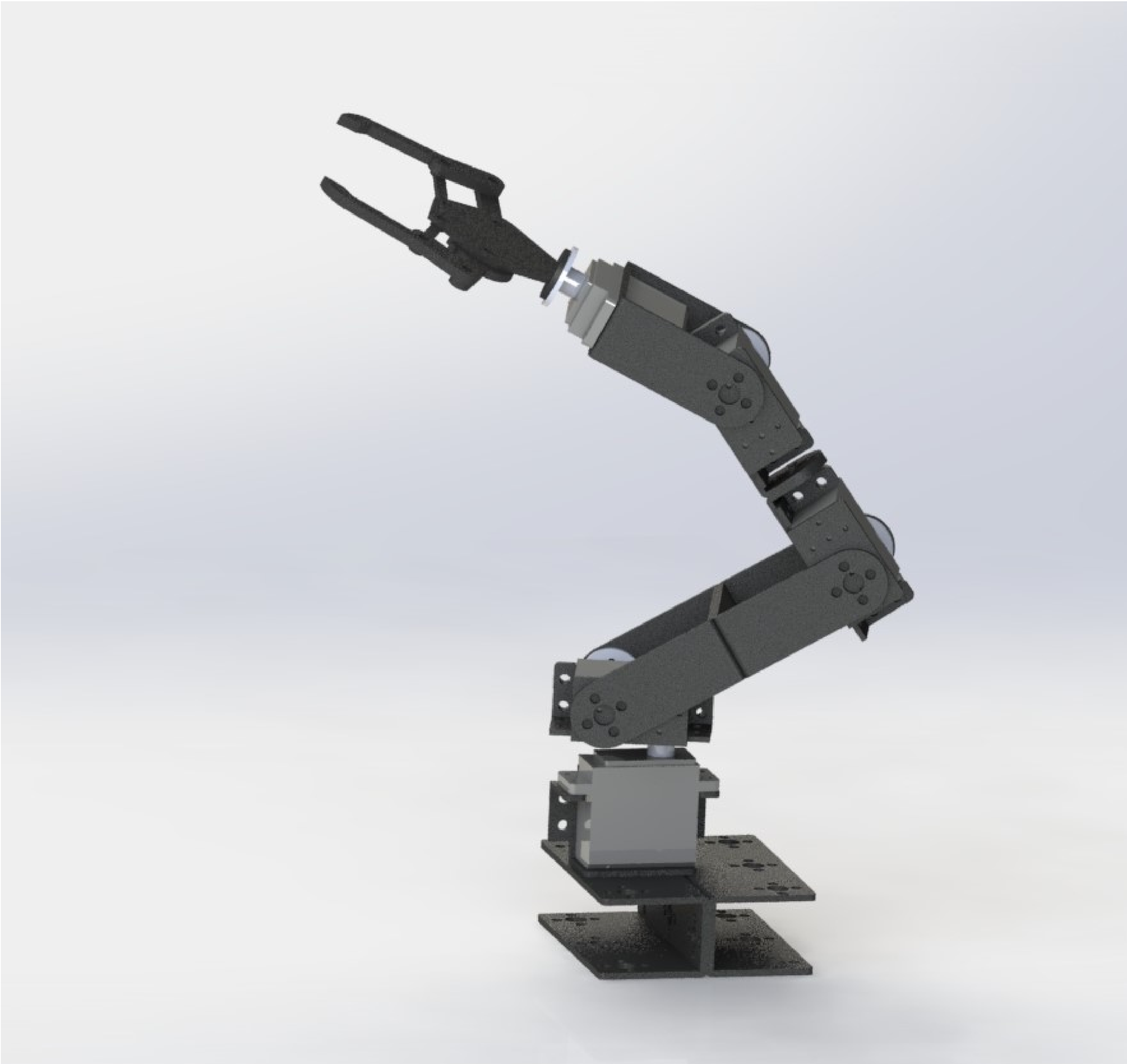
LittleRA



基于自己建立的一个简单五轴机械臂，建立运动学与动力学模型，为后续轨迹规划，运动控制，力控制做好准备。

数学模型：

正运动学：

依据建立的solidworks三维图，建立合适的坐标系

写出D-H参数：（角度单位为度，距离单位为mm）

{}	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	90	20	θ_2	0
3	0	105	θ_3	0
4	-180	95	θ_4(-90)	0
5	-90	70	θ_5(90)	10

根据D—H参数，写出4个坐标系的变换矩阵：

$$ {}_1^0T = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_2^1T = Rot(x,90)Trans(20,0,0)Rot(z,\theta_2)Trans(0,0,0) = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_3^2T = Rot(x,0)Trans(150,0,0)Rot(z,\theta_3)Trans(0,0,0) = \begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 105 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_4^3T = Rot(x,-180)Trans(95,0,0)Rot(z,\theta_4(-90))Trans(0,0,0) = \begin{pmatrix} s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 95 \\ c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_5^4T = Rot(x,-90)Trans(70,0,0)Rot(z,\theta_5(90))Trans(10,0,0) = \begin{pmatrix} -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 70-10s\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c\theta_5 & s\theta_5 & 0 & -10c\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_6^5T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

写出整体变换矩阵：

$$
{}_{6}^{0}T ={}_{1}^{0} T_{2}^{1}T_{3}^{2}T_{4}^{3}T_{5}^{4}T_{6}^{5}T = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\sin(\theta_5)\cos(\theta_1)-\sin(\theta_1)\cos(\theta_5) & \sin(\theta_1)\sin(\theta_5)+\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\cos(\theta_1)\cos(\theta_5) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4) & 5\cos(\theta_1)\left(2\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\left(11\sin(\theta_5)-7\right)+21\cos(\theta_2)+19\cos(\theta_2+\theta_3)+4\right)-110\sin(\theta_1)\cos(\theta_5) \\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\sin(\theta_5)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_5) & \sin(\theta_1)\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\cos(\theta_5)-\sin(\theta_5)\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1)\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4) & 5\left(22\cos(\theta_1)\cos(\theta_5)+\sin(\theta_1)\left(2\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\left(11\sin(\theta_5)-7\right)+21\cos(\theta_2)+19\cos(\theta_2+\theta_3)+4\right)\right) \\ \sin(\theta_5)\left(-\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\right) & -\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4)\cos(\theta_5) & \sin(\theta_2+\theta_3-\theta_4) & 105\sin(\theta_2)+95\sin(\theta_2+\theta_3)+\left(70-110\sin(\theta_5)\right)\cos(\theta_2+\theta_3-\theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

通过上述的变换矩阵，在已经知道3轴的关节角度的基础上即可得到工具坐标系的位姿信息和坐标信息。即机器人正运动学。

逆运动学：

为了完成工作，工具坐标系需要确定的位姿和达到确定的坐标，在实际中，往往已知：

$$
{}_{4}^{0}T = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & x \\ n_y & o_y & a_y & y \\ n_z & o_z & a_z & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

可以看出，机器人正解复杂，对于关节角度和关节角度5可以比较简单的算出解析解。由于设计原因，对于其他关节，算出解析解是比较困难的。同时由于机械臂只有5个关节角度，其无法以特定位姿到达空间中的每一点，因此在实际过程中，通过迭代方法求得关节角度。以后机械设计会考虑逆解解算，尽量使用解析解提高机械臂实时性。

动力学：

速度与加速度：

LittleRA底座固定不可移动，因此有：

$$
{}^{0}\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{0}V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{0}\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{0}a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

根据之前的旋转矩阵，以及各个连杆的位置坐标关系，可以写出速度与加速度的递推公式：

在{1}系观察到的速度和加速度：

$$
{}^{1}\Omega_1 ={}_{0}^{1} R\, {}^{0}\Omega_0 + \omega_1\, {}^{1}Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{1}V_1 ={}_{0}^{1} R\left({}^{0}V_0 +{}^{0} \Omega_0 \times{}^{0} P_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{1}\Psi_1 ={}_{0}^{1} R\, {}^{0}\dot{\Omega}_0 +{}_{0}^{1} R \cdot {}^{0}\dot{\Omega}_0 \times \omega_1\, {}^{1}Z_1 + \psi_1\, {}^{1}Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}
$$

$$^1a_1 =_0^1 R[^0\dot{v}_0 + {}^0\dot{\Omega}_0 \times^0 P_1 +^0 \Omega_0 \times (^0\Omega_0 \times^0 P_1)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

在{1}系中，质心速度与加速度：

$$^1\Omega_{C1} =^1 \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$^1V_{C1} =^1 V_1 +^1 \Omega_1 \times^1 P_{C1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^1a_{pc1} = {}^1\dot{v}_1 + {}^1\dot{\Omega}_1 \times^1 P_{pc1} +^1 \Omega_1 \times (^1\Omega_1 \times^1 P_{pc1}) = \begin{pmatrix} -10\omega_1^2 \\ 10\psi_1 \\ -g \end{pmatrix}$$

在{2}系观察到的速度与加速度：

$$^2\Omega_2 =_1^2 R\, {}^1\Omega_1 + \omega_2\, {}^2Z_2 = \begin{pmatrix} s\theta_2 \cdot \omega_1 \\ c\theta_2 \cdot \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$^2V_2 =_1^2 R\, (^1V_1 +^1 \Omega_1 \times^1 P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$^2\Psi_2 =_1^2 R\, {}^1\dot{\Omega}_1 +_1^2 R \cdot {}^1\dot{\Omega}_1 \times \omega_2\, {}^2Z_2 + \psi_2\, {}^2Z_2 = \begin{pmatrix} \psi_1(S_2 + C_2 \cdot \omega_2) \\ \psi_1(C_2 - S_2 \cdot \omega_2) \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$^2a_2 =_1^2 R[^1\dot{v}_1 + {}^1\dot{\Omega}_1 \times^1 P_2 +^1 \Omega_1 \times (^1\Omega_1 \times^1 P_2)] = \begin{pmatrix} -g \cdot S_2 - 20C_2 \cdot \omega_1^2 \\ -gC_2 + 20S_2 \cdot \omega_1^2 \\ -20\psi_1 \end{pmatrix}$$

在{2}系中， 质心速度与加速度：

$$^2\Omega_{C2} =^2 \Omega_2 = \begin{pmatrix} s\theta_2 \cdot \omega_1 \\ c\theta_2 \cdot \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$^2V_{C2} =^2 V_2 +^2 \Omega_2 \times^2 P_{C2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 75\omega_2 \\ -5(-4 + 15C_2) \cdot \omega_1 \end{pmatrix}$$

$$^2a_{pc2} = {}^2\dot{v}_2 + {}^2\dot{\Omega}_2 \times^2 P_{pc2} +^2 \Omega_2 \times (^2\Omega_2 \times^2 P_{pc2}) = \begin{pmatrix} -gS_2 - 5C_2(4 + 15C_2) \cdot \omega_1^2 - 75\omega_2^2 \\ -gC_2 + 75\psi_2 + 5(2S_2 + 15C_2S_2) \cdot \omega_1^2 \\ -5(4 + 15C_2) \cdot \psi_1 + 75S_2(\psi_1 + \psi_2) \cdot \omega_2 \end{pmatrix}$$

在{3}系观察到的速度与加速度：

$$^3\Omega_3 =^3_2 R\,^2\Omega_2 + \omega_3\,^3Z_3 = \begin{pmatrix} S_{23}\cdot\omega_1 \\ C_{23}\cdot\omega_1 \\ \omega_2+\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$^3V_3 =^3_2 R\,(^2V_2 +^2 \Omega_2 \times^2 P_3) = \begin{pmatrix} 150S_3\cdot\omega_2 \\ 150C_3\cdot\omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

$$^3\Psi_3 =^3_2 R\,^2\dot{\Omega}_2 +^3_2 R\cdot{}^2\dot{\Omega}_2 \times \omega_3\,^3Z_3 + \psi_3\,^3Z_3 = \begin{pmatrix} \psi_1(S_{23}+C_{23}\cdot\omega_3+\omega_2\cdot(C_{23}-S_{23}\cdot\omega_3)) \\ -\psi_1(-C_{23}+S_{23}\cdot\omega_3+\omega_2\cdot(S_{23}+C_{23}\cdot\omega_3)) \\ \psi_2+\psi_3 \end{pmatrix}$$

$$^3a_3 =^3_2 R[^2\dot{v}_2 + {}^2\dot{\Omega}_2 \times^2 P_3 +^2 \Omega_2 \times (^2\Omega_2 \times^2 P_3)] = \begin{pmatrix} -g\cdot S_{23}+150S_3\psi_2-10(2+15C_2)\cdot C_{23}\cdot\omega_1^2-150C_3\cdot\omega_2^2 \\ -gC_{23}+150C_3\cdot\psi_2+10(2+15C_2)\cdot S_{23}\cdot\omega_1^2+150S_3\cdot\omega_2^2 \\ -10(2+15C_2)\psi_1+150S_2\cdot(\psi_1+\psi_2)\cdot\omega_2 \end{pmatrix}$$

在{3}系中， 质心速度与加速度：

$$^3\Omega_{C3} =^3 \Omega_3 = \begin{pmatrix} S_{23}\cdot\omega_1 \\ C_{23}\cdot\omega_1 \\ \omega_2+\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$^3V_{C3} =^3 V_3 +^3 \Omega_3 \times^3 P_{C3} = \begin{pmatrix} 150S_3\cdot\omega_2 \\ 50((3C_3+1)\cdot\omega_2+\omega_3) \\ -10(2+15C_2+5C_{23})\cdot\omega_1 \end{pmatrix}$$

其中$^3a_{pc3}$表达式如下，由于各个量均已知，展开式比较长，因此不再展开：

$$^3a_{pc3} = {}^3\dot{v}_3 + {}^3\dot{\Omega}_3 \times^3 P_{pc3} +^3 \Omega_3 \times (^3\Omega_3 \times^3 P_{pc3})$$

在{4}系中观察的速度与加速度

$$^4\Omega_4 =^4_3 R\,^3\Omega_3 + \omega_4\,^4Z_4$$

$$^4V_4 =^4_3 R\,(^3V_3 +^3 \Omega_3 \times^3 P_4)$$

$$^4\Psi_4 =^4_3 R\,^3\dot{\Omega}_3 +^4_3 R\cdot{}^3\dot{\Omega}_3 \times \omega_4\,^4Z_4 + \psi_4\,^4Z_4$$

$$^4a_4 =^4_3 R[^3\dot{v}_4 + {}^3\dot{\Omega}_3 \times^3 P_4 +^3 \Omega_3 \times (^3\Omega_3 \times^3 P_4)]$$

在{3}系中， 质心速度与加速度：

$$^4\Omega_{C4} =^4 \Omega_4$$

$$^4V_{C4} =^4 V_4 +^4 \Omega_4 \times^4 P_{C4}$$

$$^4a_{pc4} = {}^4\dot{v}_4 + {}^4\dot{\Omega}_4 \times^4 P_{pc4} +^4 \Omega_4 \times (^4\Omega_4 \times^4 P_{pc4})$$

在{5}系中观察的速度与加速度

$$^5\Omega_5 =^5_4 R\,^4\Omega_4 + \omega_5\,^5Z_5$$

$$^5V_5 =^5_4 R\,(^4V_4 +^4 \Omega_4 \times^4 P_5)$$

$$^5\Psi_5 =^5_4 R\,^4\dot{\Omega}_4 +^5_4 R\cdot{}^4\dot{\Omega}_4 \times \omega_5\,^5Z_5 + \psi_5\,^5Z_5$$

$$^5a_5 =^5_4 R[^4\dot{v}_5 + {}^4\dot{\Omega}_4 \times^4 P_5 +^4 \Omega_4 \times (^4\Omega_4 \times^4 P_5)]$$

在{3}系中， 质心速度与加速度：

$^5\Omega_{C5} =^5 \Omega_5$

$^5V_{C5} =^5 V_5 +^5 \Omega_5 \times^5 P_{C5}$

$^5a_{pc5} = {^5\dot{v}_5} + {^5\dot{\Omega}_5} \times^5 P_{pc5} +^5 \Omega_5 \times ({^5\Omega_5} \times^5 P_{pc5})$

上述式子展开很麻烦，大部分计算使用软件wolfram engine 完成。

力与力矩：

经过上述，已经获得了在各个坐标系下连杆的速度与加速度，利用外推法，可得力与力矩递推方程：

$^1F_1 = m_1{^1\dot{v}_{pc1}}$　　$^1N_1 =^{c1} I_1 \cdot {^1\dot{\Omega}_{pc1}}$

$^2F_2 = m_2{^2\dot{v}_{pc2}}$　　$^2N_2 =^{c2} I_2 \cdot {^2\dot{\Omega}_{pc2}}$

$^3F_3 = m_3{^3\dot{v}_{pc3}}$　　$^3N_3 =^{c3} I_3 \cdot {^3\dot{\Omega}_{pc3}}$

$^4F_4 = m_4{^4\dot{v}_{pc4}}$　　$^4N_4 =^{c4} I_4 \cdot {^4\dot{\Omega}_{pc4}}$

$^5F_5 = m_5{^5\dot{v}_{pc5}}$　　$^5N_5 =^{c5} I_5 \cdot {^5\dot{\Omega}_{pc5}}$

上述等式中右边均为已知量，大部分工作由计算机完成。上述的公式推导可以使用mathematica完成。