

Bewertung von Optionen und zustandsbedingten Ansprüchen (contingent claims) mit der Feynman-Kac-Formel

Seminararbeit

von

Corvin Idler

c/o European Commission, Delegation Australia, Diplomatic Pouch,
1049 Brussels, BELGIUM

+61 2 6271 2777, idler@uni-koblenz.de

Studiengang	Bachelor Wirtschaftswissenschaften
Betreuer	Prof. Dr. Hermann Singer
Matrikelnummer	7529953
Arbeit vorgelegt am:	22.10.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Finanzmathematisches Modell	4
2.1	Preisprozesse für Basiswert und Bond	4
2.2	Bewertung durch Duplikationsportfolios	6
2.3	Fundamentale partielle Differentialgleichung (FPD)	7
3	Feynman-Kac Formel	8
3.1	Feynman-Kac Lösungsansatz der FPD	8
3.2	Berechnungsbeispiele	8
3.2.1	Anwendungsfälle mit analytischer Lösung	8
3.2.2	Verfahren für Anwendungsfälle ohne analytische Lösung	12
3.3	Grenzen der Feynman-Kac Formel	15
	Literaturverzeichnis	17

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen (auch als zufallsbehaftete Finanzpositionen, Eventualforderungen oder contingent claims bezeichnet) unter Anwendung der sogenannten Feynman-Kac Formel. Dabei wird überwiegend Bezug auf die Bewertung von Aktienoptionen als Anwendungsfall genommen, was darauf zurückzuführen ist, dass diese Kategorie von Eventualforderungen ausgiebigst in der wissenschaftlichen Literatur beschrieben ist. Es soll jedoch der Eindruck vermieden werden, dass die besprochenen Formalismen und Modelle ausschließlich für diesen Anwendungsfall Relevanz besitzen. Vielmehr sind sie die Grundlage für die Bewertung einer Vielfalt von zufallsbehafteten Finanzpositionen. Beispielsweise werden in [Zag06] Ansätze für die Bewertung gemischter Kapitallebensversicherungen mit einem ähnlichen mathematischen und modelltechnischen Instrumentarium, wie dem hier vorgestellten, aufgezeigt. Nach einer allgemeinen Beschreibung des finanzmathematischen Modells in Kapitel 2, werden in Kapitel 3 Lösungsmöglichkeiten des Bewertungsproblem es mittels der Feynman-Kac Formel aufgezeigt, sowie die Grenzen der Anwendbarkeit des vorgestellten Formalismus besprochen.

2 Finanzmathematisches Modell

2.1 Preisprozesse für Basiswert und Bond

Für die Lösung des Bewertungsproblems von zustandsbedingten Ansprüchen ist die Modellierung des (Preis)Prozesses des zugrunde liegenden Basiswertes (underlying) eine Grundvoraussetzung. Die folgenden Ausführungen seien beschränkt auf eine in der Finanzmathematik (speziell im Kontext der Aktienoptionsbewertung) weit verbreitete Modellklasse, bei der die Kursentwicklung des Basiswertes durch folgende stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden [SL06, S. 141]:

$$X(t) = X(0) + \underbrace{\int_0^t \alpha(s, X(s)) ds}_{\text{Riemann-Integral}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s)}_{\text{Ito-Integral}}, 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

$$dX(t) = \alpha(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (2.2)$$

Dabei symbolisiert $W(t)$ eine Brownsche Bewegung und die beiden Funktionen $\alpha(t, X(t))$ und $\sigma(t, X(t))$ stehen für die Drift, respektive die Volatilität des stochastischen Prozesses $X(t)$. Die Möglichkeit von Dividendenzahlungen wird im Kontext dieser Arbeit aus Übersichtlichkeitsgründen ausgeschlossen, eine Modellierung ist jedoch prinzipiell ohne weiteres möglich. Wie in Abschnitt 2.2 ersichtlich wird, ist für das Bewertungsproblem noch die Modellierung des Preisprozesses einer risikofreien Anlage (Bond) $B(t)$ in Abhängigkeit des Zinssatzes $r(t, X(t))$ erforderlich, welche in ihrer allgemeinsten Form wie folgt lautet:

$$dB(t) = B(t)r(t, X(t))dt; B(0) = 1 \quad (2.3)$$

Eine spezifische Ausprägung des mit Gleichung (2.1) bis (2.3) beschriebenen Modells ist z.B. das von Black-Scholes [BS73] in welchem die Wertentwicklung $X(t)$ eines Basiswertes mittels **geometrischer** Brownscher Bewegung mit **konstanter Volatilität** $\sigma(t, X(t)) = \sigma$, **konstanter Drift** $\alpha(t, X(t)) = \alpha$ und **konstantem risikolosem Zinssatz** $r(t, X(t)) = r$ modelliert wird:

$$dX(t) = \alpha X(t) dt + \sigma X(t) dW(t) \quad (2.4)$$

$$W(t + \tau) - W(t) \sim N(0, \sqrt{\tau}) \quad (2.5)$$

$$dB(t) = B(t)r dt; B(0) = 1 \quad (2.6)$$

Mittels Ito-Integral über die Brownsche Bewegung ergibt sich folgender Zusammenhang [SL06, S.146]

$$\ln X(t) = \ln X(0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \quad (2.7)$$

bzw.

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \quad (2.8)$$

Die gemachten Annahmen implizieren u.a. dass sich der Basiswertkurs im Zeitverlauf kontinuierlich entwickelt (keine Kurssprünge), die Kursveränderungen im Zeitablauf unkorreliert sind und die logarithmierten Inkremente normalverteilt sind¹ [Zim00, S.4][Os59].

Neben dem Black-Scholes Model, dessen Annahme einer konstanten Volatilität in der Realität selten zutrifft, sind noch eine Vielfalt von weitaus weniger restriktiven Modellausprägungen in der Literatur beschrieben. Diese Ansätze sehen zeitliche Schwankungen der Volatilität vor und modellieren sie als einen eigenständigen (oft von einer Brownschen Bewegung getriebenen) stochastischen Prozess. Eine tabellarische Aufstellung verschiedener Volatilitätsprozesse findet sich in [Sin99, S. 212]. Verbreitet sind vor allem Modelle welche sich Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen in vielfältiger Form bedienen [JWH02]. Für die Zwecke dieser Arbeit sei exemplarisch der Ansatz von [NF92] herausgegriffen, welcher sich von dem GARCH²-Formalismus aus dem Bereich der Zeitreihenanalyse ableitet. Die Stochastizität der Volatilität wird dabei über folgenden Prozess hergestellt:

$$d \log \sigma(t)^2 = \lambda (\log \sigma(t)^2 - \log \bar{\sigma})dt + \gamma dV(t) \quad (2.9)$$

Der Parameter γ symbolisiert dabei die Volatilität der Volatilität, λ wird oft als Steifigkeit³ und $\bar{\sigma}$ als Gleichgewichtsniveau⁴ bezeichnet. Getrieben wird der Prozess von der Brownschen Bewegung $dV(t)$ welche mit der Brownschen Bewegung des Basiswertes korreliert sein kann ($Var(dW, dV) = \rho dt$).

¹letzteres ergibt sich aus der **geometrischen** Brownschen Bewegung

²generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

³speed of mean reversion

⁴mean reversion level

2.2 Bewertung durch Duplikationsportfolios

Das Preismodell für die Bewertung von zustandsbedingten Ansprüchen welches innerhalb dieser Arbeit verwendet wird, basiere auf der Annahme eines perfekten Finanzmarktes [FHH04, Kap. 4.1] :

- Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten
- keine Transaktionskosten
- keine Steuern
- short-selling uneingeschränkt möglich
- Soll- und Habenzinsen identisch
- Wertpapiere beliebig teilbar

Obige Modellannahmen sind von zentraler Bedeutung in Bezug auf die Bewertung von Optionen und anderen zustandsabhängigen Ansprüchen durch sogenannte Duplikationsportfolios. Dabei synthetisiert man den zu bewertenden Finanztitel $C(X, t)$ (mit noch unbekanntem Wert) - durch Kauf und Verkauf anderer am Markt umlaufender Titel - mit einem Portfolio $V(X, t)$ (mit bekanntem Wert/Preis) in einer Art und Weise, dass beide Portfolios zu einem bestimmten Zeitpunkt T wertgleich sind ($C(X, T) = V(X, T)$). Durch kontinuierliche Umschichtungen innerhalb des Duplikationsportfolios werden in diesem Modell Wertveränderungen während der Laufzeit des zu bewertenden Finanztitels gleichwertig nachgebildet ($dC(X, t) = dV(X, t)$), sodass beide Portfolios auch zu jedem davor liegenden Zeitpunkt $t \leq T$ wertgleich sind ($C(X, t) = V(X, t)$). Diese Umschichtungen werden ohne positiven oder negativen externen Cash Flow vorgenommen, was man als Selbstfinanzierungsbedingung bezeichnet [Zim00, S.7]. Durch diese dynamische Hedging-Strategie ergibt sich der Wert des Finanzderivats zu jedem Zeitpunkt t anhand des Wertes des Duplikationsportfolios. Das Duplikationsportfolio $V(X, t)$ z.B. für eine Aktienoption $C(X, t)$ besteht gewöhnlich aus $\Delta(X, t)$ Aktien und einem Festgeld bzw. risikolosen Zero-bond $B(X, t)$ mit dem Zinssatz r [Zim00, S.5]:

$$C(X, t) = V(X, t) = \Delta(X, t)X + B(X, t) \quad (2.10)$$

Innerhalb dieses mathematischen Formalismus drücken sich die kontinuierlichen Umschichtungsoperationen im Duplikationsportefolio zum Zwecke der Wertanpassung durch folgende Wahl aus: $\Delta(X, t) = \frac{\partial C(X, t)}{\partial X}$ (perfekte Replikation ohne Residualrisiko).

2.3 Fundamentale partielle Differentialgleichung (FPD)

Alle oben genannten Modellannahmen führen kombiniert letztlich zu der **fundamentalen partiellen Differentialgleichung der Optionspreisbildung**, welche auch als verallgemeinerte Black-Scholes-Differentialgleichung [Sin99, S. 222 ff] oder dynamische Hedginggleichung [Zim00] bezeichnet wird. Sie lautet in ihrer allgemeinen Form:

$$\frac{\partial C(X, t)}{\partial t} + \frac{\partial C(X, t)r(X, t)}{\partial X} + \frac{\partial^2 C(X, t)\sigma^2(X, t)}{2\partial^2 X} - r(X, t)C(X, t) = 0; \quad (2.11)$$

$$C(X, T) = G(X_T), 0 \leq t \leq T$$

Eine genaue Herleitung von Gleichung (2.11) findet sich in [Sin99, S. 222 ff] [Zim00] [FHH04]. Eine bedeutende Eigenschaft sei hervorgehoben: die obige Gleichung ist vollkommen unabhängig von der Drift $\alpha(X, t)$ des Basiswertprozesses aus Gleichung (2.1)! Dies ist darauf zurückzuführen, dass die perfekte dynamische Hedgingstrategie aus Abschnitt 2.2 eine Beziehung zwischen Optionspreis und Basiskurs herstellt, welche völlig frei von jeglichen Risikopräferenzen ist [CR75] und somit den risikolosen Zinssatz r als Bezugsrendite inne hat. Dieses Phänomen lässt sich in letzter Instanz (mittelbar über unterstellte Linearität der Nutzenfunktionen der Marktteilnehmer) auf die Annahme der Arbitragefreiheit zurückführen [MS03, S. 336][CR76, S. 153][HP81] und ist auch als Fundamentaltheorem der Vermögensbewertung⁵ und Bewertungsregelrepräsentationstheorem⁶ bekannt [DR03, S.9] [Sch08].

Gleichung (2.11) gilt für sich genommen für beliebige zustandsbedingte Ansprüche, deren Wert nur von X und t abhängen. Die **spezifische Auszahlungsstruktur** $G(X_T)$ der Finanzderivate zum Fälligkeitszeitpunkt fließt nicht in die Gleichung selbst mit ein, sondern wird in Form von Randbedingung formuliert und zur Lösung der Gleichung herangezogen. Beispielsweise gelten für eine europäische Long-Call Option⁷ die folgenden Randbedingungen:

$$C(X, T) = G(X_T) = \max[0, X_T - K] \quad (2.12)$$

und

$$C(X, t) \geq 0 \quad (2.13)$$

wobei K den Ausübungspreis der Option symbolisiere. In der Regel lässt sich Gleichung (2.11) nur für bestimmte Spezialfälle analytisch lösen. Eine Vielzahl von eleganten Lösungsmöglichkeiten eröffnen sich durch Anwendung der Feynman-Kac Formel, welche im Folgenden Kapitel besprochen wird.

⁵Fundamental Theorem of Asset Pricing

⁶Pricing Rule Representation Theorem

⁷Kauf einer Kaufoption

3 Feynman-Kac Formel

3.1 Feynman-Kac Lösungsansatz der FPD

In ihrer allgemeinsten Form bezieht sich die Feynman-Kac Gleichung [Fey48, Kac49] auf die Lösung der Schrödinger-Gleichung in der Quantenphysik. Eine Spezialisierung dieser Gleichung ergibt sich, wenn man sie auf (2.2) und (2.11) anwendet. Die vorliegende Problemstellung (das Finden einer Lösung für die FPD) wird mit Hilfe der Feynman-Kac Gleichung wie folgt angegangen:

$$C(X, t) = E \left[e^{-\int_t^T r(X(s), s) ds} G(X(T)) \mid X(t) = X \right] \quad (3.1)$$

In diesem Formalismus ist der Wert einer Option also der zum Zeitpunkt t abdiskontierte Erwartungswert (bzgl. eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaßes¹) der Auszahlung eines zustandsbedingten Anspruches in Abhängigkeit von dem Preis X des underlying zum Zeitpunkt t [Bra06]. Innerhalb obiger Modellierung ist es von zentraler Bedeutung, welche Pfade in dem vorliegenden dynamischen stochastischen System möglich sind. Man definiert ein Maß über der Menge aller möglichen Pfade vom Anfangszustand $X(t) = X$ zum Endzustand $X(T)$. Dies ermöglicht mittels Pfadintegral über alle möglichen Pfade von $X(t) = X$ nach $X(T)$ die Berechnung von Erwartungswerten von pfadabhängigen Funktionalen, wie z.B. der Auszahlungsstruktur $G(X_T)$ einer Option. Pfadintegrale nennt man auch sum-over-histories (Pfade) oder funktionale Integrale [Lin98, S. 129ff.]. Offensichtlich ist die bedingte Dichte $p(X_T \mid X)$ von fundamentalem Interesse für diesen Formalismus, wie im folgenden Abschnitt deutlich wird.

3.2 Berechnungsbeispiele

3.2.1 Anwendungsfälle mit analytischer Lösung

Ein klassisches Rechenbeispiel für die Feynman-Kac Gleichung, bei welcher diese eine analytische Lösung besitzt, ist eine europäische Long-Call Option in einer

¹risikoneutrales Bewertungsmaß

Black-Scholes-Welt (d.h. mit unterstellter geometrischer Brownscher Bewegung für den Preisprozess des Basiswertes, sowie einem konstantem Zinssatz). Wie in Gleichung (2.12) bereits beschrieben, gilt für die Auszahlungsstruktur dieser Option $G(X_T) = \max[0, X_T - K]$. Die Feynman-Kac-Formel erhält in diesem Szenario folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} C(X, t) &= e^{-r(T-t)} E [\max[X_T - K, 0] \mid X(t) = X] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (X_T - K) p(X_T \mid X) dX_T \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\int_K^\infty X_T p(X_T \mid X) dX_T - K \int_K^\infty p(X_T \mid X) dX_T \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Den Modellannahmen entsprechend (vgl. insbesondere Gleichung (2.8)) ist $X_T/X = e^x$ mit folgender Verteilung [Sin99, S. 240]:

$$x \sim N(\nu, \gamma^2); \nu = (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \gamma^2 = \sigma^2(T - t) \quad (3.3)$$

In Analogie zu Abschnitt 2.3 wird auch hier $\alpha = r$ gesetzt. Durch den Zusammenhang aus Gleichung (3.3) kann die bedingte Dichte $p(X_T \mid X)$ über die Normalverteilungsdichtefunktion $\phi()$ wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp \frac{(x - \nu)^2}{-2\gamma^2} = \phi(x; \nu, \gamma^2) dx = p(X_T \mid X) dX_T \quad (3.4)$$

Eine genaue Herleitung findet sich in [Lin98, S. 134 ff]. Dies ermöglicht Gleichung (3.2) wie folgt umzuformen:

$$\begin{aligned} C(X, t) &= e^{-r(T-t)} \left[\int_K^\infty X_T p(X_T \mid X) dX_T - K \int_K^\infty p(X_T \mid X) dX_T \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\underbrace{\int_{\log(K/X)}^\infty X e^x \phi(x; \nu, \gamma^2) dx}_{I_1} - K \underbrace{\int_{\log(K/X)}^\infty \phi(x; \nu, \gamma^2) dx}_{I_2} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Integrale I_1 und I_2 in dieser Gleichung können unter unter Zuhilfenahme der Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\Phi()$ folgendermaßen aufgelöst werden [HDK02, S. 203ff]:

$$\begin{aligned}
C(X, t) &= e^{-r(T-t)} \left[\int_{\log(K/X)}^{\infty} X e^x \phi(x; \nu, \gamma^2) dx - K \int_{\log(K/X)}^{\infty} \phi(x; \nu, \gamma^2) dx \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[\int_{\log(K/X)}^{\infty} X \exp(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-\nu)^2}{-2\gamma^2}\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X \int_{\log(K/X)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-\nu)^2}{-2\gamma^2} + x\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X \int_{\log(\frac{K}{X})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-\nu)^2}{-2\gamma^2} + x - \left(\nu + \frac{\gamma^2}{2}\right) + \left(\nu + \frac{\gamma^2}{2}\right)\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X \int_{\log(\frac{K}{X})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-\nu)^2 - 2\gamma^2 x + 2\gamma^2(\nu + \frac{\gamma^2}{2})}{-2\gamma^2} + \left(\nu + \frac{\gamma^2}{2}\right)\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X \int_{\log(\frac{K}{X})}^{\infty} e^{\nu+\gamma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-\nu)^2 - 2\gamma^2 x + 2\gamma^2\nu + \gamma^4}{-2\gamma^2}\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} \int_{\log(K/X)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(\frac{(x-(\nu+\gamma^2))^2}{-2\gamma^2}\right) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} \int_{\log(K/X)}^{\infty} \phi(x; \nu + \gamma^2, \gamma^2) dx - K I_2 \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} \int_{\log(K/X)}^{\infty} \phi(x; \nu + \gamma^2, \gamma^2) dx - K \int_{\log(K/X)}^{\infty} \phi(x; \nu, \gamma^2) dx \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} (1 - \Phi(\log(K/X); \nu + \gamma^2, \gamma^2)) - K (1 - \Phi(\log(K/X); \nu, \gamma^2)) \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} \Phi\left(\underbrace{\frac{\log(X/K) + \nu + \gamma^2}{\gamma}}_{d_1=d_2+\gamma}\right) - K \Phi\left(\underbrace{\frac{\log(X/K) + \nu}{\gamma}}_{d_2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Durch eine häufig vorgenommene und in Gleichung (3.6) angedeutete Substituierung der beiden Verteilungsfunktionsausdrücke, wird weiter vereinfacht zu:

$$C(X, t) = e^{-r(T-t)} \left[X e^{\nu+\gamma^2/2} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right] \tag{3.7}$$

Eine Resubstituierung von ν und γ führt letztlich zu der Black-Scholes Formel:

$$C(X, t) = X \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2) \tag{3.8}$$

Wie man sehen kann, sind für die Berechnung einer einfachen europäischen (plain vanilla) Long-Call-Option folgende Parameter von Nöten:

- der Ausübungspreis K der Option
- der Kurs bzw. Preis $X(t)$ des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt t
- der Zinssatz r
- die (Rest)Laufzeit $(T-t)$ der Option
- die (angenommene) Volatilität des Basiswertes bezogen auf den Bewertungszeitraum (Laufzeit)

Bis auf die Volatilität dürfte zwischen zwei Marktteilnehmern Einvernehmen über die oben aufgelisteten Parameter bestehen, da sie exogen vorgegeben sind. In diesem Sinne reduziert sich die Preisfindung in diesem Kontext auf die Höhe der Volatilität des Basiswertes welche man für den Betrachtungszeitraum zugrunde legt. Will man die in Abschnitt 2 schon angesprochene Möglichkeit stochastischer Volatilitäten in den Feynman-Kac Formalismus miteinbeziehen, so sind die Parameter ν , γ und somit auch d_1 und d_2 entsprechend anzupassen. Geht man beispielsweise von einem Preisprozess für den Basiswert mit stochastischer Volatilität aus, welcher den folgenden Gesetzmäßigkeiten folgt,

$$dX(t) = rX(t) dt + \sigma(t)X(t) \left[\sqrt{1 - \rho^2} dW(t) + \rho dV(t) \right] \quad (3.9)$$

$$d\sigma(t) = a(t, \sigma(t)) dt + b(t, \sigma(t)) dV(t) \quad (3.10)$$

dann ergeben sich laut [Sin99, S. 242] die Variablen ν und γ wie folgt:

$$\nu = r(T - t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2 ds + \rho \int_t^T \sigma dV \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = (1 - \rho^2) \int_t^T \sigma^2 ds \quad (3.12)$$

Dementsprechend sind die die Terme d_1 und d_2 für diesen Fall wie folgt definiert:

$$d_2 = \frac{\log(X/K) + r(T - t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2 ds + \rho \int_t^T \sigma dV}{\sqrt{(1 - \rho^2) \int_t^T \sigma^2 ds}} \quad (3.13)$$

$$d_1 = \frac{\log(X/K) + r(T - t) + (\frac{1}{2} - \rho^2) \int_t^T \sigma^2 ds + \rho \int_t^T \sigma dV}{\sqrt{(1 - \rho^2) \int_t^T \sigma^2 ds}} \quad (3.14)$$

Die resultierende Preisformel für eine Long-Call-Option ist jetzt nicht mehr nur auf den Kurs des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt bedingt, sondern auch auf den Wert der Volatilität des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt. Formal drückt sich das wie folgt aus:

$$C(X, \sigma, t) = XE \left[e^{\rho \int_t^T \sigma dV - \frac{1}{2} \rho^2 \int_t^T \sigma^2(s) ds} \Phi(d_1) \mid X(t) = X, \sigma(t) = \sigma \right] - e^{-r(T-t)} KE [\Phi(d_2) \mid X(t) = X, \sigma(t) = \sigma] \quad (3.15)$$

3.2.2 Verfahren für Anwendungsfälle ohne analytische Lösung

Szenarien ohne analytische Lösung müssen mittels numerischer Methoden approximiert werden. Aus der Vielzahl der möglichen Verfahren [Sin99][Fri07] seien in dieser Arbeit Monte Carlo Simulationen als Verfahren zur numerischen Integration exemplarisch herausgegriffen. Bei diesen Verfahren werden in der Regel als erster Schritt eine große Zahl von Pfaden des Basiswertes zufallsgeneriert. Dies ist insbesondere für die Bewertung von pfadabhängigen Optionen eine Grundvoraussetzung, da deren Auszahlungsfunktion per definitionem nicht ausschließlich (wenn überhaupt) vom Preis des Basiswertes zum Fälligkeitszeitpunkt abhängt, sondern vielmehr von einem, mehreren oder allen $X(t)$ während der Laufzeit der Option. Es ist unumgänglich, dass bei der Anwendung von Monte Carlo Methoden ein Übergang von der stetigen Modellierung zu einer diskreten Berechnung mit diskreten Zeitschritten δt stattfindet, wie im Folgenden in Anlehnung an [Bra06, Fri07] am Beispiel von Gleichung (2.1) verdeutlicht:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \alpha(t_i, X(t_i))\delta t_i + \sigma(t_i, X(t_i))\delta dW(t_i) \quad (3.16)$$

Die Zufallsvariablen $dW(t_i)$ der einzelnen Zeitschritte t_i sind dabei definitionsgemäß voneinander unabhängig. Solche Simulationen sind heutzutage selbst mit Standard-Tabellenkalkulationssoftware problemlos möglich [Cha04] [Har08]. Neben der Restlaufzeit $(T - t)$ und den Funktionalen für Volatilität $\sigma(t, X(t))$ und Drift $\alpha(t, X(t))$, sind die Monte Carlo Simulationen über die Schrittweite(n) δt_i bzw. die Anzahl n der diskreten Zeitschritte, sowie die Anzahl N der simulierten Pfade parametrisiert, welche beide die Genauigkeit der Simulationsergebnisse steuern. Eine Simulation läßt sich formal wie folgt beschreiben [Fri07, S.187]:

$$X(t_{i+1}, \omega_j) = X(t_i, \omega_j) + \alpha(t_i, X(t_i, \omega_j))\delta t_i + \sigma(t_i, X(t_i, \omega_j))\delta dW(t_i, \omega_j) \quad (3.17)$$

wobei ω_j den j -ten Pfad kennzeichnet. Somit ist die Gesamtsimulation des stochastischen Prozesses X gegeben durch die Menge

$$\{X(t_i, \omega_j) \mid i = 0, 1, \dots, n; j = 1, \dots, N\} \quad (3.18)$$

Für die Praxis ist bei der Parametrisierung darauf zu achten, auf welche Zeiteinheit sich Drift und Volatilität beziehen, sofern sie denn konstant sind. Offensichtlich ist es höchst bedeutsam, ob man zum Beispiel von einer jährlichen oder einer täglichen Rendite von 10% spricht. Sofern es sich bei Drift und Volatilität um Jahreswerte handelt, müssen die Zeitschritte δt_i in Jahresbruchteilen ausgedrückt sein, um sicherzustellen dass die Simulation ein einheitliches zeitliches Bezugssystem hat. Für Umrechnungen zwischen Jahres- und Tageswerten werden in der Regel nur die Anzahl der Handelstage (~ 252) berücksichtigt. In Abbildung 3.1 und 3.2 sind zwei Simulationsergebnisse mit $N = 25$ für 10 Tage geometrischer Brownscher Bewegungen graphisch dargestellt. Bei den angegebenen Werten für Volatilität und Drift handelt es sich um Jahreswerte.

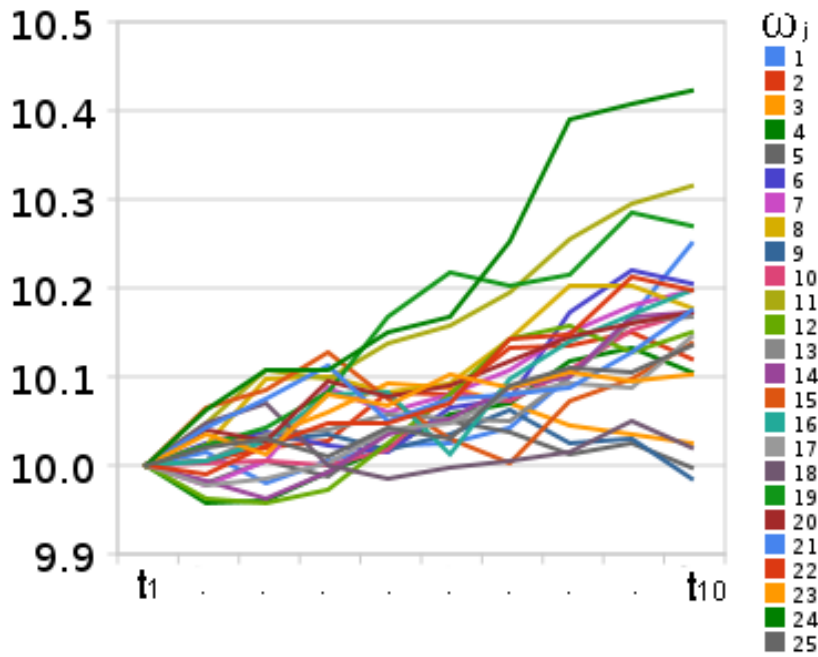


Abbildung 3.1: Simulierte Pfade diskretisierter Brownscher Bewegungen mit $X_{t_1} = 10, \alpha = 55\%, \sigma = 5\%, n = 10$

Die Mächtigkeit richtig angewendeter Monte Carlo Simulationen besteht darin, dass der Erwartungswert von nahezu beliebigen Funktionalen f bezüglich potentiell aller Werte einer Trajektorie $X(s), t \leq s \leq T$ zum Beispiel durch:

$$E(f(X(t_0) \dots X(t_n))) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(X(t_0, \omega_j) \dots X(t_n, \omega_j)) \quad (3.19)$$

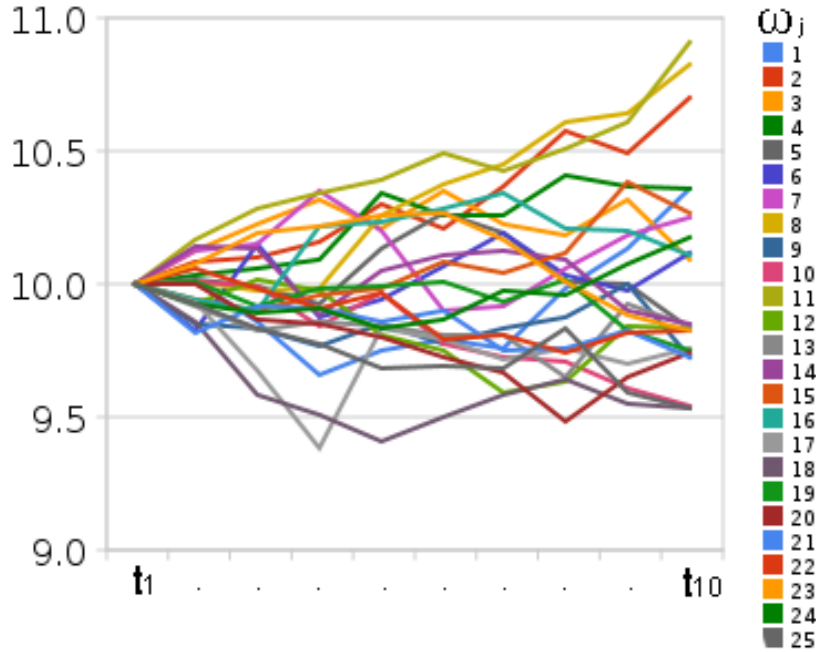


Abbildung 3.2: Simulierte Pfade diskretisierter Brownscher Bewegungen mit $X_{t_1} = 10, \alpha = 12\%, \sigma = 20\%, n = 10$

approximiert werden kann. Beispielsweise führt diese Methode bezogen auf das Szenario aus Kapitel 3.2.1 zu folgendem Lösungsansatz:

$$E(f(X(t_0) \dots X(t_n))) = E[\max[X_T - K, 0] \mid X(t) = X] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X(t_n, \omega_j) - K \quad (3.20)$$

Auch eine Kombination von analytischen und Monte Carlo Methoden ist denkbar und verbreitet. So kann zum Beispiel bei der Kategorie der schwach pfadabhängigen knock-in Optionen das Erreichen des Schwellkurses X_S Monte-Carlo-simuliert und anschließend der Preis (der durch Erreichen der Kursschwelle aktivierten Option) analytisch mittels der Black-Scholes Formel [Bra06, S. 447] [BGK97] berechnet werden. Dafür wird in der Regel eine Indikatorfunktion $I(X)$ wie folgt definiert:

$$I(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \text{ mit } X(t_i) > X_S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.21)$$

Im Falle einer knock-in Calloption ergibt sich für den Preis somit folgender Zusammenhang

$$C(X, t) = e^{-rt^*} E[I(X) \max[X_T - K, 0] \mid X(t^*)] \quad (3.22)$$

Dabei symbolisiert $X(t^*)$ den Kurs nach Detektion der Schwellkursüberschreitung² und t^* den Detektionszeitpunkt. Man berechnet also den Wert der Option ab dem Zeitpunkt der Schwellüberschreitung mittels der klassischen Black-Scholes Formel und zinst diesen Betrag danach noch zum Bewertungszeitpunkt ab. Diesen Vorgang führt man zum Zwecke der Erwartungswertbildung vielfach durch, wobei das Überschreiten des Schwellkurses $I(X)$ und somit auch der Überschreitungszeitpunkt t^* jeweils Monte Carlo simuliert wird.

3.3 Grenzen der Feynman-Kac Formel

Die Grenzen des in dieser Arbeit besprochenen Formalismus werden überwiegend durch die vorgenommenen Modellannahmen aufgezeigt. Dies betrifft zum Beispiel die in Kapitel 2.2 gemachten Annahmen bezüglich des perfekten Finanzmarktes, insbesondere die der Arbitragefreiheit. Es ist offensichtlich, dass der Bewertungsmechanismus in sich zusammen fällt, wenn die wesentlichen Annahmen bezüglich des Marktes nicht erfüllt sind. Am problematischsten erscheint in diesem Zusammenhang die Annahme von identischen Soll- und Habenzinsen. Beschränkend wirkt vor allem auch die Form der in Kapitel 2.1 beschriebenen stochastischen Prozesse aus, die insbesondere keine Kurssprünge zulassen. Um der Realität in diesem Zusammenhang etwas näher zu kommen, müssen Modellierungsansätze mit Sprungprozessen herangezogen werden. Auch die Annahme der Normalverteilung der Aktienkursrenditen ist äußerst problematisch, da empirische Untersuchungen darauf hinweisen, dass Verteilungsfunktionen für Erträge von Finanzanlagen oft eine, im Vergleich zur Normalverteilung, hohe Kurtosis aufweisen [Erb06]. Ausserhalb des Bereiches reiner Aktienoptionen ist noch eine viel grössere Abweichung von der Normalverteilung, in Form höherer oder niedrigerer Kurtosis oder auch negativer Schiefe, zu beobachten [BK06, S. 377ff]. Dadurch fände in der Praxis eine Unter- bzw. Überschätzung bzw. -bewertung des sogenannten Fat-Tail-Risikos (bzw. Chance) statt. Erstaunlich ist in diesem Zusammenhang, dass in der Praxis gelegentlich die Annahme der log-Normalverteilung sowohl im Zusammenhang mit Aktienoptionen als auch mit Index-Optionen auf Aktienindizes angewandt wird. Dass dabei eine gewichtete Summe (Index) von log-normalverteilten Zufallsgrößen ebenfalls einer log-Normalverteilung folgen soll, ist mathematisch schwer einzusehen. Letztlich muss es für die Anwendbarkeit der Feynman-Kac Formel möglich sein, die in Kapitel 3 besprochenen Übergangswahrscheinlichkeiten anzugeben oder zu simulieren. Je komplexer das zu bewertende Finanzprodukt oder Portfolio ist, desto schwieriger kann das sein. Diese Problematik wird schon bei der relativ geringfügigen Modelländerung in Form stochastischer Volatilitäten deutlich, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben. Ein Beispiel für die Schwierigkeit selbst relativ intuitive Finanzprodukte

²bei kontinuierlicher Detektion gilt $X(t^*) = X_S$

zu bewerten, sind die massiven Probleme vor denen Versicherungsgesellschaften bei der Bewertung gemischter Kapitallebensversicherungen stehen [Zag06]. Aber auch die Bewertung von komplexen Verträgen im Rahmen von Mitarbeiteroptionsprogrammen ist alles andere als trivial, da juristische Details mathematisch abgebildet werden müssen. Diese und ähnliche Problemstellungen sind Gegenstand aktueller Forschungen in der Finanz- und Aktuarwissenschaft. Ebenfalls nicht unkompliziert ist die Bewertung von contingent claims auf einen Basiswert (underlying), welcher selber nicht handelbar ist und es somit nicht zulässt die Eventualforderung über ein Replikationsportfolio nachzubilden. Beispiele hierfür sind Wetterderivate oder Volatilitäts-Swaps.

Literaturverzeichnis

- [BGK97] Mark Broadie, Paul Glasserman, and Steven Kou. A Continuity Correction For Discrete Barrier Options. *Mathematical Finance*, 7:325–349, 1997. Available from: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.21.6841&rep=rep1&type=pdf>.
- [BK06] Michael Busak and Dieter Kaiser. *Handbuch Alternative Investments 1*. Gabler Verlag, 2006.
- [Bra06] Paolo Brandimarte. *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*. Wiley Series in Statistics in Practice, Wiley-Interscience, 2006.
- [BS73] Fischer Black and Myron S. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–54, May-June 1973. Available from: <http://efinance.org.cn/cn/Feshuo/The%20Pricing%20of%20Options%20and%20Corporate%20Liabilities.pdf>.
- [Cha04] Don M. Chance. Teaching note 96-03, 2004. Available from: <http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/TN96-03.pdf>.
- [CR75] John C. Cox and Stephen A. Ross. The Pricing of Options for Jump Processes. Rodney L. White Center for Financial Research Working Papers 2-75, Wharton School Rodney L. White Center for Financial Research, 1975. Available from: <http://finance.wharton.upenn.edu/~rlwctr/papers/7502.PDF>.
- [CR76] John C. Cox and Stephen A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):145–166, 1976. Available from: <http://www.javaquant.net/papers/Cox%20Ross%201976.pdf>.

- [DR03] Philip H. Dybvig and Stephen A. Ross. Arbitrage, state prices and portfolio theory. In *Handbook of the Economics of Finance*, volume 1 of *Handbook of the Economics of Finance*, chapter 10, pages 605–637. Elsevier, 2003. Available from: <http://dybfin.wustl.edu/teaching/phdcont/arbetc7.pdf>.
- [Erb06] Romeike Frank Erben, Roland. Abschied von der Glockenkurve. *Risiko Manager*, 11:20–22, 2006. Available from: https://statistik.ets.kit.edu/download/doc_secure1/Interview-RISIKO_MANAGER_11-2006.pdf.
- [Fey48] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2):367–387, Apr 1948. Available from: <http://web.ihep.su/dbserv/compas/src/feynman48c/eng.pdf>.
- [FHH04] J. Franke, W. Härdle, and C. Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer, 2004. Available from: <http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/xplore/ebooks/html/sfm/index.html>.
- [Fri07] Christian Fries. *Mathematical Finance - Theory, Modelling, Implementation*. Wiley-Interscience, 2007.
- [Har08] David Harper. Monte Carlo Simulation GBM - 9 min screencast, July 2008. Accessed 1.10.2010. Available from: http://www.bionicturtle.com/how-to/video/monte_carlo_simulation_gbm_9_min_screencast/.
- [HDK02] Wilfried Hausmann, Kathrin Diener, and Joachim Käsler. *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection. Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen*. Vieweg Verlag, 2002.
- [HP81] J. Michael Harrison and Stanley R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continous trading. Discussion Papers 454, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, January 1981. Available from: <http://www.kellogg.northwestern.edu/research/math/papers/454.pdf>.
- [JWH02] A Javaheri, P. Wilmott, and E. Haug. Garch and volatility swaps, January 2002. Available from: http://www.wilmott.com/pdfs/020117_garch.pdf.
- [Kac49] M. Kac. On Distributions of Certain Wiener Functionals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(1):1–13, Jan 1949. Available from: <http://www.ams.org/journals/tran/1949-065-01/S0002-9947-1949-0027960-X/S0002-9947-1949-0027960-X.pdf>.

- [Lin98] Vadim Linetsky. The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing. *Computational Economics*, 11(1-2):129–163, April 1998. Available from: http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/44345/1/10614_2004_Article_137534.pdf.
- [MS03] Robert C. Merton and Paul Anthony Samuelson. *Continuous-time finance*. Blackwell Publishing, 2003.
- [NF92] Daniel Nelson and Dean Foster. Filtering and forecasting with misspecified arch models II: making the right forecast with the wrong model. Technical Working Paper 132, National Bureau of Economic Research, December 1992. Available from: <http://www.nber.org/papers/t0132.pdf>.
- [Osb59] M.F.M. Osborne. Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research*, 7(2):145–173, March-April 1959. Available from: <http://www.e-m-h.org/0sbo59.pdf>.
- [Sch08] Walter Schachermayer. The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance. In *Aspects of Mathematical Finance*, pages 15–22. Springer Berlin Heidelberg, 2008. Available from: <http://www.mat.univie.ac.at/~schachermayer/pubs/preprnts/prpr0118a.pdf>.
- [Sin99] Hermann Singer. Zeitstetige Systeme und ihre Anwendung in Ökonometrie und empirischer Kapitalmarktforschung. In *Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge*, volume 171. Physica-Verlag/Springer, 1999.
- [SL06] X. Sheldon Lin. *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience, 2006.
- [Zag06] Katharina Zaglauer. Risk-Neutral Valuation of Participating Life Insurance Contracts in a Stochastic Interest Rate Environment. Master’s thesis, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm, May 2006. Available from: http://www.scor.com/www/fileadmin/uploads/travaux/Zaglauer_2006.pdf.
- [Zim00] Heinz Zimmermann. Notizen zur Black-Scholes-Optionspreistheorie, January 2000. Available from: <http://pages.unibas.ch/wwz/finanz/teaching/generallecturenotes/5%20Notizen%20BSM.pdf>.