FernUniversität in Hagen

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

Lehrstuhl für Angewandte Statistik
und Methoden der empirischen Sozialforschung

Bewertung von Optionen und zustandsbedingten Ansprüchen (contingent claims) mit der Feynman-Kac-Formel

Seminararbeit
von

Corvin Idler
c/o European Commission, Delegation Australia, Diplomatic Pouch,
1049 Brussels, BELGIUM
+61 2 6271 2777, idler@uni-koblenz.de

Studiengang	Bachelor Wirtschaftswissenschaften
Betreuer	Prof. Dr. Hermann Singer
Matrikelnummer	7529953
Arbeit vorgelegt am:	22.10.2010

Inhaltsverzeichnis

fromelformatierung checken

einleitung

umlaute rechtschreibung!

Vielleicht kÃ¶nnen Sie in der Arbeit auch auf Modelle mit GARCH-Effekten und stchastischen Volatilitaeten eingehen, das ja in der Praxis kaum eine konstante Vola vorliegt.

1 Finanzmathematisches Modell

1.1 Preisprozesse fuer Basiswert und Bond

Fuer die Loesung des Bewertungsproblems von zustandsbedingten Anspruechen[1] ist die Modellierung des (Preis)prozesses des zugrundeliegenden Basiswertes (underlying) eine Grundvoraussetzung. In der vorliegenden Arbeit wird haeufig Bezug auf die Bewertung von Aktionoptionen als Anwendungsfall genommen. Dies ist darauf zurueckzufuehren, dass sich die wissenschaftliche Literatur ausgiebig mit dieser Kategorie von Eventualforderungen beschaeftig. Es soll jedoch der Eindruck vermieden werden, dass die besprochenen Formalismen und Modelle ausschliesslich fuer diesen Anwendungsfall Relevanz besitzen. Es ist viel eher so, dass sie die Grundlage fuer die Bewertung einer Vielfalt von zufallsbehafteten Finanzpositionen bilden. Beispielsweise wird in [Zag06] die Bewertung gemischter Kapitallebensversicherungen mit einem ganz aehnlichem mathematischen und modelltechnischen Instrumentarium, wie dem im folgenden vorgestellten, beschrieben. Die folgenden Ausfuehrungen seien beschraenkt auf eine in der Finanzmathematik (speziell im Kontext der Aktienoptionsbewertung) weitverbreitete Modellklasse, bei der die Kursentwicklung des Basiswertes durch folgende stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden [SL06, S. 141]:

$$X(t) = \overbrace{X(0) + \underbrace{\int_0^t \alpha(s, X(s))\, ds}_{Riemann-Integral} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X(s))\, dW(s)}_{Ito-Integral}}^{Ito-Prozess}, 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW(t) \tag{1.2}$$

Dabei symbolisiert $W(t)$ eine Brownsche Bewegung und die beiden Funktionen $\alpha(t, X(t))$ und $\sigma(t, X(t))$ stehen fuer den Drift, respektive die Volatilitaet des stochastischen Prozesses $X(t)$. Die Moeglichkeit von Dividendenzahlungen wird im Kontext dieser Arbeit aus Uebersichtlichkeitsgruenden ausgeschlossen, eine Modelierung

[1] auch als zufallsbehaftete Finanzpositionen, Eventualforderungen oder contingent claims bezeichnet

ist jedoch prinzipiell ohne weiteres moeglich. Wie in Abschnitt 1.2 ersichtlich wird, ist fuer das Bewertungsproblem noch die Modellierung des Preisprozesses einer risikofreien Anlage (Bond) $B(t)$ in Abhaengigkeit des Zinsatzes $r(t, X(t))$ erforderlich, welche in ihrer allgemeinsten Form wie folgt lautet:

$$\frac{dB(t)}{dt} = B(t)r(t, X(t)); B(0) = 1 \tag{1.3}$$

Eine spezifische Auspraegung des mit 1.1 bis 1.3 beschriebenen Modells ist z.B. das von Black-Scholes [BS73] in welchem die Wertentwicklung $X(t)$ eines Basiswertes mittels **geometrischer** Brownscher Bewegung mit **konstanter Volatilitaet** $\sigma(t, X(t)) = \sigma$, **konstanter Drift** $\alpha(t, X(t)) = \alpha$ und **konstantem risikolosem Zinssatz** $r(t, X(t)) = r$ modelliert wird.

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha\, dt + \sigma\, dW(t) \tag{1.4}$$

$$W(t + \tau) - W(t) \sim N(0, \sqrt{\tau}) \tag{1.5}$$

Mittels Ito-Integral ueber die Brownsche Bewegung ergibt sich folgender Zusammenhang [SL06, S.146]

$$lnX(t) = lnX(0) + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \tag{1.6}$$

bzw.

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \tag{1.7}$$

Die gemachten Annahmen implizieren u.a. dass sich der Basiswertkurs im Zeitverlauf kontinuierlich entwickelt (keine Kurssspruenge), die Kursveraenderungen im Zeitablauf unkorreliert sind und die logarithmierten Inkremente normalverteilt sind [Zim00, S.4][Osb59].

Neben dem Black-Scholes Model, dessen Annahme einer konstanten Volatilitaet in der Realitaet selten zutrifft, sind noch eine Vielfalt von weitaus weniger restriktiven Modellauspraegungen in der Literatur beschrieben. Eine weitverbreite und vielbeschriebene Kategorie ist jene welche zeitliche Schwankungen der Volatilitaet vorsieht $\sigma(t, X(t)) = \sigma(t)$. Fuer die eigentliche Auspraegung des Volatilitaetsprozesses $\sigma(t)$ wurden eine Vielzahl von Funktionen vorgeschlagen, von denen die wichtigsten in [Sin99, S. 212] tabellarisch aufgefuehrt sind. Als ein Vertreter sei in dieser Arbeit die von [Bol86] eingefuehrte Klasse der GARCH[2]-Modelle exemplarisch herausgegriffen, bei der die Volatilitaet des Preisprozesses wie folgt als Funktion vorangegangener Prozesswerte beschrieben wird [Zap04]:

$$d\sigma(t)^2 = f(\sigma^2)dt + g(\sigma^2)dV(t) \tag{1.8}$$

[2]generalized autoregressive conditional heteroscedasticity

wobei $V(t)$ einen Wienerprozess symbolisiert [JWH02]. Im Falle der populaeren GARCH(1,1) Modellauspraegung gilt folgender Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

$$d\sigma(t)^2 = \kappa(\theta - \sigma^2)dt + \gamma\sigma^2 dV(t) \tag{1.9}$$

wobei κ fuer die Steifigkeit[3], θ fuer das Gleichgewichtsniveau[4] und γ fuer die Volatilitaet der Varianz (quadrierte Volatilitaet) steht [JWH02].

1.2 Bewertung durch Duplikationsportfolios

Das Preismodell fuer die Bewertung von zustandsbedingten Anspruechen welches innerhalb dieser Arbeit verwendet wird, basiere auf der Annahme eines perfekten Finanzmarktes [FHH04, Kap. 4.1] :

- Abwesenheit von Arbitragemoeglichkeiten
- keine Transaktionskosten
- keine Steuern
- short-selling uneingeschraenkt moeglich
- Soll- und Habenzinsen identisch
- Wertpapiere beliebig teilbar

Obige Modellannahmen sind von zentraler Bedeutung in Bezug auf die Bewertung von Optionen und anderen zustandsabhaengigen Anspruechen durch sogenannte Duplikationsportfolios. Dabei synthetisiert man den zu bewertenden Finantitel $C(X,t)$ (mit noch unbekanntem Wert) - durch Kauf und Verkauf anderer am Markt umlaufender Titel - mit einem Portfolio $V(X,t)$ (mit bekanntem Wert/Preis) in einer Art und Weise, dass beide Portfolios zu einem bestimmten Zeitpunkt T wertgleich sind ($C(X,T) = V(X,T)$). Durch kontinuierliche Umschichtungen innerhalb des Duplikationsportfolios werden in diesem Modell Wertveraenderungen waehrend der Laufzeit gleichwertig nachgebildet ($dC(X,t) = dV(X,t)$) sodass beide Portfolios auch zu jedem davorliegenden Zeitpunkt $t \leq T$ wertgleich sind ($C(X,t) = V(X,t)$). Diese Umschichtungen werden ohne positiven oder negativen externen Cash Flow vorgenommen, was man als Selbstfinanzierungsbedingung bezeichnet [Zim00, S.7]. Durch diese dynamische Hedging-Strategie ergibt sich der Wert des Finanzderivats zu jedem Zeitpunkt t anhand des Wertes des Duplikationsportfolios. Das Duplikationsportfolio $V(X,t)$ z.B. fuer eine Aktienoption $C(X,t)$ besteht gewoehnlich aus

[3] speed of mean reversion

[4] mean reversion level

$\Delta(X,t)$ Aktien und einem Festgeld bzw. risikolosen Zerobond $B(X,t)$) mit dem Zinsatz r [Zim00, S.5]:

$$C(X,t) = V(X,t) = \Delta(X,t)X + B(X,t) \tag{1.10}$$

Innerhalb dieses mathematischen Formalismus druecken sich die kontinuierlichen Umschichtungsoperationen im Duplikationsportefolio zum Zwecke der Wertanpassung durch folgende Wahl aus: $\Delta(X,t) = \frac{\partial C(X,t)}{\partial X}$ (perfekte Replikation ohne Residualrisiko).

1.3 Fundamentale partielle Differentialgleichung (FPD)

Alle oben genannten Modellannahmen fuehren kombiniert letztlich zu der **fundamentalen partiellen Differenzialgleichung der Optionspreisbildung**, welche gelegentlich auch als verallgemeinerte Black-Scholes-Differentialgleichung[Sin99, S. 222 ff] oder dynamische Hedging Gleichung [Zim00] bezeichnet wird. Sie lautet in ihrer allgemeinsten Form:

$$\frac{\partial C(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial C(X_t,t) r(X_t,t)}{\partial X_t} + \frac{\partial^2 C(X_t,t)\sigma^2(X_t,t)}{2\partial^2 X_t} - r(X_t,t)C(X_t,t) = 0;$$
$$C(X_T,T) = G(X_T), 0 \leq t \leq T \tag{1.11}$$

Fuer eine genaue Herleitung von Gl.(1.11) sei auf [Sin99, S. 222 ff][Zim00][FHH04] verwiesen, allerdings sei eine bedeutende Eigenschaft hervorgehoben: die obige Gleichung ist vollkommen unabhaengig von der Drift ($\alpha(X_t,t)$) des Basiswertpreisprozesses aus Gleichung (1.1)! Dies ist darauf zurueckzufuehren, dass die perfekte dynamische Hedging Strategie aus Abschnitt 1.2 eine Beziehung zwischen Optionspreis und Basiskurs herstellt, welche voellig frei von jeglichen Risikopraeferenzen ist [CR75] und somit den risikolosen Zinssatz r als Bezugsrendite inne hat. Dieses Phaenomen laesst sich in letzter Instanz, mittelbar ueber unterstellte Linearitaet der Nutzenfunktionen der Martteilnehmer, auf die Annahme der Arbitragefreiheit zurueckzufuehren [MS03, S. 336] und ist auch als Fundamentaltheorem der Vermoegensbewertung[5] und Bewertungsregelrepraesentationstheorem[6] bekannt [DR03, S.9] [Sch08].

Gleichung (1.11) gilt fuer sich genommen fuer beliebige zustandsbedingte Ansprueche, deren Wert nur von X_t und t abhaengen. Die **spezifische Auszahlungsstruktur** $G(X_T)$ der Finanzderivate zum Faelligkeitszeitpunkt fliesst nicht in die Gleichung selbst mit ein, sondern wird in Form von Randbedinguneng formuliert

[5]Fundamental Theorem of Asset Pricing
[6]Pricing Rule Representation Theorem

und zur Loesung der Gleichung herangezogen. Beispielsweise gelten fuer eine europaeische Long-Call Option[7] die folgenden Randbedingungen:

$$C(X_T, T) = G(X_T) = \max[0, X_T - K] \tag{1.12}$$

und

$$C(X_t, t) \geq 0 \tag{1.13}$$

wobei K den Ausuebungspreis der Option symbolisiere. In der Regel laesst Gleichung 1.11 nur fuer bestimmte Spezialfaelle analytisch loesen. Eine Vielzahl von eleganten Loesungsmoeglichkeiten eroeffnen sich durch Anwendung der Feynman-Kac Formel, welche im Folgenden Kaptiel besprochen wird.

[7] Kauf einer Kaufoption

2 Feynman-Kac Formel

2.1 Keynman-Kac Loesungsansatz der FPD

In ihrer allgemeinsten Form bezieht sich die Feynman-Kac Gleichung [Fey48, Kac49] auf die Loesung der Schroedinger-Gleichung in der Quantenphysik. Eine Spezialisierung dieser Gleichung ergibt sich wenn man sie auf (1.2) und (1.11) anwendet. Die vorliegende Problemstellung (das finden einer Loesung fuer die FPD) wird mit Hilfe der Feynman-Kac Gleichung wie folgt angegangen:

$$C(X,t) = E\left[e^{-\int_t^T r(X(s),s)ds} G(X(T)) \mid X(t) = X\right] \tag{2.1}$$

In diesem Formalismus ist der Wert einer Option also der zum Zeitpunkt $t = 0$ abdiskontierte Erwartungswert (bzgl. eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsmasses[1]) der Auszahlung eines zustandsbedingten Anspruches in Abhaengigkeit von dem Preis X des underlying zum Zeitpunkt t [Bra06]. Innerhalb obiger Modellierung ist es von zentraler Bedeutung, welche Pfade in dem vorliegenden dynamischen stochastischen System moeglich sind. Man definiert ein Mass ueber der Menge aller moeglichen Pfade vom Anfangszustand $X(t) = X$ zum Endzustand $X(T)$. Dies ermoeglicht mittels Pfadintegral ueber alle moeglichen Pfade von $X(t) = X$ nach $X(T)$ die Berechnung von Erwartungswerten von pfadabhaengigen Funktionalen wie z.B. der Auszahlungsstruktur $G(X_T)$ einer Option. Pfadintegrale nennt man auch sum-over-histories (Pfade) oder funktionale Integrale [Lin98, S. 129ff.]. Offensichtlich ist die bedingte Dichte $p(X_T \mid X)$ von fundamentalem Interesse fuer diesen Formalismus.

The path-integral formalism provides a natural bridge between the risk-neutral martingale pricing and the arbitrage-free PDE-based pricing

Das klassische Riemannsche Integral wird pfadweise berechnet und das exponential des negativen Ergebniswertes gibt das Gewicht eines jeden Pfades innerhalb des Pfadintegrals an.

[1]risikoneutrales Bewertungsmass

2.2 Berechnungsbeispiele

2.2.1 Anwendungsfaelle mit analytischer Loesung

Ein klassiches Rechenbeispiel fuer die Feynman-Kac Gleichung bei welcher diese eine analytische Loesung besitzt ist das einer europaeischen Long-Call Option in einer Black-Scholes-Welt (d.h. mit unterstellter konstanter Drift und Volatilitaet fuer den Preisprozess des Basiswertes sowie einem konstantem Zinssatz). Wie in Gleichung 1.12 bereits beschrieben gilt fuer die Auszahlungsstruktur dieser Option $G(X_T) = \max[0, X_T - K]$. Die Feynman-Kac-Formel erhaelt in diesem Szenario folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} C(X,t) &= e^{-r(T-t)} E\left[\max[X_T - K, 0] \mid X(t) = X\right] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (X_T - K) p(X_T \mid X) dX_T \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\int_K^\infty X_T p(X_T \mid X) dX_T - K \int_K^\infty p(X_T \mid X) dX_T\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Input: Basispreis in t=0 Ausuebungspreis volatilitaet zinssatz Laufzeit Zu beachten ist, dass die Laufzeit und die Volatilitaet den selben zeitlichen Bezugsrahmen haben muessen (e.g. Laufzeit in Jahre, und jaehrliche Volatilitaet)

2.2.2 Verfahren fuer Anwendungsfaelle ohne analytische Loesung

Szenarien ohne analytische Loesung muessen mittels numerischer Methoden approximiert werden. Dabei kommt Monte Carlo Simulationen als ein Verfahren zur numerischen Integration eine grosse Bedeutung zu. Bei diesen Verfahren werden in der Regel als erster Schritt eine Vielfalt von Pfaden des Basiswertes zufallsgeneriert. Dies ist insbesondere fuer die Bewertung von pfadabhaengigen Optionen eine Grundvoraussetzung, da deren Auszahlungsfunktion definitionsgemaess nicht ausschliesslich (wenn ueberhaupt) vom Preis des Basiswertes zum Faelligkeitszeitpunkt abhaengt sonder vielmehr von einem, mehreren oder allen $X(t)$ waehrend der Laufzeit der Option. Es ist unumgaenglich, dass bei der Anwendung von Monte Carlo Methoden per definitionem ein Uebergang von der stetigen Modellierung zu einer Berechnung mit diskreten Zeitschritten δt stattfindet, wie im Folgenden in Anlehnung an [Bra06] am Beispiel von Gleichung 1.7 verdeutlicht:

$$X_{t+\delta t} = X_t e^{\left((\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\epsilon\right)} \tag{2.3}$$

Dabei sei ϵ eine standard-normalverteilte Zufallsvariable. Solche Simulationen sind heutzutage mit Standard-Tabellenkalkulationssoftware problemlos moeglich [2][Cha04]

[2]vgl. `http://www.bionicturtle.com/dloads/LO%2014.x%20Monte%20CarloDemo.xls`

[Har08]. Neben den Funktionalen fuer die Volatilitaet ($\alpha(t, X(t))$) und Drift ($\sigma(t, X(t))$) des Kursprozesses und die Laufzeit ($T - t$), sind die Monte Carlo Simulationen ueber die Schrittweite δt und die Anzahl Nder simulierten Pfade parametrisiert, welche beide die Genauigkeit der Simulationsergebnisse steuern. Auch eine Kombination von analytischen und Monte Carlo Methoden ist denkbar und verbreitet. So kann z.b. bei der Kategorie der schwach pfadabgaengigen knock-in Optionen das Erreichen des knock-in Preises monte-carlo-simuliert werden der Preis der dadurch aktivierten Option jedoch analytisch mit der Black-Scholes Formel [Bra06, S. 447].

2.3 Grenzen der Feynman-Kac Formel

wetter optionen (kein duplikationsportfolio)!? stimmt das pfadabhaengige optionen? mehrere basiswerte

Die Feynman-Kac-Formel gibt eine Wegintegral-Loesung der Fokker-Planck-Gleichung, die die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unter Drift und Diffusion beschreibt, z.B. bei Brownscher Bewegung von in Fluessigkeit suspendierten Teilchen oder dem Verlauf von Aktien- und Optionskursen.

http://pages.stern.nyu.edu/ jcarpen0/courses/b402337/contclaim.pdf

Literaturverzeichnis

[Bol86] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, April 1986. Available from: `http://www.farmdoc.illinois.edu/nccc134/conf_1989/pdf/confp10-89.pdf`.

[Bra06] Paolo Brandimarte. *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction.* Wiley Series in Statistics in Practice, Wiley-Interscience, 2006.

[BS73] Fischer Black and Myron S. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–54, May-June 1973. Available from: `http://efinance.org.cn/cn/FEshuo/The%20Pricing%20of%20Options%20and%20Corporate%20Liabilities.pdf`.

[Cha04] Don M. Chance. Teaching note 96-03, 2004. Available from: `http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/TN96-03.pdf`.

[CR75] John C. Cox and Stephen A. Ross. The Pricing of Options for Jump Processes. Rodney L. White Center for Financial Research Working Papers 2-75, Wharton School Rodney L. White Center for Financial Research, 1975. Available from: `http://finance.wharton.upenn.edu/~rlwctr/papers/7502.PDF`.

[DR03] Philip H. Dybvig and Stephen A. Ross. Arbitrage, state prices and portfolio theory. In G.M. Constantinides, M. Harris, and R. M. Stulz, editors, *Handbook of the Economics of Finance*, volume 1 of *Handbook of the Economics of Finance*, chapter 10, pages 605–637. Elsevier, 2003. Available from: `http://dybfin.wustl.edu/teaching/phdcont/arbetc7.pdf`.

[Fey48] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2):367–387, Apr 1948. Available from: `http://web.ihep.su/dbserv/compas/src/feynman48c/eng.pdf`.

[FHH04] J. Franke, W. Härdle, and C. Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte.* Springer, 2004. Available from: `http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/xplore/ebooks/html/sfm/index.html`.

[Har08] David Harper. Monte Carlo Simulation GBM - 9 min screencast, July 2008. Accessed 1.10.2010. Available from: `http://www.bionicturtle.com/how-to/video/monte_carlo_simulation_gbm_9_min_screencast/`.

[JWH02] A Javaheri, P. Wilmott, and E. Haug. Garch and volatility swaps, January 2002. Available from: `http://www.wilmott.com/pdfs/020117_garch.pdf`.

[Kac49] M. Kac. On Distributions of Certain Wiener Functionals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(1):1–13, Jan 1949. Available from: `http://www.ams.org/journals/tran/1949-065-01/S0002-9947-1949-0027960-X/S0002-9947-1949-0027960-X.pdf`.

[Lin98] Vadim Linetsky. The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing. *Computational Economics*, 11(1-2):129–63, April 1998. Available from: `http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/44345/1/10614_2004_Article_137534.pdf`.

[MS03] Robert C. Merton and Paul Anthony Samuelson. *Continuous-time finance.* Blackwell Publishing, 2003.

[Osb59] M.F.M. Osborne. Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research*, 7(2):145–173, March-April 1959. Available from: `http://www.e-m-h.org/Osbo59.pdf`.

[Sch08] Walter Schachermayer. The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance. In *Aspects of Mathematical Finance*, pages 15–22. Springer Berlin Heidelberg, 2008. Available from: `http://www.mat.univie.ac.at/~schachermayer/pubs/preprnts/prpr0118a.pdf`.

[Sin99] Hermann Singer. Zeitstetige Systeme und ihre Anwendung in Ökonometrie und empirischer Kapitalmarktforschung. In *Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge*, volume 171. Physica-Verlag/Springer, 1999.

[SL06] X. Sheldon Lin. *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance.* Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience, 2006.

[Zag06] Katharina Zaglauer. Risk-Neutral Valuation of Participating Life Insurance Contracts in a Stochastic Interest Rate Environment. Master's thesis, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm, May 2006. Available from: http://www.scor.com/www/fileadmin/uploads/travaux/Zaglauer_2006.pdf.

[Zap04] Matthias Zapp. Schätzverfahren in einem neuen cogarch-modell. Master's thesis, Zentrum Mathematik der Technischen Universität München, October 2004. Available from: http://www-m4.ma.tum.de/Diplarb/da_zapp.ps.

[Zim00] Heinz Zimmermann. Notizen zur Black-Scholes-Optionspreistheorie, January 2000. Available from: http://pages.unibas.ch/wwz/finanz/teaching/generallecturenotes/5%20Notizen%20BSM.pdf.