resultado. Si $(E(XY))^2 = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$, entonces, $E(\alpha X + \beta Y)^2 = 0$. Por lo tanto, con probabilidad 1, se tiene que $(\alpha X + \beta Y) = 0$. Si $\alpha > 0$, se puede tomar $a = \alpha$ y $b = \beta$. Si $\alpha = 0$, entonces, se puede tomar $a = 0$ y $b = 1$. Recíprocamente, si existen números reales a y b no simultáneamente cero tales que $aX + bY = 0$, con probabilidad 1, entonces, $aX = -bY$ con probabilidad 1 y en tal caso es fácil verificar que $|E(XY)|^2 = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$. ■

Nota 5.61 *Tomando $|X|$ y $|Y|$ en lugar de X y de Y, en el teorema anterior, se llega a:*

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

Si se aplica el resultado anterior a las variables $(X - E(X))$ y $(Y - E(Y))$ se obtiene $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{VarX}\sqrt{VarY}$.

Teorema 5.62 *Si X e Y son variables aleatorias reales con varianzas finitas, entonces, $Var(X+Y) < \infty$ y se tiene que:*

$$Var(X+Y) = VarX + VarY + 2Cov(X,Y). \tag{5.8}$$

Demostración. *Para ver que $Var(X+Y) < \infty$ basta verificar que*

$$E(X+Y)^2 < \infty.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} E(X+Y)^2 &= E\left(X^2\right) + 2E\left(XY\right) + E\left(Y^2\right) \\ &\leq E\left(X^2\right) + 2E\left(|XY|\right) + E\left(Y^2\right) \\ &\leq 2(E\left(X^2\right) + E\left(Y^2\right)) < \infty \end{aligned}$$

aplicando las propiedades del valor esperado se obtiene 5.8. ∎

En general se tiene que:

Teorema 5.63 *Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias con varianzas finitas, entonces, $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) < \infty$ y se satisface:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j).$$

Demostración. *Se deja como ejercicio.* ∎

Nota 5.64 *Puesto que cada par de índices i, j; con $i \neq j$ aparece dos veces en la suma anterior, se tiene que ésta es equivalente a:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias independientes con varianzas finitas, entonces:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Ejemplo 5.65 *Supóngase que se muestran n fotos de diferentes bebés, cada una correspondiente a una persona de la farándula, actualmente conocida por el público en general, y se le pregunta a un observador cuál foto corresponde a cada persona. Sea X la variable aleatoria que representa el número de respuestas correctas. Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.*

Solución: Sea

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{el observador identifica correctamente la } i\text{-ésima foto.} \\ 0 & \text{en} \quad \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene que:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Por lo tanto:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Por otra parte, se tiene que:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j),$$

como

$$Var(X_i) = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

y

$$\begin{aligned} E\left(X_i X_j\right) &= P(X_i = 1, X_j = 1) \\ &= P(X_j = 1 \mid X_i = 1) P(X_i = 1) \\ &= \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= E\left(X_i X_j\right) - E\left(X_i\right) E\left(X_j\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n(n-1)}\right]. \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene:

$$Var(X) = \frac{n(n-1)}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1. \quad \blacktriangle$$

La covarianza es una medida de la asociación lineal entre dos variables aleatorias. Una covarianza "grande" indica que con probabilidad 1, hay una relación de tipo lineal entre las dos variables. Pero, ¿qué significa que la covarianza sea "grande"? ¿cómo se puede calificar la magnitud de una covarianza? de hecho, la propiedad 4. de la covarianza establece que el valor de ésta depende de la escala de medida que se utilice. Por esta razón, es difícil, en casos concretos, determinar a simple vista, si una covarianza es "grande" o no. Para eliminar este problema, el matemático inglés Karl Pearson (1857-1936), quien desarrolló la gran mayoría de las técnicas estadísticas modernas, introdujó el concepto siguiente:

Definición 5.66 (coeficiente de correlación) *Sean X e Y variables aleatorias reales, con $0 < Var(X) < \infty$ y $0 < Var(Y) < \infty$. El coeficiente de correlación entre X e Y se define como:*

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

Teorema 5.67 *Sean X e Y variables aleatorias reales con $0 < Var(X) < \infty$ y $0 < Var(Y) < \infty$.*

1. $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$.
2. $|\rho(X,Y)| \leq 1$.
3. $\rho(X,X) = 1$ *y* $\rho(X,-X) = -1$.
4. $\rho(aX+b,Y) = \rho(X,Y)$; *para* $a,b \in \mathbb{R}$, *con* $a > 0$.
5. $|\rho(X,Y)| = 1$, *si y sólo si, existen constantes* $a,b \in \mathbb{R}$ *no simultáneamente cero tales que* $P(Y = aX+b) = 1$.

Demostración. *Se hace solamente la demostración de los numerales 2. y 5. Los demás quedan como ejercicio para el lector.*

2. *Sean*

$$X^* := \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

y

$$Y^* := \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}$$

Es claro que $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ y $Var(X^*) = Var(Y^*) = 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\rho(X^*,Y^*) &= E(X^*Y^*) \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \\ &= \rho(X,Y)\end{aligned}$$

Luego:

$$0 \leq Var(X^* \pm Y^*) = Var(X^*) \pm 2Cov(X^*,Y^*) + Var(Y^*) = 2(1 \pm \rho(X,Y))$$

de donde se deduce:

$$|\rho(X,Y)| \leq 1$$

5. *Sean X^* e Y^*, como en el numeral 2. Es claro que:*

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) = 1 &\iff \rho(X^*,Y^*) = 1 \\ &\iff (E(X^*Y^*))^2 = E(X^*)^2E(Y^*)^2 \\ &\iff (\exists\alpha,\beta)(\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)(P(\alpha X^* + \beta Y^* = 0) = 1) \\ &\iff P\left(\alpha\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right) + \beta\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right) = 0\right) = 1 \\ &\iff P(\widetilde{\alpha}X + \widetilde{\beta}Y = C) = 1,\end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{Var(X)}},\ \widetilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{Var(Y)}}\ y\ C = \frac{\alpha E(X)}{\sqrt{Var(X)}} + \frac{\beta E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}},$$

esto es,

$$\rho(X,Y) = 1 \iff P(Y = aX+b) = 1,$$

siendo a,b constantes apropiadas.

Análogamente, se trabaja el caso $\rho(X,Y) = -1$.

■

El item 5., del teorema anterior, indica que si $|\rho(X,Y)| \approx 1$, entonces, $Y(\omega) \approx aX(\omega) + b$; para todo $\omega \in \Omega$. En la práctica, un coeficiente de correlación "grande", en valor absoluto, indica que se puede predecir Y a partir de X y viceversa.

5.4. Distribución de una función de un vector aleatorio

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio y sean $g_1(\cdot, \cdots, \cdot), \cdots, g_k(\cdot, \cdots, \cdot)$ funciones definidas sobre $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y de valor real. Supóngase que $Y_1 := g_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, Y_k := g_k(X_1, \cdots, X_n)$ son variables aleatorias reales. Se desea determinar la distribución conjunta de las variables aleatorias $Y_1, \cdots, Y_k$, en términos de la distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$.

Supóngase, inicialmente, que las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$ son discretas y que se conoce su distribución conjunta. Es claro que:

$$
\begin{aligned}
P(Y_1 = y_1, \cdots, Y_k = y_k) &= P(g_1(X_1, \cdots, X_n) = y_1, \cdots, g_k(X_1, \cdots, X_n) = y_k) \\
&= \sum_{\substack{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \\ g_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \cdots, x_n) = y_k}} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.68 *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribución conjunta dada por:*

$X_1 \backslash X_2$	0	1
-1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

Sean $g_1(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ y $g_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Es claro que, las variables aleatorias

$$Y_1 := g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \text{ y } Y_2 := g_2(X_1, X_2) = X_1 X_2$$

toman, respectivamente, los valores $-1, 0, 1, 2$ y $-1, 0, 1$. La distribución conjunta de Y_1 y Y_2 está dada por:

$Y_1 \backslash Y_2$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{7}$	0
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
1	0	$\frac{2}{7}$	0
2	0	0	$\frac{1}{7}$

▲.

Ejemplo 5.69 *Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias con distribución conjunta dada por:*

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$P((X_1, X_2, X_3) = \mathbf{x})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Sean $g_1(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$, $g_2(x_1, x_2, x_3) = |x_3 - x_2|$. La distribución conjunta de $Y_1 := g_1(X_1, X_2, X_3)$ y $Y_2 := g_2(X_1, X_2, X_3)$ está dada por:

$Y_2 \backslash Y_1$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	0

. ▲

Para el caso de variables aleatorias absolutamente continuas se tiene resultado siguiente, el cual se presenta sin demostración. El lector interesado puede consultar la demostración en [Jac].

Teorema 5.70 (teorema de transformación)
Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio con densidad conjunta $f_{\mathbf{X}}$. Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación inyectiva. Supóngase que tanto g como su inversa $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas. Si las derivadas parciales de h existen y son continuas y si su jacobiano, J, es diferente de cero, entonces, el vector aleatorio $\mathbf{Y} := g(\mathbf{X})$ tiene función de densidad conjunta $f_{\mathbf{Y}}$ dada por:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} |J(\mathbf{y})| \, f_{\mathbf{X}}(h(\mathbf{y})) & \text{si } \mathbf{y} \text{ está en el rango de } g \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 5.71 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, *donde* $Y_1 = X_1 + X_2$ *y* $Y_2 = X_1 - X_2$.

Solución: En este caso se tiene que

$$g(x_1, x_2) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

La transformación inversa está dada por:

$$h(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}\right).$$

y el jacobiano J de la transformación inversa por:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{Y}$ es:

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < y_1 + y_2 < 2 \ , \ 0 < y_1 - y_2 < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.72 ***(distribución de la suma y de la diferencia de variables aleatorias)*** *Sean* X *e* Y *variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta* f. *Sean* $Z := X + Y$ *y* $W := X - Y$. *Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de* Z *y* W. *Deducir luego, una función de densidad de* Z *y una función de densidad de* W.

Solución: Al igual que en el ejemplo anterior se tiene que:

$$g(x, y) := (x + y, x - y).$$

La transformación inversa h, está dada por:

$$h(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right).$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W está dada por:

$$f_{(Z,W)}(x, y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right).$$

luego,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f\left(\frac{z + y}{2}, \frac{z - y}{2}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z - u, u) du. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f\left(\frac{x + w}{2}, \frac{x - w}{2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u, u - w) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u + w, u) du. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Nota 5.73 *En el caso, especial, en el que las variables aleatorias* X *e* Y *sean independientes, se tiene que la función de densidad para la variable aleatoria* $Z := X + Y$ *está dada por:*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - u) f_Y(u) du \qquad (5.9)$$

donde $f_X(\cdot)$ *y* $f_Y(\cdot)$ *denotan las funciones de densidad de* X *e* Y *respectivamente. La expresión dada en (5.9) es la convolución de* f_X *y* f_Y, *denotada por* $f_X * f_Y$ *(comparar con (5.7)).*

Ejemplo 5.74 *Sean* X *e* Y *variables aleatorias independientes con funciones de densidad dadas por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 < x < 2 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad 3 < y < 5 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Determinar la función de densidad de $Z = X + Y$.

Solución: Se sabe que:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u)du.$$

Como

$$f_X(u)f_Y(z-u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 < u < 2 \text{ y } u+3 < z < u+5 \\ 0 & \text{en} \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

se obtiene

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(z-4) & \text{si} \quad 4 < z \leq 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 5 < z < 6 \\ \frac{1}{2}(7-z) & \text{si} \quad 6 \leq z < 7 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.75 *Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x & \textit{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{en} \quad \textit{otro caso} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de $W := X - Y$.

Solución: De acuerdo con el ejemplo anterior:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, u-w)du.$$

Puesto que:

$$f(u, u-w) = \begin{cases} 3u & \text{si} \quad 0 \leq u-w \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces,

$$f_W(w) = \int_w^1 3u\mathcal{X}_{[0,1]}(w)du = \frac{3}{2}(1-w^2)\mathcal{X}_{[0,1]}(w). \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.76 *(distribución del producto de variables aleatorias)* *Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta f. Sean $Z := XY$ y $W := Y$. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W. Deducir luego, una función de densidad de Z.*

Solución: Sea g la función dada por:

$$g(x,y) := (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (xy, y).$$

La transformación inversa es igual a:

$$h(x,y) = \left(\frac{x}{y}, y\right).$$

El jacobiano, de la transformación inversa, es igual a:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y},$$

por lo tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W está dada por:

$$f_{ZW}(z,w) = \left|\frac{1}{w}\right| f\left(\frac{z}{w}, w\right),$$

de donde se deduce que la función de densidad de $Z = XY$ es:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w|} f\left(\frac{z}{w}, w\right) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f\left(u, \frac{z}{u}\right) du. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 5.77 *Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,1)$. De acuerdo con el ejemplo anterior, se tiene que una función de densidad de $Z := XY$ está dada por:*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f\left(u, \frac{z}{u}\right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_X(u) f_Y\left(\frac{z}{u}\right) du \end{aligned}$$

donde f_X y f_Y denotan las funciones de densidad de X e Y respectivamente. Puesto que:

$$f_X(u)f_Y\left(\frac{z}{u}\right) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad 0 < u < 1 \textit{ y } 0 < z < u \\ 0 & \textit{en} \quad \textit{otro caso} \end{cases}$$

entonces:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_z^1 \frac{1}{u} du & si \quad 0 < z < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\ln z & si \quad 0 < z < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.78 ***(distribución del cociente de variables aleatorias)*** *Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta f. Sean $Z := \frac{X}{Y}$ (está definida si $P(Y = 0) = 0$) y $W := Y$. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W. Deducir luego, una función de densidad de Z.*

Solución: Considérese la función:

$$g(x, y) := (g_1(x, y), g_2(x, y)) = \left(\frac{x}{y}, y\right).$$

La transformación inversa está dada por:

$$h(x, y) = (xy, y).$$

El jacobiano de la transformación inversa es igual a:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y,$$

entonces, la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W está dada por:

$$f_{ZW}(z, w) = |w|\, f(zw, w).$$

Por lo tanto, una función de densidad de Z es:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w|\, f(zw, w)\, dw. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.79 *Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. De acuerdo con el ejemplo anterior, se tiene que una función de densidad de $Z := \frac{X}{Y}$ está dada por:*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w|\, f(zw, w)\, dw$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |w|\, f_X(zw) f_Y(w)\, dw$$

donde f_X y f_Y denotan las funciones de densidad de X e Y respectivamente. Puesto que:

$$f_X(zw) f_Y(w) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < zw < 1 \ y \ 0 < w < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

entonces:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^1 w dw & si \quad 0 < z < 1 \\ \int_0^{\frac{1}{z}} w dw & si \quad z \geq 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{X}_{(0,1)}(z) + \frac{1}{2z^2}\mathcal{X}_{[1,\infty)}(z). \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.80 *Supóngase que la duración X de un dispositivo electrónico es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & si \quad x > 1000 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sean X_1 y X_2 dos determinaciones independientes de la anterior variable. Hallar la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

Solución: Se sabe que

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|\, f(vz) f(v) dv.$$

Puesto que

$$f(vz) = \begin{cases} \frac{1000}{v^2 z^2} & \text{si} \quad vz > 1000 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces:

i) $z > 1$, $v > 1000$ implica $vz > 1000$ y así:

$$f_Z(z) = \int_{1000}^{\infty} \frac{1000}{v^2 z^2} \cdot \frac{1000}{v^2} v dv = \frac{(1000)^2}{z^2} \int_{1000}^{\infty} \frac{dv}{v^3} = \frac{1}{2z^2}$$

ii) Si $0 < z < 1$, entonces $vz > 1000$, si y sólo si, $v > \frac{1000}{z}$. En tal caso:

$$f_Z(z) = \int_{\frac{1000}{z}}^{\infty} \frac{1000}{v^2 z^2} \cdot \frac{1000}{v^2} v dv = \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z^2} & \text{si} \quad z > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < z < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.81 ***(Distribución F)*** *Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{X}^2_{(m)}$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{X}^2_{(n)}$. Considérese la aplicación*

$$g(x,y) := \left(\frac{\frac{x}{m}}{\frac{y}{n}}, y \right).$$

Se tiene que su inversa está dada por:

$$h(x,y) = \left(\frac{m}{n} xy, y \right).$$

El jacobiano de la transformación inversa es igual a: $J(x,y) = \frac{m}{n} y$. Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de $Z := \frac{nX}{mY}$ y $W := Y$ está dada por:

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{n} zw\right)^{\frac{m}{2}-1} w^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2} w \left(\frac{m}{n} z + 1 \right) \right].$$

Al integrar con respecto a w, se obtiene que una función de densidad de Z está dada por:

$$f_Z(z) = \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n} z\right)^{\frac{m+n}{2}}}; \ z > 0 \tag{5.10}$$

Se dice que una variable aleatoria Z tiene distribución F, con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, y se escribe $Z \stackrel{d}{=} F^m_n$, si su función de densidad está dada por (5.10). ▲

Nota 5.82 *Supóngase que $Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ y sea f la función de distribución conjunta de $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Entonces:*

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le y\}} f(x)\, dx$$

Supóngase que existe una función $h(y, x_2, \cdots, x_n)$ tal que $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le y$, si y sólo si, $x_1 \le h(y, x_2, \cdots, x_n)$, entonces

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{h(y,x_2,\cdots,x_n)} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 \right] dx_2 \cdots dx_n$$

Si se deriva a ambos lados con respecto a y y se supone que h es continuamente diferenciable en y y que f es continua, entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}(F_Y(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(h(y, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial h(y, x_2, \cdots, x_n)}{\partial y} dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

Ejemplo 5.83 (distribución t-Student) *Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{X}^2_{(k)}$. Considérese la transformación:*

$$g(x,y) := \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{k}}}.$$

entonces se tiene que $g(x,y) \le z$, si y sólo si, $x \le z\sqrt{\frac{y}{k}}$. Tomando $h(z,y) := z\sqrt{\frac{y}{k}}$ y teniendo en cuenta que la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y está dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$$

para $y > 0$, se obtiene utilizando la observación anterior que:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(h(z,y), y) \frac{\partial h(z)}{\partial z} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 y}{2k}\right) \frac{y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sqrt{\frac{y}{k}} dy \\ &= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2k\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\left[\frac{z^2}{k} + 1\right]\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1} \frac{1}{\left[1 + \frac{z^2}{k}\right]^{\frac{k+1}{2}}}; \ z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Una variable aleatoria real Z con función de densidad de probabilidad dada por la expresión anterior se llama variable aleatoria con distribución t−Student con k grados de libertad, y se escribe $Z \stackrel{d}{=} t_{(k)}$ ▲

El teorema de transformación se puede generalizar de la siguiente manera:

Teorema 5.84 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{\mathbf{X}}$. Sea g una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en si mismo. Supóngase que $\mathbb{R}^n$ se puede particionar en k conjuntos disyuntos $A_1, \cdots, A_k$ de tal manera que la aplicación g restringida a A_i, para $i = 1, \cdots, k$, es una aplicación uno a uno con inversa h_i. Si las primeras derivadas parciales de h_i existen y son continuas y si los jacobianos J_i son diferentes de cero en el rango de la transformación, para $i = 1, \cdots, k$. Entonces el vector aleatorio $\mathbf{Y} := g(\mathbf{X})$ tiene función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} |J_i(\mathbf{y})| \, f_{\mathbf{X}}(h_i(\mathbf{y})).$$

Demostración. Ver [Jac] ■

Ejemplo 5.85 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad f_X. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^4$. Es claro que $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ y que las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccc} g_1 : & [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^4 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} g_2 : & (-\infty,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^4 \end{array}$$

son invertibles y sus inversas son respectivamente:

$$\begin{array}{rccc} h_1 : & [0,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & x & \longmapsto & \sqrt[4]{x} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} h_2 : & (0,\infty) & \longrightarrow & (-\infty,0) \\ & x & \longmapsto & -\sqrt[4]{x} \end{array}.$$

Los jacobianos de las transformaciones inversas están dados, respectivamente, por:

$$J_1(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad y \quad J_2(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}},$$

por lo tanto, una función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^4$ está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{i=1}^{2} |J_i(y)| \, f_X(h_i(y)) \\ &= \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} f_X(\sqrt[4]{y}) + \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} f_X(-\sqrt[4]{y}). \end{aligned}$$ ▲

5.5. Valor esperado de un vector aleatorio y matriz de varianzas y covarianzas

A continuación se presenta la generalización de los conceptos de valor esperado y varianza de una variable aleatoria estudiados previamente.

Definición 5.86 (valor esperado de un vector aleatorio) *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio. La esperanza (o valor esperado) de $\mathbf{X}$, denotada por $E(\mathbf{X})$, se define como sigue:*

$$E(\mathbf{X}) := (E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n))$$

siempre y cuando EX_j exista; para todo $j = 1, \cdots, n$.

La anterior definición puede extenderse de la manera siguiente:

Definición 5.87 (valor esperado de una función) *Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio y sea $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función dada por:*

$$h(x_1, \cdots, x_n) = (h_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_n))$$

donde las funciones h_i, para $i = 1, \cdots, m$, son funciones de valor real definidas sobre $\mathbb{R}^n$. El valor esperado de $h(\mathbf{X})$ está dado por:

$$E(h(\mathbf{X})) := (E(h_1(\mathbf{X})), \cdots, E(h_m(\mathbf{X})))$$

siempre y cuando los valores esperados $E(h_j(\mathbf{X}))$ para $j = 1, \cdots, m$ estén definidos.

Definición 5.88 (Valor esperado de una matriz aleatoria) *Si X_{ij}; con $i = 1, \cdots, m$ y $j = 1, \cdots, n$ son variables aleatorias reales definidas todas sobre el mismo espacio de probabilidad, entonces, la matriz $\mathbf{A} = (X_{ij})_{m\times n}$ se llama matriz aleatoria y se define su valor esperado como la matriz cuyas componentes son los valores esperados de las variables aleatorias X_{ij}, esto es:*

$$E(\mathbf{A}) := (E(X_{ij}))_{m\times n}$$

siempre y cuando $E(X_{ij})$ exista; para todo $i = 1, \cdots, m$ y todo $j = 1, \cdots, n$.

Definición 5.89 (matriz de varianzas y covarianzas) *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio con* $E\left(X_j^2\right) < \infty$; *para todo* $j = 1, \cdots, n$. *La matriz de varianzas y covarianzas denotada por* $\sum$ *se define como sigue:*

$$\sum := \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}.$$

Nota 5.90 *Obsérvese que* $\sum = E([\mathbf{X}-E(\mathbf{X})]^T [\mathbf{X}-E(\mathbf{X})])$.

Ejemplo 5.91 *Sea* X_1 *y* X_2 *variables aleatorias discretas con distribución conjunta dada por:*

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Es claro que el valor esperado de $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ *es igual a:*

$$E(\mathbf{X}) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right)$$

y la matriz de varianzas y covarianzas está dada por:

$$\sum = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{17}{36} \end{pmatrix}.$$

Para $a = (a_1, a_2)$, *arbitrario, se obtiene que:*

$$\begin{aligned} a \sum a^T &= (a_1, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{17}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{6} a_1 a_2 + \frac{17}{36} a_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{6} a_2\right)^2 + \frac{4}{9} a_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

esto es, la matriz $\sum$ *es positiva semidefinida.* ▲

Ejemplo 5.92 *Sea* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq x \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}.$$

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^x xy \frac{1}{x} dy dx = \frac{1}{6} \\ E(X) &= \int_0^1 \int_y^1 x \frac{1}{x} dx dy = \frac{1}{2} \\ E(Y) &= \int_0^1 \int_0^x y \frac{1}{x} dy dx = \frac{1}{4} \\ E\left(X^2\right) &= \int_0^1 \int_0^x x^2 \frac{1}{x} dy dx = \frac{1}{3} \\ E\left(Y^2\right) &= \int_0^1 \int_0^x y^2 \frac{1}{x} dy dx = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor esperado de $\mathbf{X}$ *está dado por:*

$$E(\mathbf{X}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

y su matriz de varianzas y covarianzas es igual a:

$$\sum = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{144} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, para cualquier $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *se satisface:*

$$\begin{aligned} a \sum a^T &= (a_1, a_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{144} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}\left(a_1^2 + 2\frac{1}{2} a_1 a_2 + \frac{1}{4} a_2^2 - \frac{1}{4} a_2^2 + \frac{7}{12} a_2^2\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(a_1 + \frac{1}{2} a_2\right)^2 + \frac{1}{36} a_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

esto es, $\sum$ *es positiva semidefinida.* ▲

En general, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 5.93 *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio* $n-$*dimensional. Si* $E(X_j^2) < \infty$; *para todo* $j = 1, \cdots, n$, *entonces, la matriz* $\sum$, *de varianzas y covarianzas de* $\mathbf{X}$, *es positiva semidefinida.*

Demostración. *Sea* $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *arbitrario. Considérese la variable aleatoria* Y *definida como sigue:*

$$\begin{aligned} Y &:= (X_1, \cdots, X_n)(a_1, \cdots, a_n)^T \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i X_i. \end{aligned}$$

Se va a verificar que $Var(Y) = a \sum a^T$ *con lo cual queda probado el resultado pues* $Var(Y) \geq 0$. *Se tiene que:*

$$Var(Y) = E([Y - E(Y)]^2).$$

Puesto que, $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \mu a^T$, *siendo* $\mu := E(\mathbf{X})$, *y como el transpuesto de un número real es el mismo número, se obtiene:*

$$\begin{aligned} VarY &= E\left(\left[\mathbf{X}a^T - \mu a^T\right]\left[\mathbf{X}a^T - \mu a^T\right]\right) \\ &= E(\left[\mathbf{X}a^T - \mu a^T\right]^T \left[\mathbf{X}a^T - \mu a^T\right]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E(\left[a\mathbf{X}^T - a\mu^T\right]\left[\mathbf{X}a^T - \mu a^T\right]) \\ &= E(a[\mathbf{X} - \mu]^T [X - \mu] a^T) \\ &= aE([\mathbf{X} - \mu]^T [X - \mu]) a^T \\ &= a \sum a^T. \end{aligned}$$

■

Nota 5.94 *Es claro que, a partir de la definición de la matriz de varianzas y covarianzas* $\sum$, *si las variables aleatorias* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *son independientes, entonces,* $\sum$ *es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son precisamente las varianzas de las variables aleatorias* X_j, $j = 1, \cdots, n$.

Para finalizar esta sección, se introduce el concepto de matriz de correlaciones, el cual es muy importante en el desarrollo de la teoría estadística multivariada.

Definición 5.95 (matriz de correlaciones) *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio con* $0 < Var(X_j) < \infty$; *para todo* $j = 1, \cdots, n$. *La matriz de correlaciones de* $\mathbf{X}$, *denotada por* $\mathbf{R}$, *está definida como sigue:*

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 & \cdots & \rho(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \rho(X_n, X_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.96 *Sea* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:*

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 < x < y,\ 0 < y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \int_0^y 2x dx dy = \frac{1}{3} \\ E(Y) &= \int_0^1 \int_x^1 2y dy dx = \frac{2}{3} \\ Var(X) &= \int_0^1 \int_0^y 2(x - \frac{1}{3})^2 dx dy = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= \int_0^1 \int_x^1 2(y - \frac{2}{3})^2 dy dx = \frac{1}{18} \\ Cov(X, Y) &= \int_0^1 \int_0^y 2(x - \frac{1}{3})(y - \frac{2}{3}) dx dy = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de correlaciones está dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Nota 5.97 *La matriz de correlaciones,* $\mathbf{R}$, *hereda las propiedades de la matriz de varianzas y covarianzas,* $\sum$, *ya que,*

$$\mathbf{R} = diag(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_n}). \sum .diag(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_n})$$

donde $\sigma_j := \sqrt{VarX_j}$, *para* $j = 1, \cdots, n$. *Por lo tanto,* $\mathbf{R}$ *es simétrica y positiva semidefinida . Más aún, si* $\sigma_j > 0$; *para todo* j, *entonces,* $\mathbf{R}$ *es no singular, si y sólo si,* $\sum$ *es no singular.*

5.6. Funciones generadoras de momentos y característica conjuntas

En esta sección se generalizan los conceptos de función generadora de momentos y función característica, presentados en el capítulo 2. para el caso unidimensional, a vectores aleatorios n dimensionales.

Definición 5.98 (función generadora de momentos conjunta) *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio n dimensional. Si existe* $M > 0$ *tal que* $E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{t}^T))$ *es finito para todo* $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ *con*

$$\|\mathbf{t}\| := \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_n^2} < M,$$

entonces, se define la función generadora de momentos conjunta de $\mathbf{X}$*, denotada por* $m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$*, como sigue:*

$$m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) := E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{t}^T)) \quad \textit{para } \|\mathbf{t}\| < M.$$

Ejemplo 5.99 *Sea* X_1 *y* X_2 *variables aleatorias discretas con distribución conjunta dada por:*

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La función generadora de momentos conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ *está dada por:*

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E(\exp((X_1, X_2)(t_1, t_2)^T) \\ &= E(\exp(X_1 t_1 + X_2 t_2)) \\ &= \sum_{x_1}\sum_{x_2} \exp(t_1 x_1 + t_2 x_2) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \frac{1}{6}\exp(t_1 - t_2) + \frac{1}{6}\exp(2t_1 - t_2) + \frac{1}{3}\exp(t_1) + \frac{1}{6}\exp(2t_1) \\ &\qquad + \frac{1}{6}\exp(2t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Se observa que las funciones generadoras de momentos de X_1 *y* X_2 *también*

existen y están dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} m_{X_1}(t_1) &= E(\exp(t_1 X_1)) \\ &= \sum_{x_1} \exp(t_1 x_1) P(X_1 = x_1) \\ &= \frac{1}{2}\exp(t_1) + \frac{1}{2}\exp(2t_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_{X_2}(t_2) &= E(\exp(t_2 X_2)) \\ &= \sum_{x_2} \exp(t_2 x_2) P(X_2 = x_2) \\ &= \frac{1}{3}\exp(-t_2) + \frac{1}{6}\exp(t_2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en general se tiene el resultado siguiente:

Teorema 5.100 *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio n dimensional. La función generadora de momentos conjunta de* $\mathbf{X}$ *existe, si y sólo si, las funciones generadoras de momentos marginales, de las variables aleatorias* X_i *con* $i = 1, \cdots, n$*, existen.*

Demostración. $\Longrightarrow$ *) Supóngase, inicialmente, que la función generadora de momentos conjunta de* $\mathbf{X}$ *existe. En tal caso, existe una constante* $M > 0$ *tal que* $m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{t}^T)) < \infty$ *para todo* $\mathbf{t}$ *con* $\|\mathbf{t}\| < M$ *. Luego para todo* $i = 1, \cdots, n$ *se satisface:*

$$\begin{aligned} m_{X_i}(t_i) &= E(\exp(t_i X_i)) \\ &= m_X(\exp(\mathbf{X}.(0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{lugar } i}}{t_i}, 0, \cdots, 0)^T) \\ &< \infty \quad \textit{si } |t_i| < M. \end{aligned}$$

Esto es, la función generadora de momentos de X_i *existe, para* $i = 1, \cdots, n$*.*
$\Longleftarrow$ *) Supóngase ahora, que las funciones generadoras de momentos marginales existen. En tal caso, para cada* $i = 1, \cdots, n$*, se tiene que existe* $M_i > 0$ *tal que* $m_{X_i}(t_i) = E(\exp(t_i X_i)) < \infty$*; si* $|t_i| < M_i$*. Sea* $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}) := \exp(\mathbf{t}\mathbf{a}^T); \ \textit{con } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

La función $\mathbf{h}$ *es convexa y en consecuencia si* $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ *con* $i = 1, \cdots, m$ *se satisface que:*

$$\mathbf{h}(\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{h}(\mathbf{x}_i)$$

donde $\alpha_i \in (0,1)$ *para todo* $i = 1, \cdots, m$ *y* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. *Por lo tanto,*

$$\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \mathbf{a}^T\right\} \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \exp(\mathbf{x}_i \mathbf{a}^T)$$

En particular, para $\mathbf{a} = \mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$, $\mathbf{x}_i = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lugar } i}}{t_i}, 0, \cdots, 0)$ *y* $n = m$ *se obtiene que:*

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i X_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(t_i X_i)$$

Tomando valores esperados se llega a:

$$E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i X_i\right\}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{X_i}(t_i)$$

y por lo tanto, para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ *con*

$$\mathcal{R} := \{\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i = \alpha_i t_i \text{ con } |t_i| < M_i \text{ y } \alpha_i \in (0,1), \; i = 1, \cdots, n\}$$

se satisface que:

$$E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{u}^T)) < \infty$$

Sea $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{t}\| < M$ *donde* $M := \min\{\alpha_1 M_1, \cdots, \alpha_n M_n\}$. *Entonces:*

$$E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{t}^T)) < \infty$$

es decir, la función generadora de momentos conjunta de $\mathbf{X}$ *existe.* ■

El teorema anterior establece que la función generadora de momentos conjunta, de las variables aleatorias, $X_1, \cdots, X_n$, existe, si y sólo si, las funciones generadoras de momentos marginales existen también. Sin embargo, no dice que se pueda conocer, a partir de las funciones generadoras de momentos marginales, la función generadora de momentos conjunta. Esto es posible si las variables aleatorias son independientes, como lo establece el teorema siguiente:

Teorema 5.101 *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio n dimensional. Supóngase, que para cada* $i = 1, \cdots, n$, *existe* $M_i > 0$ *con:*

$$m_{X_i}(t) := E(\exp tX_i) < \infty; \quad si \; |t| < M_i$$

Si las variables aleatorias, $X_1, \cdots, X_n$, *son independientes, entonces,* $m_X(\mathbf{t}) < \infty$ *para todo* $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$; *con* $\|\mathbf{t}\| < M$, *siendo* $M := \min\{M_1, \cdots, M_n\}$ *y se satisface además que:*

$$m_X(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t_i)$$

Demostración. *Se tiene que:*

$$\begin{aligned} m_X(\mathbf{t}) &= E(\exp(\mathbf{X}\mathbf{t}^T)) \\ &= E\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right)\right\} \\ &= E\left\{\prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} E(\exp(t_i X_i)), \text{ por la independencia de las variables,} \\ &= \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t_i). \end{aligned}$$

■

Al igual que en el caso unidimensional, la función generadora de momentos conjunta permite, cuando existe, calcular los *momentos conjuntos del vector aleatorio* $\mathbf{X}$, *alrededor del origen.* A continuación se define éste último concepto:

Definición 5.102 (momento conjunto) *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio n dimensional. Se define el momento conjunto de orden* $k_1, \cdots, k_n$ *con* $k_j \in \mathbb{N}$, *del vector aleatorio* $\mathbf{X}$, *alrededor del punto* $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, *como:*

$$\mu_{k_1 \cdots k_n} := E\left(\prod_{j=1}^{n} (X_j - a_j)^{k_j}\right)$$

si el valor esperado existe. El momento conjunto de orden $k_1, \cdots, k_n$ *de* $\mathbf{X}$, *alrededor del origen, se denota por* $\mu'_{k_1 \cdots k_n}$.

Nota 5.103 *Si X e Y son variables aleatorias, cuyos valores esperados existen, entonces, el momento conjunto de orden $1,1$, del vector $\mathbf{X} = (X, Y)$, alrededor de $\mathbf{a} = (E(X), E(Y))$, es:*

$$\mu_{11} = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = Cov(X, Y)$$

Ejemplo 5.104 *Sean X_1 y X_2 con distribución conjunta dada por:*

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu'_{12} &= E(X_1 X_2^2) \\ &= \sum_{x_1}\sum_{x_2} x_1 x_2^2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}m_X(\mathbf{t}) = \frac{1}{6}\exp(t_1 - t_2) + \frac{1}{6}\exp(2t_1 - t_2) + \frac{1}{3}\exp(t_1) + \frac{1}{6}\exp(2t_1) \\ + \frac{1}{6}\exp(2t_1 + t_2)\end{aligned}$$

Además, es fácil verificar que:

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^3 m_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_2}\right|_{(t_1,t_2)=(0,0)} \\ &= \left.\left[\frac{1}{6}\exp(t_1 - t_2) + \frac{1}{3}\exp(2t_1 - t_2) + \frac{1}{3}\exp(2t_1 + t_2)\right]\right|_{(t_1,t_2)=(0,0)} \\ &= \frac{5}{6} = \mu'_{12}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

El resultado anterior es válido en general, como lo establece el teorema siguiente, el cual se presenta sin demostración.

Teorema 5.105 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio n dimensional. Supóngase que la función generadora de momentos conjunta de $m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ de $\mathbf{X}$ existe. Entonces, los momentos conjuntos, alrededor del origen, de todos los ordenes, son finitos y se satisface además que:*

$$\mu'_{k_1 \cdots k_n} = \left.\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\right|_{(t_1,\cdots,t_n)=(0,\cdots,0)}.$$

Para finalizar esta sección, se presenta la definición de función característica conjunta de un vector aleatorio.

Definición 5.106 (función característica conjunta) *Sean $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio n dimensional y $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. La función característica conjunta del vector aleatorio $\mathbf{X}$, denotada por $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, está definida por:*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) := E\left[\exp\left(i\mathbf{X}\mathbf{t}^T\right)\right];$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

Al igual que en el caso univariado, se tiene que la función característica conjunta de un vector aleatorio siempre existe. También se satisface que la función característica conjunta de un vector aleatorio caracteriza la distribución del vector. Esto es, dos vectores aleatorios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ tienen la misma función de distribución conjunta, si y sólo si, tienen la misma función característica conjunta. Es más, es posible demostrar que al diferenciar la función característica sucesivamente y evaluar sus derivadas en el origen, se obtiene la expresión siguiente para los momentos conjuntos alrededor del origen:

$$\mu'_{k_1 \cdots k_n} = \frac{1}{i^{k_1 + \cdots + k_n}}\left[\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \mid_{(t_1,\cdots,t_n)=(0,\cdots,0)}\right]$$

siempre y cuando el momento sea finito.

No se presentan las demostraciones de estos resultados, pues van más allá de los objetivos propuestos para este texto. El lector interesado puede ver [Her].

5.7. Distribución normal multivariada

Al igual que ocurre en el caso univariado, en el que la distribución normal desempeña un papel destacado, se tiene que la distribución que se define a continuación es fundamental en el desarrollo de la teoría estadística multivariada.

Definición 5.107 (distribución normal multivariada) *Se dice que el vector aleatorio n dimensional* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *tiene distribución normal multivariada si toda combinación lineal,* $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*, tiene distribución normal univariada, (posiblemente degenerada, como ocurre, por ejemplo, cuando* $\alpha_j = 0$ *para todo* j*).*

Ejemplo 5.108 *Supóngase que* $X_1, \cdots, X_n$ *son* n *variables aleatorias independientes tales que* $X_j \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ *para* $j = 1, \cdots, n$*. Entonces, si* $Y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*, se tiene:*

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) \\
&= E\left(e^{it[\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n]}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(\alpha_j t) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[i\mu_j \alpha_j t - \frac{\alpha_j^2 t^2 \sigma_j^2}{2}\right] \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\left[i\mu_j \alpha_j t - \frac{\alpha_j^2 t^2 \sigma_j^2}{2}\right]\right) \\
&= \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\mu := \sum_{j=1}^{n} \mu_j \alpha_j \quad y \quad \sigma^2 := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sigma_j^2
$$

esto es, $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Por lo tanto, el vector* $\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ *tiene distribución normal multivariada.* ▲

Teorema 5.109 *Sea* $\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio.* $\mathbf{X}$ *tiene distribución normal multivariada, si y sólo si, su función característica es de la forma:*

$$
\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left[i\langle \mathbf{t}, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}Q\rangle\right]
$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$*,* Q *es una matriz cuadrada, simétrica y positiva semidefinida y donde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto interno usual de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. $\Longrightarrow$) *Sea* $Y := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*. Es claro que:*

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j \\
&= \langle \alpha, \mu \rangle; \text{ donde } \mu := E(\mathbf{X}) \text{ y } \alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
VarY &= Var\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} Var(\alpha_j X_j) + 2\sum_{j<i}\sum Cov(\alpha_j X_j, \alpha_i X_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 Var(X_j) + 2\sum_{j<i}\sum \alpha_j \alpha_i Cov(X_j, X_i) \\
&= \langle \alpha, \alpha Q \rangle
\end{aligned}
$$

donde $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *y* Q *es la matriz de varianzas y covarianzas de* $\mathbf{X}$*. Por lo tanto, la función característica de* Y *es igual a:*

$$
\varphi_Y(t) = \exp\left[it\langle \alpha, \mu \rangle - \frac{t^2}{2}\langle \alpha, \alpha Q \rangle\right].
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{X}}(\alpha) &= E\left[\exp i\mathbf{X}\alpha^T\right] \\
&= E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right)\right] \\
&= \varphi_Y(1) \\
&= \exp\left[i\langle \alpha, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha Q \rangle\right]
\end{aligned}
$$

Definición 5.107 (distribución normal multivariada) *Se dice que el vector aleatorio n dimensional* $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ *tiene distribución normal multivariada si toda combinación lineal,* $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*, tiene distribución normal univariada, (posiblemente degenerada, como ocurre, por ejemplo, cuando* $\alpha_j = 0$ *para todo* j*).*

Ejemplo 5.108 *Supóngase que* $X_1, \cdots, X_n$ *son* n *variables aleatorias independientes tales que* $X_j \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ *para* $j = 1, \cdots, n$*. Entonces, si* $Y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*, se tiene:*

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) \\
&= E\left(e^{it[\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n]}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(\alpha_j t) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\left[i\mu_j \alpha_j t - \frac{\alpha_j^2 t^2 \sigma_j^2}{2}\right] \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \left[i\mu_j \alpha_j t - \frac{\alpha_j^2 t^2 \sigma_j^2}{2}\right]\right) \\
&= \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\mu := \sum_{j=1}^{n} \mu_j \alpha_j \quad y \quad \sigma^2 := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sigma_j^2
$$

esto es, $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Por lo tanto, el vector* $\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ *tiene distribución normal multivariada.* ▲

Teorema 5.109 *Sea* $\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio.* $\mathbf{X}$ *tiene distribución normal multivariada, si y sólo si, su función característica es de la forma:*

$$
\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left[i\langle \mathbf{t}, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}Q\rangle\right]
$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$*,* Q *es una matriz cuadrada, simétrica y positiva semidefinida y donde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto interno usual de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. $\Longrightarrow$) *Sea* $Y := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$*. Es claro que:*

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j \\
&= \langle \alpha, \mu \rangle; \text{ donde } \mu := E(\mathbf{X}) \text{ y } \alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
VarY &= Var\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} Var(\alpha_j X_j) + 2\sum_{j<i}\sum Cov(\alpha_j X_j, \alpha_i X_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 Var(X_j) + 2\sum_{j<i}\sum \alpha_j \alpha_i Cov(X_j, X_i) \\
&= \langle \alpha, \alpha Q \rangle
\end{aligned}
$$

donde $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *y* Q *es la matriz de varianzas y covarianzas de* $\mathbf{X}$*. Por lo tanto, la función característica de* Y *es igual a:*

$$
\varphi_Y(t) = \exp\left[it\langle \alpha, \mu \rangle - \frac{t^2}{2}\langle \alpha, \alpha Q \rangle\right].
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{X}}(\alpha) &= E\left[\exp i\mathbf{X}\alpha^T\right] \\
&= E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right)\right] \\
&= \varphi_Y(1) \\
&= \exp\left[i\langle \alpha, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha Q \rangle\right]
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$) *Sea* $Y := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$. *La función característica de* Y *está dada por:*

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E(\exp itY)\\ &= E(\exp it\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)\\ &= E(\exp i\mathbf{X}\beta^T)\end{aligned}$$

donde $\beta := t\alpha$. *Esto es,*

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \varphi_{\mathbf{X}}(\beta) = \varphi_{\mathbf{X}}(t\alpha)\\ &= \exp\left[i\langle t\alpha, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle t\alpha, t\alpha Q\rangle\right]\\ &= \exp\left[it\langle \alpha, \mu\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle \alpha, \alpha Q\rangle\right]\end{aligned}$$

Entonces, Y *tiene una distribución normal univariada de parámetros* $\langle\alpha, \mu\rangle$ *y* $\langle\alpha, \alpha Q\rangle$. *Por lo tanto,* $\mathbf{X}$ *es normal multivariada.* ■

Nota 5.110 *Es fácil verificar que* μ *es el vector de medias y que* Q *es la matriz de varianzas y covarianzas de* $\mathbf{X}$.

Notación 5.111 *Se escribe* $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$ *para indicar que* $\mathbf{X}$ *tiene distribución normal multivariada de vector de medias* μ *y matriz de varianzas y covarianzas* Q.

El teorema siguiente afirma que toda distribución normal multivariada se obtiene como una transformación lineal de vectores de variables aleatorias independientes normales univariadas. Para su demostración se requiere del lema siguiente.

Lema 5.112 *Sea* $\mathbf{X} : = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio tal que* $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$. *Las componentes;* X_j , $j = 1, \cdots, n$, *son independientes, si y sólo si, la matriz* Q *es diagonal.*

Demostración. $\Longrightarrow$) *Es el resultado dado en 5.94.* $\Longleftarrow$) *Supóngase que la matriz* Q *es diagonal. Puesto que*

$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$, *entonces,*

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \exp\left[i\langle \mathbf{t}, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}Q\rangle\right]\\ &= \exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j t_j^2\right]\\ &= \exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sigma_j t_j^2\right)\right]\\ &= \prod_{j=1}^{n}\exp\left[i\left(\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sigma_j t_j^2\right)\right]\\ &= \prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las variables aleatorias X_j; $j = 1, \cdots, n$, *son independientes.* ■

Teorema 5.113 *Sea* $\mathbf{X} : = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vector aleatorio tal que* $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$. *Entonces existen variables aleatorias independientes* $Y_1, .., Y_n$ *tales que o bien* $Y_j = 0$ *o* $Y_j \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \lambda_j)$; *para* $j = 1, \cdots, n$ *y una matriz ortogonal* A *de tal manera que* $\mathbf{X} = \mu + \mathbf{YA}$.

Demostración. *Puesto que* Q *es una matriz simétrica positiva semidefinida se tiene que existe una matriz diagonal* Λ, *cuyas componentes son todas no negativas, y una matriz ortogonal* A *tales que:*

$$Q = A\Lambda A^T$$

Sea $\mathbf{Y} := (\mathbf{X} - \mu)A^T$. *Puesto que* $\mathbf{X}$ *es normal multivariada, entonces,* $\mathbf{Y}$ *lo es también. Además,* Λ *es la matriz de varianzas y covarianzas de* $\mathbf{Y}$. *Como ésta matriz es diagonal se sigue, del lema anterior, que las componentes de* $\mathbf{Y}$ *son independientes. Por último se tiene que:*

$$\mathbf{X} = \mu + \mathbf{YA}.$$

■

Supóngase que $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ es un vector aleatorio n dimensional tal que las n variables aleatorias, $X_1, \cdots, X_n$, son independientes e igualmente distribuidas con distribución normal estándar. La función de densidad de probabilidad conjunta de $X_1, \cdots, X_n$ está dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_n) &= f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_n^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right); \text{ donde } \mathbf{x}:=(x_1,\cdots,x_n). \end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que el vector $\mathbf{X}$ tiene distribución normal multivariada. Surge pues, de manera natural, la pregunta siguiente: Si $\mathbf{X}$ es un vector normal multivariado, ¿bajo qué condiciones se garantiza la existencia de una función de densidad del vector $\mathbf{X}$? La respuesta a esta pregunta la ofrece el teorema siguiente:

Teorema 5.114 *Sea $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$. Si Q es positiva definida entonces $\mathbf{X}$ posee una función de densidad dada por:*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(\det Q)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)Q^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right].$$

Demostración. *Como la matriz Q es positiva definida, todos los valores propios de Q son positivos. Además, existe una matriz ortogonal U tal que:*

$$UQU^T = \Lambda$$

donde $\Lambda = diag(\lambda_i)$ siendo $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los valores propios de Q, esto es, Λ es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de Q. Sea $A := Udiag(\sqrt{\lambda_i})U^T$. Es claro que $A^TA = Q$ y que A es también positiva definida. Sea $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{1\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times n}$, dada por $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A + \mu$. La función inversa de $\mathbf{h}$ está dada por $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mu)A^{-1}$. Por el teorema de transformación se tiene que la función de densidad de $\mathbf{X} := \mathbf{Y}A+\mu$, donde $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ es un vector aleatorio n dimensional tal que las variables aleatorias $Y_1, \cdots, Y_n$ son independientes e igualmente distribuidas con distribución normal estándar, está dada por:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= f_{\mathbf{Y}}(h^{-1}(\mathbf{x})).\left|\det\frac{\partial h^{-1}}{\partial\mathbf{x}}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}[h^{-1}(\mathbf{x})][h^{-1}(\mathbf{x})]^T\right)\left|\det\frac{\partial h^{-1}}{\partial\mathbf{x}}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mu)A^{-1}\right]\left[(\mathbf{x}-\mu)A^{-1}\right]^T\right)\left|\det A^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mu)A^{-1}(A^{-1})^T(\mathbf{x}-\mu)^T\right]\right)\left|\det A^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mu)A^{-1}(A^T)^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right]\right)\left|\det A^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mu)\left(A^TA\right)^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right]\right)\left|\det A^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mu)Q^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right]\right)\left|\det A^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(\det Q)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)Q^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right] \end{aligned}$$

■

Nota 5.115 (distribución normal bivariada) *Como caso especial, del teorema anterior, supóngase que*

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q); \quad donde \quad \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

y

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}; \quad donde \quad \mu_1 := E(X_1), \ \mu_2 := E(X_2).$$

$$\sigma_1^2 := Var(X_1), \ \sigma_2^2 := Var(X_2), \ \sigma_{12} = Cov(X_1, X_2) = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

siendo ρ el coeficiente de correlación. Por lo tanto,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)}(\det Q)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)Q^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\right].$$

Puesto que

$$\det Q = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

y

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\rho\left(\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right].$$

Se observa además que:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

y

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

Esto es, las distribuciones marginales de $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ son distribuciones normales univariadas. En general se tiene que:

Teorema 5.116 *Todas las distribuciones marginales de $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$ son normales multivariadas.*
Demostración. *Supóngase que $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ y sea*

$$\widetilde{\mathbf{X}} := (X_{k_1}, \cdots, X_{k_l})$$

donde $\{k_1, \cdots, k_l\}$ es un subconjunto de $\{1, \cdots, n\}$. La función característica de $\widetilde{\mathbf{X}}$ está dada por:

$$\varphi_{\widetilde{\mathbf{X}}}(t_{k_1}, \cdots, t_{k_l}) = E(i\sum_{r=1}^{l} t_{k_r}X_{t_{k_r}}) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \cdots, t_n);\ \text{donde } t_j = 0 \text{ si } j \notin \{k_1, \cdots, k_l\}.$$

Luego $\widetilde{\mathbf{X}}$ tiene una distribución normal multivariada. ■

5.8. Ejercicios

1. Supóngase que la distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y está dada por:

$X\backslash Y$	1	2	3	4
0	0.1	0	0	0
−1	0.1	0.1	0	0
−2	0.1	0.1	0.1	0
−3	0.1	0.1	0.1	0.1

Calcular:

a) $P(X \geq -2, Y \geq 2)$

b) $P(X \geq -2 \ \vee Y \geq 2)$

c) Las distribuciones marginales de X y Y.

d) La distribución de $Z := X + Y$

2. Supóngase que X e Y son variables aleatorias con distribución conjunta dada por:

$X\backslash Y$	0	1	2
1	0.2	α	β
2	γ	0.1	δ
3	η	κ	0.3

Determinar valores para $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ y κ de tal manera que:

$$P(X = 1) = 0.4,\ P(X = 2) = 0.3,\ P(Y = 0) = 0.2\ y\ P(Y = 2) = 0.6$$

3. En una urna se encuentran 4 bolas rojas, 5 negras y 2 azules. Se extraen al azar (sin repetición) dos bolas de la urna. Sea X la variable aleatoria que denota el número de bolas rojas extraídas y Y la variable aleatoria que denota el número de bolas negras extraídas. Hallar:

a) La distribución conjunta de X e Y

b) $E(X)$ y $E(Y)$

4. Realizar el ejercicio anterior bajo el supuesto de que la extracción se hace con sustitución.

5. Sean X, Y y Z variables aleatorias con distribución conjunta dada por:

$\mathbf{x} = (x, y, z)$	$(1,2,3)$	$(2,1,3)$	$(3,2,1)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	$(2,3,1)$
$P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calcular:

a) $E(X + Y + Z)$.

b) $E(XYZ)$.

6. (Distribución multinomial) Supóngase que hay $(k+1)$ resultados distintos en un experimento aleatorio con probabilidades de ocurrencia $p_1, \cdots, p_{k+1}$ donde $\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1$. Sea X_i el número de veces que se obtiene el i-ésimo resultado en n repeticiones independientes del experimento. Verificar que la función de densidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, \cdots, X_{k+1}$ está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_{k+1}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k+1} x_i!} \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{x_i}$$

donde $x_i = 0, \cdots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$.

7. Las cirugías que se programan, para un mes, en un hospital estatal son clasificadas en 4 categorías de prioridad en su realización: urgente, prioridad normal, baja prioridad y espera. Las directivas del hospital estiman que el 10 % de las cirugías que se programan son clasificadas en la primera categoría, el 50 % en la segunda categoría, el 30 % en la tercera y el restante 10 % en la cuarta. Supóngase que en un mes se programan 30 cirugías. Calcular:

a) La probabilidad de que 5 de las cirugías sean clasificadas en la primera categoría, 15 en la segunda, 7 en la tercera y 3 en la cuarta.

b) El número esperado de cirugías clasificadas en la tercera categoria.

8. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con distribución conjunta dada por:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{6}$	d	$\frac{1}{6}$
1	a	e	k
2	b	f	h

Si $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$, determinar los valores de los datos que faltan en la tabla. ¿ A qué es igual $E(XY)$?

9. En una pasteleria se venden pasteles Gloria a razón promedio de 1.3 por hora, tortas de chocolate a razón promedio de 0.6 por hora y roscones de arequipe a razón promedio de 2.8 por hora. Supóngase que las cantidades vendidas, de cada producto, son independientes y que cada una tiene una distribución Poisson. Calcular:

a) La distribución del número total de pasteles Gloria, tortas de chocolate y roscones de arequipe vendidos en 2 horas.

b) La probabilidad de vender por lo menos dos de los productos en un período de 15 minutos.

10. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Hallar la distribución conjunta de $Z := X + Y$ y $W := X - Y$.

11. Sean X e Y variables aleatorias discretas con distribución conjunta dada por:

$X \backslash Y$	-1	0	2
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$

Calcular $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

12. Calcular los valores esperados de las variables aleatorias dadas en los ejercicios 25 y 26 del capítulo 2.

13. Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 negras. Se extrae una muestra aleatoria de tamaño 2, sin reemplazo. Sea X el número de bolas rojas seleccionadas y Y el número de bolas negras seleccionadas. Calcular $\rho(X,Y)$.

14. Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Calcular $P\left(X = Y\right)$.

15. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. ¿Son $Z := X + Y$ y $W := |X - Y|$ independientes? Explicar.

16. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con varianzas positivas y finitas σ_1^2, σ_2^2 y σ_3^2 respectivamente.

    Calcular el coeficiente de correlación entre $X_1 - X_2$ y $X_2 + X_3$.

17. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$, $VarX = 1$ y $VarY = 2$. Calcular $Var(X - 2Y)$

18. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Supóngase que tanto X como Y toman los valores 1 y -1 con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada uno. Sea $Z := XY$. ¿Son X, Y y Z dos a dos independientes?, ¿son X, Y y Z independientes? Explicar.

19. Se venden m de $n \geq 2$ billetes de loteria. Supóngase que los billetes están marcados del 1 al n y que cada billete tiene el mismo "chance" de ser vendido. Calcular el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria que representa la suma de los números de los billetes vendidos.

20. ¿A qué es igual el número esperado de días del año, para los cuales se satisface que exactamente k de r personas celebran su cumpleaños? Supóngase que cada uno de los 365 días del año tiene la misma probabilidad de ser un día de cumpleaños, además ignorése la existencia de años bisiestos.

21. Bajo los mismos supuestos dados en el problema 20, ¿a qué es igual el número esperado de días del año en los que hay más de un cumpleaños? Verificar, con ayuda de una calculadora, que éste número esperado es, para todo $r \geq 29$, mayor o igual a 1.

22. Sean X e Y variables aleatorias con media 0, varianza 1 y correlación ρ. Demostrar que:

$$E\left(\text{máx}\left\{X^2, Y^2\right\}\right) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}$$

    Sugerencia: $\max\{u, v\} = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}|u - v|$. Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

23. Sean X e Y variables aleatorias con media 0, varianza 1 y covarianza ρ.

    a) Demostrar que las variables aleatorias $Z := X - \rho Y$ y Y son no correlacionadas.

    b) Calcular $E(Z)$ y $Var(Z)$.

24. Sean X , Y y Z variables aleatorias con media 0, varianza 1. Sea $\rho_1 := \rho(X,Y)$, $\rho_2 := \rho(Y,Z)$ y $\rho_3 := \rho(X,Z)$. Demostrar que:

$$\rho_3 \geq \rho_1\rho_2 - \sqrt{1 - \rho_1^2}\sqrt{1 - \rho_2^2}$$

    Sugerencia:

$$XZ = [\rho_1 Y + (X - \rho_1 Y)][\rho_2 Y + (Z - \rho_2 Y)]$$

25. Sean $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$ e $Y = X^2$.

    a) Hallar $\rho(X,Y)$.

    b) ¿Son X e Y independientes? Explicar.

26. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{si} \quad 0 < x < 4,\ 0 < y \text{ y } (x-1) < y < (x+1) \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

    a) Determinar el valor de c.

    b) Calcular $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right)$ y $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$.

    c) Determinar $E(X)$ y $E(Y)$.

27. Diez clientes entre los que se encuentran Juan y María llegan a un almacén entre las 8 : 00 am y el mediodía. Suponiendo que los clientes llegan independientemente unos de otros y que el tiempo de llegada de cada uno de ellos es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,4]$ .Calcular:

    a) La probabilidad de que Juan llegue antes de las 11 : 00 am.
    b) La probabilidad de que Juan y María lleguen ambos antes de las 11 : 00 am.
    c) El número esperado de clientes que llegan antes de las 11 : 00 am

28. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp[-(x+y)] & \text{si} \quad x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

    Calcular:

    a) $P(1 < X+Y < 2)$.
    b) $P(X < Y \mid X > 2Y)$.
    c) $P(X > 1)$.

29. Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución acumulativa conjunta dada por:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-\exp(-x))\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1} y\right) & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

    ¿Existe una función de densidad conjunta de X y Y ?. Explicar.

30. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} c\sin(x+y) & \text{si} \quad 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

    Calcular:

    a) El valor de c.
    b) Las funciones de densidad marginales de X y de Y.

31. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x}{y^3} & \text{si} \quad 0<x<1,\ 1<y \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

    Calcular:

    a) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4},\ 0 < Y \le \frac{1}{3}\right)$.
    b) $P(Y > 5)$.

32. Alberto y Sandra han acordado reunirse entre las 7 : 00 pm y las 8 : 00 pm en un restaurante del centro de la ciudad. Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de llegada de Alberto e Y la variable aleatoria que denota el tiempo de llegada de Sandra. Supóngase que X e Y son independientes e igualmente distribuidas con distribución uniforme sobre el intervalo $[7,8]$.

    a) Determinar la función de densidad conjunta de X e Y.
    b) Calcular la probabilidad de que ambos, Alberto y Sandra, lleguen al restaurante entre las 7 : 15 pm y las 7 : 45 pm.
    c) Si el primero en llegar espera sólo 10 minutos antes de irse a comer a otra parte, ¿cuál es la probabilidad de que tanto Sandra como Alberto coman en el restaurante inicialmente elegido?

33. La variable aleatoria bidimensional (X,Y) tiene la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(t_1,t_2) = \frac{1}{16\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(t_1-3)^2}{4}+\frac{(t_2+2)^2}{16}\right)}; \quad -\infty < t_1, t_2 < \infty.$$

    Calcular:

    a) Las funciones de densidad marginales f_X, f_Y.
    b) $E(X)$ y $E(Y)$.
    c) $Var(X)$ y $Var(Y)$
    d) $Cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

34. Sea (X,Y) las coordenadas de un punto escogido al azar dentro de un círculo unitario. Esto es, X e Y son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si} \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $P(X < Y)$.

35. Un punto Q de coordenadas (X,Y) es escogido aleatoriamente en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Calcular la probabilidad de que Q esté más cerca de $(0,0)$ que de $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

36. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $Z := X - Y$.

37. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad dadas por:

$$f_X(x) = \mathcal{X}_{(1,2)}(x) \quad \text{y} \quad f_Y(x) = \frac{1}{2}\mathcal{X}_{(3,5)}(x).$$

Determinar una función de densidad de $Z := X + Y$.

38. Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{U}(0,2)$. Calcular:

   a) $P([X+Y] > 1)$.
   b) $P\left(Y \leq X^2 + 1\right)$.

39. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Supóngase que X tiene una distribución exponencial de parámetro λ y que Y tiene densidad $f(x) = 2x\mathcal{X}_{(0,1)}(x)$.

   a) Determinar una densidad de la variable aleatoria $Z := X + Y$.
   b) Calcular la $Cov(X,Z)$.

40. Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,1)$. Calcular:

   a) $P\left(|X - Y| \leq \frac{1}{2}\right)$.
   b) $P\left(\left|\frac{X}{Y} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\right)$.
   c) $P\left(Y \geq X \mid Y \geq \frac{1}{2}\right)$.

41. Demostrar o refutar: Si X e Y son variables aleatorias tales que la función característica de $(X+Y)$ es igual al producto de las funciones características de X e Y, entonces, X e Y son independientes. Justificar la respuesta.

42. Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ. Determinar funciones de densidad para las siguientes variables aleatorias:

   a) $Z := |X - Y|$
   b) $W := \text{mín}\{X, Y^3\}$

43. Sean X , Y y Z variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$.

   a) Hallar la función de densidad conjunta de $W := XY$ y $V := Z^2$.
   b) Calcular $P(V \leq W)$.

44. Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución normal estándar. Sean $Y_1 = X + Y$ y $Y_2 = X/Y$. Hallar la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias Y_1 y Y_2, ¿qué tipo de distribución tiene Y_2?

45. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Encontrar la función de densidad de probabilidad conjunta de X^2 e Y^2.

46. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 9x^2y^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sean $Y_1 = X^3$ y $Y_2 = Y^3$. Hallar $f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)$.

47. Supóngase que X, Y, Z son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} e^{-(x+y+z)} & \text{si } \; x>0, y>0, z>0 \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Hallar f_U, donde $U := \frac{X+Y+Z}{3}$.

48. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3x}{2} & \text{si } \; 0<x<1 \text{ y } -x<y<x \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Encontrar f_Z, donde $Z = X - Y$.

49. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias $i.i.d$ con $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. ¿Qué tipo de distribución tienen las variables aleatorias $Z_i := \frac{X_i-\mu}{\sigma}$; $i = 1, 2, ..., n$?, ¿cuál es la distribución de $Z_1^2 + ... + Z_n^2$?

50. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias $i.i.d$ con $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sea

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

¿Qué tipo de distribución tiene $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$? Explicar.

51. La resistencia a la tensión para cierto tipo de alambre se distribuye normalmente con una media desconocida μ y una varianza desconocida σ^2. Se seleccionaron al azar seis segmentos de alambre de un rollo grande y se midió $Y_i :=$ " la resistencia a la tensión para el segmento ij; $i = 1, 2, .., 6$. La media de la población μ y la varianza σ^2 se pueden estimar por $\overline{Y}$ y S^2 respectivamente. Encontrar la probabilidad de que $\overline{Y}$ esté a lo más a $\frac{2S}{\sqrt{n}}$ de la verdadera media poblacional μ.

52. Supóngase que $X \stackrel{d}{=} F_n^m$. Encontrar el valor de x para el cual:
   a) $P(X \le x\ ) = 0.99$ con $m = 7, n = 3$.
   b) $P(X \le x) = 0.005$ con $m = 20$, $n = 30$
   c) $P(X \le x) = 0.95$ con $m = 2$, $n = 9$.

53. Si $X \stackrel{d}{=} t_n$, ¿Qué tipo de distribución tiene X^2?

54. Demostrar que si $X \stackrel{d}{=} F_n^m$, entonces, $E(X) = \frac{n}{n-2}$; para $n > 2$ y que $Var(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$.

Sugerencia: Supóngase que $X = \frac{U/m}{V/n}$, donde U y V son independientes y $U \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_m^2$ y $V \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_n^2$

55. Sea X una variable aleatoria con distribución $t-$ Student con k grados de libertad. Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

56. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. ¿Son X y $|X|$ independientes?, ¿son no correlacionadas?. Explicar.

57. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias $i.i.d$ con $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.¿ Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria siguiente

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}?$$

Explicar.

58. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por:

$$m_X(t) = \exp\left(2e^t - 2\right) \quad \text{y} \quad m_Y(t) = \frac{1}{5}\left(1 + 2e^{-t} + 2e^t\right).$$

Calcular:

   a) $P([X+Y] = 2)$.
   b) $E(XY)$.

59. Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio n-dimensional con matriz de varianzas y covarianzas $\sum$. Sea A una matriz cuadrada de orden n no singular y sea $\mathbf{Y} := \mathbf{X}A$.

   a) Demostrar que $E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{X})A$
   b) Calcular la matriz de varianzas y covarianzas de $\mathbf{Y}$.

60. Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ un vector aleatorio con distribución normal bivariada con $\mu_X = 3$, $\mu_Y = 7.7$, $\sigma_X = 0.04$, $\sigma_Y = 0.08$ y $\rho = 0$. Calcular:

$$P(2.95 < X < 3.05,\ 7.60 < Y < 7.80)$$

61. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio n dimensional con $\mathbf{X} \overset{d}{=} \mathcal{N}(\mu, Q)$, siendo Q una matriz no singular. Demostrar que

$$\mathbf{Y} := (\mathbf{X} - \mu) W^{-1}$$

es un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$, donde I es la matriz identidad de orden n y W es una matriz tal que $W^2 = Q$. En tal caso se dice que el vector $\mathbf{Y}$ tiene distribución normal multivariada estándar.

62. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio con distribución normal trivariada con $\mu = \mathbf{0}$ y Q dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $P(X > 0, Y > 0, Z > 0)$.

63. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio con distribución normal trivariada con $\mu = \mathbf{0}$ y Q dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Hallar la función de densidad $f(x, y, z)$ de $\mathbf{X}$.

64. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes tales que $X \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y $Y \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, \tau^2)$ con $\sigma, \tau > 0$. Calcular $P(X \geq Y)$.

65. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2},\ |x| \leq 1 - 2y \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

a. Determinar $E(X)$ y $E(Y)$.

b. ¿Son X y Y independientes?. Explicar.

66. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución normal de parámetros μ y σ^2.Sean $Y_i = aX_i + b$ para $i = 1, 2, ..., n$ y donde a, b son constantes reales con a diferente de 0.

a. Determinar la distribución de Y_1.

b. ¿Son Y_1y Y_n independientes?. Explicar.

c. Determinar la covarianza entre $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

67. Supóngase que el vector aleatorio (X, Y) tiene función característica conjunta dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(s,t) &:= E\left(e^{i(sX+tY)}\right) \\ &= \exp\left(\alpha\left(e^{is} - 1\right) + \beta\left(e^{it} - 1\right) + \gamma\left(e^{ist} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

para $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. Demostrar que X y Y son variables aleatorias con distribución Poisson y que $X + Y$ tiene distribución Poisson sólo si $\gamma = 0$.

68. Dar un ejemplo de dos variables aleatorias dependientes X y Y tales que $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ para todo t.

69. Se estima que en una cierta ciudad las pérdidas anuales en miles de millones de pesos debidas a catástrofes naturales, malos manejos administrativos y robos, son variables aleatorias independientes con distribuciones exponenciales de medias 1, 1.5 y 2.4 respectivamente. Determinar la probabilidad de que el máximo de esas pérdidas exceda los tres mil millones de pesos.

70. En día laboral hay, en un banco, dos lineas de espera: una para clientes preferenciales y otra para clientes corrientes. Supóngase que X denota el número de clientes en la primera línea de espera y Y el número de clientes en la segunda línea de espera. Supóngase que la distribución conjunta de X y Y está dada por:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$
3	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$
4	0	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los números de clientes en las dos líneas de espera sean iguales?

b. Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una linea de espera que en la otra. Expresar A en términos de X y Y y calcular la probabilidad de ese evento.

c. ¿A qué es igual la probabilidad de que el número de clientes total ,en las dos líneas de espera, sea mayor que 3?

71. La ganancia que obtiene un comerciante por la venta de un nuevo producto está dada por $Z = 3X - Y - 5$ donde X y Y son variables aleatorias independientes con $Var\,(X) = 1$ y $Var\,(Y) = 2$. ¿A qué es igual $Var\,(Z)$?

72. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f\,(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{3}xy & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Hallar $Cov\,(X,Y)$.

73. Una compañía ofrece a sus empleados dos tipos de pólizas de vida: una básica y otra complementaria. Para comprar la póliza complementaria, el empleado debe comprar primero la póliza básica. Supóngase que X representa la proporción de empleados que compran la póliza básica y Y la proporción de empleados que compran la póliza complementaria. Supóngase que X y Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta dada por $f\,(x,y) = 2\,(x+y)$ sobre la región donde $f\,(x,y)$ es positiva. Dado que el 10 % de los empleados compra la póliza básica, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 5 % compren la póliza complementaria?

74. Sean Z y W dos variables aleatorias tales que $Var\,(Z) = 2$ y $Cov\,(Z,W) = 1$. ¿Cuál es el menor valor posible de $Var\,(W)$?

75. Sean A y B dos eventos con $P\,(A) = 0.3$, $P\,(B) = 0.4$ y $P\,(A \cup B) = 0.6$. Calcular la correlación entre $X := \mathcal{X}_A$ y $Y := \mathcal{X}_B$

76. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Supóngase que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\,(-1,4)$ y $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{U}\,(0,1)$. Sean $U := X + Y$ y $V := X + Y$

   a) Calcular $Cov\,(U,V)$ y $Var\,(U)$.

   b) ¿Son U y V independientes? Explicar.

77. Una póliza de seguros paga el servicio médico requerido por un afiliado en dos partes: la primera parte X, paga los honorarios del médico tratante y la segunda parte Y, cubre los gastos de hospitalización.

Supóngase que $Var\,(X)$ es de 5000 (miles de pesos), $Var\,(Y)$ es de 10000 (miles de pesos) y $Var\,(X+Y)$ es de 17000 (miles de pesos). Debido al incremento de los costos, la junta directiva del seguro decide incrementar a X en una cantidad fija de 100 (miles de pesos) y a Y en un 10 %. Calcular la varianza del monto total cubierto por la póliza luego de esos cambios.

39. **a)** $f_Z(x) = 2\left\{x - \frac{1}{\lambda}\left[1 - \exp(-\lambda x)\right]\right\} \mathcal{X}_{(0,1)}(x) +$
$2\lambda \exp(-\lambda x)\left\{\frac{1}{\lambda}e^{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\left(e^{\lambda} - 1\right)\right\} \mathcal{X}_{[1,\infty)}(x)$ **b)** $\frac{1}{\lambda^2}$

40. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{3}{4}$

41. Falso

42. **a)** $f_Z(x) = \lambda \exp(-\lambda |x|) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)$
b) $f_W(x) = \lambda\left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \exp\left(-\lambda\sqrt[3]{x} - \lambda x\right) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)$

43. $\frac{4}{9}$

44. Cauchy

46. $f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = 1\mathcal{X}_{(0,1)}(y_1)\, \mathcal{X}_{(0,1)}(y_2)$

47. $f_U(x) = \frac{3}{2}(3x)^2 \exp(-3x) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)$

48. $f_Z(x) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \mathcal{X}_{(0,2)}(x)$

49. $\mathcal{X}_n^2$

50. $\mathcal{X}_{n-1}^2$

51. 0.5464

52. **a)** 27.7 **b)** 0.32 **c)** 4.26

53. F_n^1

56. No son ni independientes ni correlacionadas.

57. $t_{(n-1)}$

62. $P(X > 0, Y > 0, Z > 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\left\{\sin^{-1}\rho_1 + \sin^{-1}\rho_2 + \sin^{-1}\rho_3\right\}$

63. $f(x, y, z) =$
$\frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{230}\left(39x^2 + 36y^2 + 26z^2 - 44xy + 36xz - 38yz\right)\right\}.$

70. **a)** $\frac{6}{25}$ **b)** $\frac{9}{25}$ **c)** $\frac{22}{25}$

71. 11

77. 19300

Capítulo 6.

1. **b)** $E(X \mid Y = 1) = 1;\ E(Y \mid X = 1) = \frac{5}{2}$

3. $\frac{5}{6}$

4. $E(X \mid Y = 1) = 1.909$

5. 15 horas

6. **a)** $E(X \mid Y = 0) = -\frac{1}{8};$
$E(X \mid Y = 1) = \frac{5}{2}$ **b)** $E(X) = \frac{4}{3}$

7. **a)** $P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{6};$
$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6};\ P(X = 1, Y = 2) = 0;$
$P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{6};\ P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{3};$
$P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{6}$ **b)** $E(X \mid Y = 0) = \frac{3}{2};$

$E(X \mid Y = 1) = \frac{5}{3};\ E(X \mid Y = 2) = 2$

8. $1 + p$

9. **a)** $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$

10. **a)** 8.8492×10^{-2} **b)** $\frac{y}{2}$ para $y > 0$ **c)** $(x + 1)$ para $x > 0$

13. $E(X \mid Y = \frac{1}{4}) = 1.3137$

16. $Var(Y \mid X = 0) = \frac{2}{3};\ Var(Y \mid X = 1) = \frac{1}{4};$
$Var(Y \mid X = 2) = 0$

17. $E(Z) = p\lambda = Var(Z)$

18. $E(X \mid Y = 1) = \frac{1}{4}e$

19. $E(X \mid Y = y) = \frac{3+2y}{4+3y}$

20. $E(Y \mid X = x) = \frac{2-x}{2}$

21. $E(X \mid Y = y) = \frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)};\ E\left(X^2 \mid Y = y\right) =$
$\frac{1}{2}\left(1 + y^2\right);\ Var(X \mid Y = y) = \frac{9(1+y^2)(1+y)^2 - 8(1+y^2+y)^2}{18(1+y)^2}$

22. $f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} x\exp(-xy) & \text{si} \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases};$

$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} (y+1)^2 x \exp(-x(y+1)) & \text{si} \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$

23.a) $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(3,1),\ Y \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(3,1)$ **b)** $f_{Y|X}(y \mid 2) =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times(0.6)} \exp\left\{-\frac{1}{2\times 0.36}(y - 2.2)^2\right\}$ **c)** $c = 3.187$

24. 7

25. **a)** $\frac{4}{7}$ **b)** $\frac{19}{21}$

26. 2

27. **a)** $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$
b) $f_Y(x) = -(\ln x)\, \mathcal{X}_{(0,1)}(x)$

28. $N\left\{1 - \exp\left(-\frac{10}{N}\right)\right\}$

29. $E(X) = 62$

30. **a)** $E(X) = 6$ **b)** $E(X \mid Y = 1) = 7$ **c)** $E(X \mid Y = 5) = 5.8192$

31. $E(X \mid Y = 1) = \frac{12}{5};\ E(X \mid Y = 2) = \frac{9}{5};$
$E(X \mid Y = 3) = \frac{6}{5};\ E(X \mid Y = 4) = \frac{3}{5};$
$E(X \mid Y = 5) = 0$

32. $\frac{1}{n(n+1)}$