48. En una urna se encuentran N boletos de los cuales unos están premiados y otros no. Supóngase que cada boleto tiene, independientemente de los demás, probabilidad igual a p de ser ganador de un premio. Calcular la probabilidad de que el sexto boleto extraído sea el ganador del tercer premio.

49. Un cargamento de 20 unidades de una cierta mercancia se considera de buena calidad cuando él contiene a lo más dos unidades defectuosas y se considera de mala calidad si contiene por lo menos 4 unidades defectuosas. El vendedor y el comprador del cargamento acuerdan tomar una muestra aleatoria de cuatro unidades para analizarla. Si todos los cuatro elementos de la muestra son de buena calidad entonces se realiza el negocio. El vendedor corre el riesgo, bajo este acuerdo, de no vender un cargamento de buena calidad, en tanto que el comprador corre el riesgo de comprar un cargamento de mala calidad. ¿Quién corre el mayor riesgo en esta transacción?

50. En una masa para hacer pan se han mezclado M uvas pasas. Supóngase que se usa la totalidad de la masa para elaborar N panecillos. ¿Cuántas uvas pasas se deben utilizar para que con probabilidad 0.95 cada panecillo contenga por lo menos una uva pasa?

Capítulo 4

Algunas distribuciones continuas

En este capítulo se estudiarán algunas de las distribuciones de tipo absolutamente continuo de uso más frecuente.

4.1. Distribución uniforme

Supóngase que un bus escolar llega siempre a cierto paradero entre las 6 a.m y las 6 : 10 a.m y que la probabilidad de que el bus llegue en cualquier subintervalo de tiempo, del intervalo $[0, 10]$, es sólo proporcional a la longitud del subintervalo. Es decir, es igualmente probable que el bus llegue entre las 6 : 00 a.m y las 6 : 02 a.m, a que llegue entre las 6 : 07 a.m y las 6 : 09 a.m. Sea X el tiempo, medido en minutos, que un escolar debe esperar en el paradero del bus, si llega exactamente a las 6 : 00 a.m. Si se miden cuidadosamente, durante muchas mañanas, la hora en la que llega el bus, se puede construir, con los datos obtenidos, un histograma de frecuencias relativas. De la descripción anterior, se tiene que las frecuencias relativas con que se observa a X entre 6 : 00 y 6 : 02, y entre 6 : 07 y 6 : 09, son practicamente las mismas. La variable X es un ejemplo de una variable aleatoria con distribución uniforme. Más precisamente se tiene la definición siguiente:

Definición 4.1 (distribución uniforme) *Se dice que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo $[a, b]$, con $a < b$*

números reales, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & en \quad otro \ caso \end{cases}$$

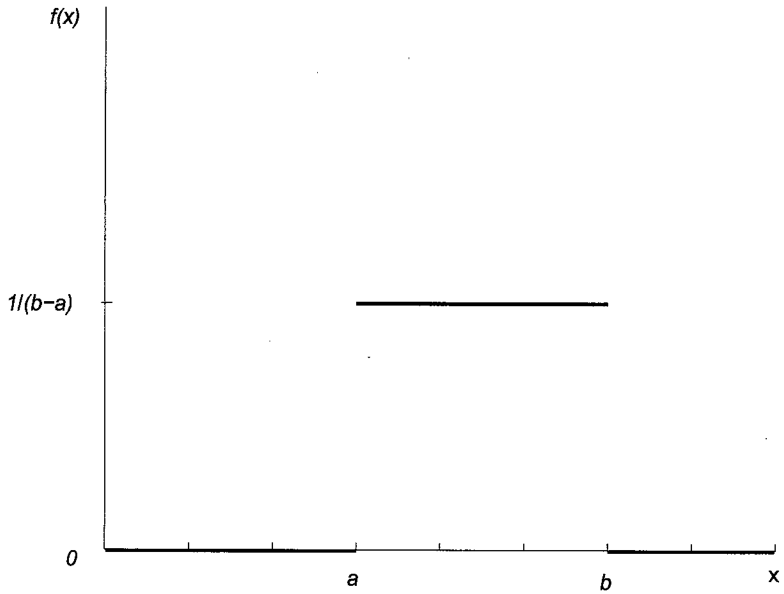


Figura 4.1: Función de densidad de una distribución uniforme

Notación 4.2 *La expresión* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}[a,b]$ *significa que la variable aleatoria* X *tiene distribución uniforme sobre el intervalo* $[a,b]$.

Es fácil verificar que si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}[a,b]$, entonces, la función de distribución de X está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

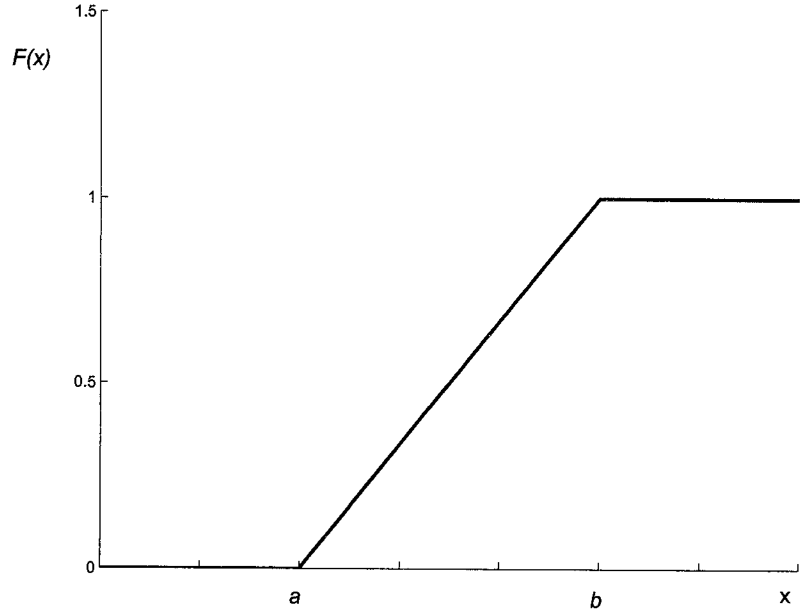


Figura 4.2: Función de distribución de una variable aleatoria con distribución uniforme

Ejemplo 4.3 *Sea* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}[-3,2]$. *Calcular:*

1. $P(X \geq 0)$
2. $P(-5 \leq X \leq \frac{1}{2})$

Solución: En este caso la función de densidad de la variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto,

$$P(X \geq 0) = \int_0^2 \frac{1}{5} dx = \frac{2}{5}$$

y

$$P\left(-5 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-3}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + 3\right) = \frac{7}{10}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 4.4 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, con $a < b$. Se escoge un número X, al azar, en el intervalo $[a, b]$. Esto significa que cualquier subintervalo de $[a, b]$, de longitud τ tiene la misma probabilidad de contener a X. Por lo tanto, para cualquier $a \leq x \leq y \leq b$, se tiene que $P(x \leq X \leq y)$ depende sólo de $(y - x)$. Si f es la función de densidad de la variable aleatoria X, entonces,*

$$kdx = P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx$$

es decir, $f(x) = k$ siendo k una constante apropiada. Puesto que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b kdx$$

se deduce que $k = \frac{1}{b-a}$. Esto es, $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}[a, b]$. ▲

Ejemplo 4.5 *Se escoge un número al azar en el intervalo $[1, 3]$. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dígito al lado derecho del punto decimal sea el 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo dígito a la derecha del punto decimal sea el 2?*

Solución: Sea X := "número escogido al azar en el intervalo $[1, 3]$". La función de densidad de la variable aleatoria X de acuerdo al ejemplo anterior, es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &P(\text{“primer dígito al lado derecho del punto decimal de } X \text{ es 5”}) \\ &= P(1.5 \leq X < 1.6) + P(2.5 \leq X < 2.6) \\ &= \int_{1.5}^{1.6} \frac{1}{2} dx + \int_{2.5}^{2.6} \frac{1}{2} dx = 0.1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &P(\text{“segundo dígito al lado derecho del punto decimal de } X \text{ es 2”}) \\ &= P\left(X \in \bigcup_{k=0}^{9} \{[1.k2, 1.k3) \cup [2.k2, 2.k3)\} \right) \\ &= 20 \times \frac{1}{2} \times 0.01 = 0.1. \end{aligned}$$ ▲

Teorema 4.6 *Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[a, b]$ entonces:*

1. $E(X) = \frac{a+b}{2}$.
2. $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.7 *Supóngase que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}[a, b]$ y que $E(X) = 2$ y $Var(X) = \frac{3}{4}$. Calcular $P(X \leq 1)$.*

Solución: Se tiene que $\frac{a+b}{2} = 2$ y $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{3}{4}$. Por lo tanto $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{7}{2}$. Luego:

$$P(X \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{6}.$$ ▲

Nota 4.8 *Supóngase que X es una variable aleatoria con función de distribución continua y creciente F. Sea Y una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y sea Z la variable aleatoria definida como $Z := F^{-1}(Y)$. La función de distribución de la variable aleatoria Z está dada por:*

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P\left(F^{-1}(Y) \leq z\right) \\ &= P(Y \leq F(z)) \\ &= F(z). \end{aligned}$$

Esto es, las variables aleatorias X y Z tienen la misma distribución de probabilidades. Por lo tanto, se pueden simular variables aleatorias con distribución continua y creciente, conocida. En el apéndice D se explicará este procedimiento.

4.2. Distribución normal

La distribución normal es una de las más importantes y de mayor uso tanto en la teoría de la probabilidad, como en la teoría estadística.

Algunos autores la llaman distribución gaussiana, en honor a Gauss, a quien se considera el "padre" de ésta distribución.

La importancia de la distribución normal, radica en el famoso Teorema Central del Límite, el cual se discutirá en el capítulo 7.

Definición 4.9 *Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es un número real y σ es un número real positivo, si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right];\ x \in \mathbb{R}.$$

Se deja como ejercicio, al lector, verificar que, efectivamente, f es una función de densidad. Esto es que f es no negativa y que

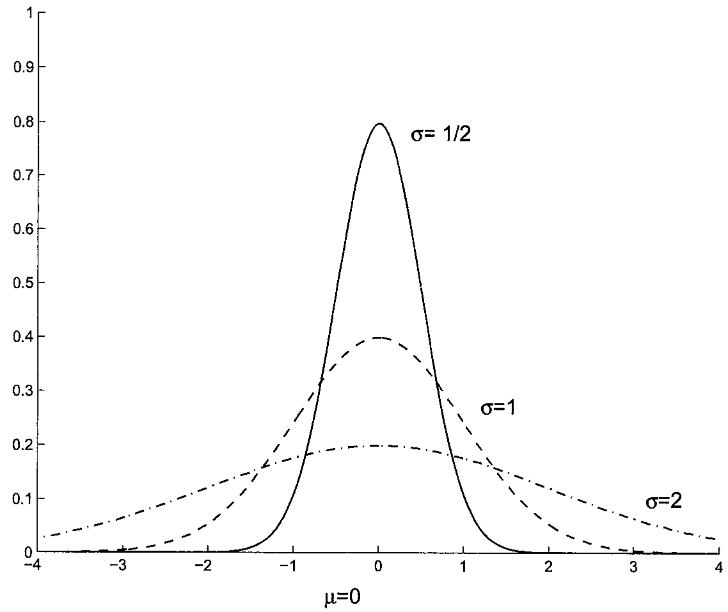
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

El parámetro μ es un parámetro de localización y σ es un parámetro de escala. Conceptos que se precisan a continuación.

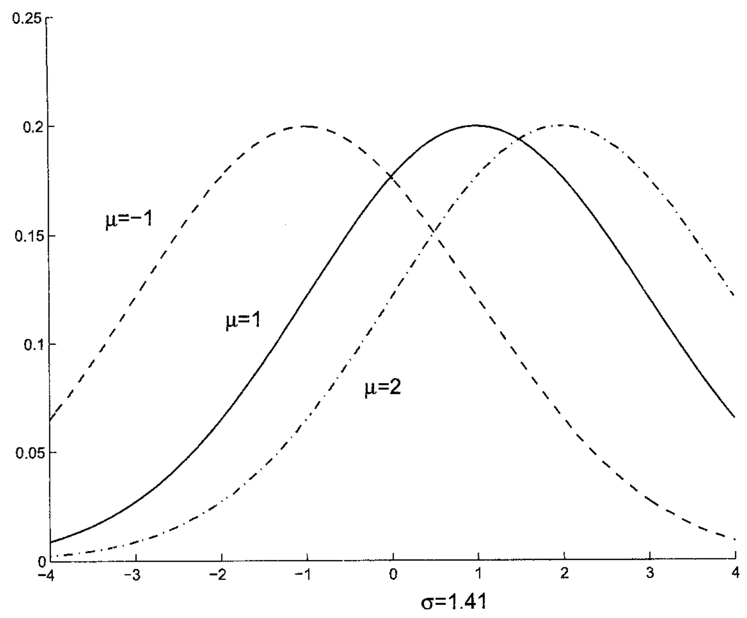
Definición 4.10 (parámetros de localización y de escala) *Sea Y una variable aleatoria. Se dice que θ_1 es un parámetro de localización, si para todo $c \in \mathbb{R}$, se tiene que la variable aleatoria $Z := Y + c$ tiene parámetro $\theta_1 + c$. Esto es, si $f_Y(\cdot;\theta_1,\theta_2)$ es la función de densidad de Y entonces la función de densidad de Z es $f_Z(\cdot;\theta_1 + c, \cdot)$. Se dice que θ_2 es un parámetro de escala, si $\theta_2 > 0$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, la variable aleatoria $W := cY$ tiene parámetro $|c|\,\theta_2$. Esto es, si $f_Y(\cdot;\theta_1,\theta_2)$ es la función de densidad de Y, entonces la función de densidad de W es $f_W(\cdot;\cdot,|c|\,\theta_2)$.*

Notación 4.11 *Se escribe $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ para indicar que X es una variable aleatoria con distribución normal de parámetros μ y σ.*

En la gráfica siguiente se muestra la función de densidad de una variable aleatoria X con distribución normal con $\mu = 0$ y valores diferentes de σ.



La siguiente gráfica muestra la función de densidad de una variable aleatoria $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ para $\sigma = 1.41$ y valores diferentes de μ.



La función de distribución de una variable aleatoria $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ está dada por:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right] du.$$

La gráfica de F, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, está dada en la figura 4.3.

Definición 4.12 (distribución normal estándar) *Si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$, entonces se dice que X tiene distribución normal estándar. La función de densidad y la función de esta variable aleatoria se denotan por $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ respectivamente.*

Nota 4.13 *La función de densidad de una variable aleatoria normal estándar es simétrica con respecto al eje y. Por lo tanto, para todo $z < 0$ se satisface que:*

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

Nota 4.14 *Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y sea $Y := aX + b$ donde a y b son constantes reales con $a \neq 0$. Por lo visto, en el capítulo 2, se sabe que una función de*

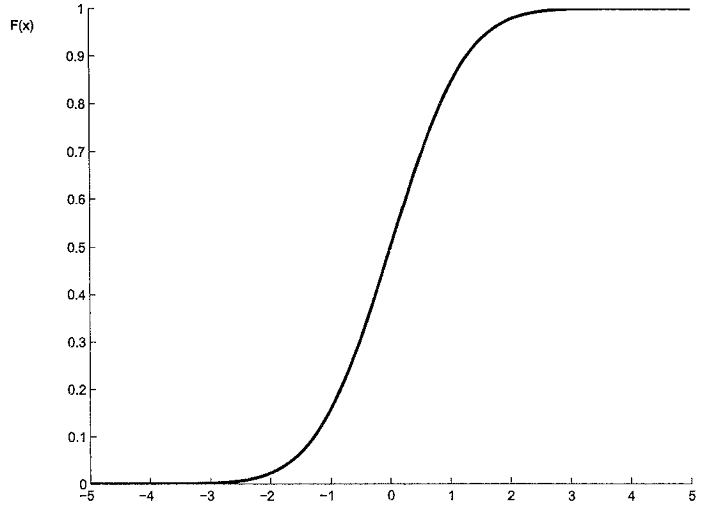


Figura 4.3: Función de distribución de la normal estándar

densidad de la variable aleatoria Y está dada por:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(a\mu+\sigma)}{a\sigma}\right)^2\right].$$

Esto es, Y tiene distribución normal de parámetro de localización $a\mu + b$ y parámetro de escala $|a|\,\sigma$. En particular, si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar. Esto es, para conocer los valores de la función de distribución de una variable aleatoria con distribución normal arbitraria, basta conocer los de una variable aleatoria con distribución normal estándar. En el apéndice D3 se encuentra una tabla con los valores de la función de distribución normal estándar.

Ejemplo 4.15 *Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(1,4)$. Calcular:*

1. $P(0 \leq X < 1)$.
2. $P(X^2 > 4)$.

Solución: Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(0 \leq X < 1) &= P\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{X-1}{2} < 0\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 0.5 - 0.30854 \\
&= 0.19146
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
P\left(X^2 > 4\right) &= 1 - P(|X| \leq 2) \\
&= 1 - P(-2 \leq X \leq 2) \\
&= 1 - P\left(-\frac{3}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \left[\Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{3}{2})\right] \\
&= 1 - [0.69146 - 0.06681] \\
&= 0.37535. \quad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.16 *Supóngase que un instructor asume que las calificaciones finales de los estudiantes son los valores de una variable aleatoria X con distribución normal de parámetros μ y σ. El instructor decide asignar la calificación A a aquellos estudiantes cuyo puntaje exceda a $\mu+\sigma$, la calificación B a aquellos estudiantes cuyos puntajes estén entre μ y $\mu+\sigma$, la calificación C a aquellos estudiantes cuyos puntajes estén entre $\mu-\sigma$ y μ, la calificación D a aquellos estudiantes cuyos puntajes estén entre $\mu-2\sigma$ y $\mu-\sigma$, y la calificación F a aquellos estudiantes cuyos puntajes sean inferiores a $\mu-2\sigma$. Encontrar el porcentaje de estudiantes que obtienen como calificación A, B, C, D o F.*

Solución: Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq \mu+\sigma) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq 1\right) \\
&= 1 - \Phi(1) = 0.1587. \\
P(\mu \leq X < \mu+\sigma) &= P\left(0 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(0) = 0.34134.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\mu-\sigma \leq X < \mu) &= P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} < 0\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1) = 0.34134. \\
P(\mu-2\sigma \leq X < \mu-\sigma) &= P\left(-2 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} < -1\right) \\
&= \Phi(-1) - \Phi(-2) = 0.13591. \\
P(X < \mu-2\sigma) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -2\right) \\
&= \Phi(-2) = 0.02275.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el 15.87 % de los estudiantes obtienen como calificación A; el 34.13 % B; el 34.13 % C; el 13.59 % D y el restante 2.28 % F. ▲

Ejemplo 4.17 *Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(12,4)$. Encontrar el valor de c para el cual $P(X > c) = 0.10$.*

Solución:

$$
\begin{aligned}
P(X > c) &= 1 - P(X \leq c) \\
&= 1 - P(\frac{X-12}{2} \leq \frac{c-12}{2}) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{c-12}{2}\right).
\end{aligned}
$$

esto es,

$$\Phi\left(\frac{c-12}{2}\right) = 0.9,$$

luego de los valores dados en la tabla se tiene que:

$$\frac{c-12}{2} = 1.285,$$

es decir, $c = 14.57$. ▲

Nota 4.18 *Supóngase que $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Entonces:*

$$
\begin{aligned}
P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) &= P\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(3) - \Phi(-3) \\
&= 0.99865 - 0.00135 \\
&= 0.9973
\end{aligned}
$$

o equivalentemente, $P(|X-\mu| > 3\sigma) = 0.0027$. *Es decir, los valores alejados de* μ *tienen probabilidad pequeña de ocurrir. Por esta razón, se dice que la distribución normal tiene la característica de tener colas ligeras.*

A continuación se va a hallar el valor esperado, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución normal.

Teorema 4.19 *Sea* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *Entonces:*

1. $E(X) = \mu$.
2. $Var(X) = \sigma^2$.
3. $m_X(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$.

Demostración. Se va a calcular la función generadora de momentos. A partir de ella se hallan, fácilmente, el valor esperado y la varianza.

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left(x - \{\mu+\sigma^2 t\}\right)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \end{aligned}$$

por consiguiente:

$$E(X) = \left[\mu + \sigma^2 t\right]\exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]\Bigg|_{t=0} = \mu$$

y

$$E(X^2) = \left(\sigma^2 + \left[\mu + \sigma^2 t\right]^2\right)\exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]\Bigg|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

luego,

$$Var(X) = \sigma^2.$$

■

Nota 4.20 *Se puede verificar que la función característica de una variable aleatoria* X, *con distribución normal de parámetros* μ *y* σ, *está dada por:*

$$\varphi_X(t) = \exp\left[i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

Nota 4.21 *La distribución normal es otra forma límite de la distribución binomial, siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones sobre los parámetros* n *y* p *de la distribución binomial:* $n \to \infty$ *y, ni* p *ni* $q = 1-p$ *son muy pequeños. En efecto, Supóngase que* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{B}(n,p)$. *Entonces:*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \cdots, n$$

Cuando $n \to \infty$, *se tiene que* $x \to \infty$ *y además*

$$n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \qquad \textit{(Fórmula de Stirling)}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}p^x(1-p)^{n-x}}{\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{-(n-x)}(n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}p^x(1-p)^{n-x}\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}(n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}}\sqrt{np(1-p)}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(np)^{x+\frac{1}{2}}\left(n(1-p)\right)^{n-x+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}(n-x)^{(n-x)+\frac{1}{2}}\sqrt{np(1-p)}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{np(1-p)}}\left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{n(1-p)}{n-x}\right)^{(n-x)+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sea $\frac{1}{N} := \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{n(1-p)}{n-x}\right)^{(n-x)+\frac{1}{2}}$. *Es claro que:*

$$\ln N = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{np}\right) + \left(n - x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-x}{n(1-p)}\right) \tag{4.1}$$

Si se toma $Z := \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, *se tiene que* Z *toma los valores* $z = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. *Al tomar el límite cuando* $n \to \infty$, *se tiene que* Z *toma todos los valores de* $-\infty$ *a* ∞. *Despejando* x *en la ecuación anterior se obtiene que* $x =$

$z\sqrt{np(1-p)}+np$. *Reemplazando en (4.1) se llega a:*

$$\begin{aligned}
\ln N &= \left(z\sqrt{np(1-p)}+np+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{z\sqrt{np(1-p)}+np}{np}\right)\\
&+\left(n-\left(z\sqrt{np(1-p)}+np\right)+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-\left(z\sqrt{np(1-p)}+np\right)}{n(1-p)}\right)\\
&=\left(np+z\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+z\sqrt{\frac{1-p}{np}}\right)\\
&+\left(n(1-p)-z\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right).
\end{aligned}$$

Desarrollando en serie la función $h(x)=\ln(1+x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\ln N &= \left(z\sqrt{np(1-p)}+np+\frac{1}{2}\right)\left[z\sqrt{\frac{1-p}{np}}-\frac{1}{2}z^2\left(\frac{1-p}{np}\right)+\cdots\right]\\
&+\left(n(1-p)-z\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}\right)\\
&\qquad\cdot\left[-z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}-\frac{1}{2}z^2\left(\frac{p}{n(1-p)}\right)-\cdots\right]\\
&=\left[z^2(1-p)-\frac{1}{2}z^3\sqrt{\frac{(1-p)^3}{np}}+z\sqrt{np(1-p)}-\frac{1}{2}z^2(1-p)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{1-p}{np}}-\frac{1}{4}z^2\left(\frac{1-p}{np}\right)+\cdots\right]\\
&+\left[-z\sqrt{np(1-p)}-\frac{1}{2}z^2p+z^2p+\frac{1}{2}z^3\sqrt{\frac{p^3}{n(1-p)}}-\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4}z^2\left(\frac{p}{n(1-p)}\right)-\cdots\right].
\end{aligned}$$

esto es,

$$\ln N=-\frac{1}{2}z^2+z^2+\frac{z}{2\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)+o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\log N=\frac{1}{2}z^2$$

y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty}N=e^{\frac{1}{2}z^2}.$$

Puesto que,

$$\begin{aligned}
P(X=x)&=P(x<X\le x+dx)\\
&=P\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{x+dx-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\\
&=P(z<Z\le z+dz)\\
&\approx g(z)dz
\end{aligned}$$

donde $g(\cdot)$ es la función de densidad de la variable aleatoria Z, entonces,

$$\begin{aligned}
g(z)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{N}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right).
\end{aligned}$$

Esto es, $Z\overset{d}{=}\mathcal{N}(0,1)$. En otras palabras, si n es suficientemente grande $\mathcal{B}(n,p)\approx\mathcal{N}(np,np(1-p))$. En la práctica, la aproximación es, por lo general, aceptable cuando $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $np\,(1-p)>9$ o $np>5$, o si $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $n\,(1-p)>5$. En el caso $p=\frac{1}{2}$ se obtiene una aproximación bastante buena aún en el caso en que n sea "pequeña" (ver [Her]).

El resultado que se acaba de deducir se conoce como teorema de Moivre-Laplace y como se verá más adelante es un caso particular del Teorema Central del Límite.

Ejemplo 4.22 *Se lanza un dado corriente* 1000 *veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que el número* 6 *aparezca entre* 150 *y* 200 *veces. ¿A qué es igual la probabilidad de que el número* 6 *aparezca exactamente* 150 *veces?*

Solución: Sea X :="Número de veces que se obtiene 6 como resultado". Es claro que $X\overset{d}{=}\mathcal{B}(1000,\frac{1}{6})$. De acuerdo con el resultado anterior, se puede suponer que X tiene una distribución normal de parámetros

$\mu = \frac{500}{3}$ y $\sigma^2 = \frac{1250}{9}$. Por lo tanto,

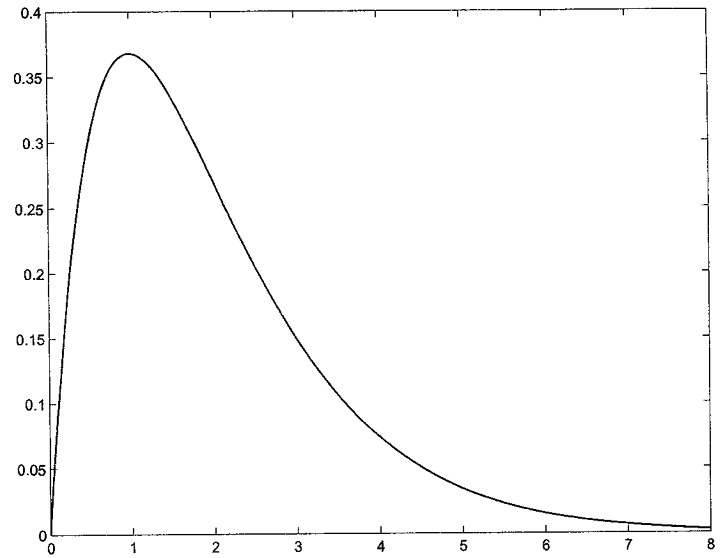
$$\begin{aligned}
P(150 \leq X \leq 200) &= P\left(\frac{150 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \leq \frac{X - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \leq \frac{200 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right) \\
&= P(-1.14142 \leq Z \leq 2.8284) \quad \text{donde } Z \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1) \\
&= \Phi(2.8284) - \Phi(-1.14142) \\
&= 0.9976 - 0.07927 \\
&= 0.91833.
\end{aligned}$$

Para responder a la segunda pregunta, se observa que, como la distribución binomial es discreta y la distribución normal es continua, una aproximación adecuada se obtiene al considerar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(X = 150) &= P(149.5 \leq X \leq 150.5) \\
&= P\left(\frac{149.5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \leq \frac{X - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \leq \frac{150.5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right) \\
&= P(-1.4566 \leq Z \leq -1.3718) \\
&= \Phi(-1.3718) - \Phi(-1.4566) \\
&= 0.08534 - 0.07215 \\
&= 0.01319. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

4.3. Distribución gamma

Algunas variables aleatorias son no negativas siempre y tienen distribuciones que son sesgadas a la derecha, es decir, la mayor parte del área bajo la gráfica, de la función de densidad, se encuentra cerca del origen y los valores de la función de densidad disminuyen gradualmente cuando x aumenta. Un ejemplo de tales distribuciones es la distribución gamma, cuya función de densidad tiene la siguiente forma:



La distribución gamma se emplea, de manera extensa, en una gran diversidad de áreas, como por ejemplo, para describir los intervalos de tiempo entre dos fallas consecutivas del motor de un avión, o los intervalos de tiempo entre las llegadas de clientes a la cola del punto de pago en un supermercado.

La distribución gamma es la generalización de tres casos particulares que, históricamente, surgieron primero: la distribución exponencial, la distribución Erlang y la distribución Ji- cuadrada.

Definición 4.23 (distribución gamma) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución gamma de parámetros $r > 0$ y $\lambda > 0$, si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} \exp(-\lambda x) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)$$

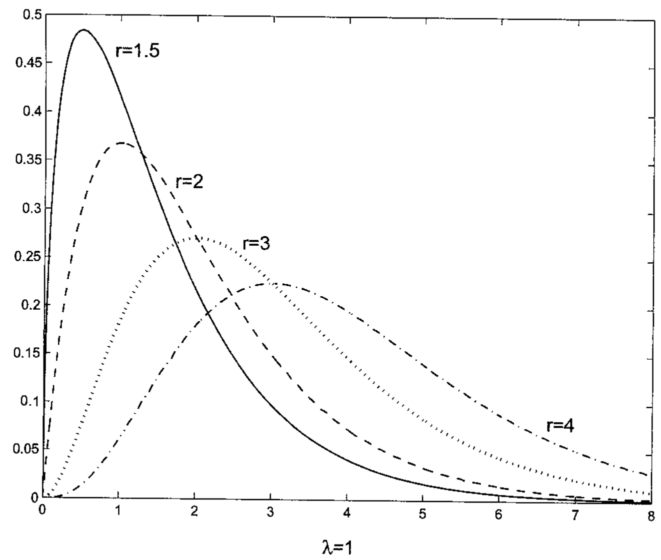
donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, esto es,

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty t^{r-1} \exp(-t) dt.$$

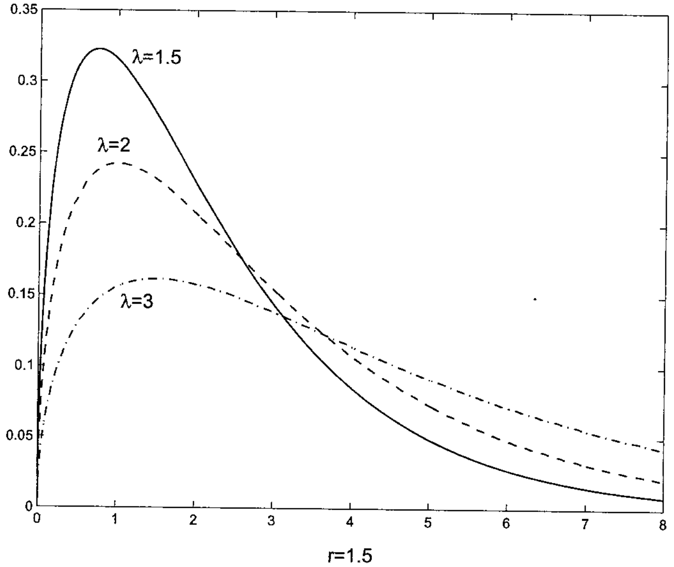
El orden de los parámetros es importante ya que r es el parámetro de forma, en tanto que λ es el parámetro de escala.

La verificación de que f es una función de densidad, se le deja como ejercicio al lector.

La gráfica siguiente muestra la forma de la función de densidad gamma para $\lambda = 1$ y diferentes valores de r.



La gráfica siguiente muestra la forma de la función de densidad gamma para $r = \frac{3}{2}$ y diferentes valores de λ



Notación 4.24 *La expresión* $X \overset{d}{=} \Gamma(r, \lambda)$ *significa que* X *tiene distribución gamma de parámetros* r *y* λ.

La función de distribución de una variable aleatoria X con distribución

gamma de parámetros r y λ está dada por:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda t)^{r-1} \exp(-\lambda t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\lambda x} u^{r-1} \exp(-u) du. \end{aligned}$$

Cuando r es un entero positivo, se tiene que $\Gamma(r) = (r-1)!$ y en tal caso se puede verificar que (ejercicio!):

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Se observa que el lado de la derecha de la ecuación anterior corresponde a $P(Y \geq r)$ donde $Y \overset{d}{=} \mathcal{P}(\lambda x)$. ¿Será que existe algún tipo de relación entre la distribución de Poisson y la distribución gamma?. La respuesta a esta pregunta, es sí. En el capítulo 2 se vio que, bajo ciertas condiciones sobre la forma de llegada de los individuos a cierta línea de espera, se tiene que la variable aleatoria X_t, que denota el número de individuos (partículas), que llegan en el intervalo de tiempo $(0, t]$, tiene una distribución Poisson de parámetro λt. Se puede demostrar que si Z es la variable aleatoria que denota el tiempo transcurrido desde el momento en que se inicia la observación, hasta el momento en que llega el n−ésimo individuo, entonces $Z \overset{d}{=} \Gamma(n, \lambda)$.

En el teorema siguiente se determinan el valor esperado, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución gamma.

Teorema 4.25 *Si* $X \overset{d}{=} \Gamma(r, \lambda)$, *entonces:*

1. $E(X) = \frac{r}{\lambda}$.
2. $Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$.
3. $m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$; *si* $t < \lambda$.

Demostración. *Se va a calcular la función generadora de momentos de* X *y luego, a partir de ella, se hallarán* $E(X)$ *y* $Var(X)$. *Se tiene que:*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_0^\infty \exp(tx) \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r \int_0^\infty \frac{(\lambda - t)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp(-(\lambda - t)x) dx. \end{aligned}$$

Si $(\lambda - t) > 0$ *entonces*

$$g(x) := \frac{(\lambda - t)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp(-(\lambda - t)x) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x)$$

es una función de densidad tipo gamma, y por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda - t)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \exp(-(\lambda - t)x) dx = 1$$

luego,

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad si\ t < \lambda.$$

Por otra parte,

$$E(X) = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{r}{\lambda}$$

y

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{r^2 + r}{\lambda^2}.$$

■

En los casos particulares $r = 1$ y $\lambda > 0$ arbitrario; $\lambda = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{k}{2}$ con k entero positivo, y $r > 1$ y $\lambda > 0$ arbitrarios, se obtienen, respectivamente, los tipos especiales de distribuciones que se habían mencionado anteriormente, es decir, distribución exponencial, la distribución ji-cuadrada con k grados de libertad y la distribución Erlang.

Notación 4.26 *La expresión* $X \stackrel{d}{=} Exp(\lambda)$ *indica que* X *tiene distribución exponencial de parámetro* λ. *La expresión* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{X}^2_{(k)}$ *indica que* X *tiene distribución ji-cuadrada con* k *grados de libertad. La expresión*

$$X \stackrel{d}{=} Erlang(r, \lambda)$$

indica que X *tiene distribución Erlang de parámetros* r *y* λ.

Nota 4.27 *Si* $X \stackrel{d}{=} Exp(\lambda)$, *entonces,* $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ *y* $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$; *para* $t < \lambda$. *Si* $X \stackrel{d}{=} \mathcal{X}^2_{(k)}$, *entonces,* $E(X) = k$; $Var(X) = 2k$ *y* $m_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}}$; *para* $t < \frac{1}{2}$.

La distribución exponencial se usa con frecuencia como modelo para la descripción de la distribución del tiempo transcurrido entre las ocurrencias sucesivas de un determinado suceso, como es el caso de los clientes que llegan a una entidad bancaria, llamadas que entran a una central teléfonica, etc. También se usa, la distribución exponencial, para modelar la distribución de la duración de componentes que ni se deterioran ni mejoran con la edad, esto es, aquellos para los cuales la distribución de la duración restante del componente es independiente de la edad actual. Por lo tanto, este modelo se ajusta a la realidad sólo si la distribución del tiempo de vida que le queda al elemento en cuestión no depende de su edad. Más precisamente se tiene el resultado siguiente:

Teorema 4.28 *Sea* X *una variable aleatoria tal que* $P(X > 0) > 0$. *Entonces:*

$$X \stackrel{d}{=} Exp(\lambda), \text{ si y sólo si, } P(X > x + t \mid X > t) = P(X > x)$$

para todo $x, t \in [0, \infty)$.

Demostración. $\Longrightarrow$) *Supóngase que* $X \stackrel{d}{=} Exp(\lambda)$, *entonces:*

$$\begin{aligned} P(X > x + t \mid X > t) &= \frac{P(X > x + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda(x + t))}{\exp(-\lambda t)} \\ &= \exp(-\lambda x) \\ &= P(X > x). \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) *Sea* $G(x) = P(X > x)$. *Entonces, por hipótesis:*

$$G(x + t) = G(x)G(t)$$

lo cual implica que $G(x) = \exp(-\lambda x)$; *con* λ *constante mayor que* 0. *En efecto,*

$$\underbrace{G\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n-veces} = \underbrace{G\left(\frac{1}{n}\right) G\left(\frac{1}{n}\right) \cdots G\left(\frac{1}{n}\right)}_{n-veces}.$$

esto es,

$$G(1) = \left[G\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

o equivalentemente,

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = [G(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

Análogamente se obtiene para $m, n \in \mathbb{N}$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{m}{n}\right) &= \left[G\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m \\ &= [G(1)]^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Como G es una función continua a derecha, se concluye que

$$G(x) = [G(1)]^x$$

Por otra parte, se tiene que $0 < G(1) < 1$. En efecto, si $G(1) = 1$, entonces, $G(x) = 1$, lo cual contradice que $G(\infty) = 0$. Si $G(1) = 0$ entonces $G\left(\frac{1}{m}\right) = 0$ y por continuidad a derecha se concluye que $G(0) = 0$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, se puede tomar $\lambda := -\ln[G(1)]$ con lo cual se obtiene el resultado. ■

Ejemplo 4.29 *La duración X, en horas, de cierto componente tiene una distribución exponencial de media 100 horas. Calcular la probabilidad de que el componente dure por lo menos 200 horas.*

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{100}\exp(-\frac{1}{100}x)\mathcal{X}_{(0,\infty)}(x),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= 1 - P(X < 200) \\ &= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{100}\exp(-\frac{1}{100}x)dx \\ &= 1 - [-\exp(-2) + 1] \\ &= \exp(-2) = 0.13534. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

4.4. Distribución beta

La distribución que se presenta a continuación se utiliza frecuentemente como un modelo matemático para representar variables físicas cuyos valores se encuentran restringidos en un intervalo de longitud finita, o como modelo para fracciones, tales como la proporción de impurezas en un producto químico o la fracción de tiempo que dura la reparación de una máquina.

Definición 4.30 (distribución beta) *Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución beta de parámetros $a > 0$ y $b > 0$ si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathcal{X}_{(0,1)}(x)$$

donde $B(a,b)$ es la función beta .Esto es,

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Notación 4.31 *La expresión $X \stackrel{d}{=} \beta(a,b)$ significa que X tiene distribución beta de parámetros a y b.*

Las funciones beta y gamma se relacionan mediante la expresión siguiente :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

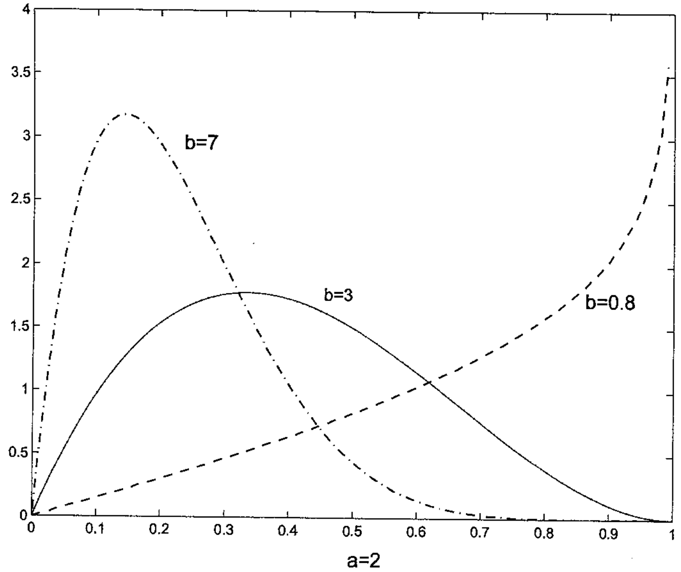
por lo tanto, la función de densidad se expresa de la forma:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathcal{X}_{(0,1)}(x).$$

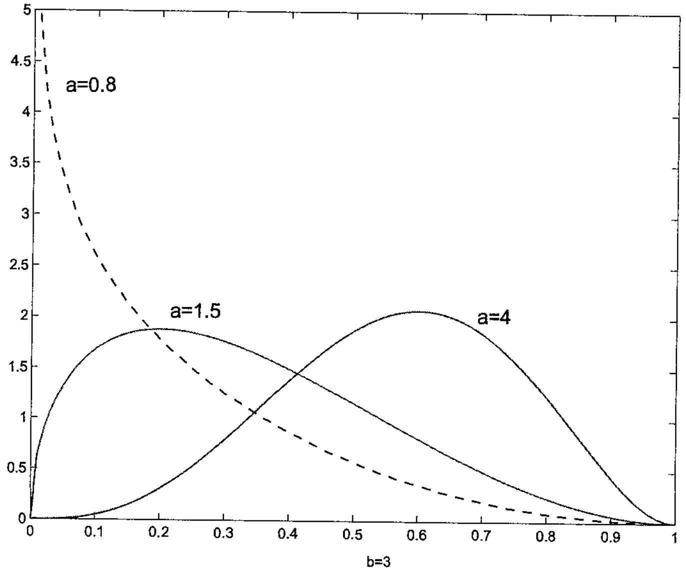
Si a y b son enteros positivos, entonces:

$$f(x) = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathcal{X}_{(0,1)}(x).$$

La figura siguiente muestra las gráficas de la función de densidad beta para $a = 2$ y diferentes valores de b.



La figura siguiente muestra las gráficas de la función de densidad beta para $b = 3$ y diferentes valores de a.



Es claro que si $a = b = 1$, entonces, la distribución beta coincide con la distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Además se tiene que:

1. Si $a > 1$ y $b > 1$, la función f tiene un máximo global.
2. Si $a > 1$ y $b < 1$, la función f es creciente.

3. Si $a < 1$ y $b > 1$, la función f es decreciente.
4. Si $a < 1$ y $b < 1$, la gráfica de f tiene forma de U.

La función de distribución de una variable aleatoria con distribución beta está dada por:

$$F(x) = \left[\int_0^x \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\right] \mathcal{X}_{(0,1)}(x) + \mathcal{X}_{[1,\infty)}(x).$$

La función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución beta no tiene una forma simple. Por esto, resulta conveniente encontrar sus momentos a partir de la definición.

Teorema 4.32 *Sea* $X \stackrel{d}{=} \beta(a,b)$, *entonces:*

1. $E(X) = \frac{a}{a+b}$.
2. $Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} E\left(X^k\right) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{k+a-1}(1-x)^{b-1}dx \\ &= \frac{B(a+k,b)}{B(a,b)} \\ &= \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+k+b)\Gamma(a)}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1+b)\Gamma(a)} \\ &= \frac{a\Gamma(a)\Gamma(a+b)}{(a+b)\Gamma(a+b)\Gamma(a)} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+2+b)\Gamma(a)} \\ &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.33 *Un distribuidor mayorista de gasolina dispone de tanques de almacenamiento que contienen una cantidad fija de gasolina y que se llenan cada lunes. La proporción de esta reserva, que se vende durante la semana, es de sumo interés para el distribuidor. Mediante observaciones realizadas durante muchas semanas, se encontró que el modelo adecuado para representar esta proporción es una distribución beta con parámetros $a = 4$ y $b = 2$. Hallar la probabilidad de que el mayorista venda al menos el 90 % de su reserva durante una semana dada.*

Solución: Sea X :="proporción de la reserva que se vende durante la semana". Puesto que $X \stackrel{d}{=} \beta(4,2)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.9) &= 1 - P(X < 0.9) \\ &= 1 - \int_0^{0.9} 20x^3(1-x)dx \\ &= 0.08146. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

4.5. Distribución Weibull

La distribución Weibull es ampliamente usada en la ingeniería como modelo para la descripción del tiempo de duración de un componente. Esta distribución fue introducida por el científico sueco del mismo nombre, quien demostró que el esfuerzo al que se someten los materiales puede modelarse mediante el empleo de esta distribución.

Sea T la variable aleatoria que denota el tiempo de duración de un componente dado y sea f su función de densidad. Es claro que T es no negativa. Supóngase que se desea conocer la probabilidad de que el componente falle durante las próximas Δt unidades de tiempo, dado que está funcionando correctamente hasta el tiempo t. Si F es la función de distribución de la variable aleatoria T y si $F(t) < 1$,entonces,

$$\begin{aligned} P\left(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t\right) &= \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{1 - P(T \leq t)} \\ &\approx \frac{f(t)\Delta t}{1 - F(t)} =: \lambda(t). \end{aligned}$$

La función $\lambda(t)$ se conoce como *función de riesgo o tasa de falla* asociada a la variable aleatoria T. La función $R(t) := 1 - F(t)$ se conoce como *función de confiabilidad.* La expresión anterior indica que si se conoce la función de densidad del tiempo de duración del componente, entonces, se conoce

su tasa de falla. A continuación se verá que el recíproco también es válido. Puesto que,

$$\lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1 - F(t)},$$

integrando en ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\ln(1 - F(t)) = -\int_0^t \lambda(s)ds + C,$$

esto es:

$$F(t) = 1 - \exp(C)\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right).$$

Es razonable suponer que $F(0) = 0$, esto es, que la probabilidad de falla instantánea del componente es cero. En tal caso se tiene que $C = 0$ y por lo tanto:

$$F(t) = \; 1 - \exp\left(-\textstyle\int_0^t \lambda(s)ds\right); \quad \text{si} \quad t \geq 0$$

lo cual permite conocer la función de distribución de la variable aleatoria T, a partir de su función de riesgo. Si se supone que la tasa de falla es constante e igual a $\lambda > 0$, se ve que para $t \geq 0$:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t).$$

Esto indica que la variable aleatoria T tiene una distribución exponencial de parámetro λ.

Supóngase ahora que la función de riesgo de la variable aleatoria T está dada por:

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

donde α y β son constantes positivas. En tal caso se tiene que:

$$\begin{aligned} F(t) &= \begin{cases} 1 - \exp\left(-\int_0^t \alpha\beta s^{\beta-1}ds\right) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha t^{\beta}) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La función de densidad de T está dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\beta t^{\beta-1}\exp(-\alpha t^{\beta}) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

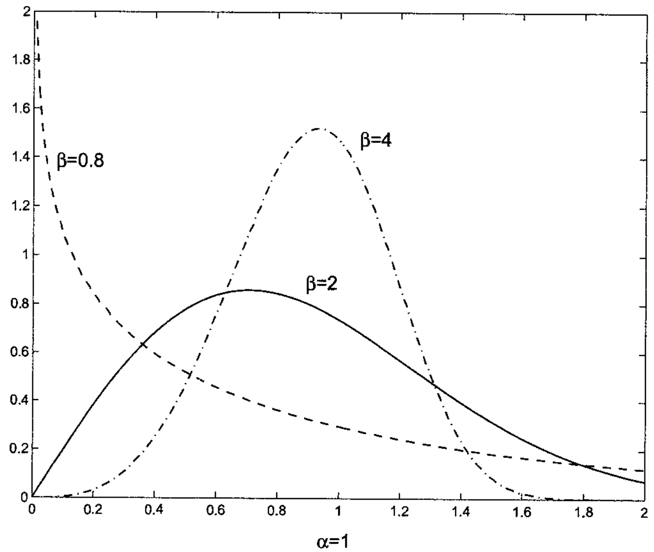
Una variable aleatoria con la función de densidad anterior recibe un nombre especial:

Definición 4.34 (distribución Weibull) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Weibull de parámetros α y β, si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^{\beta}) & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Notación 4.35 *La expresión $X \stackrel{d}{=} W(\alpha,\beta)$ indica que la variable aleatoria X tiene una distribución Weibull de parámetros α y β.*

La figura siguiente muestra la gráfica de la función de densidad Weibull para $\alpha = 1$ y diferentes valores de β



Teorema 4.36 *Sea $X \stackrel{d}{=} W(\alpha,\beta)$, entonces:*

1. $E(X) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$
2. $Var(X) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})\right]$

Demostración. *Como ejercicio.* ■

Nota 4.37 *Algunos autores, como por ejemplo S. Ross (ver [Ros2]) y F. M. Hernández (ver [Her]) definen la función de densidad de una distribución Weibull considerando tres parámetros: un parámetro de localización c, un párametro de escala a y un parámetro de forma b y dicen que una variable*

aleatoria X tiene distribución Weibull de parámetros a, b y c, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}\right] & si \quad x > c \\ 0 & si \quad x \leq c \end{cases}.$$

Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones se acostumbra a hacer $c = 0$, obteniéndose la función de densidad considerada inicialmente, al tomar $\alpha = \left[\frac{1}{a}\right]^{b}$ y $\beta = b$.

4.6. Otras distribuciones continuas

Definición 4.38 (distribución Cauchy) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Cauchy de parámetros θ y β, $\theta \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}^{+}$, si su función de densidad está dada por:*

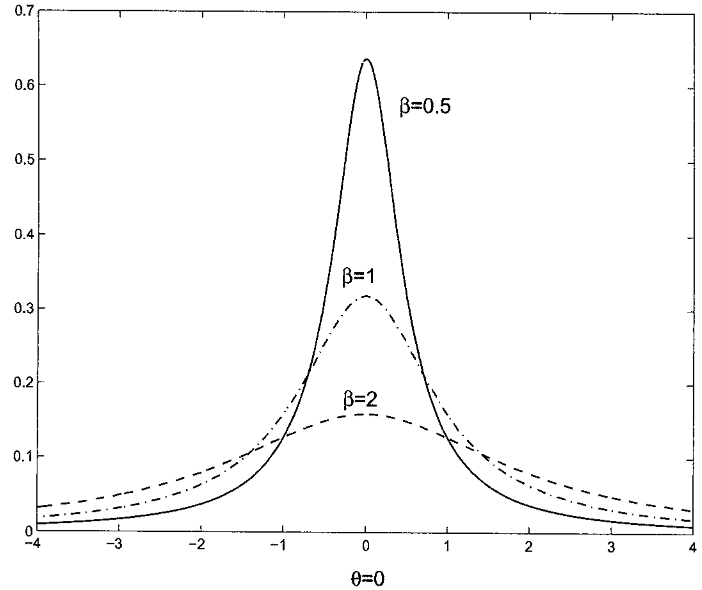
$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)^{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cuando $\theta = 0$ y $\beta = 1$ se obtiene:

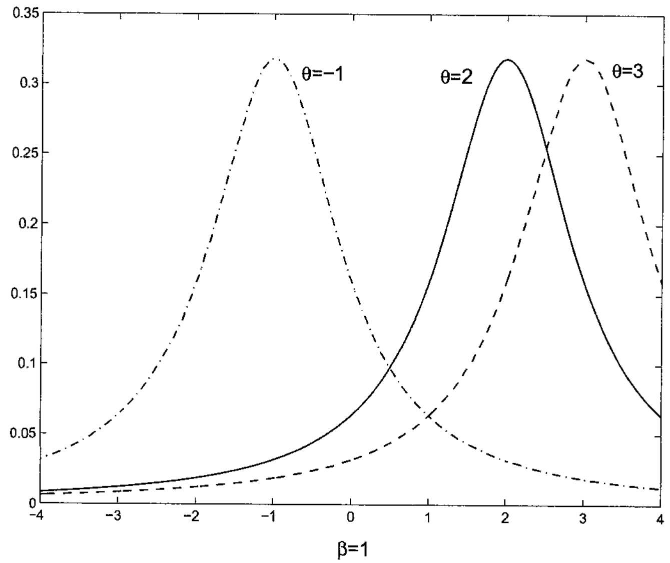
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

la cual se conoce como función de densidad Cauchy estandarizada.

La figura siguiente muestra las gráficas de f para $\theta = 0$ y algunos valores de β.



La figura siguiente muestra las gráficas de f para $\beta = 1$ y algunos valores de θ.



La función de distribución de una variable aleatoria con distribución Cauchy está dada por:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right).$$

La distribución Cauchy tiene la característica de tener colas pesadas, esto

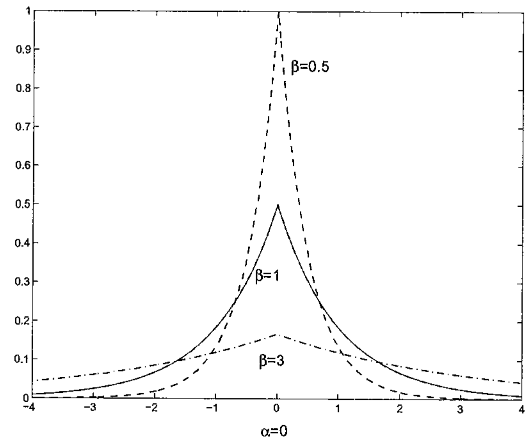
significa que valores lejanos a θ tienen probabilidades grandes de ocurrir. Es por esto, que esta distribución presenta un comportamiento atípico en varios sentidos y es un excelente contraejemplo para varias afirmaciones que en principio resultarían razonables. Recuerde por ejemplo que, en el capítulo 2., se probó que el valor esperado de una variable aleatoria con distribución Cauchy no existe.

Definición 4.39 (distribución de Laplace) *Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace o exponencial doble de parámetros α, β, si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$.

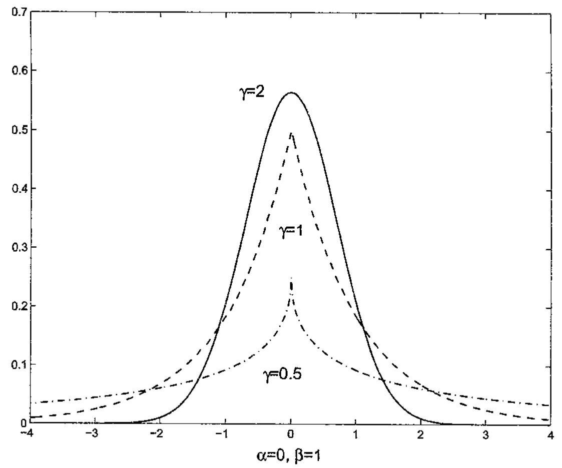
La figura siguiente muestra la gráfica de una función de densidad de Laplace para $\alpha = 0$ y valores diferentes de β.



Definición 4.40 (potencia exponencial) *Se dice que una variable aleatoria X se distribuye como una potencia exponencial de parámetros α, β y γ; con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{2\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} \exp\left[-\left|\frac{x-\alpha}{\beta}\right|^{\gamma}\right].$$

La figura siguiente muestra las gráficas de una función de densidad de una variable aleatoria con distribución potencia exponencial para $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y valores diferentes de γ.



Si $\gamma = 2$ entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right],$$

esto es, se obtiene la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = \alpha$ y $\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$.

Si $\gamma = 1$ se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right)$$

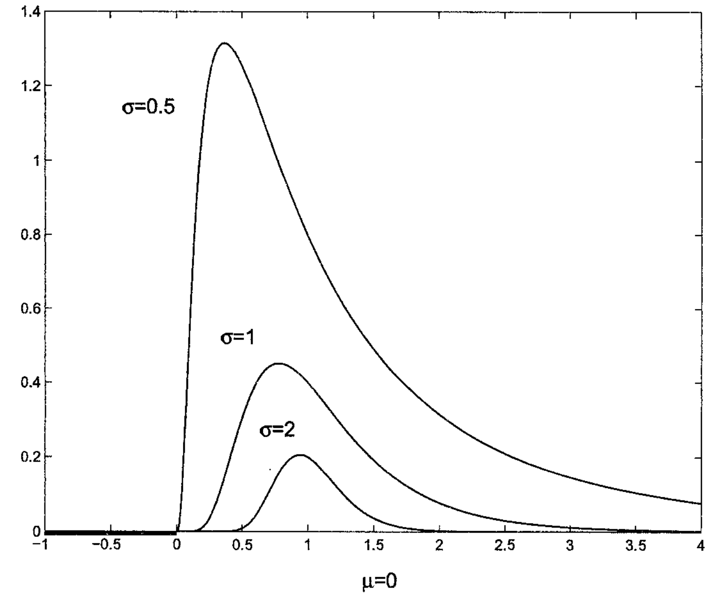
la cual es la función de densidad de Laplace de parámetros α y β.

Definición 4.41 (distribución lognormal) *Sean X una variable positiva y $Y := \ln X$. Si la variable aleatoria Y tiene distribución normal de parámetros μ y σ, entonces, se dice que X tiene distribución lognormal de parámetros μ y σ.*

Es claro que si X tiene distribución lognormal, su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x).$$

La figura siguiente muestra la gráfica de una función de densidad de lognormal para $\mu = 0$ y valores diferentes de σ.



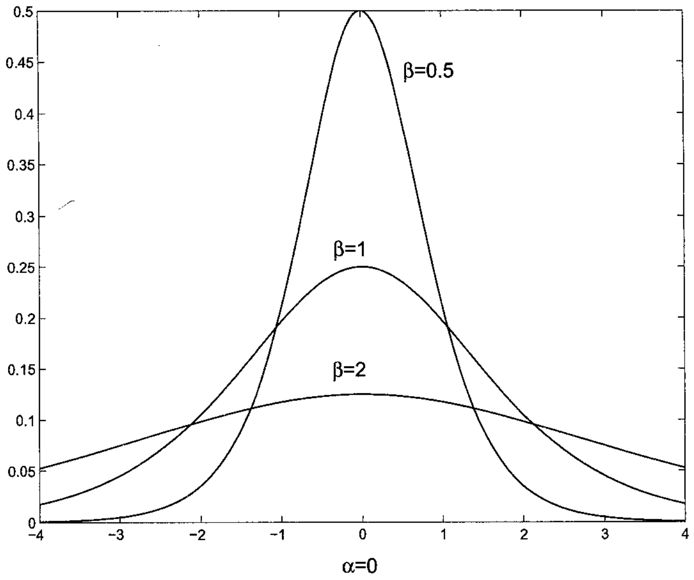
Definición 4.42 (distribución logística) *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución logística de parámetros α y β, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$ si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \frac{\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]}{\left[1 + \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]\right]^2} \; ; \quad x \in \mathbb{R}$$

La función de distribución de una variable aleatoria con distribución logística de parámetros α y β está dada por:

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]}.$$

La figura siguiente muestra la gráfica de una función de densidad logística para $\alpha = 0$ y valores diferentes de β.



4.7. Ejercicios

1. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme continua en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

   a) Calcular: la media, la varianza y la desviación estándar de X.

   b) Determinar el valor de x para el cual $P(|X| < x) = 0.9$.

2. Se escoge un número al azar en el intervalo $(0,1)$. Calcular:

   a) La probabilidad de que el primer dígito a la derecha del punto decimal es 6.

   b) La probabilidad de que el segundo dígito a la derecha del punto decimal es 1.

   c) La probabilidad de que el segundo dígito a la derecha del punto decimal es 8 dado que el primer dígito es 3.

3. Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{U}(a,b)$. Si $E(X) = 2$ y $Var(X) = \frac{3}{4}$, ¿cuáles son los valores de los parámetros a y b?

4. Un escolar llega al paradero de su bus a las 6 : 00 am en punto, sabiendo que el bus llega en algún momento, distribuido uniformemente

entre las 6 : 00 am y las 6 : 20 am, ¿cuál es la probabilidad de que el escolar tenga que esperar más de cinco minutos? Si a las 6 : 10 am no ha pasado el bus todavía, ¿cuál es la probabilidad de que el escolar tenga que esperar por lo menos 5 minutos más?

5. Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,5)$. Calcular la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xX + X + 2 = 0$ sean ambas reales.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $(-1,1)$. Hallar:

   a) $P\left(|X| > \frac{1}{2}\right)$

   b) Una función de densidad de la variable aleatoria $Y = |X|$.

7. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $(0,1)$. Hallar funciones de densidad para las siguientes variables aleatorias:

   a) $Y := \ln X$

   b) $Z := X^3 + 2$

   c) $W := \frac{1}{X}$

8. Un jugador lanza un dardo a una diana. Supóngase que el jugador recibe 10 puntos si su lanzamiento cae a 2 cm. del blanco, 5 puntos si cae entre 2 cm. y 6 cm. del blanco y 3 puntos si cae entre 6 cm. y 10 cm. del blanco. Hallar el número esperado de puntos que obtiene el jugador, sabiendo que la distancia entre el sitio en que cae su lanzamiento y el blanco es una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,10]$.

9. Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0,1)$. Calcular:

   a) $P(0 \leq X \leq 1.42)$

   b) $P(-0.73 \leq X \leq 0)$

   c) $P(-1.37 \leq X \leq 2.01)$

   d) $P(X \geq 1.13)$

   e) $P(|X| \leq 0.5)$.

10. Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(5,16)$. En cada uno de los ejercicios siguientes, obtener el valor de x que resuelve la ecuación:

a) $P(X > x) = 0.5$

b) $P(x < X < 9) = 0.2$

c) $P(X \geq x) = 0.01$

11. En los ejercicios que siguen a continuación encontrar los valores de c que satisfacen las igualdades.

a) $P(W \leq c) = 0.95$ si $W \stackrel{d}{=} \chi^2_8$

b) $P(|X - 2| > 5) = c$ si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(1, 4)$

c) $P(W > c) = 0.25$ si $W \stackrel{d}{=} \chi^2_{10}$

d) $P(X < c) = 0.05$ si $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(10, 5)$

e) $P\left(\chi^2_k \geq c\right) = 0.025$; para $k = 6$, $k = 15$, $k = 25$

12. El volumen que una máquina de llenado automático deposita en latas de una bebida gaseosa tiene una distribución normal de media 12.4 onzas de líquido y desviación estándar de 0.1 onzas de líquido.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen depositado sea menor que 12 onzas de líquido?

b) Si se desechan todas las latas que tienen menos de 12.1 o más de 12.6 onzas de líquido,¿cuál es la proporción de latas desechadas?

13. Supóngase que los puntajes de un examen están distribuidos normalmente con media 76 y desviación estándar 15. El 15 % de los estudiantes, los mejores, obtienen A como nota y el 10 %, los peores, pierden el curso y obtienen P.

a) Hallar el puntaje mínimo para obtener A como calificación.

b) Hallar el puntaje mínimo para aprobar.

14. El tiempo de vida útil de una impresora es una variable aleatoria normal de media 5.2 años y desviación estándar 1.4 años. ¿Qué porcentaje de impresoras tienen una vida útil de menos de 7 años, menos de 3 años y entre 3 y 7 años?.

15. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Hallar la distribución de la variable aleatoria $Y := 5X - 1$.

16. Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 30$ y $p = 0.3$. ¿Es razonable aproximar esta distribución a una normal de parámetros $\mu = 9$ y varianza $\sigma^2 = 6.3$? Explicar.

17. Se lanza un dado corriente 1000 veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que el número 3 se obtenga menos de 150 veces dado que el número 1 se obtuvo 200 veces exactamente.

18. Sea $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(3, 4)$. Encontrar un número α tal que

$$P(X > \alpha) = 2P(X \leq \alpha)$$

19. Determinar los déciles de la distribución normal estándar, esto es los valores $x_{0.1}, x_{0.2}, \cdots, x_{0.9}$ tales que $\Phi(x_{0.i}) = 0.i$ para $i = 1, \cdots, 9$.

20. Un estudio de mercadeo determinó que la demanda diaria por un reconocido diario capitalino es una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 50000$ y desviación estándar $\sigma = 12500$. Cada periódico que se vende deja una ganancia de 500 pesos, en tanto que cada periódico no vendido deja una pérdida de 300 pesos. ¿Cuánto debe ser el tiraje diario del periódico para que la ganancia neta esperada sea máxima?

21. Sea X una variable aleatoria con :

a) distribución uniforme sobre $[-1, 1]$

b) distribución exponencial de parámetro λ

c) distribución normal de parámetros μ y σ

Calcular la función de distribución F_Y y una función de densidad f_Y de la variable aleatoria $Y = aX + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

22. En una oficina de reclamos de una empresa de servicio público, se tiene que el tiempo (en minutos) que dura el empleado en atender el reclamo de un usuario, es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15 minutos. Si usted llega a las 12 en punto a la oficina de reclamos y en ese momento no hay cola de espera, pero el empleado está atendiendo a un usuario ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar menos de 5 minutos en ser atendido?

23. Supóngase que el número de kilómetros que puede recorrer un automóvil antes de que se le acabe la batería está distribuido exponencialmente con un valor promedio de 10000 Km. Si una persona quiere realizar un viaje de 5000 Km, ¿cuál es la probabilidad de que llegue al final de su viaje sin tener que cambiar la batería?

24. El tiempo que transcurre entre las llamadas a una fábrica de artículos deportivos tiene una distribución exponencial con un tiempo promedio entre llamadas de 15 minutos.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en un lapso de 30 minutos?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al menos una llamada en un intervalo de 10 minutos?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de recibir la primera llamada entre 5 y 10 minutos después de abrir la fábrica?

25. La duración T de un componente electrónico es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ.

    a) Determinar la probabilidad de que el componente electrónico funcione por lo menos hasta $t = 3\lambda^{-1}$

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el componente electrónico funcione por lo menos hasta $t = k\lambda^{-1}$ si hasta el tiempo $t = (k-1)\lambda^{-1}$ funciona?

26. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Hallar funciones de densidad para las siguientes variables aleatorias:

    a) $Y := \ln X$.

    b) $Z := X^2 + 1$.

    c) $W := \frac{1}{X}$.

27. a. El actuario Benjamín Gompertz propuso en 1825 la función de riesgo $\lambda(t)$ dada por:

$$\lambda(t) = \alpha\beta^t \mathcal{X}_{(0,\infty)}(t)\,, \text{ con } \alpha > 0 \text{ y } \beta > 1,$$

para modelar el tiempo de vida de los seres humanos. Determinar la función de distribución F correspondiente a la función de falla $\lambda(t)$.

b. En el año 1860 Makeham modificó la función de riesgo propuesta por Gompertz y sugirió la siguiente:

$$\lambda(t) = \left(\gamma + \alpha\beta^t\right) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(t) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \beta > 1.$$

Determinar la función de distribución F correspondiente a la función de falla $\lambda(t)$ (esta distribución recibe el nombre de distribución de Makeham)

28. Calcular la función de falla de una distribución exponencial de parámetro μ.

29. Determinar la distribución F cuya función de falla está dada por:

$$\lambda(t) = \alpha + \beta t; \ t \geq 0$$

donde α y β son constantes.

30. Supóngase que T denota el tiempo de duración de cierto componente y que la función de riesgo asociada a T está dada por:

$$\lambda(t) = \frac{1}{(t+1)}.$$

Hallar la distribución de T.

31. Supóngase que T denota el tiempo de duración de cierto componente y que la función de riesgo asociada a T está dada por:

$$\lambda(t) = \alpha t^{\beta}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son constantes. Hallar la distribución de T.

32. El tiempo de duración de cierto componente electrónico tiene una distribución Weibull con $\beta = 0.5$ y una vida media de 600 horas. Calcular la probabilidad de que el componente dure al menos 500 horas.

33. El tiempo transcurrido (en meses después del mantenimiento) antes de fallar el equipo de vigilancia por circuito cerrado de TV de un banco, tiene una distribución Weibull con $\alpha = \frac{1}{60}$ y $\beta = 2$. Si el banco quiere que la probabilidad de un daño, antes del siguiente mantenimiento programado, sea de 0.05, ¿con qué frecuencia debe recibir mantenimiento periódico el equipo de vigilancia?

34. Una investigación sobre los gastos para el control de la contaminación incurridos por empresas industriales reveló, que el porcentaje anual del cierre de la capacidad de planta atribuible a la reglamentación ambiental y de seguridad, tiene una distribución beta aproximada con $a = 1$ y $b = 25$.

    a) Calcular la media y la varianza del porcentaje anual de cierre de la capacidad de planta atribuible a la reglamentación ambiental y de seguridad.

    b) Calcular la probabilidad de que más del 1 % del cierre de la capacidad de planta sea atribuible a la reglamentación ambiental y de seguridad.

35. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Hallar $E(|X|)$.

36. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente F. Sea $Y = F(X)$. Demostrar que Y tiene distribución uniforme sobre $(0,1)$.

37. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente F. ¿Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria $Y := -\ln(F(X))$?

38. Sea W una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Determinar una función de densidad de la variable aleatoria $Z := \alpha \tan(W)$; donde $\alpha \in (0, \infty)$ es una constante fija.

39. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $(0,1)$. Hallar una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $Y = g(X)$ tenga distribución normal estándar.

40. Demostrar que si X es una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros r y λ, con r entero positivo, entonces:

$$F_X(x) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^j \exp(-\lambda x)}{j!}.$$

41. Demostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

42. Demostrar que:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

43. Sea X una variable aleatoria con distribución Cauchy estándar. Demostrar que $E(X)$ no existe.

44. Sea X una variable aleatoria con distribución Cauchy estándar, ¿qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria $Y := \frac{1}{X}$?

45. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Demostrar que:

$$\left(x^{-1} - x^{-3}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) < \sqrt{2\pi}\,[P(X > x)] < x^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

para $x > 0$.

46. La estatura de los hombres colombianos es una variable aleatoria con distribución normal de media 167cm y desviación estándar de 3 cm.

    a. ¿cuál es el porcentaje de hombres colombianos que tienen i) una estatura mayor que 167 cm, ii) mayor que 170cm, iii) entre 161cm y 173cm?

    b. en una muestra aleatoria de cuatro hombres colombianos, ¿cuál es la probabilidad de que todos tengan una estatura mayor de 170cm?, ¿dos de ellos tengan una estatura menor que la media?

47. Supóngase que el tiempo de duración (medido en meses) de una pila tamaño AA y de marca "la pila" es una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros 1 y 0.2.

    a. calcular la probabilidad de que una de tales pilas dure al menos siete meses.

    b. si cuatro pilas de tamaño AA y marca "la pila" son necesarios para que una linterna funcione y si ésta funciona sólo cuando todas las pilas funcionan, ¿cuál es la probabilidad de que la linterna funcione al menos siete meses?. Exponer claramente los supuestos que se hagan. ¿Son estos supuestos realistas?

    c. ¿cuál es la probabilidad de que se tengan que reponer exactamente dos pilas a los siete meses o antes?

48. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \overset{d}{=} \mathcal{G}(p_n)$. Supóngase que $E(X_n) \to \infty$. Demostrar que:

$$P\left(c \leq \frac{X_n}{E(X_n)} \leq d\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(c \leq Z \leq d)$$

para todo $0 \leq c < d \leq \infty$, donde Z denota a una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1.

49. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[-1, 1]$. Determinar la función de densidad de $Y = X^k$ donde k es un entero positivo.

    Sugerencia: Considérese dos casos: k es par, k es impar.

50. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. ¿Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria $Y := \lambda X$? Explicar.

Capítulo 5

Vectores Aleatorios

En este capítulo se estudiará el comportamiento conjunto de dos o más variables aleatorias.

5.1. Distribución conjunta de variables aleatorias

En muchos casos es necesario considerar el comportamiento conjunto de dos o más variables. Supóngase, por ejemplo, que se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas y que se desea analizar el comportamiento conjunto de las variables aleatorias X e Y definidas como:

$X :=$ "número de caras obtenidas en los primeros dos lanzamientos"

$Y :=$ "número de caras obtenidas en los dos últimos lanzamientos"

Es claro que:

$$P(X = 0, Y = 0) = P((S, S, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 0, Y = 1) = P((S, S, C)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 1, Y = 0) = P((C, S, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 1, Y = 1) = P(\{(C, S, C), (S, C, S)\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1, Y = 2) = P((S, C, C)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 2, Y = 1) = P((C, C, S)) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 2, Y = 2) = P((C, C, C)) = \frac{1}{8}$$

44. $\phi_X(t) = \left(q + pe^{it}\right)^n$
45. $\phi_X(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right)$
46. 6.

Capítulo 4

1. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $x = 1.3$
2. a) 0.1 **b)** 0.1 **c)** 0.1
4. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$
5. $\frac{3}{5}$
6. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $f_Y(x) = \mathcal{X}_{(0,1)}(x)$
7. a) $f_Y(x) = \exp(x)\,\mathcal{X}_{(-\infty,0)}(x)$ **b)** $f_Y(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}\,\mathcal{X}_{(2,3)}(x)$
c) $f_Y(x) = \frac{1}{x^2}\mathcal{X}_{(1,\infty)}(x)$
8. 5.2
9. a)0.422 2 **b)**0.267 3 **c)** 0.892 44 **d)** 0.129 24 **e)** 0.382 92
10. a) 5 **b)** 6.46 **c)** 14.36
11. a) 15.50 **b)** 0.0241 **c)** 12.549 **d)** 6.31
12. a) 0 **b)** 2.41 %
13. a) 92 **b)** 57
14. 89.97 %; 5.82 %; 84.2 %
15. Normal con media $(5\mu - 1)$ y varianza $25\sigma^2$
16. No. Calcular, por ejemplo, $P(4 \leq X \leq 9)$.
17. 0.17619
18. $\alpha = 2.14$
20. 54000
22. 0.283 47
23. 0.606 53
25. a) e^{-3} **b)** e^{-1}
26. $f_Y(y) = \lambda\exp(y - \lambda\exp(y))$, $y \in \mathbb{R}$
27. a) $F(t) = 1 - \exp\left(-\eta\left(\beta^t - 1\right)\right); t \geq 0$ con $\eta = \frac{\alpha}{\ln\beta}$
b) $F(t) = 1 - \exp\left(-\gamma t - \eta\left(\beta^t - 1\right)\right); t \geq 0$ con $\eta = \frac{\alpha}{\ln\beta}$
30. $F(t) = \left(1 - \frac{1}{t+1}\right), t \geq 0$
31. $F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta+1}t^{\beta+1}\right), t \geq 0$
32. 0.275
33. Cada 7 semanas aproximadamente.
34. a) $\frac{1}{26}$; $1.369\,7 \times 10^{-3}$ **b)** 3.555×10^{-4}
35. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
37. $Exp(1)$

38. $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.
39. g es la inversa de la función de densidad de una normal estándar
44. Cauchy estándar.

Capítulo 5

1. a) 0.3 **b)** 0.9 **d)** $P(Z=-2) = 0.1$, $P(Z=-1) = 0.2$, $P(Z=0) = 0.3$, $P(Z=1) = 0.4$
2. $\alpha = \beta = 0.1$, $\gamma = \eta = \kappa = 0$, $\delta = 0.2$
3. a) $P(X=0,Y=0) = \frac{1}{55}$, $P(X=0,Y=1) = \frac{2}{11}$, $P(X=0,Y=2) = \frac{2}{11}$, $P(X=1,Y=0) = \frac{8}{55}$, $P(X=1,Y=1) = \frac{4}{11}$, $P(X=2,Y=0) = \frac{6}{55}$ **b)** $E(X) = \frac{8}{11}$, $E(Y) = \frac{10}{11}$
4. b) $E(X) = \frac{88}{121}$, $E(Y) = \frac{110}{121}$
5. a) 6 **b)** 6
7. a) $3.73\,08 \times 10^{-3}$ **b)** 9
8. $a = b = k = h = \frac{1}{6}$, $d = e = f = 0$; $E(XY) = 0$
9. a) $\mathcal{P}(9.4)$ **b)** 0.29
10. $P(Z=-1,W=1) = \frac{1}{16}$, $P(Z=0,W=0) = \frac{1}{4}$,
$P(Z=0,W=2) = \frac{3}{16}$, $P(Z=1,W=1) = \frac{1}{8}$,
$P(Z=1,W=3) = \frac{1}{16}$, $P(Z=2,W=0) = \frac{3}{16}$,
$P(Z=2,W=2) = \frac{1}{16}$, $P(Z=3,W=1) = \frac{1}{16}$.
11. $\frac{41}{324}$; 0.125 1
13. -1
14. 0.351 85
15. No
16. $\rho = \frac{-\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$
17. $9 - 2\sqrt{2}$
19. $EX = m\left(\frac{n+1}{2}\right)$
20. $EX = \binom{r}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^{k-1}\left(\frac{364}{365}\right)^{r-k}$
21. $EY = 365 - \left(\frac{1}{365}\right)^{-1}\left(\frac{364}{365}\right)^{r} - r\left(\frac{364}{365}\right)^{r-1}$
29. Si, $f(x,y) = \frac{e^{-x}}{\pi(1+y^2)}$, $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$.
30. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
31. b) $\frac{1}{25}$
32. b) $\frac{1}{4}$ **c)**0.305 56
34. $\frac{1}{2}$
35. $\frac{1}{8}$
37. $f_Z(x) = \frac{1}{2}(x-4)\,\mathcal{X}_{(4,5]}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_{(5,6]}(x) + \frac{1}{2}(7-x)\,\mathcal{X}_{(6,7]}(x)$.
38. a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}$