Matematik för yrkeshögskolan

Antonio Prgomet
André Emgård

Första upplagan

Antonio tillägnar denna bok till sin mamma, pappa, syster och bror.

André tillägnar denna bok till sin familj.

Förord

Bokens upplägg

Denna bok består av fyra delar. De tre första delarna täcker centralt innehåll från gymnasiets matematik motsvarande Matematik 1 till Matematik 3. Den fjärde delen innehåller utvalda fördjupningsområden.

Alla som läser boken bör läsa avsnitt 1.1 för att förstå bokens struktur vars centrala delar är definitioner, satser, bevis och exempel. Bortsett från det så kan läsaren läsa kapitlen fristående och behöver alltså *inte* läsa boken från början till slut. Avsnitten i boken har tillhörande övningsuppgifter där svar till samtliga övningsuppgifter finns på bokens GitHub sida som nås på följande internetlänk:
https://github.com/AntonioPrgomet/matematik_foer_yh

Boken har inspelade *kursvideor*. Även dessa är tillgängliga på bokens GitHub sida.

Studieteknik

Ett bra sätt att lära sig materialet i boken är att börja med att skumma igenom / översiktsläsa kapitlet du ska arbeta med, kolla videor och därefter djupläsa boken och arbeta med uppgifterna. Oavsett vilken bok man läser så behöver man ibland få en annorlunda förklaring på något. En möjlig källa att gå till kan då vara https://www.matteboken.se/ .

Decimaltecken

I Sverige används kommatecken som decimaltecken medan andra länder såsom USA använder punkt. Det innebär att i Sverige hade vi till exempel skrivit $10,5$ medan det i USA hade stått 10.5. Vi har i denna bok valt att använda punkt som decimaltecken.

Lycka till

Matematik är ett fantastiskt ämne och vi hoppas att du ska tycka boken är lika rolig att läsa som vi har tyckt det är att skriva den.

Vi önskar dig lycka till i dina studier och framtida yrkesutövning.

Antonio Prgomet
André Emgård

Innehållsförteckning

1. Repetition av Matematik 1

I detta kapitel kommer vi gå igenom centrala koncept från Matematik 1.

1.1 Axiom, definition, sats och bevis

Inom matematiken är begreppen *axiom*, *defintion*, *sats* och *bevis* centrala.

Axiom är grundantagande som *antas* vara sanna och går inte att bevisa. Vi presenterar de fundamentala axiom som gäller för de reella talen. Vi antar nedan att a, b och c är reella tal.

1. Additiv kommutativitet: $a + b = b + a$.
2. Additiv associativitet: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Existensen av additiv identitet: Det finns ett reellt tal 0, sådant att $a + 0 = a$.
4. Existensen av additiv invers: Det finns ett reellt tal $-a$, sådant att $a + (-a) = 0$ för alla reella tal.
5. Multiplikativ kommutativitet: $a \cdot b = b \cdot a$.
6. Multiplikativ associativitet: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
7. Existensen av multiplikativ identitet: Det finns ett reellt tal $1 \neq 0$, sådant att $a \cdot 1 = a$ för alla reella tal.

8. Existensen av multiplikativ invers: Om $x \neq 0$, så finns det ett reellt tal x^{-1}, sådant att $x \cdot x^{-1} = 1$.

9. Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Dessa axiom är väldigt naturliga. Om vi antar att $a = 4$ och $b = 3$ så säger första axiomet att det inte spelar roll i vilken ordning vi adderar tal. Exempelvis: $4 + 3 = 3 + 4 = 7$. Detta överensstämmer med sunt förnuft, om vi först sparar fyra kronor och därefter tre kronor så har vi totalt sparat sju kronor. Om vi däremot först sparar tre kronor och därefter fyra kronor så har vi återigen sparat totalt sju kronor.

Det andra axiomet säger att det inte spelar roll i vilken ordning vi grupperar addition av tal. Det tredje axiomet säger att det existerar ett tal som vi kallar 0 som har egenskapen att om vi exempelvis tar $4 + 0$ så blir det 4. Det fjärde axiomet säger att tal har negativa motsvarigheter, adderar vi ett tal med dess negativa motsvarighet så blir det noll.

Det femte axiomet säger att det inte spelar roll i vilken ordning vi utför multiplikation. Exempelvis $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 20$. Det sjätte axiomet säger att det inte spelar någon roll hur vi grupperar multiplikation av tal. Det sjunde axiomet säger att det finns ett tal 1 som uppfyller villkoret att om vi exempelvis tar $4 \cdot 1$ så blir det 4. Det åttonde axiomet säger att det existerar en multiplikativ invers skild från noll med egenskapen att om ett tal multipliceras med dess invers så blir det 1. Det nionde axiomet säger att om vi har ett tal a som multipliceras med summan av två andra tal b och c, så kan vi distribuera multiplikationen över varje term i parentesen.

Definitioner innebär att vi entydigt berättar vad ett begrepp innebär.

Nedan kommer vi definiera de vanligast förekommande talmängderna.

Definition 1.1 (Naturliga tal). De naturliga talen betecknas $\mathbb{N}$ och består av de positiva heltalen och talet 0. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Exempel 1.2. De naturliga talen används ofta för att räkna. Exempel kan vara att räkna antalet anställda på ett företag eller hur mycket äpplen vi har i kylskåpet. De naturliga talen är något vi dagligen använder men kanske inte direkt har tänkt på. I den bemärkelsen är de väldigt "naturliga".

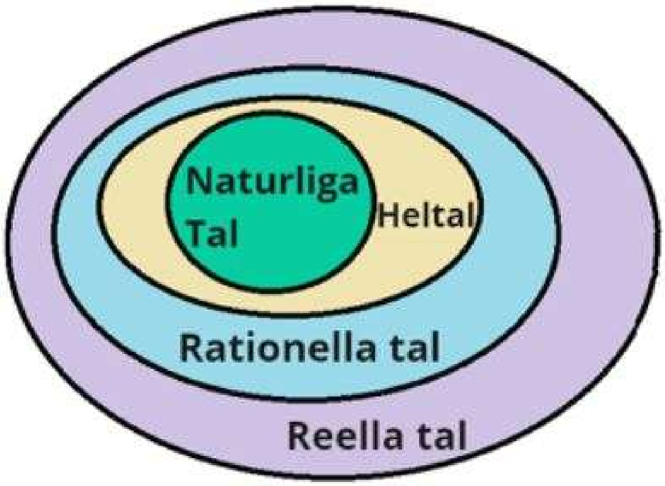
Definition 1.3 (Heltal). Heltalen betecknas $\mathbb{Z}$ och består av de naturliga talen och deras negativa motsvarigheter.
$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Definition 1.4 (Rationella tal). De rationella talen (kallas också bråktal) betecknas $\mathbb{Q}$ och består av alla tal som kan skrivas som kvoten mellan två heltal. Vi kan skriva det som: $\mathbb{Q} =$ alla tal $\frac{a}{b}$ där a och b är heltal samt $b \neq 0$.

Definition 1.5 (Irrationella tal). Vissa tal går inte att skriva som kvoten av två heltal, exempel på sådana är $\sqrt{2}$ och π. Dessa tal kallas för irrationella tal.

Definition 1.6 (Reella tal). De reella talen betecknas $\mathbb{R}$ och består av de rationella och irrationella talen vilket är alla tal på tallinjen.

De olika talmängderna vi nu definierat har ett förhållande. De naturliga talen $\mathbb{N}$ är en delmängd av heltalen $\mathbb{Z}$, som i sin tur är en delmängd av de rationella talen $\mathbb{Q}$, som i sin tur är en delmängd av de reella talen $\mathbb{R}$. Vi kan visualisera detta, se figur 1.1.



Figur 1.1: Förhållande mellan talmängderna.

Exempel 1.7. Heltalen är en delmängd av de rationella talen vilket är uppenbart eftersom till exempel $10 = \frac{10}{1}$. Detta gäller för alla heltal.

Genom att använda axiom och definitioner kan vi formulera matematiska påståenden vilket kallas för **satser**. Matematiska satser behöver **bevisas** generellt för att vara giltiga. För att visa att ett matematiskt bevis är slutfört så kan vi skriva "vilket skulle bevisas" som kan förkortas v.s.b. eller den latinska varianten Q.E.D. (quod erat demonstrandum). Ett tredje sätt, som är det vi kommer använda i denna boken är att vi skriver ut en kvadrat $\square$ efter att beviset är slutfört.

Nedan kommer vi presentera några satser som vi kanske minns från grundskolan samt hur de bevisas. Bevisen görs genom att använda axiomen vi definierade.

Om vi tar minus ett negativt tal, exempelvis $-(-4)$ så får vi 4. Många kommer ihåg detta som att *"minus och minus blir plus"*. Nu skriver vi det allmänt i en sats och bevisar det.

Sats 1.8. Låt a vara ett godtyckligt reellt tal. Då gäller det att $-(-a) = a$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{(Axiom 3)} \\
a &= a + (-a + (-(-a)) && \text{(Axiom 4 för } -a\text{)} \\
a &= (a + (-a)) + (-(-a)) && \text{(Axiom 2)} \\
a &= 0 + (-(-a)) && \text{(Axiom 4)} \\
a &= -(-a) && \text{(Axiom 1 och 3)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Varför använder vi två axiom på sista raden i beviset? Det beror på att axiom 3 säger att $(-(-a)) + 0 = (-(-a))$ där vi ser att nollan är till höger. För att kunna skriva $0+(-(-a)) = (-(-a))$ så använder vi den kommutativa egenskapen för addition först vilket är axiom 1. Vi har alltså: $0 + (-(-a)) = (-(-a)) + 0 = (-(-a))$.

Sats 1.8 kan generaliseras så vi kan hantera flera minustecken. Antag att vi har $-(-(-a))$, då kan vi kalla $(-(-a)) = x$ där vi vet att $x = a$ enligt sats 1.8. Substituerar vi det i vårt ursprungliga uttryck får vi $-(-(-a)) = -x = -a$. Genom kedjan av likheter ser vi alltså att $-(-(-a)) = -a$.

Nästa sats är något som många kommer ihåg från grundskolan enligt minnesregeln *"allting gånger noll är noll"*.

Sats 1.9. Låt a vara ett godtyckligt reellt tal. Då gäller det att $a \cdot 0 = 0$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{(Axiom 4)}\\
0 &= a \cdot (1 + 0) + (-a) && \text{(Axiom 7 och 3)}\\
0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 + (-a) && \text{(Axiom 9)}\\
0 &= a \cdot 0 + (a + (-a)) && \text{(Axiom 7 och 2)}\\
0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(Axiom 4)}\\
0 &= a \cdot 0 && \text{(Axiom 3)}
\end{aligned}
$$

□

Sats 1.9 kan generaliseras så att vi kan hantera flera faktorer som multipliceras med noll. Om vi exempelvis har $0 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ så kan vi kalla $5 \cdot 4 \cdot 3 = a$. Då har vi $0 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 0 \cdot a = 0$ där vi i sista ledet använt sats 1.9. Notera att satsen säger $a \cdot 0 = 0$ medan vi har $0 \cdot a$, vi vet dock att multiplikation är kommutativt innebärande att $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Vi vet från grundskolan att exempelvis $(-1) \times 4 = -4$. Nu skriver vi det allmänt i en sats och bevisar det. Denna satsen använder vi som en hjälpsats när vi bevisar sats 1.11.

Sats 1.10. Låt a vara ett godtyckligt reellt tal. Då gäller det att $a \times (-1) = -a$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
-a &= -a + a \cdot 0 && \text{(Sats 1.9 och axiom 3)}\\
-a &= -a + a \cdot (1 + (-1)) && \text{(Axiom 4)}\\
-a &= -a + a \cdot 1 + a \cdot (-1) && \text{(Axiom 9)}\\
-a &= (-a + a) + a \cdot (-1) && \text{(Axiom 7 och 2)}\\
-a &= 0 + a \cdot (-1) && \text{(Axiom 4)}\\
-a &= a \cdot (-1) && \text{(Axiom 1 och 3)}
\end{aligned}
$$

□

Den sista satsen vi kommer bevisa i detta avsnitt säger att multiplikation av två negativa tal blir positivt. En minnesregel många använder är att *”minus och minus blir plus”*. Exempelvis $(-4) \times (-3) = 12$.

Sats 1.11. Låt a och b vara två godtyckliga reella tal. Då gäller det att $(-a) \times (-b) = ab$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &= (a \cdot (-1)) \cdot (-b) && \text{(Sats 1.10)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot ((-1) \cdot (-b)) && \text{(Axiom 6)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot (-(-b)) && \text{(Sats 1.10 och axiom 5)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot b && \text{(Sats 1.8)}
\end{aligned}
$$

□

Sats 1.11 kan generaliseras till att hantera multiplikation av flera negativa faktorer. Om vi exempelvis har $(-4)(-3)(-2)$, då kan vi kalla $(-4)(-3) = x$ och enligt sats 1.11 så är $x = (-4)(-3) = 4 \cdot 3 = 12$. Om vi substituerar tillbaka 12 för x så får vi $(-4)(-3)(-2) = x(-2) = 12 \cdot (-2) = -24$.

När en sats är bevisad så kan vi använda den i all framtid utan att behöva göra om bevisen. Nu använder vi satserna i exemplen nedan.

Exempel 1.12. $(-1)(4) + (-2)(-3) + 1 = -4 + 6 + 1 = 3$.

Exempel 1.13. $10+(-5)(-2)-(-4)+2 = 10+10+4+2 = 26$.

Exempel 1.14. $(-10)(-5)(-2)(-2) + 5 - (-3) - (-(-2)) = 50 \cdot 4 + 5 + 3 - 2 = 200 + 8 - 2 = 206$.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.1.1. De naturliga talen kan användas för att till exempel beräkna antalet anställda på ett företag. Har du något exempel på vad negativa tal såsom -5 kan användas till i verkligheten?

Uppgift 1.1.2. Beräkna följande uttryck:
$-10-(-20)=$

Uppgift 1.1.3. Beräkna följande uttryck:
$5+12(-4)(-2)+1=$

Uppgift 1.1.4. Beräkna följande uttryck:
$5(-4)(-2)(-3)\times 0=$

Uppgift 1.1.5. Beräkna följande uttryck:
$(-4)(-2)\times 0=$

Uppgift 1.1.6. Beräkna följande uttryck:
$10(4-2)+4(-1)+3=$

Uppgift 1.1.7. Varför är heltalen en delmängd av de rationella talen?

1.2 Implikation och ekvivalens

Implikation och ekvivalens är två begrepp som används inom matematiken och i det vardagliga språket.

Definition 1.15 (Implikation). Implikation betecknas med en enkelriktad pil som ser ut på följande sätt: $\Rightarrow$ och utläses *"medför att"*.

Exempel 1.16. Om en figur är en kvadrat så medför det att det också är en fyrhörning. Vi kan enkelt skriva detta som:
"figuren är en kvadrat" $\Rightarrow$ "figuren är en fyrhörning".

Den omvända implikationen gäller inte. Om en figur är en fyrhörning så medför det inte nödvändigtvis att det är en kvadrat eftersom det exempelvis kan vara en rektangel också. Vi kan enkelt skriva detta som:
"figuren är en kvadrat" $\not\Leftarrow$ "figuren är en fyrhörning".
Byter vi plats på påståendena så kan vi använda en struken högerpil om vi hellre föredrar det.
"Figuren är en fyrhörning" $\not\Rightarrow$ "Figuren är en kvadrat".

Exempel 1.17. Ett vardagligt exempel på implikation är:
"Julia bor i Stockholm" $\Rightarrow$ "Julia bor i Sverige".

Den omvända implikationen gäller inte. Att vi bor i Sverige medför inte nödvändigtvis att vi bor i Stockholm, vi kan till exempel bo i Malmö.

Definition 1.18 (Ekvivalens). Ekvivalens betecknas med en dubbelpil som ser ut på följande sätt: $\Leftrightarrow$ och betyder att det finns implikation åt båda hållen.

Exempel 1.19. Om vi vet att $x = 3$ så är det ekvivalent med att $x + 2 = 5$. Vi kan se detta i två steg.
Eftersom $x = 3 \Rightarrow x+2 = 3+2 = 5$ och $x+2 = 5 \Rightarrow x = 3$ så finns det en implikation åt båda hållen. Vi skriver det enkelt som $x = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 5$.

Vi kollar på några sista exempel.

Exempel 1.20. "Vi adderar två tal" $\Rightarrow$ "vi beräknar en summa". Den omvända implikationen gäller inte eftersom en summa kan bestå av att vi till exempel adderar tre tal.

Exempel 1.21. $x < 2 \Leftrightarrow 2 > x$.
Om en variabel, x, är mindre än två så är det ekvivalent med att två är större än variabeln x.

Exempel 1.22. $x = 9 \Rightarrow x > 7$.
Om en variabel x är lika med nio så medför det att variabeln är större än sju.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.2.1. Avgör om följande påståenden är antingen sanna eller falska.

(a) ”Kalle gillar att cykla” $\Rightarrow$ ”Kalle äger en cykel”.

(b) $x = 12 \Leftrightarrow x + 5 = 17$.

(c) ”Kim bor i Norge” $\Leftrightarrow$ ”Kim bor i Norden”.

1.3 Primtal och primtalsfaktorisering

Primtal och primtalsfaktorisering kommer vi ha nytta av när vi förkortar bråk. Följande definition definierar vad ett primtal är.

Definition 1.23 (**Primtal**)**.** Primtal kallas de positiva heltal som är större än 1 och endast är delbara med 1 och sig själva.

Att ett tal är delbart med ett annat heltal innebär att divisionen "går jämnt ut" och inte skapar någon rest.

Exempel 1.24. 10 är delbart med 2 eftersom $\frac{10}{2} = 5$ går jämnt ut. Detta kan skrivas som $10 = 5 \cdot 2 + 0$ där vi ser att resten är 0.

Exempel 1.25. 16 är delbart med 4 eftersom $\frac{16}{4} = 4$ går jämnt ut. Detta kan skrivas som $16 = 4 \cdot 4 + 0$ där vi ser att resten är 0.

Exempel 1.26. 10 är inte delbart med 3 eftersom $\frac{10}{3} \approx 3.33$ inte går jämnt ut. Detta kan skrivas som $10 = 3 \cdot 3 + 1$ där vi ser att resten är 1.

Exempel 1.27. 19 är inte delbart med 4 eftersom $\frac{19}{4} = 4.75$ inte går jämnt ut. Detta kan skrivas som $19 = 4 \cdot 4 + 3$ där vi ser att resten är 3.

De första primtalen är $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Det går att bevisa att det finns oändligt många primtal.

Varför är primtal viktiga byggstenar inom Matematiken? Det förklarar följande sats.

Sats 1.28 (**Aritmetikens fundamentalsats**). Varje positivt heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt.

Bevis. Bevisas ej. □

Exempel 1.29. Det positiva heltalet 30 kan faktoriseras med hjälp av primtalen $2, 3$ och 5. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Exempel 1.30. Det positiva heltalet 18 kan faktoriseras med hjälp av primtalen 2 och 3. $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Exempel 1.31. Det positiva heltalet 11 är ett primtal och är redan faktoriserat i primtal, $11 = 11$.

När vi vill dela upp ett tal i primtalsfaktorer så underlättar det att känna till delbarhetsreglerna från nedanstående sats.

Sats 1.32 (**Några delbarhetsregler**). Denna sats visar fyra stycken delbarhetsregler.

- Om talet är jämnt, innebärande att talet slutar på $0, 2, 4, 6$ eller 8, så är talet delbart med 2.
- Om talets siffersumma är delbar med 3 så är talet delbart med 3.
- Om talet som de två sista siffrorna bildar är delbart med 4 så är hela talet delbart med 4.
- Om talet slutar på 0 eller 5 så är talet delbart med 5.

Bevis. Bevisas ej. □

Nu exemplifierar vi satsen.

Exempel 1.33. Talet 14 slutar på 4 som är ett jämnt tal. Vi kan därför dividera talet med 2. $\frac{14}{2} = 7$.
Detta kan också skrivas som $14 = 2 \cdot 7$ där vi multiplicerat upp 2 från nämnaren.

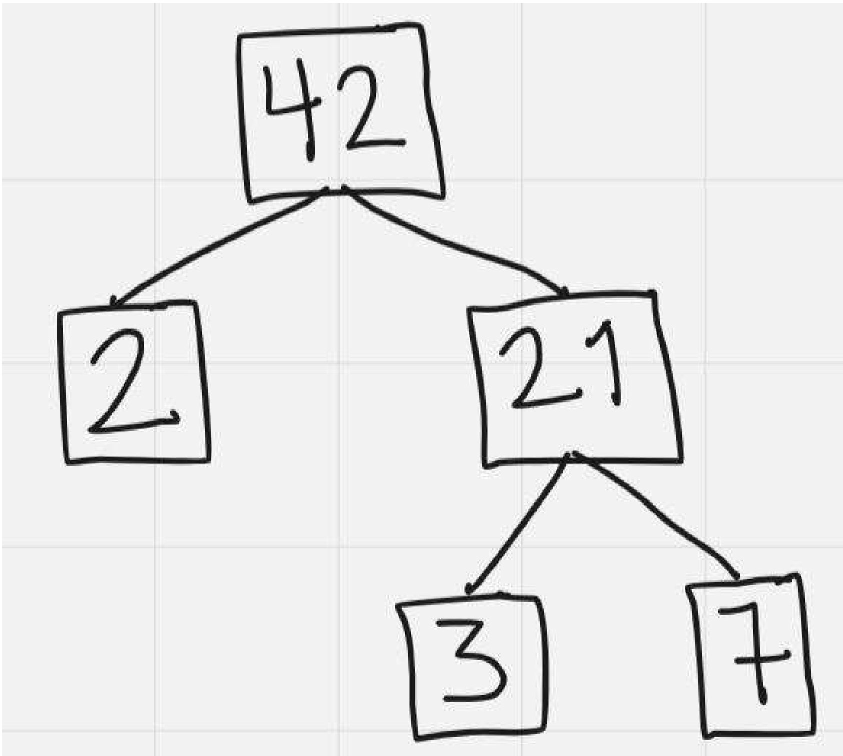
Exempel 1.34. Talet 87 har siffersumman $8 + 7 = 15$ som är delbart med 3 vilket medför att talet 87 är delbart med 3. $87 = 3 \cdot 29$.

Exempel 1.35. Talet 516 har de två sista siffrorna 16 som är delbara med 4 vilket medför att talet är delbart med 4. $516 = 4 \cdot 129$.

Exempel 1.36. Talet 1045 slutar på siffran 5 vilket medför att det är delbart med 5. $1045 = 5 \cdot 209$.

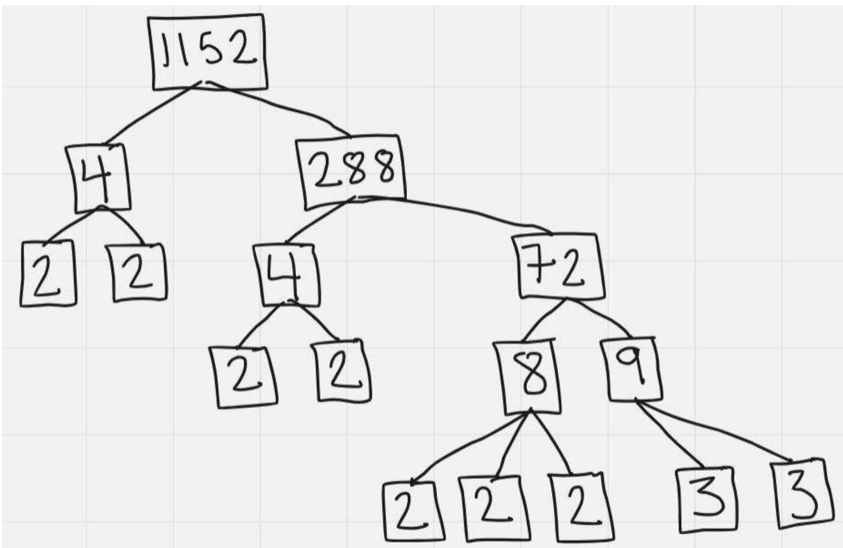
Nu ska vi primtalsfaktorisera några tal.

Exempel 1.37. Talet 42 kan primtalfaktoriseras enligt följande: $42 = 2 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Se figur 1.2 för hur ett faktorträd kan göras. Det kan underlätta primtalsfaktoriseringen.



Figur 1.2: Faktorträd för talet 42. Primtalsfaktoriseringen av talet 42 är $2 \cdot 3 \cdot 7$ som är "trädets löv". Talen $2, 3$ och 7 kan inte brytas ned i fler faktorer då de är primtal.

Exempel 1.38. Talet 1152 kan primtalfaktoriseras enligt följande: $1152 = 4 \cdot 288 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Se figur 1.3 för hur ett faktorträd kan göras. Det kan underlätta primtalsfaktoriseringen.



Figur 1.3: Faktorträd för talet 1152. Primtalsfaktoriseringen av talet 1152 är $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ som är ”trädets löv”. Talen 2 och 3 kan inte brytas ned i fler faktorer då de är primtal.

Exempel 1.39. Är talet 401 ett primtal?

Kollar vi på sats 1.32 så ser vi att talet inte är delbart med 2, 3, 4 eller 5. Provar vi med nästkommande primtal (vi använder miniräknare) så får vi:

$\frac{401}{7} \approx 57.3$

$\frac{401}{11} \approx 36.5$

$\frac{401}{13} \approx 30.8$

$\frac{401}{17} \approx 23.6$

$\frac{401}{19} \approx 21.1$

$\frac{401}{23} \approx 17.4$

Vi vet redan nu att 401 är ett primtal och vi behöver inte prova fler primtal som är större än 19 såsom $31, 37, 41, \ldots$. Anledningen är att ifall det gick att primtalsfaktorisera talet så skulle nästa primtalsfaktor behöva vara 23 eller större eftersom vi redan undersökt alla primtal mindre än det. Då $23^2 = 529$ som är större än 401 så kan talet inte ha några primtalsfaktorer och måste självt vara ett primtal. Det resonemanget ger oss också den allmänna regeln att när vi vill undersöka ifall något är ett primtal så räcker det att prova dividera med alla primtal fram till $\sqrt{\text{det tal vi vill faktorisera}}$, i vårt fall $\sqrt{401} \approx 20.02$.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.3.1. Vad menas med ett primtal?

Uppgift 1.3.2. Vad innebär det att primtalsfaktorisera ett tal?

Uppgift 1.3.3. Skriv ned alla primtal mellan 0 och 45.

Uppgift 1.3.4. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 2?

Uppgift 1.3.5. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 3?

Uppgift 1.3.6. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 4?

Uppgift 1.3.7. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 5?

Uppgift 1.3.8. Primtalsfaktorisera talet 12.

Uppgift 1.3.9. Primtalsfaktorisera talet 32.

Uppgift 1.3.10. Primtalsfaktorisera talet 99.

Uppgift 1.3.11. Primtalsfaktorisera talet 2310.

Uppgift 1.3.12. Primtalsfaktorisera talet 420.

Uppgift 1.3.13. Är talet 967 ett primtal?

1.4 Bråk

Definition 1.40. Bråk kan skrivas som $\frac{a}{b}$ där a kallas för täljare och b för nämnare med villkoret $b \neq 0$ eftersom division med 0 ej är definierat.

Det är intuitivt rimligt att division med 0 inte är definierat. Anledningen är att om vi har ett tal såsom 4, då kan vi skriva $\frac{4}{2} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot 2$ där vi i sista ledet har multiplicerat upp 2 från nämnaren.

Om vi dividerar ett tal skilt från 0, låt oss kalla det för a, med 0 då hade vi haft $\frac{a}{0} = k$ där k är en godtycklig konstant. Om vi därefter multiplicerar upp 0 från nämnaren så hade vi haft $\frac{a}{0} = k \Leftrightarrow a = k \cdot 0$ och vi vet från sats 1.9 att ett tal multiplicerat med 0 är 0. Det medför att vänsterledet a är enligt antagande skilt från 0 medan högerledet $k \cdot 0 = 0$ vilket är en motsägelse då vi har ett likhetstecken mellan vänsterledet och högerledet. Det förklarar varför bråk med nämnaren $b = 0$ inte är definierat.

Följande räkneregler gäller för bråk:

1. **Förlängning av bråk:** Täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal. Med andra ord multipliceras bråket med ett bråk som motsvarar 1, $\frac{a}{a} = 1$. Detta förändrar inte bråkets värde utan endast utseendet på bråket.

   Exempel 1.41.

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6}.$$

2. **Förkortning av bråk:** Liknande procedur som vid förlängning av bråk men här divideras täljaren och nämnaren med samma tal. När det inte längre går att förkorta ett bråk med ett naturligt tal innebär det att bråket är i *enklaste form*.

   Exempel 1.42.

   $$\frac{5}{10} = \frac{5/5}{10/5} = \frac{1}{2}.$$

3. **Addition/subtraktion av bråk:** För att addera eller subtrahera bråk med varandra måste de ha samma nämnare. Detta kan ske genom följande *två* steg.

   Steg 1: Primtalsfaktorisera täljare och nämnare för att sedan förlänga/förkorta termerna (bråken) så att de har minsta gemensamma nämnare. Det går att addera eller subtrahera bråk så länge som nämnarna är gemensamma, det behöver alltså strikt sett inte vara den *minsta* gemensamma nämnaren.

   Steg 2: Addera/subtrahera täljarna med varandra.

   Exempel 1.43. Vi gör nu steg 1 och steg 2.

   Vi börjar med steg 1.

   $$\begin{aligned}\frac{4}{3} - \frac{5}{10} &= \frac{2\cdot 2}{3} - \frac{5}{2\cdot 5} = \frac{2\cdot 2}{3} - \frac{\cancel{5}}{2\cdot \cancel{5}} = \frac{2\cdot 2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6}.\end{aligned}$$

Vi gör nu steg 2.

$$\frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}$$

4. **Multiplikation av bråk:** Täljarna multipliceras för sig och nämnarna multipliceras för sig. Här kan vi sedan primtalsfaktorisera och därefter förkorta.

   Exempel 1.44.

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{3}.$$

5. **Division av bråk:** För att skapa ett enklare uttryck multipliceras täljare och nämnare med ett bråk som får nämnaren att bli 1. I exemplet nedan sker en multiplikation med $\frac{10}{5}$ för att nämnaren ska bli 1.

   Exempel 1.45.

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{10}} \cdot \frac{\frac{10}{5}}{\frac{10}{5}} = \frac{\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 5}}{1} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}.$$

Övningsuppgifter

Uppgift 1.4.1. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}$

(b) $\dfrac{3}{8} - \dfrac{7}{8} + \dfrac{5}{8}$

(c) $\dfrac{10}{11} + \dfrac{3}{11} - \dfrac{15}{11}$

Uppgift 1.4.2. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{12}$

(b) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{10}$

(c) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{7}{5}$

Uppgift 1.4.3. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

(b) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{6}$

(c) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{8}$

Uppgift 1.4.4. André och Antonio har klippt var sin del av gräsmattan. André har klippt $\frac{2}{7}$ och Antonio har klippt $\frac{5}{8}$ av gräsmattan.

(a) Hur stor del av gräsmattan har blivit klippt?

(b) Hur stor del av gräsmattan är kvar att klippa?

Uppgift 1.4.5. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $9 \cdot \dfrac{2}{18}$

(b) $6 \cdot \dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{5}{4} \cdot 3$

Uppgift 1.4.6. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4}$

(b) $\dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{5}{4}$

(c) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4}$

Uppgift 1.4.7. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$

(b) $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{10}{3}}$

(c) $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}$

Uppgift 1.4.8. Beräkna och svara i enklaste form.

$$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}}{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}}$$

Uppgift 1.4.9. Beräkna

(a) Hälften av en tiondel.

(b) Två tredjedelar av fem timmar, uttryckt i minuter.

(c) Antal åttondelar som går på tre fjärdedelar.

1.5 Potenser

Vi börjar med att definiera vad en potens är.

Definition 1.46. Potenser kan skrivas som ett uttryck a^b där a kallas *bas* och b kallas *exponent*. $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{b gånger}}$ utläses som "a upphöjt till b".

Exponenten visar hur många gånger som basen multipliceras med sig själv. Vi kan säga att potenser har samma samband med multiplikation som multiplikation har med addition. Multiplikationen kan ses som en upprepad addition och på motsvarande sätt kan potensräkning ses som upprepad multiplikation.

Exempel 1.47.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Vid räkning med potenser så gäller följande potenslagar som är viktiga att förstå:

1. **Multiplikation av potenser med samma bas:** Om två potenser med samma bas multipliceras så kan detta skrivas på följande sätt:

   $$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6.$$

   Detta kan även skrivas på följande sätt

   $$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6.$$

   En generalisering är

   $$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

   där vi ser att båda potenserna har samma bas x.

2. **Division av potenser med samma bas:** I det här fallet kommer vi kunna skriva divisionen med potenser på följande sätt:

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 3^2.$$

   Detta kan även skrivas:

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2.$$

   En generalisering är:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \ \textit{där} \ x \neq 0.$$

3. **Potens av en potens:** Här kommer vi att använda den första regeln för multiplikation av potenser och kan skriva på följande sätt:

$$(5^3)^4 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{12}.$$

   Detta kan även skrivas:

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}.$$

   En generalisering är:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}.$$

4. **Potens av en produkt:** Vid mer komplicerade baser, där basen utgörs av en produkt, kan detta skrivas på

följande sätt:

$$\begin{aligned}(4 \cdot x)^3 &= (4 \cdot x) \cdot (4 \cdot x) \cdot (4 \cdot x) \\ &= (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (x \cdot x \cdot x) \\ &= 4^3 \cdot x^3 \\ &= 64 \cdot x^3.\end{aligned}$$

En generalisering är:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

5. **Potens av ett bråk:** Likt förra lagen, potens av en produkt, ska hela parentesen multipliceras med sig självt lika många gånger som potensen visar. Detta kan skrivas på följande sätt:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{4^3}{7^3}.$$

En generalisering är:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

6. **Potens med negativ exponent:** Potensen med en negativ exponent kan skrivas om till ett bråk där potensen skrivs med positiv exponent i nämnaren. Detta kan förstås på följande sätt:

$$\frac{5^2}{5^5} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}.$$

   Detta kan även skrivas:

$$\frac{5^2}{5^5} = 5^{2-5} = 5^{-3}.$$

   Båda uttrycken har samma vänsterled, alltså måste deras högerled också vara lika. Vi har därför:

$$\frac{5^2}{5^5} = \frac{5^2}{5^5} \Leftrightarrow 5^{-3} = \frac{1}{5^3}.$$

   En generalisering är:

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad \text{där} \quad x \neq 0.$$

7. **Potens med exponenten noll:** Att ha 0 som exponent innebär inga större problem. Nedan visas en snarlik uträkning som i förra lagen, där potensen får 0 som exponent. Detta kan förstås på följande sätt:

$$\frac{4^3}{4^3} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 1$$

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0.$$

Eftersom båda uträkningarna har samma vänsterled, $\frac{4^3}{4^3}$, så behöver högerleden också vara lika. Vi har alltså att $4^0 = 1$.

En generaliserig är:

$$x^0 = 1, \quad \text{där } x \neq 0.$$

1.5.1 Potens med bråk i exponenten

Potenser kan ha bråk på exponentplatsen och bråk med 1 i täljaren förekommer ofta, som exemeplvis $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{4}}$, o.s.v. Den vanligaste exponenten är då $\frac{1}{2} = 0.5$. Istället för att skriva $x^{\frac{1}{2}}$ skriver vi ofta $\sqrt{x}$. Detta läses som *kvadratroten av x* eller *roten ur x*. Vi definierar formellt kvadratroten i följande definition.

Definition 1.48. Kvadratroten av ett reellt tal $x \geq 0$ är ett tal ≥ 0 som upphöjt till 2 är lika med x. Det innebär att $\sqrt{x}$ är en kvadratrot till x om följande gäller:

$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x \qquad \text{där } \; x \geq 0 \; \text{ och } \; \sqrt{x} \geq 0.$$

Exempel 1.49. Vad är $\sqrt{9}$?
Att beräkna kvadratroten ur talet 9 innebär att vi söker ett icke-negativt tal x vars kvadrat är 9, $x^2 = 9$.

Vi vet att 9 kan skrivas som 3^2, eftersom $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

Därför gäller det att $\sqrt{9} = 3$.

Trots att $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ så är kvadratroten ur 9 inte -3 eftersom kvadratroten av ett tal per definition är ett icke-negativt tal, d.v.s. ≥ 0.

Exempel 1.50. Vad är $\sqrt{4}$, $\sqrt{x^2}$ och $\sqrt{4x^2}$?

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2 \cdot x.$$

Att $\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}$ är en direkt konsekvens av potensregeln för en produkt som säger att $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$. Det ser vi om vi gör följande omskrivning: $\sqrt{4x^2} = (4x^2)^{0.5} = 4^{0.5} \cdot (x^2)^{0.5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}$.

Definition 1.51. Uttrycket $\sqrt[n]{x}$ utläses som ”n:te roten ur x” och definieras enligt följande:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Eftersom $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$ så har vi visat att n:te roten ur ett givet tal är ett tal som upphöjt till n är det givna talet. Vi antar att $x \geq 0$, i vissa samanhang så definieras ”n:te roten ur x” även för negativa tal. Det kräver dock att n är udda men vi kommer inte gå in på det.

Exempel 1.52. Vad är $\sqrt[3]{8}$ och $\sqrt[4]{10000}$?

För att beräkna $\sqrt[3]{8}$ så söker vi ett tal som upphöjt till 3 är 8. Eftersom $2^3 = 8$ så har vi att $\sqrt[3]{8} = 2$.

För att beräkna $\sqrt[4]{10000}$ så söker vi ett tal som upphöjt till 4 är 10000. Eftersom $10^4 = 10000$ så har vi att $\sqrt[4]{10000} = 10$.

Exponent med täljare skilt från 1
När det kommer till potenser vars exponenter är bråk med täljare som inte är 1, exempelvis $5^{\frac{3}{2}}$, så kan det tolkas på olika sätt. Se följande exempel där vi kollar på två olika sätt att tolka det.

Exempel 1.53. Hur kan vi tolka $5^{\frac{3}{2}}$?

Vi kan använda oss av potenslagen för multiplikation av potenser för att skriva om detta.

$$5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}.$$

Vi kan även skriva om det med potenslagen ”potens av en potens”.

$$5^{\frac{3}{2}} = 5^{3\cdot\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

Övningsuppgifter

Uppgift 1.5.1. Skriv i potensform.

(a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

(b) $(2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$

(c) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

Uppgift 1.5.2. Skriv som en potens i basen 3.

(a) 27

(b) 81

(c) 729

Uppgift 1.5.3. Förenkla följande uttryck.

(a) $4^3 \cdot 4^5$

(b) $5^6 \cdot 5^5 + 3^3 \cdot 3^5$

(c) $7^7 \cdot 7^4 - 4^9 \cdot 4^6$

Uppgift 1.5.4. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{9^9}{9^5}$

(b) $\dfrac{3^4}{3^2} + \dfrac{5^7}{5^3}$

(c) $\dfrac{8^6}{8^5} - \dfrac{2^4}{2^6}$

Uppgift 1.5.5. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{7^8}{7^4} \cdot 7^2$

(b) $\dfrac{3^6}{3^8} \cdot 3^{-4}$

(c) $\dfrac{5^2}{5^6} \cdot 5^2$

Uppgift 1.5.6. Förenkla följande uttryck.

(a) $(5^3)^4$

(b) $(7^4)^4$

(c) $(14^{-2})^4 \cdot 14^2$

Uppgift 1.5.7. Förenkla följande uttryck.

(a) $(4x^2)^3$

(b) $\left(\dfrac{x^2}{3^3}\right)^4$

(c) $(11x^2)^{-3}$

Uppgift 1.5.8. Skriv som en potens.

(a) $3^4 \cdot 27$

(b) $(5^2)^7 \cdot 125$

(c) $\dfrac{2 \cdot 32 \cdot 4^2}{8}$

Uppgift 1.5.9. Beräkna kvadratroten.

(a) $\sqrt{16}$

(b) $\sqrt{36}$

(c) $\sqrt{64}$

Uppgift 1.5.10. Beräkna utan miniräknare.

(a) $\sqrt[3]{27}$

(b) $\sqrt[4]{16}$

Uppgift 1.5.11. Beräkna utan miniräknare.

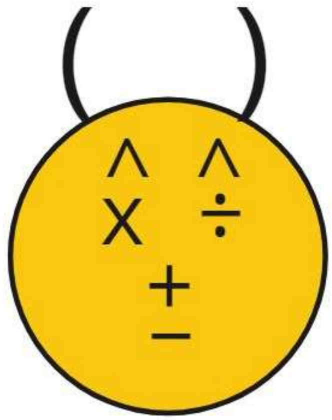
(a) $9^{\frac{3}{2}}$

(b) $8^{\frac{4}{3}}$

(c) $16^{\frac{3}{2}}$

1.6 Räkneordning

Räkneordningen beskriver i vilken ordning som olika operationer utförs vid förenkling av ett uttryck. Parenteser har alltid högsta prioritet, följt av multiplikaton och division, som i sin tur är följt av addition och subbtraktion. Denna ordning måste följas för att uträkningarna ska vara korrekta.



Figur 1.4: Mattetjuren är en minnesregel för räkneordningen. "Hornen" är parenteserna. "Ögonbrynen" är potenserna. "Ögonen" är multiplikation och division. "Näsan och munnen" är addition och subtraktion.

Exempel 1.54. Vi exemplifierar ett uttryck med multiplikation och addition.

$$4 \ \cdot \ 4 + 2 = 16 \ + \ 2 = 18.$$

Vi började med multiplikationen $4 \cdot 4$ och adderade 2 till det. Därför fick vi $16 + 2$ som är 18.

Exempel 1.55. Vi exemplifierar ett uttryck med multiplikation och parentes.

$$4 \cdot (4+2) = 4 \cdot 6 = 24.$$

Vi började med additionen i parentesen $(4+2)$ och multiplicerade det med 4. Därför fick vi $4 \cdot 6$ som är 24.

Exempel 1.56. Vi exemplifierar ett mer komplext uttryck. Som vanligt ser vi till att följa räkneordningen.

$$4 - \frac{(4+2)^2}{3} \quad = \quad 4 - \frac{6^2}{3} \quad = \quad 4 - \frac{36}{3} = \quad 4 - 12 \quad = \quad -8.$$

Vi började med additionen i parentesen $(4+2) = 6$, sedan beräknades potensen $6^2 = 36$ och därefter beräknades divisionen $\frac{36}{3} = 12$ som sedan subtraherades från 4. Därför fick vi $4 - 12$ som är -8.

Härnäst kollar vi på hur variabler i paranteser ska hanteras.

1.6.1 Variabler i parentesen

Enligt prioriteringsreglerna ska det som står i parenteser beräknas först men vid algebraiska uttryck, parenteser som innehåller variabler, går dessa oftast inte att förenkla. Exempelvis $2b + (2-3b)$ går ej att förenkla på annat sätt än att vi först tar bort parentesen. Eftersom det är ett plustecken framför parentesen kan parentesen tas bort utan att det förändrar något. Om det däremot hade varit ett minustecken framför parentesen, exempelvis $2b-(2-3b)$, ändras tecknen i parentesen när parantesen tas bort.

Exempel 1.57. Plustecken före parentes.

$$2b + (2 - 3b) = 2b + 2 - 3b = 2 - b$$

Exempel 1.58. Minustecken före parentes.

$$2b - (2 - 3b) = 2b - 2 - (-3b) = 2b - 2 + 3b = 5b - 2$$

Exempel 1.59. Flera termer i parentesen.

$$\begin{aligned} 5 - (3 + 2a - 2b - c) &= 5 - 3 - 2a - (-2b) - (-c) \\ &= 5 - 3 - 2a + 2b + c \\ &= 2 - 2a + 2b + c \end{aligned}$$

Härnäst kollar vi på hur multiplikation med paranteser ska hanteras.

1.6.2 Tal multiplicerat med parantes

Om ett tal är multiplicerat med en parentes, exempelvis tvåan i $2(3+x)$, så ska talet som står utanför parentesen multipliceras med alla termer som står innanför parentesen. Vi kan säga att alla termer måste få ta del av multiplikationen. I exemplet ovan ska 2:an multipliceras både med 3 och x.
Detta blir $2(3 + x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot x = 6 + 2x$.

Exempel 1.60.

$$5(3 + 7) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 15 + 35 = 50.$$

I detta fall finns det inga problem med att addera ihop termerna i parentesen först och sen utföra multiplikationen vilket ger samma svar.

$$5(3 + 7) = 5(10) = 5 \cdot 10 = 50.$$

Övningsuppgifter

Uppgift 1.6.1. Beräkna.

(a) $6 + 4 \cdot 3$

(b) $9 \cdot 4 - 12 \cdot 3$

(c) $7 \cdot (3 + 12) - \dfrac{12}{6}$

(d) $5 \cdot 7 - (24 - 17 - 8)$

Uppgift 1.6.2. Beräkna.

(a) $32 \cdot \dfrac{5}{2^3}$

(b) $\dfrac{9^3}{14 - 5}$

Uppgift 1.6.3. Beräkna.

(a) $(5 \cdot 4 - 3 \cdot 6) \cdot 8$

(b) $(5^2 - 3 \cdot 6 + 1) \cdot 8$

(c) $2^5 - 4 \cdot (11 \cdot 3 - 6 \cdot 5)^2$

Uppgift 1.6.4. Vilket tal ska stå på den tomma platsen för att likheten ska stämma?

(a) $(9 - [\ ?\ ]) \cdot (5 \cdot 2) = 50$

(b) $[\ ?\ ]^2 - (3 \cdot 4 + 13) = 0$

(c) $14 + 3 \cdot 5 - (4 \cdot [\ ?\ ] - 5) = 26$

Uppgift 1.6.5. Sätt ut parentes så att likheten stämmer.

(a) $4 \cdot 6 - 5 = 4$

(b) $4 + 5 - 6 \cdot 7 = -3$

(c) $\dfrac{36}{4} \cdot 7 - 3 + 2 \cdot 8 = 23$

1.7 Faktorisering

Faktorisering innebär att vi skriver ett uttryck som en produkt där faktorerna kan innehålla flera termer som är adderade eller subtraherade med varandra. Genom faktorisering försöker vi göra ett uttryck lättare att läsa eller se samband genom.

Exempel 1.61.

$$4x + 4x^2 - 4x^3 = 4x(1 + x - x^2)$$

I exemplet så ser vi att varje term har faktorn $4x$ som vi därför bröt ut.

Vid faktorisering använder vi oss av den distributiva lagen: $ab + ac = a(b + c)$.
Här ser vi två termer, ab och ac som har den gemensamma faktorn a som kan brytas ut.

Exempel 1.62.

$$3x + 12 \quad = \quad 3 \cdot x \; - \; 3 \cdot 4 \quad = \quad 3(x + 4).$$

I uträkningen ovan kan vi se att båda termerna i första ledet innehåller faktorn 3 eftersom $3x = 3 \cdot x$ och $12 = 3 \cdot 4$. Därför kan trean brytas ut och vi multiplicerar den med en parantes som innehåller $x + 4$.

Exempel 1.63.

$$3x^2 - 6x \quad = \quad 3x \cdot x \; - \; 3x \cdot 3 \quad = \quad 3x(x - 3).$$

I uträkningen ovan kan vi se att $3x$ är den största gemensamma faktorn och vi bryter därför ut denna från uttrycket.

Exempel 1.64.

$16x^4 - 4x^3 + 4x^2 = (4x^2)(4x^2) - (4x^2)x + (4x^2)1 = (4x^2)(4x^2 + x + 1)$

I uträkningen ovan kan vi se att $4x^2$ är den största gemensamma faktorn och vi bryter därför ut denna från uttrycket.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.7.1. Vad menas med att faktorisera ett uttryck?

Uppgift 1.7.2. Vad ska stå på de tomma platserna?

(a) $3x + 12 = [\ ?\ ](x + 4)$

(b) $6x^2 - 4x = [\ ?\ ](3x - 2)$

(c) $8x - 20 = 4([\ ?\ ] - [\ ?\ ])$

Uppgift 1.7.3. Bryt ut faktorn 8x ur uttrycken.

(a) $8x + 24x^2$

(b) $16x^2 - 32xy$

(c) $40x - 8x^3$

Uppgift 1.7.4. Bryt ut den största möjliga faktorn.

(a) $15m^3 - 25m^5$

(b) $17ac + 15ac^2$

(c) $24a^3b + 18a^2b^2$

(d) $6x^2 + 14x - 30xy$

Uppgift 1.7.5. Förenkla uttrycken genom att först bryta ut faktorn $2a$.

(a) $\dfrac{16a^3 + 8a^2}{6a}$

(b) $\dfrac{20ab - 2ab^2}{10a^2}$

Uppgift 1.7.6. Arean av en rektangel beskrivs av uttrycket $8a + 4a^2 \ cm^2$.
Ange uttryck för den okända sidan om den ena sidan är:

(a) $4 \ cm$

(b) $2 + a \ cm$

1.8 Ekvationer

Definition 1.65. Ekvationer består av två led, vänsterled (VL) och högerled (HL), som står på vardera sida om ett likhetstecken, "=". I en ekvation finns det dessutom alltid ett okänt värde (variabel) som enligt konvention vanligtvis betecknas med x.

Vi noterar att det är möjligt att ha ekvationer med fler okända värden (variabler). Har vi exempelvis två variabler så hade dessa kunnat betecknas med x och y. I detta kapitel kommer vi dock endast kolla på ekvationer med en okänd variabel.

Att hitta lösningar till en ekvation är samma sak som att hitta vilket tal som kan stå istället för variabeln för att ekvationen ska vara sann, det vill säga att VL = HL. Beroende på vilken typ av ekvation det är kan det finnas 1, 2 eller upp till oändligt många lösningar. I detta avsnitt ska vi endast titta på ekvationer som har en lösning. För att hitta lösningen till ekvationen vill vi lösa ut x så att det står ensamt. För att uppnå det kan vi behöva flytta runt på termerna mellan uttrycken genom att göra olika operationer. En operation måste göras i både "vänster led" och "höger led" för att likhet fortfarande ska gälla.

Exempel 1.66.

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 5 \\ 2x+3-3 &= 5-3 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{2}{2} \\ x &= 1. \end{aligned}$$

I andra raden har vi subtraherat med tre i båda led, i tredje raden har vi dividerat med två i båda led vilket gör att vi slutligen i den fjärde raden får lösningen $x = 1$. Vi kan verifiera att detta är en korrekt lösning genom att substitutera $x = 1$ i ursprungsekvationen. Då får vi för VL $2 \cdot 1 + 3 = 5$. Eftersom även HL är 5 så har vi verifierat att VL = HL och därmed är lösningen korrekt.

Exempel 1.67.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} - 3 &= 2(x-2) \\
\frac{x}{5} - 3 + 3 &= 2x - 4 + 3 \\
5\left(\frac{x}{5}\right) &= 5(2x-1) \\
x - 10x &= (10x - 5) - 10x \\
-9x &= -5 \\
x &= \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

I andra raden har vi adderat tre på båda led, i tredje raden har vi multiplicereat med fem i båda led för att eliminera nämnaren i VL, i fjärde raden har vi subtraherat $10x$ från båda led för att ha x på en sida, i femte raden har vi dividetat med -9 för att få x ensamt. Vår slutgiltiga lösning blir $x = \frac{5}{9}$. Stoppar vi in det värdet i ursprungsekvationen så kan vi verifiera att lösningen är korrekt efterom vänsterledet blir lika med högerledet.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.8.1. Är x=4 en lösning?

(a) $7x + 5 = 81$

(b) $\frac{x}{2} - 8 = -6$

(c) $32 - 6x = 12$

(d) $\frac{11x}{2} = 27$

Uppgift 1.8.2. Lös ekvationen.

(a) $6x - 7 = 3x + 26$

(b) $6a + 3 + 5a = 14a - 18$

(c) $4y + 5 = -6y + 43$

Uppgift 1.8.3. Lös ekvationen.

(a) $2 - (12y + 15) = y + (31 - 5y)$

(b) $7(2x - 4) = 2 - (30 - x)$

Uppgift 1.8.4. Lös ekvationen.

(a) $\frac{3(2a + 6)}{3} = 24$

(b) $35z + 4(7z - 42) = (2z - 3) - (z + 41)$

Uppgift 1.8.5. Lös ekvationen.

(a) $\frac{20}{x} = 50$

(b) $6 = \dfrac{9}{2x}$

Uppgift 1.8.6. Lös ekvationen.

(a) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{9}{10x}$

(b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{4}{z} + \dfrac{3}{2z} = \dfrac{1}{3}$

1.9 Olikheter

En olikhet skrivs på liknande sätt som en ekvation med skillnaden att vi använder olikhetstecken istället för likhetstecken. Olikheter används för att beskriva förhållandet mellan två uttryck eller tal där det ena antingen är ”större”/”mindre” eller ”större än eller lika med”/”mindre än eller lika med”. Detta visas med följande symboler, $>$, $<$, $\geq$ och $\leq$ där öppningen riktas mot det större uttrycket/talet. Exempelvis ”10 är mindre än 100” skrivs $10 < 100$ och ”10x är större än eller lika med 100” skrivs $10x \geq 100$.

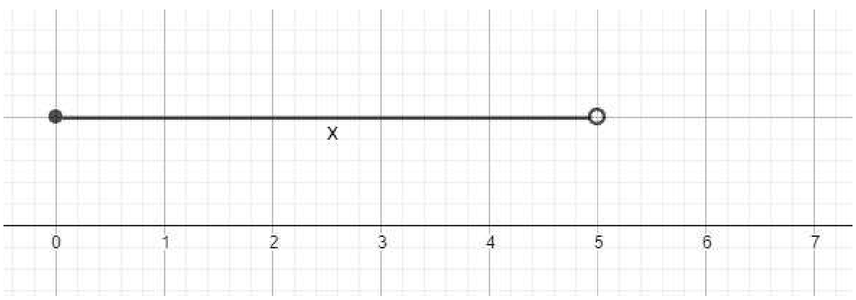
Vi löser en olikhet på samma sätt som en ekvation med ett undantag som vi kommer gå igenom snart. Lösningen till olikheter är detsamma som att hitta vilka värden på den okända variabeln, ofta kallad x, som uppfyller olikheten. För att hitta lösningen till en olikhet kan operationer utföras för att få den okända variabeln ensam på motsvarande sätt som för ekvationer. Lösningen är oftast inom ett intervall.

Exempel 1.68. Att åka med ett taxibolag kostar 40kr i startavgift och 12 kr/km. Hur många km kan vi åka taxi för att det ska kosta mindre än 100 kr?

Kostnaden kan betecknas med $40+12x$ där vi vill att den totalt ska vara mindre än 100, matematiskt kan detta uttryckas med följande olikhet $40 + 12x < 100$. Vi löser nu olikheten.

$$\begin{aligned}
40 + 12x &< 100 \\
40 + 12x - 40 &< 100 - 40 \\
\frac{12x}{12} &< \frac{60}{12} \\
x &< 5.
\end{aligned}$$

Då vi inte kan åka taxi en negativ sträcka så kan den verkliga situationen beskrivas som $0 \leq x < 5$ vilket innebär att vi kan åka taxi mellan noll och fem kilometer för att det ska kosta mindre än 100 kr. Se figur 1.5 för hur olikheten $0 \leq x < 5$ kan visualiseras.



Figur 1.5: En visualisering av olikheten $0 \leq x < 5$. En ifylld punkt visar att värdet är inkluderat medan en ej-ifylld punkt visar att värdet inte är inkluderat.

1.9.1 Vända på olikhetstecknet

Som nämnts innan så löser vi olikheter på samma sätt som ekvationer förutom att det finns en viktig skillnad: Om vi multiplicerar eller dividerar med ett negativt tal så måste vi vända på olikhetstecknet. Ett enkelt exemepel är att vi vet att $2 < 3$. Om vi multiplicerar eller dividerar båda leden med -1 så får vi $-2 < -3$, vilket är falskt. -2 är större än -3 medan olikheten säger att det är mindre. Därför behöver vi vända på olikheten för att få $-2 > -3$ vilket är sant eftersom -2 är närmre noll än -3 på en tallinje och är därför även större.

Exempel 1.69. I detta exempel ska vi lösa olikheten $2 - x < 5$.

$$\begin{aligned}2 - x &< 5\\ 2 - x - 2 &< 5 - 2\\ (-x)(-1) &> 3(-1)\\ x &> -3\end{aligned}$$

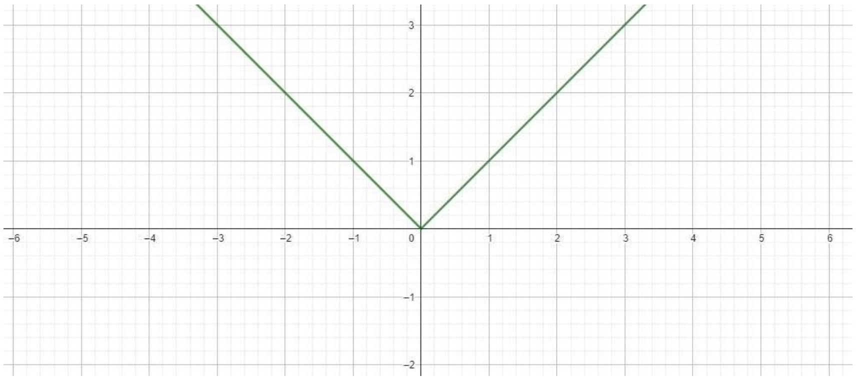
I andra raden har vi subtraherat med två i båda led, i tredje raden har vi multiplicerat med (-1) i båda led för att få ett positivt x, eftersom vi multiplicerat med något negativt så har vi även vänt på olikhetstecknet. I den fjärde och sista raden har vi slutligen lösningen $x > -3$.

1.9.2 Absolutbelopp

Definition 1.70. Absolutbeloppet skrivs $|x|$ och ger alltid ett positivt värde oavsett om talet x är positivt eller negativt.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

I figur 1.6 ser vi hur grafen för absolutbeloppet ser ut.



Figur 1.6: Grafen för absolutbeloppet. Vi ser att värdet alltid är ≥ 0.

I nedanstående två exempel beräknar vi absolutbeloppet för 11 och -11, som vi kommer se så är absolutbeloppet av ett tal och dess negativa motsvarighet detsamma.

Exempel 1.71. $|11| = 11$ eftersom $11 \geq 0$.

Exempel 1.72. $|-11| = -(-11) = 11$ eftersom $-11 < 0$.

Exempel 1.73. Nu kommer vi lösa olikheten $|x| < 5$. Vi gör det i två steg för att hantera de två uttömmande fallen då $x \geq 0$ och $x < 0$.

Steg 1: Om $x \geq 0$ så har vi $|x| < 5 \Rightarrow x < 5$.
Steg 2: Om $x < 0$ så har vi $|x| < 5 \Rightarrow -x < 5 \Rightarrow x > -5$.

I steg 1 så antog vi att $x \geq 0$, per definition så är då $|x| = x$ vilket medför att vi har $x < 5$.

I steg 2 antog vi att $x < 0$, per definition så medför det att $|x| = -x$, därför fick vi $-x < 5$, därefter så multiplicerade vi med -1 för att få ett positivt x och eftersom vi multiplicerade med något negativt så behöver vi även vända på olikhetstecknet vilket gjorde att vi slutligen fick $x > -5$.

Kombinerar vi de två stegen så har vi lösningen: $-5 < x < 5$.

Övningsuppgifter

Uppgift 1.9.1. Lös olikheten.

(a) $3 + x \geq -2$

(b) $4x - 2 < 4$

(c) $5 \geq 3x - 1$

(d) $4 < 2 - 5x$

Uppgift 1.9.2. Lös olikheten.

(a) $3(x + 2) \leq 6(x - 1)$

(b) $2(x - 3) - 4(7 + 2x) > 2(x - 1)$

(c) $\dfrac{5y}{-2} < 2y + 3$

Uppgift 1.9.3. En rektangel har en area som är mindre än 156 cm^2. Sidorna är 12 cm och $(x - 2)$ cm.

(a) Teckna ett uttryck för olikheten.

(b) Lös olikheten.

Uppgift 1.9.4. Lös olikheten.

(a) $0.2x \leq 1 + \dfrac{5x + 1}{100}$

(b) $-\dfrac{2x - 1}{3} < \dfrac{x - 2}{5} - 1$

Uppgift 1.9.5. Lös olikheten.

(a) $|x| \leq 10$

(b) $|x + 3| \leq 15$

(c) $|x^2| < 25$

2. Statistik

I detta kapitel om statistik kommer vi gå igenom procent, lägesmått, spridningsmått samt olika typer av diagram som används för att visualisera data.

2.1 Procent

Procentbegreppet är ett viktigt begrepp som ofta används.

Vi börjar med ett exempel för att demonstrera begreppet *andel* innan vi definierar vad procent är.

Exempel 2.1. Johanna skrev ett prov som hade 100 frågor. Hon fick 83 rätt. Andelen rätt hon fick är $\frac{83}{100}$ och utläses *"83 hundradelar"*. Andelen visar hur stor *del* något är av *det hela*. I exemplet är delen 83 och det hela är 100.

Definition 2.2 (Andel). Andelar beräknas genom att ta kvoten av "delen" och "det hela":

$$\text{Andel} = \frac{\text{Delen}}{\text{Det hela}}.$$

Andelar anges ofta i *procent* som betyder "hundradel". I exempel 2.1 hade Johanna 83% rätt på provet.

Definition 2.3 (Procent). Procent betyder hundradel och en procent (en hundradel) skrivs som 1%. Procenttecknet är "%".

Delen kan vara större än det hela.

Exempel 2.4. En heltidstjänst motsvarar 40 arbetstimmar i veckan. Jonas arbetade 52 timmar en specifik vecka. Andelen som Jonas arbetade den specifika veckan är:

$$\begin{aligned} \text{andelen} &= \frac{\text{delen}}{\text{det hela}} \\ &= \frac{52}{40} \\ &= 1.3 = 130\%. \end{aligned}$$

Jonas arbetade alltså 130% av en heltidstjänst den veckan.

Procent kan även uttryckas i bråk- och decimalform. Se följande exempel.

Exempel 2.5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 0.25 = 25\% \\ \frac{1}{2} &= 0.5 = 50\% \\ \frac{1}{1} &= 1 = 100\%. \end{aligned}$$

100% motsvarar det hela. 50% motsvarar hälften och 25% en fjärdedel av det hela.

Om vi vill omvandla ett bråk som inte har hundra i nämnaren till procentform, är det lättast att först göra om det till decimalform.

Exempel 2.6.

$$\frac{12}{15} = 0.8 = 80\%.$$

Vi kollar nu på ett exempel för att exemplifiera skillnaden mellan procent och *procentenheter*.

Exempel 2.7. Om ett politiskt parti en given valomgång fick 20% av rösterna och nästa valomgång fick 23% av rösterna, då har partiet fått $\frac{23-20}{20} = \frac{3}{20} = 15\%$ fler röster den senaste valomgången.

I exemplet ovan är det ett vanligt misstag att det uttrycks som att partiet har fått 3% fler röster. Detta är felaktigt, vad som egentligen menas är att partiet har fått 3 *procentenheter* fler röster.

Definition 2.8 (Procentenhet). Procentenheter används för att uttrycka skillnaden mellan två procenttal.

Exempel 2.9. Arbetslösheten i ett land var föregående år 6%. Detta året är arbetslösheten 4%. Då har arbetslösheten minskat med två procentenheter.

Vi avslutar avsnittet med att kolla på begreppet *förändringsfaktor*.

Exempel 2.10. En jacka kostar 600 kr och priset ska höjas med 5%. Vad blir det nya priset?

Uppgiften kan lösas genom att använda det vi lärt oss om procent. Vi visar hur beräkningarna hade sett ut i ”Metod 1” nedan.

Metod 1:
Prisökningen är $0.05 \cdot 600 = 30$ kr. Det nya priset blir därför $600 + 30 = 630$ kr.

Uppgiften kan även lösas med hjälp av förändringsfaktorer. Vi demonstrerar detta i "Metod 2".

Metod 2:
Vi vet att det gamla priset motsvarar 100% och en ökning på 5% kommer ske. Det innebär att det nya priset är 100%+5% = 105% av det gamla priset. Vi kan uttrycka 105% i decimalform som 1.05 och det nya priset blir $1.05 \cdot 600 = 630$ kr.

Vi ser att båda metoderna geer samma svar.

Definition 2.11 (Förändringsfaktor).

$$\text{Förändringsfaktor} = \frac{\text{Nya värdet}}{\text{Gamla värdet}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Nya värdet} = \text{Förändringsfaktor} \cdot \text{Gamla värdet}.$$

I exempel 2.10 ser vi att förändringsfaktorn är $\frac{630}{600} = 1.05$.

Exempel 2.12. Priset på en dator är 17000 kr och priset kommer sänkas med 15%. Vad blir det nya priset?

Förändringsfaktorn är $1 - 0.15 = 0.85$. Det nya priset blir därför $17000 \cdot 0.85 = 14450$ kr.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.1.1. Vad betyder procent?

Uppgift 2.1.2. Skriv i procentform.

(a) 0.43

(b) 0.8

(c) 1.15

Uppgift 2.1.3. Skriv i decimalform och procentform. Avrunda till två decimaler och hela procent.

(a) $\frac{1}{7}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{13}{11}$

Uppgift 2.1.4. Ordna de tre talen i storleksordning, från minst till störst.

(a) 0.38 $\quad \frac{6}{16} \quad$ 4%

(b) 0.3 $\quad \frac{1}{3} \quad$ 33%

Uppgift 2.1.5. För att bli godkänd på ett matteprov så krävs 60% rätt. Melissa fick 47 av 78 poäng. Klarade Melissa provet?

Uppgift 2.1.6. Emelie erbjöds köpa en ny båt för 285 000 kr. Försäljaren påstår att det är 85% av ordinarie pris.

(a) Vilket är båtens ordinarie pris enligt försäljaren? Avrunda till närmsta heltal.

(b) Emelie prutar och får båten för 260 000 kr. Hur många procent prutade hon? Avrunda till hela procent.

Uppgift 2.1.7. Enligt en undersökning är 13% av alla svenska elever på mellanstadiet inte simkunniga. I en mellanstadieskola gick 435 elever.

(a) Hur många av dem kan vi förvänta oss vara icke-simkunniga?

(b) Efter att alla klasser fått simma på idrottslektionen kunde vi observera att 87 elever inte var simkunniga. Hur många procent av skolans elever var inte simkunniga?

Uppgift 2.1.8. Ett träds höjd ökade med 8 dm på ett år, vilket motsvarar att trädets höjd ökade med 20%. Hur högt var trädet i slutet av året?

Uppgift 2.1.9. Vilken förändringsfaktor svarar mot

(a) en ökning med 13%?

(b) en minskning med 7%?

(c) en ökning med 1.5%?

Uppgift 2.1.10. En solsemester kostade 15 600 kr. Ett år senare kostar den 17 628 kr. Med hur många procent har priset ökat?

Uppgift 2.1.11. Ett givet år svarade 40% av alla anställda på ett företag att de cyklar till jobbet. Året därpå svarade 60% av alla anställda att de cyklar till jobbet.

Hur många fler cyklade till jobbet året därpå uttryckt i procentenheter och procent?

2.2 Lägesmått

För att beskriva, jämföra och analysera statistiskt material används ofta olika lägesmått. *Medelvärde*, *median* och *typvärde* är tre vanligt förekommande lägesmått.

Medelvärde används för att representera ett genomsnitt för en mängd värden. Om spridningen är stor kan medelvärdet vara missvisande. Härnäst definierar vi medelvärdet och exemplifierar dess uträkning.

Definition 2.13 (Medelvärde). Medelvärdet beräknas genom att ta summan av alla observerade värden dividerat med antalet observerade värden.

$$\text{medelvärde} = \frac{\text{summan av observationerna}}{\text{antalet observationer}}.$$

Exempel 2.14. Antag att månadslönerna i kr för nio slumpmässigt utvalda personer i Sverige är enligt tabell 2.1:
För att beräkna medellönen så ser vi att summan av observationerna är $39\ 000 + 31\ 700 + 39\ 300 + 27\ 100 + 31\ 700 + 457\ 000 + 53\ 200 + 33\ 400 + 62\ 302 = 774\ 702$ och antalet observationer är nio. Därför blir medellönen 86 078 kr enligt uträkningen nedan:

$$\text{medellön} = \frac{\text{summan av observationerna}}{\text{antalet observationer}} = \frac{774\ 702}{9} = 86\ 078.$$

Exemplet visar på hur missvisande medelvärdet kan vara då en medellön på 86 078 kr inte är representativt för personerna. Att medelvärdet inte var representativt i detta fall beror på att en person hade en månadslön på 457 000 kr och på så sätt drog

Person 1	39 000 kr
Person 2	31 700 kr
Person 3	39 300 kr
Person 4	27 100 kr
Person 5	31 700 kr
Person 6	457 000 kr
Person 7	53 200 kr
Person 8	33 400 kr
Person 9	62 302 kr

Tabell 2.1: Månadslön för nio slumpmässigt utvalda personer i Sverige.

upp medelvärdet. Om vi inte vill att stora värden ska påverka mer än de andra värdena så kan vi använda oss av medianen.

Medianen är ofta ett bättre lägesmått än medelvärdet när spridningen av observationerna är stor. Medianen påverkas inte av enstaka värden som är mycket stora eller mycket små. Härnäst definierar vi medianen och exemplifierar dess uträkning.

Definition 2.15 (**Medianen**). Om alla observationer är i storleksordning så är medianen det värdet som står i mitten av ordningen. Om det skulle vara ett jämnt antal värden tar vi medelvärdet av de två värdena i mitten för att få medianen.

Exempel 2.16. Vi sorterar alla löner från lägst till störst i exempel 2.14:

$$\begin{array}{c} 27\,100 \\ 31\,700 \\ 31\,700 \\ 33\,400 \\ \mathbf{39\,000} \\ 39\,300 \\ 53\,200 \\ 62\,302 \\ 457\,000 \end{array}$$

Tar vi det mittersta värdet ser vi att medianlönen är 39 000 kr.

Exempel 2.17. Antag att vi har värdena $15, 10, 14, 1$. Vi börjar med att sortera värdena i stigande ordning, eftersom vi har fyra stycken värden som är ett jämnt antal värden så beräknar vi medelvärdet av de två mittersta värdena för att få medianen. Vi får alltså:

$$1, \mathbf{10}, \mathbf{14}, 15$$

Medelvärdet av 10 och 14 är $\frac{(10+14)}{2} = 12$. Alltså är medianen 12.

Typvärdet är det värde som förekommer flest antal gånger i en mängd observationer. Härnäst definierar vi typvärdet och exemplifierar dess uträkning.

Definition 2.18 (Typvärde). Typvärdet är det observationsvärde som förekommer flest antal gånger. En mängd observationer kan ha mer än ett typvärde eftersom det kan finnas flera olika värden som alla är lika ofta (och mest) förekommande.

Exempel 2.19. I vårt tidigare exempel, exempel 2.14, är typvärdet 31 700 kr eftersom observationsvärdet 31 700 förekom två gånger medan alla andra observationsvärden endast förekom en gång.

Exempel 2.20. Antag att vi har värdena $10, 5, 3, 5, 3, 12$. Då ser vi att såväl 5 som 3 förekommer två gånger. I detta fallet är typvärdena 5 och 3.

Vi avslutar detta avsnittet om lägesmått genom att kolla på ett exempel där vi beräknar medelvärde, median och typvärde.

Exempel 2.21. Vid en släktmiddag närvarade 13 personer. Åldern på de närvarande är 1, 4, 3, 15, 72, 30, 27, 72, 42, 45, 23, 53, 58.

Beräkna personernas:

(a) Medelålder

(b) Median

(c) Typvärde

Lösning:

(a)

$$\text{medelvärde} = \frac{\text{summan av observationer}}{\text{antalet observationer}} = \frac{445}{13} \approx 34.2.$$

Medelåldern på släktmiddagen är ungefär 34.2 år.

(b) Vi börjar med att rada upp åldrarna från yngst till äldst och därefter ser vi vilken ålder som är i mitten av ordningen.

$$1, 3, 4, 15, 23, 27, \mathbf{30}, 42, 45, 53, 58, 72, 72$$

Av 13 stycken personer så tittar vi på den sjunde personen i ordningen då denne har lika många personer som är yngre och som är äldre.

Detta ger oss att medianåldern är 30 år.

(c) Typvärdet beräknar vi genom att titta på antalet personer som har samma ålder. I detta fall kan vi se att det är två personer som är 72 år och resterande personer har olika åldrar.

Detta ger oss att typvärdet för åldern på släktmiddagen är 72 år.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.2.1.

(a) Beräkna medelvärdet och median av följande fem tal: 8, 4, 13, 10, 7.

(b) Hur ändras medelvärdet och median om vi byter ut talet 10 mot talet 16.

Uppgift 2.2.2. En grupp på 40 elever tillfrågades hur många böcker de hade läst under sommarlovet. Resultatet sammanställdes i en frekvenstabell.

Antal böcker	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frekvens	1	12	8	9	5	1	2	1	1

(a) Beräkna medelvärdet.

(b) Vilket är typvärdet?

Uppgift 2.2.3. Medelåldern i en familj är 18 år. Vilken är medelåldern i familjen om 4 år?

Uppgift 2.2.4. Du kastar en tärning några gånger och får följande resultat:
2, 5, 4, 4, 5, 4

Vilket är störst: medelvärdet, medianen eller typvärdet?

Uppgift 2.2.5. Tre klasser tävlar i luftgevärsskytte med fem representanter från varje klass. Resultaten blev:

Klass A	62	94	95	98	98
Klass B	62	63	98	98	99
Klass C	58	62	95	99	99

Ta reda på vilken klass som lyckats bäst baserat på om vi tittar på medelvärdet, medianen eller typvärdet.

2.3 Spridningsmått

Ibland räcker det inte, eller kan vara missvisande, att endast använda lägesmått när vi vill analysera statistiskt material eller jämföra olika material med varandra då spridningen på datan/observationerna kan vara stor. I detta avsnitt ska vi kolla på spridningsmått där vi kommer lära oss om variationsbredd, kvartiler, lådagram samt percentiler. Vi inleder med ett exempel.

Exempel 2.22. Två grupper skrev ett prov i Matematik där en person maximalt kunde få 24 poäng. Läraren var intresserad av att analysera de två grupperna mellan varandra och beräknade respektive grupps medelvärde och median.

$$\text{Grupp 1: } 11, 11, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 19, 20, 20, 20$$
$$\text{Medelvärde} = 15.6$$
$$\text{Median} = 15$$

$$\text{Grupp 2: } 4, 8, 11, 13, 15, 15, 15, 18, 19, 20, 20, 21, 24$$
$$\text{Medelvärde} = 15.6$$
$$\text{Median} = 15$$

Vi ser här att båda grupperna har samma medelvärde och median även om resultaten i de olika grupperna är olika. För att få en ännu bättre analys av gruppernas resultat kan läraren använda sig av olika spridningsmått.

Vi börjar med att definiera *variationsbredden*.

Definition 2.23 (Variationsbredd). Variationsbredden beräknas genom att ta skillnaden (differensen) mellan det största och det minsta värdet.

Exempel 2.24. I exempel 2.22 så är variationsbredden i respektive grupp:

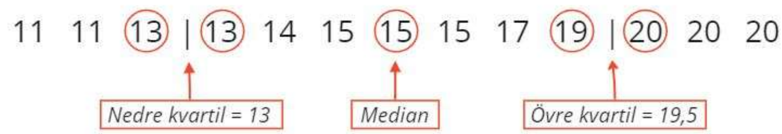
$$\text{Grupp 1: } 20 - 11 = 9.$$
$$\text{Grupp 2: } 24 - 4 = 20.$$

Variationsbredden visar oss att grupp 1 har en mindre skillnad mellan det största och lägsta resultatet och är därför mer samlat runt medianen om vi endast betraktar de största och minsta värdena.

Variationsbredden är enkelt att beräkna men måttet har den potentiella nackdelen att det endast tar hänsyn till det största och det minsta värdet. Ett potentiellt mer informationsgivande sätt att beskriva och förstå spridningen runt medianen kan fås genom att beräkna kvartilavståndet.

För att kunna beräkna *kvartilavståndet* behöver vi först beräkna *kvartilerna*. Kvartil betyder fjärdedel och fås genom att vi delar in våra storleksordnade observationsvärden i fyra lika stora grupper. Vi använder oss av medianen som delar in observationsvärdena i två lika stora delar. Därefter så beräknar vi återigen medianen för den vänstra delen som kallas för ”den nedre kvartilen” och medianen för den högra delen som kallas för ”den övre kvartilen”. Se figur 2.1.

Definition 2.25 (**Kvartilavstånd**)**.** Skillnaden mellan den övre och undre kvartilen kallas för kvartilavståndet och täcker 50% av observationerna som är spridda kring medianen. Kvartilavståndet är ett sätt att mäta hur stor spridningen är kring medianen.



Figur 2.1: Kvartiler för grupp 1 i exempel 2.22.

Exempel 2.26. I detta exemplet kommer vi beräkna kvartilavståndet för grupp 1 som skrev prov i Matematik från exempel 2.22, för att göra detta behöver vi först kvartilerna. Se figur 2.1 för att få ett visuellt stöd för hur kvartilerna beräknas.

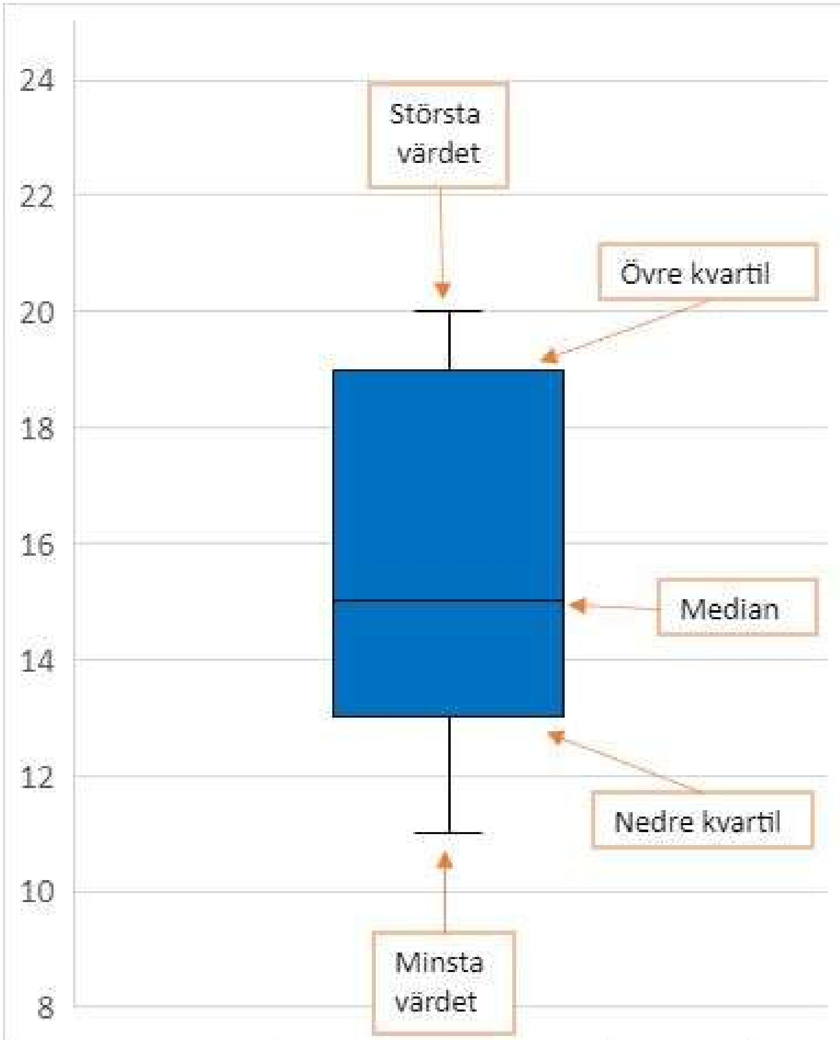
Övre kvartil: $\dfrac{19+20}{2} = 19.5.$

Nedre kvartil: $\dfrac{13+13}{2} = 13.$

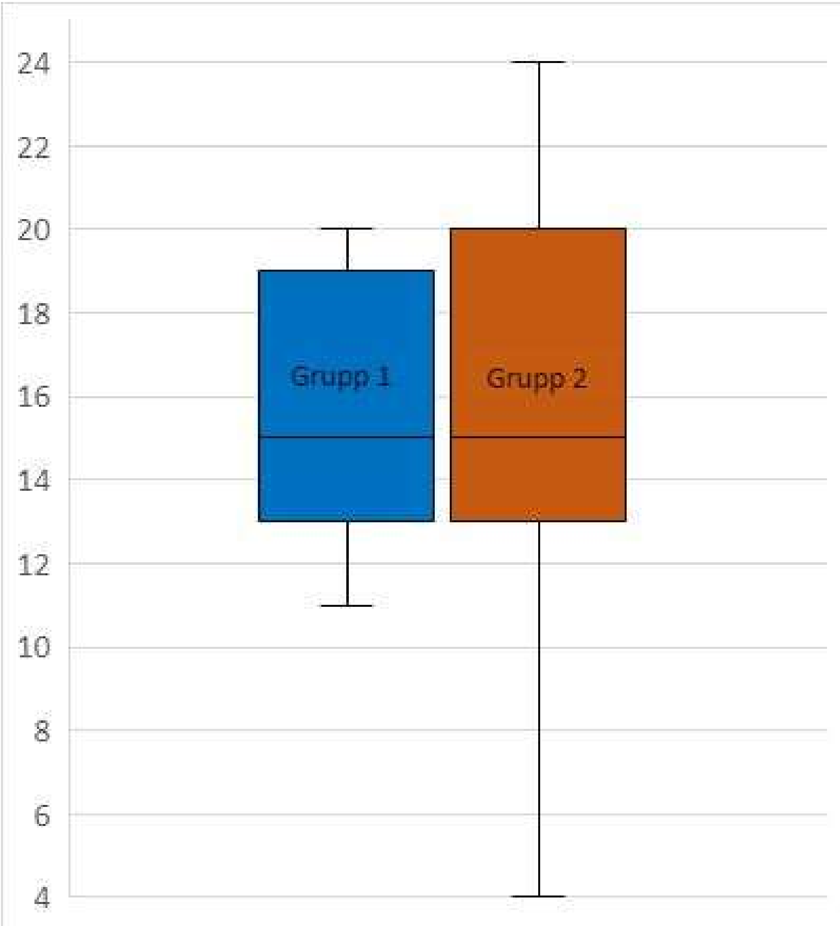
Kvartilavstånd = Övre kvartil − Nedre kvartil = $19.5 - 13 = 6.5.$

Lådagram: För att visa spridningen kring medianen kan vi bland annat med hjälp av kvartilerna också rita ett lådagram. Se figur 2.2 på hur ett lådagram kan se ut.

Vill vi jämföra två serier av observationsvärden kan vi lägga flera lådagram bredvid varandra. Se figur 2.3.



Figur 2.2: Lådagram.



Figur 2.3: Lådagram för grupperna 1 och 2 i exempel 2.22.

Vi avslutar detta avsnittet om spridningsmått genom att kolla på **percentiler**.

Vid tillfällen då vi vill ge en ännu nogrannare beskrivning av spridningen så kan vi dela in observationsvärdena i percentiler. Vi delar alltså in värdet i hundra lika stora delar och gränserna mellan delarna kan betecknas $p_1, p_2, p_3, ..., p_{99}$. Den tionde percentilen p_{10} är det värde som delar observationsvärdena så att 10% är mindre än p_{10} och 90% är större än p_{10}. På liknande sätt är 10% av de största observationsvärdena över p_{90} och 90% under. Den femtionde percentilen p_{50} är detsamma som medianen. Den nedre kvartilen motsvarar p_{25} och den övre kvartilen motsvarar p_{75}. Kvartiler är alltså ett specialfall av percentiler.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.3.1. En bonde vägde sina balar med hö och fick fram följande resultat:
300 kg 325 kg 364 kg 314 kg 298 kg
Bestäm variationsbredden.

Uppgift 2.3.2. Titta på nedanstående lådagram och bestäm:

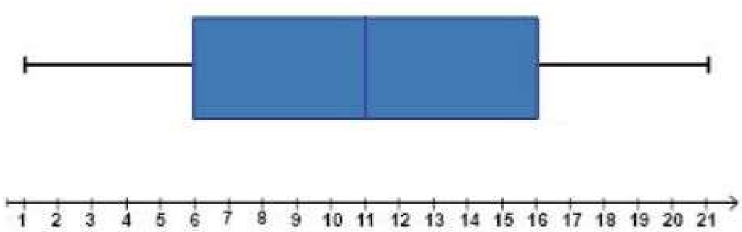
(a) Övre kvartil.

(b) Median.

(c) Undre kvartil.

(d) Variationsbredd.

(e) Bestäm kvartilavståndet.



Uppgift 2.3.3. I föregående uppgift ser vi ett lådagram som beskriver längderna på 8 växter i centimeter.

(a) Hur stor andel av växterna är över 6 cm?

(b) Hur stor andel av växterna är kortare än 11 cm?

Uppgift 2.3.4. En maskin på ett bageri bakar pajer som ska väga 500 gram. En gång per dag tar bagaren ett stickprov på 10 pajer och kontrollväger dem. Vid ett tillfälle såg resultatet ut på följande sätt uttryckt i gram:

501	495	500	503	499
497	502	504	498	500

(a) Bestäm variationsbredden.

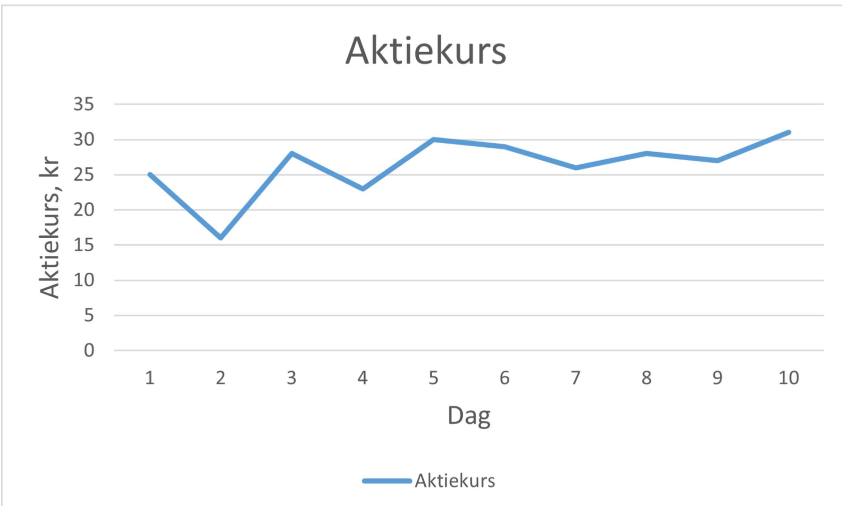
(b) Bestäm de tre kvartilerna.

(c) Bestäm kvartilavståndet.

2.4 Diagram

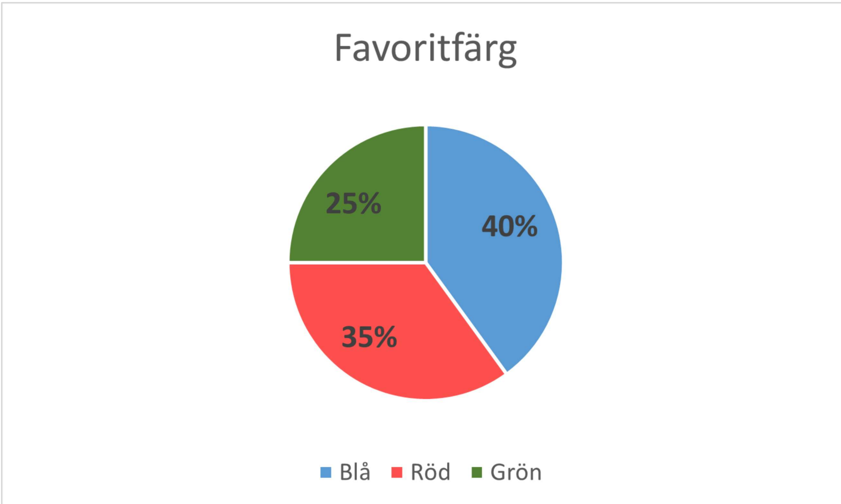
Diagram används för att grafiskt visualisera data. I detta kapitlet kommer vi kort visa hur olika diagram kan se ut och vad de kan användas till.

Exempel 2.27. Linjediagram används ofta för att visa hur något ändras över *tid*. Se figur 2.4 för ett exempel där en aktiekurs visualiseras över tid.



Figur 2.4: Exempel på ett linjediagram där vi ser hur en aktiekurs ändras över tid.

Exempel 2.28. Cirkeldiagram används när vi vill visualisera andelar. Se figur 2.5 för ett exempel där personer tillfrågats vilken av färgerna blå, röd och grön som de gillar mest. I diagrammet så ser vi till exempel att 40% bland de tillfrågade gillade blått mest.

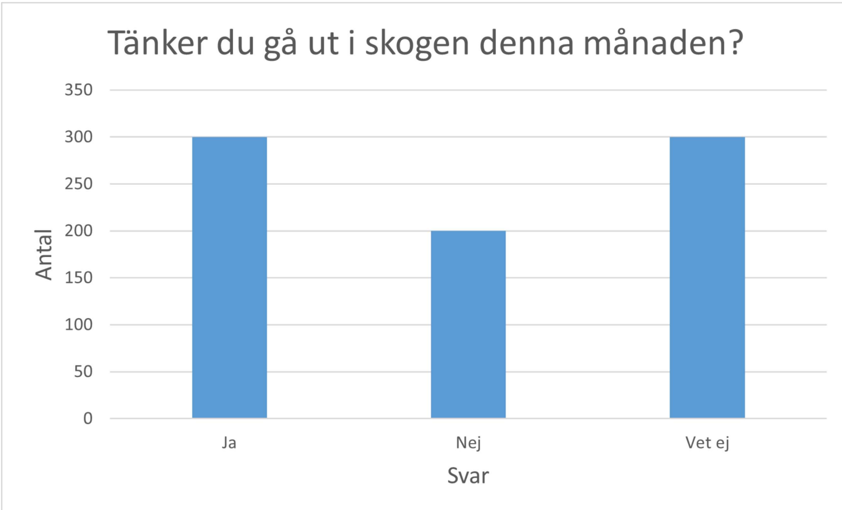


Figur 2.5: Exempel på ett cirkeldiagram där vi ser hur stor andel bland en grupp tillfrågade personer som gillar respektive färg bland blå, röd och grön mest.

Nu kommer vi kolla på stapeldiagram, stolpdiagram och histogram. Dessa tre diagrammen är relativt liknande men är ändå tre olika diagram.

Exempel 2.29. **Stapeldiagram** används för att visa olika kategoriers frekvens. Se figur 2.6 för ett exempel där en grupp människor tillfrågats om de tänkt gå ut till skogen denna månaden där det finns tre kategorier bland svaren; ”Ja”, ”Nej” och ”Vet ej”.

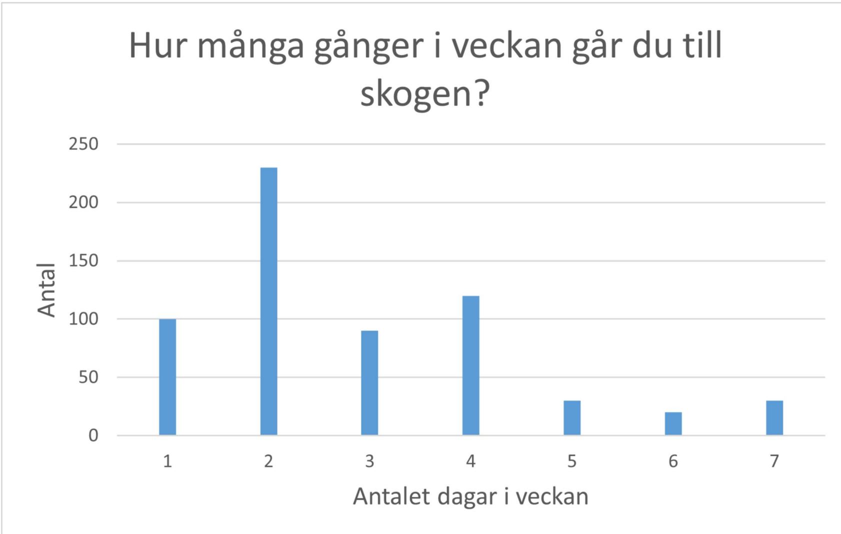
Exempel 2.30. **Stolpdiagram** används för att visa frekvensen för olika värden på x-variabeln. De liknar stapeldiagram men stapeldiagram visar frekvensen för olika kategorier medan stolpdiagram visar frekvensen för olika x-värden. Stolpdiagram ska



Figur 2.6: Exempel på ett stapeldiagram där en grupp människor tillfrågats om de tänkt gå ut till skogen denna månaden där det finns tre kategorier bland svaren; "Ja", "Nej" och "Vet ej".

rent visuellt ha en smalare bredd på stolparna än ett stapeldiagram. Se figur 2.7 för ett exempel på ett stolpdiagram där vi ser hur många gånger i veckan olika tillfrågade personer går till skogen.

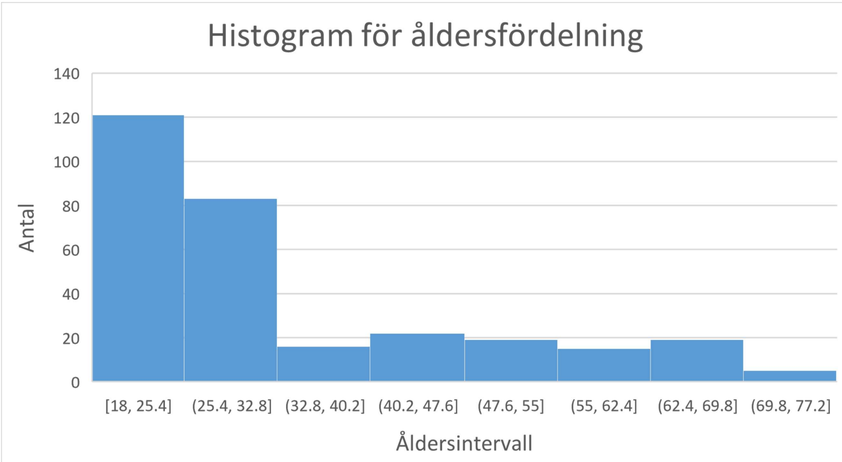
Exempel 2.31. **Histogram** är väldigt stapel- och stolpdiagram men där vi kollar på frekvensen för olika delintervall. Se figur 2.8 för ett exempel på ett histogram där vi ser antalet personer inom olika åldersintervall. Exempelvis mellan intervallet [18 år−25.4 år] är där cirka 120 stycken personer. Mellan intervallet [25.4 år − 32.8 år] är där cirka 80 stycken personer.



Figur 2.7: Exempel på ett stolpdiagram där vi ser hur många gånger i veckan olika tillfrågade personer går till skogen.

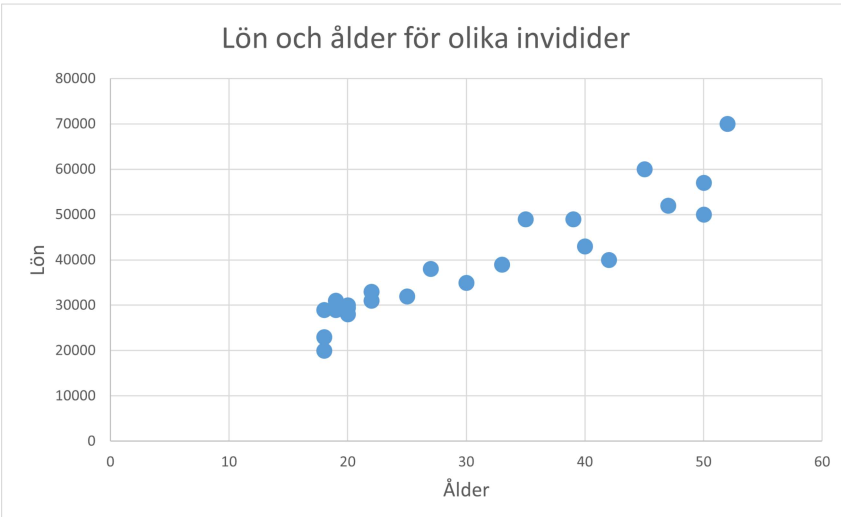
Exempel 2.32. Punktdiagram/spridningsdiagram består av olika punkter där respektive punkt utgör ett observerat värde och där vi ser två variabler för varje observerat värde. Med punktdiagram/spridningsdiagram kan vi se om det verkar finnas ett mönster i datan. Se figur 2.9 för ett exempel på ett punktdiagram/spridningsdiagram, i diagrammet är varje punkt en individ och vi ser den individens lön samt ålder. Från diagrammet ser vi också att det verkar finnas ett positivt samband mellan lön och ålder, med andra ord så verkar lönen stiga ju äldre en person blir.

I verkligheten så brukar diagram och visualiseringar ofta skapas med datorprogram såsom "Microsoft Excel" eller programmer-



Figur 2.8: Exempel på ett histogram där vi ser antalet personer inom olika åldersintervall. Exempelvis mellan intervallet [18 år – 25.4 år] så är där cirka 120 stycken personer.

ingsspråk såsom "Python" eller "R". Diagrammen vi sett i detta avsnittet har gjorts med Microsoft Excel.



Figur 2.9: Exempel på ett punktdiagram/spridningsdiagram där vi ser att det verkar finnas ett positivt samband mellan lön och ålder i datan, med andra ord så verkar lönen stiga ju äldre en person blir.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.4.1. Besvara nedanstående frågor. Försök även ge ett eget exempel på en situation då respektive diagram hade kunnat användas i b) - g) uppgifterna.

(a) Vad används diagram till?

(b) Vad används linjediagram för?

(c) Vad används cirkeldiagram till?

(d) Vad används stapeldiagram till?

(e) Vad används stolpdiagram till?

(f) Vad används histogram till?

(g) Vad används punktdiagram till?

Uppgift 2.4.2. Isabella har genomfört mätningar i flera olika företag inom IT branschen för att beräkna andelen personer som gått en gymnasieutbildning, yrkeshögskoleutbildning eller universitetsutbildning. Enligt hennes mätningar så har 61% gått en universitetsutbildning, 32% en yrkeshögskoleutbildning och 7% en gymnasieutbildning. Hon frågar dig vilket diagram som är lämpligt att använda för att presentera dessa resultaten. Vad svarar du?

Uppgift 2.4.3. Vad är skillnaden på ett stapel och stolpdiagram? Kan du exemplifiera då respektive diagram vore lämpligt att använda?

9. Summation

I detta kapitel ska vi lära oss hur kan vi kan skriva summor på ett kompakt sett med hjälp av sigma notationen. Sigma, $\sum$, är en bokstav från det grekiska alfabetet.

En summa är en följd av tal som adderas. Summan $1+2+3+\ldots+100$ kan skrivas på följande kompakta sätt: $\sum\limits_{k=1}^{100} k$.

Under summatecknet ser vi att det finns ett summationsindex med ett startvärde, i vårt fall $k=1$, ovanför tecknet står slutvärdet, 100 i vårt fall. Termerna bildas genom att indexet genomlöper alla heltal från start- till slutvärdet.

Genom att introducera summatecknet kan vi på ett koncist sätt skriva summor som följer ett visst mönster.

Exempel 9.1. Antag att vi har summan $2^2+3^2+4^2+5^2$. Den kan vi enkelt skriva som $\sum\limits_{k=2}^{5} k^2 = 2^2+2^3+2^4+2^5$.

Vanligtvis används bokstäverna k, i eller j som index men det har formellt sett ingen betydelse vilken index beteckning vi använder. Därför gäller det exempelvis att $\sum\limits_{k=2}^{5} k^2 = \sum\limits_{i=2}^{5} i^2$.

Exempel 9.2. Inom statistik beräknas ofta medelvärden, det kan enkelt skrivas enligt följande:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Exempel 9.3.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{4} j(j+1) &= 1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+4\cdot(4+1)\\ &= 2+6+12+20\\ &= 40\end{aligned}$$

Exempel 9.4. Summors termer behöver inte nödvändigtvis bero av vårt summationsindex.

$$\sum_{j=1}^{5} 3 = 3+3+3+3+3 = 15.$$

Notera att vi får fem stycken termer, anledningen är att antalet heltal mellan 1 till 5 är 5 stycken, nämligen $1, 2, 3, 4, 5$.

Ibland skrivs summor exempelvis utan start och slutvärde för index. Se följande exempel.

Exempel 9.5. Antag att vi vill beräkna den totala inkomsten för alla personer som är folkbokförda i Sverige. Då kan vi beteckna inkomsten för person i som y_i och då blir summan av alla personers inkomst i Sverige lika med $\sum_i y_i$. I detta exemplet ser vi att vi inte explicit skrivt ut indexets start och slutvärde vilket då innebär att vi summerar över alla möjliga index. Detta är praktiskt eftersom vi inte vet exakt hur många personer som är folkbokförda i Sverige. Hade vi vetat att det exempelvis finns 9 500 000 stycken folkbokförda personer i Sverige hade vi kunnat skriva $\sum_{i=1}^{9500000} y_i$ vilket ser ganska klumpigt ut i detta fallet.

En annan variation som förekommer är att index variabeln, i, i detta fallet inte alls skrivs ut; $\sum y_i$, där det då är underförstått att vi ska summera över alla möjliga index.

En annan variation som förekommer är att indexets startvärde men inte slutvärde skrivs ut; $\sum\limits_{i=1} y_i$. Denna notation används om vi vill betona vart vi börjar och därefter summera över alla möjliga index.

Sats 9.6. Summation är en linjär operation. Antag att α och β är två reella konstanter. Då gäller det att:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Bevis. Vi bevisar satsen genom att skriva ut vänsterledet så att det står på formen som är på högerledet.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_n) + (\beta y_1 + \beta y_2 + \ldots + \beta y_n) \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \beta(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i.\end{aligned}$$

I första raden skrev vi ut summan, i andra raden grupperade vi termerna så att de som har koefficienten α står för sig och de som har koefficienten β står för sig. I tredje raden bröt vi ut α respektive β för att i sista raden skriva ut paranteserna $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ och $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ som summor. Vi har alltså genom en kedja av likheter visat att vänsterledet är lika med högerledet. Detta bevisar satsen. $\square$

I följande exempel visar vi att samma summa kan skrivas på olika sätt.

Exempel 9.7. Antag att vi har summan $2+4+6+8$. Den kan då skrivas på formen $\sum\limits_{k=1}^{4} 2k = 2{\cdot}1+2{\cdot}2+2{\cdot}3+2{\cdot}4 = 2+4+6+8$. Men den hade också kunnat skrivas på formen $\sum\limits_{k=0}^{3}(2k+2) = (2\cdot 0+2)+(2\cdot 1+2)+(2\cdot 2+2)+(2\cdot 3+2) = 2+4+6+8$.

Vi avslutar kapitlet med att nämna att för produkter finns det en motsvarande beteckning som använder den grekiska bokstaven ”pi”, $\prod$. Vi skriver då:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Exempel 9.8. Vi demonstrerar bruket av produktsymbolen. $\prod_{k=1}^{3} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Övningsuppgifter

Uppgift 9.0.1. Skriv ut och beräkna följande summor.

(a) $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$.

(b) $\sum_{j=0}^{4} 3^j$.

(c) $\sum_{j=3}^{7} 4$.

(d) $\sum_{i=0}^{3}(i(i+1)\cdot 3i+1)$.

Uppgift 9.0.2. Skriv följande summor med ett summatecken.

(a) $3+6+9+12+15$.

(b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Uppgift 9.0.3. Skriv ut och beräkna följande produkter.

(a) $\prod_{k=1}^{4} 2k$.

(b) $\prod_{k=3}^{6}(1+k)$.

10. Vektor- och matrisalgebra

I detta kapitel kommer vi lära oss grunderna i vektor- och matrisalgebra. Grundläggande förståelse för detta krävs för att förstå mer tekniska delar av till exempel programmering, statistik och artificiell intelligens (AI).

10.1 Vektorer

En vektor kan antingen vara en kolumn vektor eller en rad vektor. Om ingenting sägs är det enligt konvention en kolumn vektor. Vektorer skrivs med små fetmarkerade bokstäver, exempelvis $\mathbf{v}$, eller med en pil ovan, exempelvis $\vec{v}$. Vi kommer använda små fetmarkerade bokstäver i denna bok.

Definition 10.1. En vektors dimension specificerar hur många rader respektive kolumner den har.

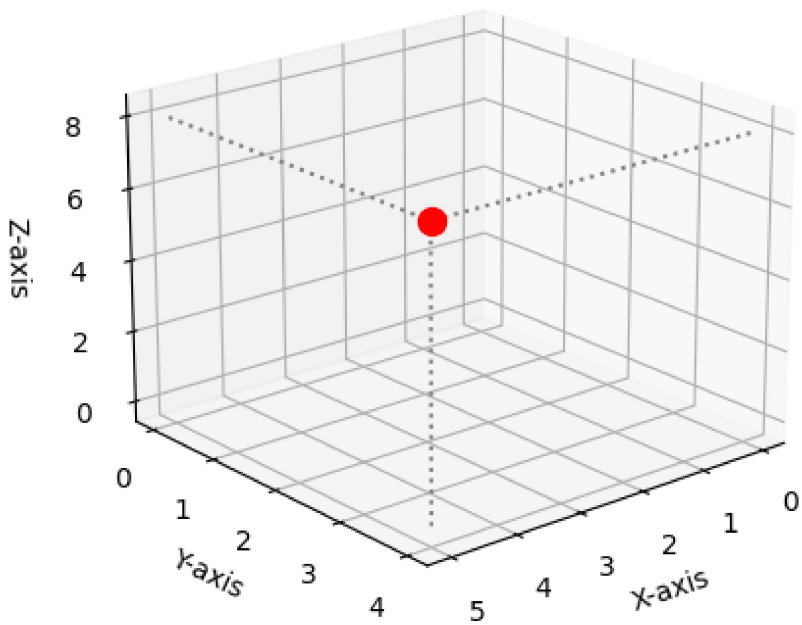
Exempel 10.2. Kolumn vektorn $\mathbf{v}$ nedan har dimensionen 3×1 eftersom den har tre rader och en kolumn.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exempel 10.3. Rad vektorn $\boldsymbol{x}$ har dimensionen 1×7 eftersom den har en rad och sju kolumner.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5, & 2, & 12, & 4, & 5, & 10, & 4 \end{pmatrix}$$

Det finns flertalet tillämpningsområden för vektorer. Inom Matematik kan en punkt i ett 3-dimensionellt koordinatsystem/rum betecknas med en vektor. Exempelvis kan vektorn $\mathbf{v} = (5, 4, 8)$ beteckna en punkt i ett tre dimensionellt rum enligt figur 10.1.



Figur 10.1: En vektor som representerar punkten $(5, 4, 8)$ i ett 3 dimensionellt rum.

Generellt sett kan vi också se högre dimensionella vektorer som punkter i ett n-dimensionellt rum, men om $n > 3$ så kan vi inte visualisera det som vi gjorde i figur 10.1.

Inom tillämpningar i exempelvis programmering, statistik och artificiell intelligens så används vektorer bland annat för att lagra data. Vektorn $\mathbf{x} = (50, 23, 12, 19, 112, 210, 60)$ som består av sju värden hade till exempel kunnat representera antalet glassar ett glassföretag sålt varje dag under en vecka.

Nu när vi introducerat vektorer kan vi utföra olika operationer på dem villket vi går igenom i följande avsnitt.

10.1.1 Operationer på vektorer

Den första operationen vi kommer kolla på är transponat.

Definition 10.4. Transponatet av en vektor $\mathbf{x}$ betecknas $\mathbf{x}^\top$ och omvandlar en rad-vektor till en kolumn vektor och vice versa.

Exempel 10.5. Transponerar vi radvektorn $\mathbf{r} = (2, 1, 3, 5)$ så hade det sett ut enligt följande:

$$\mathbf{r}^\top = (2, 1, 3, 5)^\top = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi ser alltså att radvektorn omvandlats till en kolumnvektor.

Härnäst kollar vi på hur vi multiplicerar en vektor med en skalär. Notera att en skalär helt enkelt är ett ”vanligt tal” såsom 5 eller till exempel 2.9.

Definition 10.6. När vi multiplicerar en vektor med en skalär så mulitpliceras varje enskilt element i vektorn med skalären.

Exempel 10.7. Definiera vektorn $\mathbf{x}^\top = (4, 2, 12, 6)$.
Notera att vi här skrivit $\mathbf{x}^\top$ eftersom det är mer kompakt att skriva ut kolumnvektorn som en radvektor i texten.

Vi multiplicerar vektorn $\boldsymbol{x}$ med skalären 3.

$$3\mathbf{x} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 \\ 3 \times 2 \\ 3 \times 12 \\ 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vi kollar på ytterligare ett exempel med skalärmultiplikation.

Exempel 10.8. Definiera radvektorn $\mathbf{x} = (4, 1, 9)$. Multiplicerar vi den vektorn med 2.5 får vi:

$$2.5(4, 1, 9) = (10, 2.5, 22.5)$$

Härnäst kollar vi på hur vi kan addera (subtrahera) två vektorer.

Definition 10.9. När vi adderar (eller subtraherar) två vektorer så adderas (eller subtraheras) varje element för sig. Vektoraddition (eller vektorsubtraktion) är endast definierat om vektorerna har samma dimension.

Exempel 10.10. Definiera de två vektorerna $\mathbf{a}^\top = (4, 2, 12, 6)$ och $\mathbf{b}^\top = (1, 1, 3, 5)$. Nu kan vi addera de två vektorerna.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 2 + 1 \\ 12 + 3 \\ 6 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

I kommande exempel är vektor addition inte definierat eftersom de två vektorerna inte har samma dimensioner.

Exempel 10.11. Om vi har två vektorer som vi benämner $\mathbf{x_1} = (5, 1, 6)$ och $\mathbf{x_2} = (3, 3)$ så är $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ inte definierat eftersom $\mathbf{x_1}$ har dimensionen 1×3 och $\mathbf{x_2}$ har dimensionen 1×2. Eftersom dimensionerna inte är samma så är vektor addition inte definierat i detta fallet.

Exempel 10.12. Definiera de två vektorerna $\mathbf{a} = (2, 5, 19)$ och $\boldsymbol{b} = (1, 7, 3)$.

Båda vektorerna har dimensionen (1×3) så vi kan utföra vektorsubtraktion.

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2, 5, 19) - (1, 7, 3) = (2 - 1, 5 - 7, 19 - 3) = (1, -2, 16)$.

Normen av en vektor

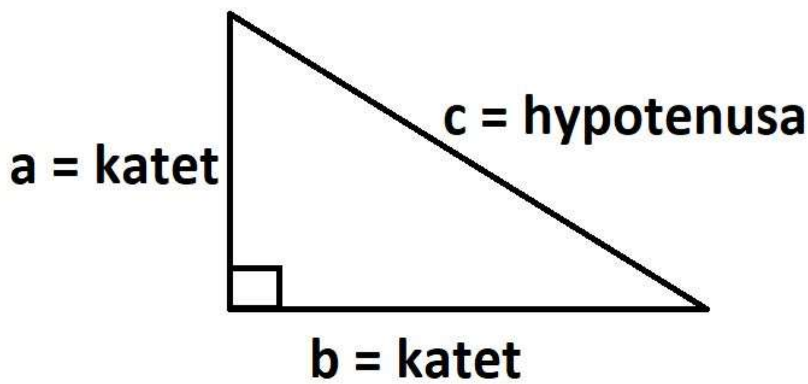
Nu ska vi kolla på ”normen” av en vektor som är ett sätt att generalisera konceptet om avstånd i högre dimensioner.

Vi börjar med pythagoras sats som vi kommer använda för att hitta en formel för avståndet mellan två punkter i ett två dimensionellt koordinatsystem/plan.

Sats 10.13 (**Pythagoras sats**)**.** För en rätvinklig triangel med kateterna a och b samt hypotenusan c, se figur 10.2, så gäller följande samband:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis. Bevisas ej. □

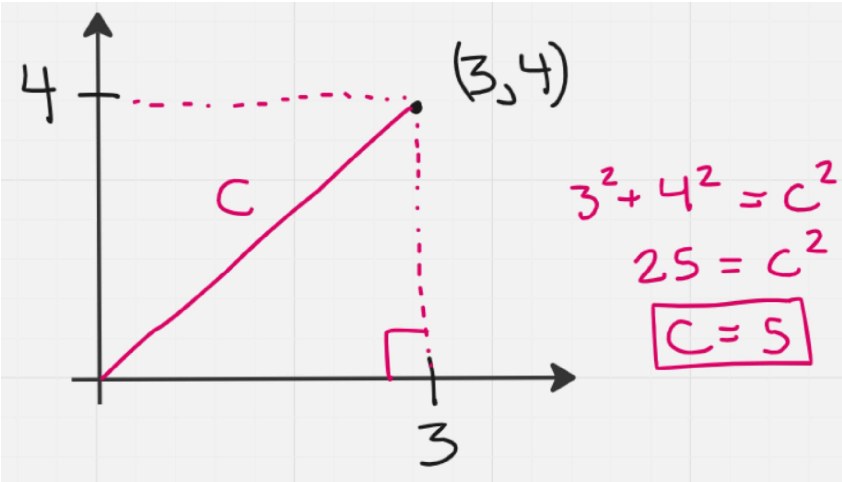


Figur 10.2: Pythagoras sats är en formel som ger ett samband mellan sidorna i en rätvinklig triangel.

Nu går vi igenom ett viktigt exempel för att skapa intution för hur vi kan beräkna avstånd från en punkt till origo i ett två dimensionellt koordinatsystem med hjälp av Pythagoras sats.

Exempel 10.14. Antag att vi har punkten/vektorn $(3, 4)$, vad är avståndet till origo $(0, 0)$? Genom att använda pythagoras sats kan vi enkelt beräkna det. Se figur 10.3 där vi har punkten $(3, 4)$ och genom att skapa en rätvinklig triangel så kan vi beräkna avståndet c från punkten till origo som blir 5. Rent generellt gäller det att avståndet till origo för en godtycklig punkt med kordinaterna (x_1, y_1) ges av formeln $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Använder vi den formeln för exempelvis punkten $(3, 4)$ får vi $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Exempel 10.15 (Avståndsformeln). Genom pythagoras sats kan vi också beräkna avståndet mellan två godtyckliga punkter i ett två dimensionellt koordinatsystem. Antag att vi har



Figur 10.3: Genom att använda Pythagoras sats så beräknar vi avståndet från punkten/vektorn $(3, 4)$ till origo $(0, 0)$.

punkterna (x_1, y_1) samt (x_2, y_2), genom att rita upp en bild och använda pythagoras sats som vi gjorde i exemplet ovan så kan vi härleda avståndsformeln $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Eftersom $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ och $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$ så kan avståndsformeln också skrivas som $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Men det spelar ingen roll då det är godtyckligt vilken punkt vi ser som den ”första” respektive den ”andra”.

Vi kommer nu generalisera konceptet om avstånd i högre dimensioner genom att definiera ”normen” av en vektor. Definitionen gäller för både kolumnvektorer och radvektorer.

Definition 10.16 (**Normen**)**.** Normen av en vektor $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ betecknas $\|\mathbf{x}\|$ och definieras enligt:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x^T x)} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$$

Notera alltså att normen är en funktion som tar en vektor, $\mathbf{x}$, och returnerar en siffra, $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$.

Exempel 10.17. Nu ska vi beräkna normen av vektorn $\mathbf{x} = (5, 3, 1, 0, 7)$.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{84} \approx 9.17.$$

Vi kan använda normen för att beräkna avståndet mellan två godtyckliga punkter/vektorer i ett n-dimensionellt koordinatsystem/rum, se följande sats.

Sats 10.18. Avståndet mellan två godtyckliga punkter/vektorer, $\mathbf{a}^\top = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ beräknas genom att använda normen:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Bevis. Bevisas ej. □

Notera att detta är en generalisering av ”avståndsformeln” från exempel 10.15.

Exempel 10.19. Definiera $\boldsymbol{v} = (3, 4)$ och nollvektorn $\mathbf{0} = (0, 0)$. Då gäller det att $\mathbf{v} - \mathbf{0} = (3-0, 4-0) = (3, 4)$. Beräknar vi normen får vi:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{0}\| = \left(3^2 + 4^2\right)^{0.5} = (9 + 16)^{0.5} = (25)^{0.5} = 5.$$

Detta är samma resultat som vi fick i exempel 10.14.

Exempel 10.20. Beräkna avståndet mellan vektorerna $\mathbf{x_1} = (5, 2, 4)$ och $\mathbf{x_2} = (1, 3, 0)$.

Vi börjar med att att utföra vektorsubtraktionen.

$$\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = (4, -1, 4)$$

Slutligen beräknar vi normen,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| = \|(4, -1, 4)\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 4^2} &= \sqrt{16 + 1 + 16} \\ &= \sqrt{33} \\ &\approx 5.74.\end{aligned}$$

Vi har alltså att avståndet mellan de två vektorerna är ungefär 5.74 längdenheter.

Övningsuppgifter

Uppgift 10.1.1. Definiera vektorn $\mathbf{x}$ enligt nedan.

$$\mathbf{x} = (4, 3)$$

(a) Vilken dimension har vektorn $\boldsymbol{x}$?

(b) Beräkna $5\mathbf{x}$.

(c) Beräkna $3\mathbf{x}$.

(d) Beräkna $5\mathbf{x} + 3\mathbf{x}$.

(e) Beräkna $8\mathbf{x}$.

(f) Beräkna $4\mathbf{x} - \mathbf{x}$.

(g) Beräkna $\mathbf{x}^\top$, vilken blir den nya dimensionen efter att transponeringen utförts?

(h) Är $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top$ definierat?

(i) Beräkna $\|\mathbf{x}\|$.

Uppgift 10.1.2. Definiera vektorn $\boldsymbol{v}$ enligt nedan.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(a) Vilken dimension har vektorn $\boldsymbol{v}$?

(b) Beräkna $2\mathbf{v}$.

(c) Beräkna $5\mathbf{v} + 2\mathbf{v}$.

(d) Beräkna $4\mathbf{v} - 2\mathbf{v}$.

(e) Beräkna $\mathbf{v}^\top$, vilken blir den nya dimensionen efter att transponeringen utförts?

(f) Beräkna $\|\mathbf{v}\|$.

Uppgift 10.1.3. Definiera vektorerna $\mathbf{v_1} = (4, 3, 1, 5)$ och $\mathbf{v_2} = (2, 3, 1, 1)$.

(a) Beräkna $\|\mathbf{v_1}\|$.

(b) Beräkna $\|\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}\|$.

10.2 Matriser

En $m \times n$ matris är en rektangulär samling av tal som har m rader och n kolumner. Exempelvis, en 3×2 matris A, med två rader och tre kolumner kan se ut enligt följande:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

där exempelvis a_{12} representerar talet i rad 1 och kolumn 2.

Konventionen är att matriser benämns med stora bokstäver såsom A eller B.

Vektorer, som vi gick igenom i avsnitt 10.1, är specialfall av matriser som har antingen en kolumn eller en rad.

Härnäst kommer vi lära oss om olika operationer som kan genomföras på matriser.

10.2.1 Operationer på matriser

Den första operationen vi kommer kolla på är transponat.

Definition 10.21. Transponatet av en matris A betecknas $A^\top$ och omvandlar matrisen så att A matrisens rader blir kolumnerna i matrisen $A^\top$ eller ekvivalent att A matrisens kolumner blir raderna i matrisen $A^\top$.

Exempel 10.22. Definiera matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Då gäller det att:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att den första raden [4 10 5] i matrisen A blev den första kolumnen i matrisen $A^\top$. Den andra raden [1 1 2] i matrisen A blev den andra kolumnen i matrisen $A^\top$.

Exempel 10.23. Definiera matrisen $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.
Då gäller det att:

$$B^\top = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Härnäst definierar vi skalärmultiplikation av matriser.

Definition 10.24. När vi multiplicerar en matris med en skalär så multipliceras varje enskilt element i matrisen med skalären.

Vi exemplifierar.

Exempel 10.25. Definiera matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Multiplicerar vi matrisen A med 3 får vi:

$$3A = 3\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times 10 & 3\times 5 \\ 3\times 1 & 3\times 1 & 3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Härnäst kommer vi definiera matris addition (matris subtraktion).

Definition 10.26. När vi adderar (eller subtraherar) två matriser så adderas (eller subtraheras) varje element för sig. Matris addition (eller subtraktion) är endast definierat om matriserna har samma dimension.

Exempel 10.27. Vi exemplifierar hur vi adderar två matriser.

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 50 & 0 \\ -25 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+(-5) & 8+5 \\ 10+50 & 10+0 \\ 4+(-25) & 2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 60 & 10 \\ -21 & 12 \end{bmatrix}$$

Exempel 10.28. Definiera de två matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Här är $A + B$ inte definierat eftersom de två matriserna inte har samma dimensioner. A har dimensionen (2×3) och B har dimensionen (2×2).

Nu kommer vi definiera matrismultiplikation som vid första läsning kan tyckas ha en märklig definition som är svår att förstå. Men fortsätt läs så kommer du se att det är enkelt att genomföra matrismultiplikation samt förstå varför det definieras på det sättet som det gör.

Definition 10.29. Antag att A är en $m \times n$ matris och B är en $n \times p$ matris,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Matrisprodukten, $C = AB$ (notera, inget multiplikationstecken används), definieras som $m \times p$ matrisen:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Det gäller alltså att produkten AB är definierad om och endast om antalet kolumner i matrisen A är lika med antalet rader i matrisen B, n i detta fallet. Den nya matrisen, AB, kommer ha lika många rader som den första matrisen A, m i detta fallet, och lika många kolumner som den andra matrisen B, p i detta fallet. Det vill säga $m \times p$ i detta fallet. För att komma ihåg detta kan vi vid varje matrismultiplikation vi utför, rita upp en bild enligt figur 10.4.

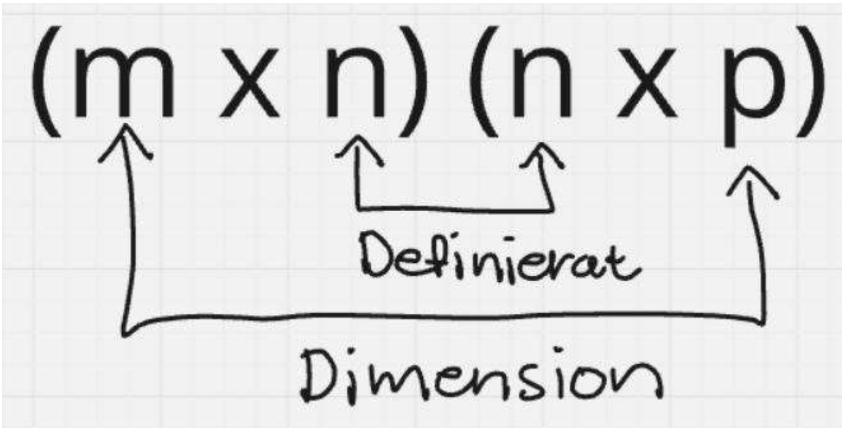
Att genomföra matrismultiplikation kan enligt definitionen tyckas komplicerat men som vi kommer se så är det enkelt.

Exempel 10.30. Definiera

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Figur 10.4: Minnesregel för att se när matrismultiplikation är definierat och vilken dimension produkten får. Detta är bra att rita upp varje gång som matrismultiplikation genomförs.

Vi ser att A har dimensionen (2×3) och B har dimensionen (3×2). Eftersom antalet kolumner i A är 3 vilket är lika med antalet rader i B så är matrismultiplikationen definierad. Den nya dimensionen för produkten AB kommer bli lika med antalet rader i A och antalet kolumner i B, d.v.s. (2×2). Här har vi i ord formulerat det som enkelt kan göras enligt figur 10.4.

Produkten AB beräknas enligt följande:

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \times 1 + 5 \times 3 + 2 \times 2) & (1 \times 3 + 5 \times 5 + 2 \times 4) \\ (4 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 2) & (4 \times 3 + 1 \times 5 + 3 \times 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}.$$

Exempel 10.31. Definiera

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att A har dimensionen (2×2) och B har dimensionen (2×2). Eftersom antalet kolumner i A är lika med antalet rader i B är matrismultiplikationen definierad. Den nya dimensionen för produkten AB kommer bli lika med antalet rader i A och antalet kolumner i B, d.v.s. (2×2).

Produkten AB beräknas enligt följande:

$$AB = \begin{bmatrix} (2 \times 5 + 3 \times 7) & (2 \times 6 + 3 \times 8) \\ (4 \times 5 + 1 \times 7) & (4 \times 6 + 1 \times 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 27 & 32 \end{bmatrix}.$$

Varför definieras matrismultiplikation på det sättet som det görs?

Som vi kommer se kan vi skriva ut linjära ekvationssystem på ett väldigt kompakt och elegant sätt nu när vi har definierat matrismultiplikation på det sättet som vi gjort.

Om vi exempelvis har följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

så kan vi skriva det systemet med hjälp av matrismultiplikationen, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Detta systemet kan då skrivas som:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Utför vi matrisprodukten Ax i vänsterledet, så blir systemet:

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sätter vi elementen lika med varandra i vänster- och högerled får vi ursprungsekvationerna som vi började med:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

Detta exemplet var enkelt, men vi kan föreställa oss hur användbart detta är när vi har många ekvationer. Anledningen är att istället för att behöva skriva ut varje enskild ekvation (det kan vara miljontals) så kan vi enkelt definiera matrisen A samt vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$. Se följande exempel.

Exempel 10.32. Om vi har följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 3x - y + z &= 3 \\ 2x - 4y + 5z &= -6 \end{aligned}$$

så kan vi skriva ut systemet med matrismultiplikation enligt

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Vi avslutar detta kapitlet med att poängtera att vi nu introducerat nya matematiska objekt, vektorer och matriser där vektorer är ett specialfall av matriser. Eftersom det är nya matematiska objekt så är det inte säkert att de egenskaperna vi är vana vid för de "vanliga reella talen" gäller även här. För reella tal så vet vi att multiplikation är kommutativt, nämligen att om a och b är reella tal så gäller det att $ab = ba$. Det spelar alltså ingen roll i vilken ordning multiplikationen utförs. Exempelvis är $7 \times 3 = 3 \times 7 = 21$.

Om vi nu kollar på två matriser, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, så kan vi beräkna matrisprodukten $AB = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Beräknar vi på motsvarande sätt matrisprodukten BA får vi $BA = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$. Vi ser alltså att $AB \neq BA$ i detta fallet.

I nedanstående två satser specificerar vi vilka regler som gäller.

Sats 10.33 (Räkneregler för matris addition (subtraktion) samt multiplikation med skalärer)**.** Låt A, B och C vara godtyckliga $m \times n$ matriser och låt α samt β vara reella tal. Låt $\mathbf{0}$ vara $m \times n$ matrisen som endast består av nollor, vi kallar den för nollmatrisen. Då gäller följande räkneregler:

(a) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(b) $A+B = B+A$

(c) $A+\mathbf{0} = A$

(d) $A+(-A) = \mathbf{0}$

(e) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

(f) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Bevis. Bevisas ej. □

Sats 10.34 (Räkneregler för matrismultiplikation)**.** Om A, B och C är matriser vars dimensioner är sådana att den specificierade multiplikationen är definierad och om α är en godtycklig skalär, då gäller följande räkneregler:

(a) $(AB)C = A(BC)$

(b) $A(B+C) = AB+AC$

(c) $(A+B)C = AC+BC$

(d) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

Bevis. Bevisas ej. □

Övningsuppgifter

Uppgift 10.2.1. Definiera matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om det är definierat, utför följande beräkningar:

(a) $2A$

(b) $B - 2A$

(c) $3C - 2E$

(d) $2D - 3C$

(e) $D^\top + 2D$

(f) $2C^\top - 2D^\top$

(g) $A^\top - B$

(h) AC

(i) CD

(j) CB

(k) CI

(l) $AB^\top$

Uppgift 10.2.2. Definiera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna AA^T.

Uppgift 10.2.3. Definiera matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifiera att $AB = AC$ men att $B \neq C$. Vad vi vill demonstrera med detta exemplet är att vi har definierat ett nytt matematiskt objekt (matriser i detta fallet) och att de ”vanliga reglerna” för aritmetik som vi lärt oss från grundskolan inte nödvändigtvis gäller även här.

Uppgift 10.2.4. Skriv det linjära ekvationssystemet nedan på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Verifiera att din lösning är korrekt genom att skriva ut matrismultiplikationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och dubbelkolla att du får tillbaka det ursprungliga ekvationssystemet.