LISTA 2 – Árvores

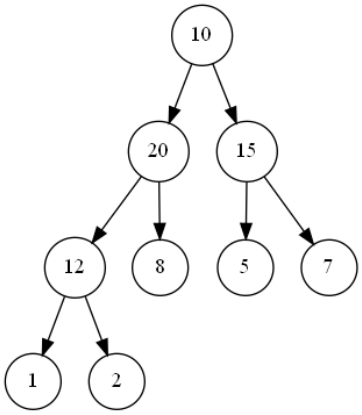
Prof. Igor Machado Coelho

Aluno: Ewerton Luiz Costadelle

Obs.: Os algoritmos de resposta desta lista encontram-se no repositório **GitHub**. A visualização das árvores, produzidas em **GraphViz**, não são renderizadas pelo interpretador de MarkDown do GitHub. Por essa razão, foram convertidas para PNG e o **resultado também esta disponível em PDF**.

Exercício 1:

Considere uma árvore binária completa composta pelos seguintes elementos (representação sequencial): 10,20,15,12,8,5,7, 1 e 2.



a. Apresente o percurso de pré-ordem na árvore

> 10, 20, 12, 1, 2, 8, 15, 5, 7

b. Apresente o percurso em-ordem na árvore

> 1, 12, 2, 20, 8, 10, 5, 15, 7

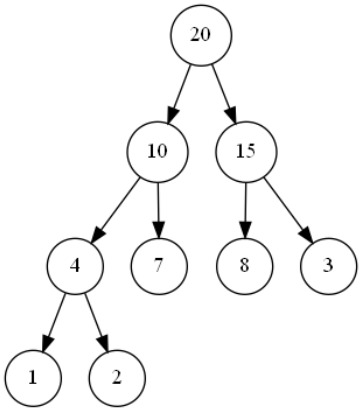
c. Apresente o percurso de pós-ordem na árvore

> 1, 2, 12, 8, 20, 5, 7, 15, 10

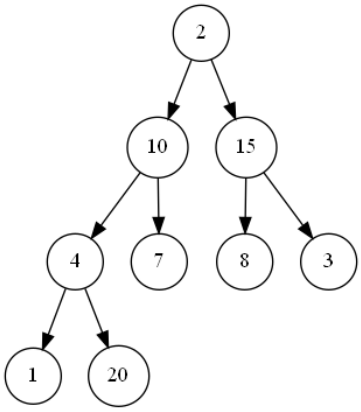
Exercício 2:

Considere uma estrutura MAX-heap representada pelo seguinte vetor de níveis: 20, 10, 15, 4, 7, 8, 3, 1, 2

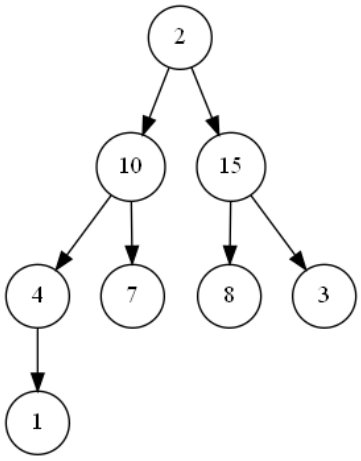
a. efetue a remoção do elemento de maior prioridade: desenhe a árvore e vetor passo-a-passo



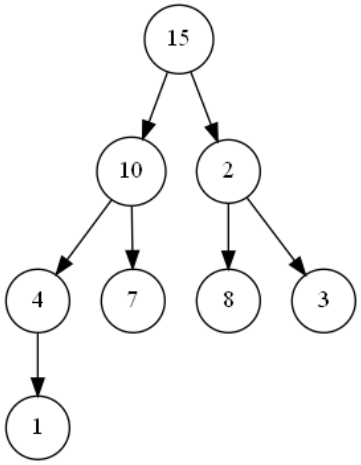
> Condição inicial: 20, 10, 15, 4, 7, 8, 3, 1, 2



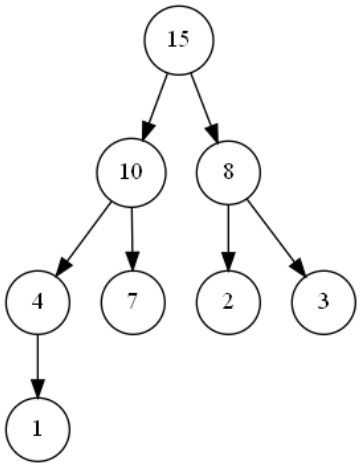
> Primeiro passo, comuta os valores do elemento de maior prioridade(20) com o último elemento do vetor(2): 2, 10, 15, 4, 7, 8, 3, 1, 20



> Segundo passo, remove o elemento de maior prioridade (20): 2, 10, 15, 4, 7, 8, 3, 1



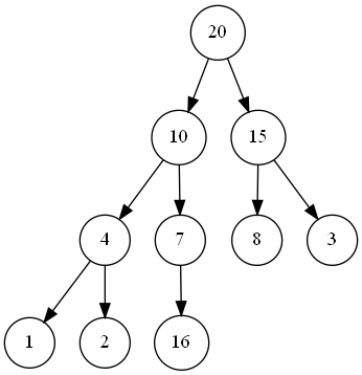
> Terceiro passo, comuta o elemento que está fora de ordem (2) com o filho de maior prioridade (15): 15, 10, 2, 4, 7, 8, 3, 1



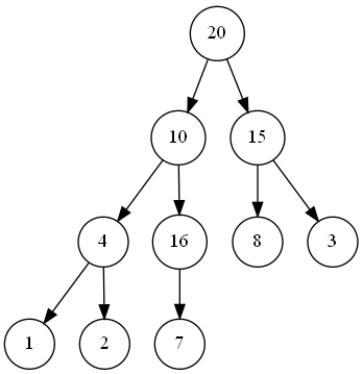
> Quarto passo, comuta novamente o elemento que está fora de ordem (2) com o filho de maior prioridade (8): 15, 10, 8, 4, 7, 2, 3, 1

---

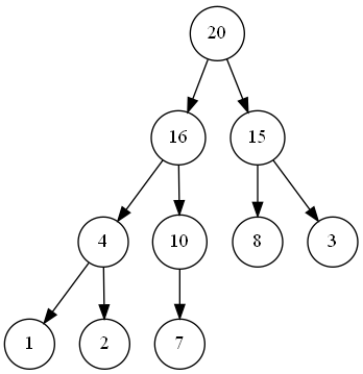
b. efetue a inserção do elemento 16 (sem considerar a remoção anterior): desenhe a árvore e vetor passo-a-passo



> Primeiro passo, a inserção é realizada no final do vetor: 20, 10, 15, 4, 7, 8, 3, 1, 2, 16



> Segundo passo, o valor inserido (16) é comutado com seu pai (7), que tem prioridade menor: 20, 10, 15, 4, 16, 8, 3, 1, 2, 7



> Terceiro passo, o valor inserido (16) é comutado novamente, porém, com seu novo pai (10), que tem prioridade menor: 20, 16, 15, 4, 10, 8, 3, 1, 2, 7

Exercício 3:

Considere a seguinte estrutura para uma árvore binária:

```
1  class Arvore
2  {
3  public:
4      No *raiz;
5  };
6
7  class No
8  {
9  public:
10     No *esq;
11     No *dir;
12 };
```

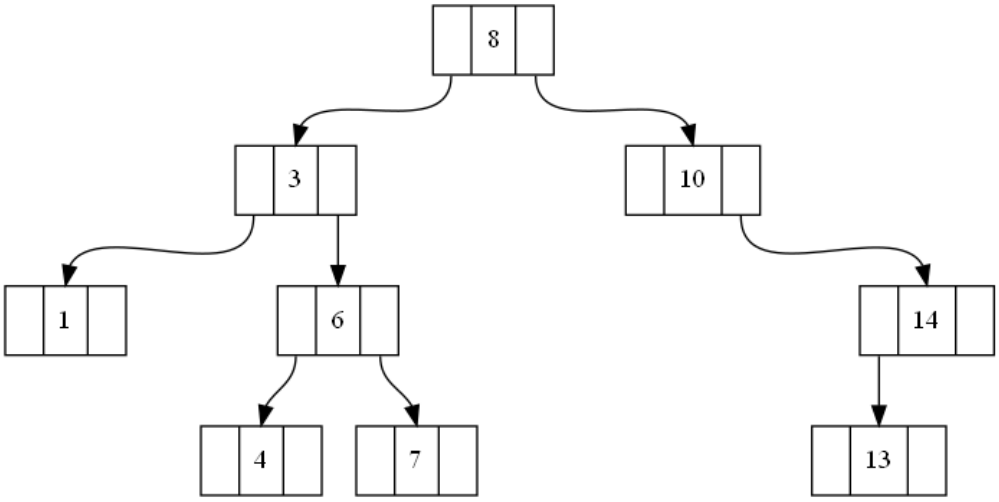
> Para resolver essa questão, acrescentei às classes `No` e `Arvore` métodos construtores e destrutores. Ainda na classe `No` acrescentei uma variável para armazenar um dado do tipo inteiro (`int valor`). De modo que as classe no arquivo de **cabeçalho** ficaram como demonstrado no bloco de código abaixo:

```
class No
{
public:
    No *esq;
    No *dir;
    int valor;
    No(int);
    ~No();
};

class Arvore
{
public:
    No *raiz;
    Arvore();
    ~Arvore();
};
```

> No arquivo de **implementação** foram definidos os métodos construtor `No()`, que recebe um valor inteiro e inicializa a variável `valor`, recebida como parâmetro e o destrutor `~No()` que elimina os dados. Também foram definidos os métodos construtor `Arvore()`, que inicializa a variável `raiz` como `nullptr` e o destrutor `~Arvore()` que deleta, através de um método recursivo (`deletaArvore()`) todos os nós da árvore. Os métodos construtores e destrutores são mostrados no bloco de código abaixo:

```
No::No(int v)
{
    this->valor = v;
    this->esq = NULL;
    this->dir = NULL;
}

No::~No()
{
    this->valor = 0;
    this->esq = NULL;
    this->dir = NULL;
}

Arvore::Arvore()
{
    this->raiz = NULL;
}

Arvore::~Arvore()
{
    deletaArvore(this->raiz);
}

void deletaArvore(No *no)
{
    if (no != NULL)
    {
        deletaArvore(no->esq);
        deletaArvore(no->dir);
        delete no;
    }
}
```

> Em seguida populei os dados com uma árvore de busca. Como as variáveis `*esq` e `*dir` estavam públicas, optei em opera-las diretamente. Os valores inseridos na árvore teste são os mostrados a seguir:



> A inserção foi feita como mostrado no bloco de código, abaixo:

```
// cria a árvore
Arvore arvore;

// insere os nós na árvore
arvore.raiz = new No(8);
arvore.raiz->esq = new No(3);
arvore.raiz->dir = new No(10);
arvore.raiz->esq->esq = new No(1);
arvore.raiz->esq->dir = new No(6);
arvore.raiz->dir->dir = new No(14);
arvore.raiz->esq->dir->esq = new No(4);
arvore.raiz->esq->dir->dir = new No(7);
arvore.raiz->dir->dir->esq = new No(13);
```

---

a. Escreva um algoritmo para computar a soma das folhas

> O algoritmo percorre todos os nós da árvore em busca daqueles que não possuem filhos. Quando os encontra, retorna o seu valor (somado com 0). As chamadas são recursivas e, como retorno, cada nó pai devolve a soma de seus filhos. Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

```cpp
int somaFolhas(No *no)
{
    // variável para armazenar o valor da soma no escopo
    int soma = 0;
    // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à esquerda
    if (no->esq) soma += somaFolhas(no->esq);
    // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à direita
    if (no->dir) soma += somaFolhas(no->dir);
    // se o nó atual não possuir filhos, soma o valor do nó atual
    if (!no->esq and !no->dir) soma += no->valor;
    // retorna a soma
    return soma;
}
```

> *Saída*: `Soma dos nos folha: 25`

---

b. Escreva um algoritmo para efetuar um percurso de pós-ordem

> O algoritmo faz uma chamada recursiva em busca dos filhos à esquerda, em seguida dos filhos à direita e, só após realizar as duas chamadas, imprime o valor do nó atual. Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

```cpp
void posOrdem(No *no)
{
    // caso o nó atual não seja nulo, isto é útil porque nós folhas armazenam
    // nullptr no lugar de filhos
    if (no != NULL)
    {
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à esquerda
        posOrdem(no->esq);
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à direita
        posOrdem(no->dir);
        // imprime o valor do nó atual
        std::cout << no->valor << " ";
    }
}
```

> *Saída*: `Percorrendo pos ordem: 1 4 7 6 3 13 14 10 8`

---

c. Escreva um algoritmo para efetuar um percurso de em-ordem

> O algoritmo faz uma chamada recursiva em busca dos filhos à esquerda, em seguida imprime o valor do nó atual e, só após realizar a chamada, chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à direita. Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

```
1  void emOrdem(No *no)
2  {
3      // caso o nó atual não seja nulo, isto é útil porque nós folhas
           armazenam
4      // nullptr no lugar de filhos
5      if (no != NULL)
6      {
7          // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à
               esquerda
8          emOrdem(no->esq);
9          // imprime o valor do nó atual
10         std::cout << no->valor << " ";
11         // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à
               direita
12         emOrdem(no->dir);
13     }
14 }
```

> *Saída*: `Percorrendo em ordem: 1 3 6 4 7 8 10 13 14`

---

d. Escreva um algoritmo para efetuar um percurso de pré-ordem

> O algoritmo imprime o valor do nó atual e, em seguida, chama recursivamente para acessar os nós filhos localizados à esquerda e à direita. Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

```cpp
void preOrdem(No *no)
{
    // caso o nó atual não seja nulo, isto é útil porque nós folhas armazenam
    // nullptr no lugar de filhos
    if (no != NULL)
    {
        // imprime o valor do nó atual
        std::cout << no->valor << " ";
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à esquerda
        preOrdem(no->esq);
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à direita
        preOrdem(no->dir);
    }
}
```

> *Saída*: `Percorrendo pre ordem: 1 3 6 4 7 8 10 13 14`

---

e. Escreva um algoritmo para computar a altura de um dado nó

> O algoritmo percorre recursivamente todos os nós da árvore, quando encontra referência nula para dois nós significa que encontrou uma folha. O retorno da recursão para um nó nulo é altura zero, de modo que a folha retorna altura 1. O algoritmo ainda compara as alturas à esquerda e à direita, e retorna a maior delas acrescidas de 1, que é a altura do nó atual. Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

```c
int computaAltura(No *no)
{
    // variável para armazenar a altura no escopo
    int altura = 0;

    // caso o nó atual não seja nulo, isto é útil porque nós folhas armazenam
    // nullptr no lugar de filhos
    if (no)
    {
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à esquerda
        int esq = computaAltura(no->esq);
        // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à direita
        int dir = computaAltura(no->dir);
        // se a altura da subárvore à esquerda for maior que à direita,
        // a altura da subárvore atual é a altura à esquerda + 1
        if (esq > dir) altura = esq + 1;
        // se a altura da subárvore à direita for maior que à esquerda,
        // a altura da subárvore atual é a altura à direita + 1
        else if (dir > esq) altura = dir + 1;
        // se as alturas da subárvore forem iguais, a altura da subárvore
        // atual é a altura de uma delas + 1
        else altura = esq + 1;
    }
    // retorna a altura
    return altura;
}
```

> *Saída*: `Altura da arvore: 4`

---

f. Escreva um algoritmo para computar o fator de balanceamento de um dado nó

> Por definição, o fator de balanceamento, de um dado nó, é igual a diferença entre a altura dos filhos à esquerda e a altura dos filhos à direita. De modo que o algoritmo do exercício anterior permite calcular o fator de balanceamento de forma bem simples.

```c
int computaFatorBalanceamento(No *no)
{
    // retorna a altura da subárvore à esquerda - a altura da subárvore à direita
    return computaAltura(no->esq) - computaAltura(no->dir);
}
```

> *Saída*: `Fator de balanceamento da arvore: 0`

---

g. Escreva um algoritmo para percorrer a árvore em níveis

> Uma fila pode auxiliar na impressão em níveis, porque o primeiro elemento que entra é o primeiro elemento que sai. Nesse sentido, ao iniciar o algoritmo, o nó raiz é inserido na fila. Em seguida seus filhos são inseridos na fila. O passo seguinte é imprimir o valor da raiz e removê-la da fila. O processo é iterado enquanto houverem elementos na fila, adiciona-se os filhos do elemento que está na frente da fila e, em seguida, remove-se o pai. O algoritmo que percorre toda a árvore, imprimindo os valores de cada nó, pode ser visualizado no seguinte código:

```
1  void percorreNiveis(No *no)
2  {
3      // fila para armazenar os nós da árvore na ordem em que eles devem
           ser exibidos
4      std::queue<No *> fila;
5      // insere o nó raiz na fila
6      fila.push(no);
7      // enquanto a fila não estiver vazia
8      while (!fila.empty())
9      {
10         // insere os filhos na fila
11         if (fila.front()->esq) fila.push(fila.front()->esq);
12         if (fila.front()->dir) fila.push(fila.front()->dir);
13         // imprime o valor do nó atual
14         std::cout << fila.front()->valor << " ";
15         // remove o nó atual da fila
16         fila.pop();
17     }
18 }
```

> *Saída*: `Percorrendo por niveis: 8 3 10 1 6 14 4 7 13`

> Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.

---

h. Escreva um algoritmo para computar o produto dos nós

> O algoritmo percorre recursivamente todos os nós da árvore, quando encontra uma folha, retorna o valor do nó, o pai desta folha outro filho, multiplica com o próprio valor e devolve ao seu pai. O nó raiz que é quem devolve o produto final, desse modo o algoritmo percorre a árvore em pós-ordem. Como pode ser verificado no bloco código, abaixo:

```
1  int computaProduto(No *no)
2  {
3      // variável para armazenar o produto no escopo
4      int produto = 1;
5      // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à
           esquerda
6      if (no->esq) produto *= computaProduto(no->esq);
7      // chamada recursiva para acessar os nós filhos localizados à
           direita
8      if (no->dir) produto *= computaProduto(no->dir);
9      // após o retorno da recursão, retorna o produto
10     if (no) produto *= no->valor;
11     // retorna o produto
12     return produto;
13 }
```

> *Saída*: `Produto dos nos da arvore: 7338240`

> Considerando que o algoritmo percorre toda a árvore, é possível concluir que depende diretamente do número de nós (n), nesse sentido o tempo de execução do algoritmo é $O(n)$.