Programação Dinâmica

Grafos, Otimalidade e Implementação

Tiago C. Botelho

Universidade de São Paulo

27 de Novembro de 2020

0 Panorama

1. Grafos
2. Programação Dinâmica
3. Implementação
4. O Paradoxo de Braess e *Selfish Routing*

1 Panorama

1 Grafos

Definição (Grafo)

Um grafo G é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E), onde E é um subconjunto do conjunto de pares *não*-ordenados de V. Dizemos que V é o conjunto dos vértices e que E é o conjunto das arestas de G.

Definição (Adjacência)

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que uma aresta $\{x, y\}$ em E conecta os vértices x e y em V e que x e y são os vértices terminais de xy. Dizemos ainda que $xy \in E$ significa que x e y são adjacentes ou vizinhos. Dizemos que duas *arestas* são adjacentes quando elas têm um único vértice terminal em comum.

1 Visualizando um Grafo

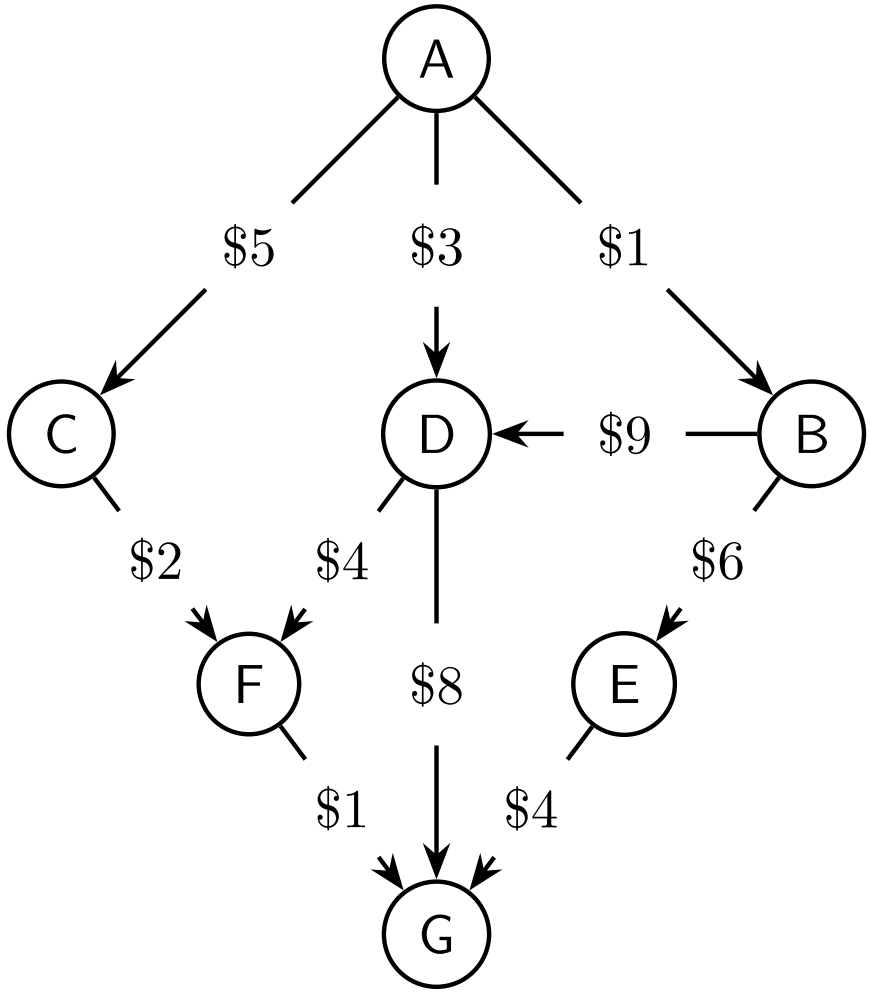


Figura: Um grafo ponderado: a cada aresta associamos o custo de viajar de um nó terminal ao outro.

- O grafo do exemplo acima é dirigido e ponderado.
- Uma abordagem mais formal pode ser encontrada no clássico *Modern Graph Theory*, de Béla Bollobás.
- Essencialmente, o grafo é dirigido porque as arestas são orientadas: o sentido de percurso é dado.
- O grafo é ponderado porque a cada aresta fazemos corresponder um número real que representa o custo de viajar de um nó terminal ao outro.

- Nosso problema é o seguinte: computar o caminho de menor custo (A a G) entre todos os caminhos possíveis.

- Esse tipo de problema aparece em diversas áreas... Pesquisa operacional, ciência da computação, desenho de mecanismos, inteligência artificial, *routing*, *etc.*

- Do ponto de vista matemático, podemos interpretar o problema como sendo logístico (minimizar custo de transporte) ou de *routing* (enviar pacotes de informação no menor tempo possível).

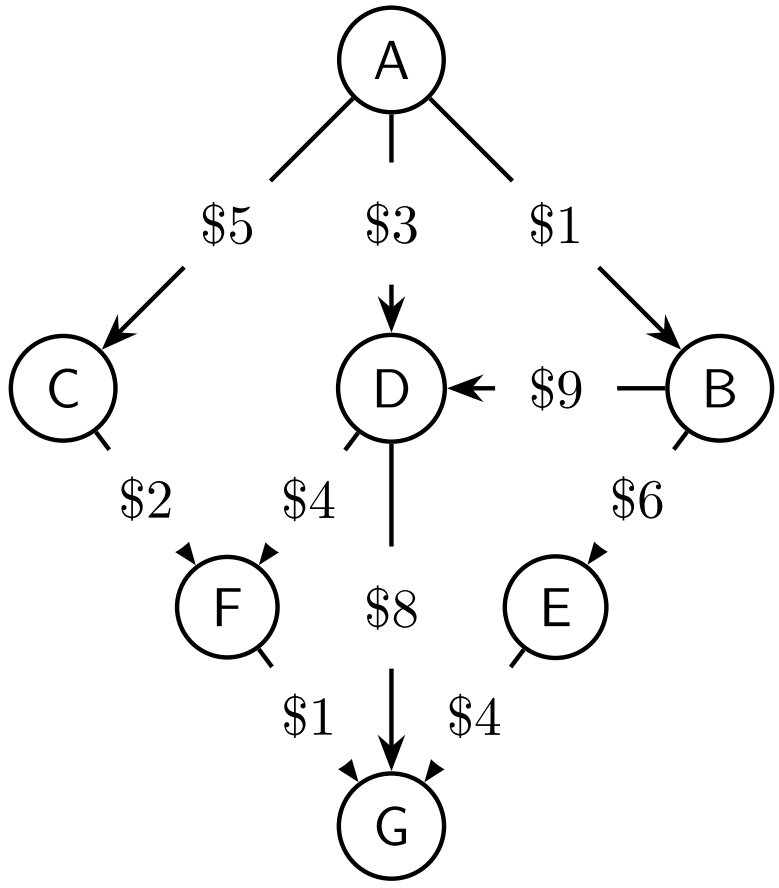
- A pergunta mais importante é a seguinte: existe algum método para resolver essa classe de problemas?

- Resposta: sim! O método tradicionalmente utilizado para resolver esse tipo de problema é chamado Programação Dinâmica e se deve a Richard Bellman.

- A ideia é intuitiva: *An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.*

- Muitos problemas do dia a dia são efetivamente resolvidos dessa maneira, embora inconscientemente.

- Vamos à solução. Seja $J = J(v)$ o custo minimal que se pode obter partindo do vértice v em V.
- Suponhamos que $J(v)$ é um valor conhecido para todo v. Qual é o valor de $J(G)$?



- Comece em $v = A$.
- Do nó atual, escolha um nó que resolve:

$$\min_{w \in F_v} \{c(v, w) + J(w)\},$$

onde F_v é o conjunto de nós que podem ser atingidos em um único passo; e $c(v, w)$ é o custo associado. Moralmente, se J é conhecida, a solução é imediata. Mas *como* podemos computar J?

- A equação de Bellman nos dá a resposta:

$$J(v) = \min_{w \in F_v} \{c(v, w) + J(w)\},$$

para todo $v \in V$.

- Precisamos usar essa equação para determinarmos J e, efetivamente, o caminho.

- Método do tipo *guess and verify*, ou "aproximações sucessivas".
- Chute $J_0(v) = 0$, para todo $v \in V$.
- Ponha $n = 0$.
- Ponha $J_{n+1}(v) = \min\{c(v, w) + J_n(w) : w \in F_v\}$ para todo $v \in V$.
- Se $J_{n+1} \neq J_n$, atualize n (ou seja, tome $n \mapsto n + 1$) e volte ao passo anterior.

Teorema

A sequência $\{J_n\}_{n=0}^{+\infty}$ recursivamente definida no algoritmo acima covnerge pontualmente com limite J.

- Vamos precisar do nosso bom e velho amigo, o `numpy`.
- Implemente a função custo $c = c(v, w)$ como uma matriz Q

$$Q(v, w) = \begin{cases} c(v, w), \text{ se } w \in F_v; \\ +\infty, \text{ c.c.} \end{cases}$$

  chamada a matriz de distâncias.
- Vamos numerar os vértices, pondo $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, *und so weiter...*
- A diagonal deve ser preenchida com $+\infty$ por definição, exceto no vértice G, onde devemos imputar um 0.

4 Panorama

- Temos um subúrbio, s, e uma estação de trem, t. Um número fixo de pessoas vai de s pra t todo dia.

.

4 O Paradoxo de Braess

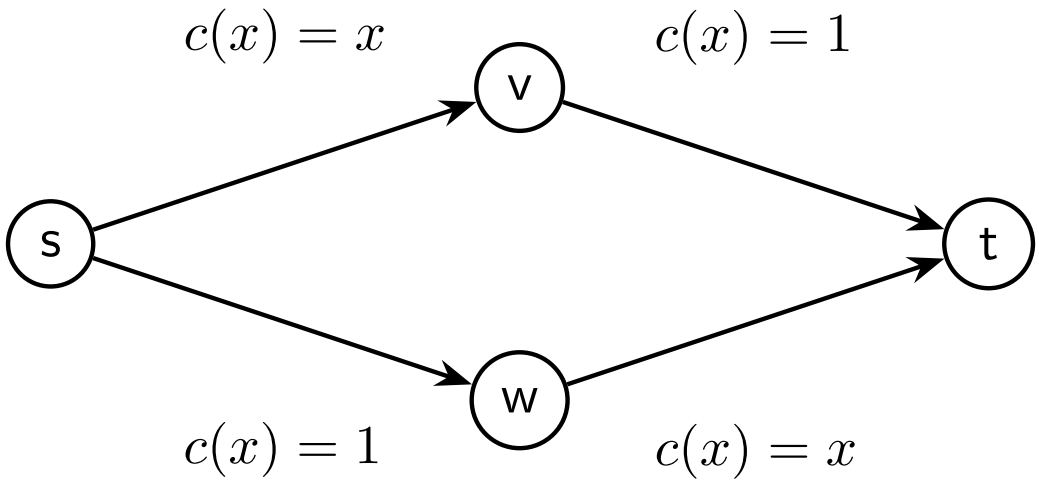
- Temos um subúrbio, s, e uma estação de trem, t. Um número fixo de pessoas vai de s pra t todo dia.
- Suponhamos que há duas estradas separadas de s pra t. Custos de viagem são descritos no próximo *frame*.

- Temos um subúrbio, s, e uma estação de trem, t. Um número fixo de pessoas vai de s pra t todo dia.
- Suponhamos que há duas estradas separadas de s pra t. Custos de viagem são descritos no próximo *frame*.
- Cada uma das estradas tem duas componentes: uma larga, onde sempre se leva uma hora para percorrê-la. A outra é apertada e leva-se o equivalente em horas da fração de pessoas que a utilizam para percorrê-la.

- Temos um subúrbio, s, e uma estação de trem, t. Um número fixo de pessoas vai de s pra t todo dia.
- Suponhamos que há duas estradas separadas de s pra t. Custos de viagem são descritos no próximo *frame*.
- Cada uma das estradas tem duas componentes: uma larga, onde sempre se leva uma hora para percorrê-la. A outra é apertada e leva-se o equivalente em horas da fração de pessoas que a utilizam para percorrê-la.
- No total, o tempo de percurso global é $1 + x$, onde x é a fração de pessoas que usam a estrada apertada. Isso em cada aresta.

- Temos um subúrbio, s, e uma estação de trem, t. Um número fixo de pessoas vai de s pra t todo dia.
- Suponhamos que há duas estradas separadas de s pra t. Custos de viagem são descritos no próximo *frame*.
- Cada uma das estradas tem duas componentes: uma larga, onde sempre se leva uma hora para percorrê-la. A outra é apertada e leva-se o equivalente em horas da fração de pessoas que a utilizam para percorrê-la.
- No total, o tempo de percurso global é $1 + x$, onde x é a fração de pessoas que usam a estrada apertada. Isso em cada aresta.
- Equilíbrio de Nash? Tempo de percurso?

4 Visualizando o Paradoxo de Braess



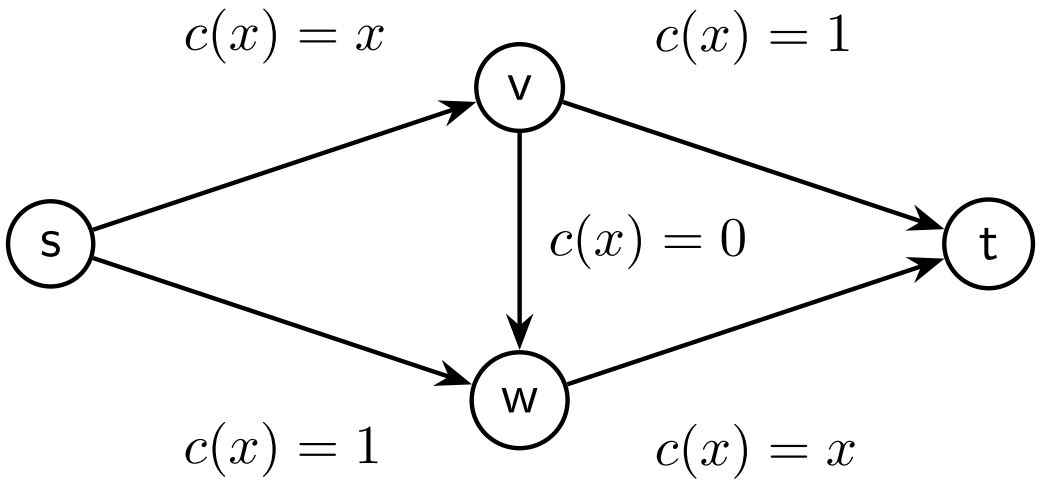
- Instala-se um teletransportador entre os vértices v e w.

- Instala-se um teletransportador entre os vértices v e w.

- Com isto queremos dizer uma aresta que zera o custo de pular de v pra w.

- Instala-se um teletransportador entre os vértices v e w.
- Com isto queremos dizer uma aresta que zera o custo de pular de v pra w.
- Novo equilíbrio de Nash?

4 Visualizando o Paradoxo de Braess



- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!

- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!
- Mas então todos os motoristas escolhem a nova rota!

- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!
- Mas então todos os motoristas escolhem a nova rota!
- Isto significa que, no novo equilíbrio, o tempo de percurso é de 2 horas por motorista! Isto mostra que *selfish routing* não é eficiente neste caso.

- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!
- Mas então todos os motoristas escolhem a nova rota!
- Isto significa que, no novo equilíbrio, o tempo de percurso é de 2 horas por motorista! Isto mostra que *selfish routing* não é eficiente neste caso.
- Um ditador altruísta poderia impor que rotas que melhorassem em 25% o tempo de viagem de todos.

- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!
- Mas então todos os motoristas escolhem a nova rota!
- Isto significa que, no novo equilíbrio, o tempo de percurso é de 2 horas por motorista! Isto mostra que *selfish routing* não é eficiente neste caso.
- Um ditador altruísta poderia impor que rotas que melhorassem em 25% o tempo de viagem de todos.
- O Preço da Anarquia (POA) é a razão entre a performance sob *selfish routing* (agentes agindo estratégicamente) e a melhor performance. No caso, POA $= \frac{4}{3}$.

- $s \to v \to w \to t$ nunca é pior do que usar uma das estradas originais – é uma estratégia (fracamente) dominante!
- Mas então todos os motoristas escolhem a nova rota!
- Isto significa que, no novo equilíbrio, o tempo de percurso é de 2 horas por motorista! Isto mostra que *selfish routing* não é eficiente neste caso.
- Um ditador altruísta poderia impor que rotas que melhorassem em 25% o tempo de viagem de todos.
- O Preço da Anarquia (POA) é a razão entre a performance sob *selfish routing* (agentes agindo estratégicamente) e a melhor performance. No caso, POA $= \frac{4}{3}$.
- Qual o significado de um POA ≈ 1?

Obrigado!