1 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Para esta sección, partiremos del hecho de que la condición necesaria y suficiente para que la expresión

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1}$$

sea una diferencial exacta de alguna función $F(x, y)$ es que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

donde esas derivadas parciales son funciones continuas.

Considere ahora la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

y suponga que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen la condición (2), por lo tanto, existe una función $F(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy & (4) \\ &= P(x, y)dx + Q(x, y)dy. & (5) \end{aligned}$$

A una ecuación diferencial así se le conoce como ecuación diferencial exacta.

Es claro que la función

$$F(x, y) = C, \tag{6}$$

donde C es una constante arbitraria, será una solución de la ecuación (3).

A continuación, se obtendrá una forma explícita de la función $F(x,y)$. Por hipótesis la condición (2) se cumple, así que podemos escribir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y). \tag{7}$$

Ahora, la primera de estas ecuaciones seguramente será satisfecha por la expresión

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y), \tag{8}$$

donde la y que aparece bajo el signo de la integral es tratada como un parámetro y $f(y)$ es una función arbitraria que solo depende de y.

Ahora se determinará la función $f(y)$, de tal manera que (8) satisfaga la segunda de las ecuaciones (7).

Diferenciando (8) con respecto a y e igualando el resultado con $Q(x,y)$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \frac{df}{dy} = Q(x,y), \tag{9}$$

así que

$$\frac{df}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \tag{10}$$

Por lo tanto,

$$f(y) = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx \right] dy. \tag{11}$$

Sustituyendo (11) en (8) nos conduce a la fórmula explícita

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx \right] dy. \tag{12}$$

2 Ejemplo

Para ilustrar el uso de esta fórmula, considere

$$(2xy+1)dx + (x^2+4y)dy = 0. \tag{13}$$

Aquí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \tag{14}$$

así que la fórmula (12) es aplicable.

Como ejercicio, COMPRUEBE que la sustitución de las expresiones $P(x,y) = 2xy+1$ y $Q(x,y) = x^2+4y$ en la fórmula (12) da como resultado

$$F(x,y) = x^2y + x + 2y^2. \tag{15}$$

Lo que suele usarse

En lugar de usar la fórmula (12), frecuentemente se procede como sigue:

Dado que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, se sabe que existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy+1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2+4y \tag{16}$$

Ahora, si integramos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy+1 \tag{17}$$

Con respecto a x, tratando a y como constante, resulta en

$$F(x,y) = x^2y + x + c_1(y), \tag{18}$$

donde $c_1(y)$ no es función de x pero podría ser una función de y, dado que y fue tratada como una constante.

Similarmente, la segunda condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2+4y, \tag{19}$$

Integrando con respecto a y, da

$$F(x,y) = x^2y + 2y^2 + c_2(x). \tag{20}$$

La comparación de las dos expresiones para $F(x, y)$ muestra que si

$$F(x,y) = x^2y + x + 2y^2, \tag{21}$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 4y. \tag{22}$$

Entonces, la solución general de la ecuación dada es

$$x^2y + x + 2y^2 = C. \tag{23}$$

PROBLEMS

Integrate the following equations if they are exact:

1. $(y \cos xy + 2x)\, dx + x \cos xy\, dy = 0.$
2. $(y^2 + 2xy + 1)\, dx + (2xy + x^2)\, dy = 0.$
3. $(e^x + 1)\, dx + dy = 0.$
4. $(3x^2y - y^3)\, dx + (x^3 - 3y^2x)\, dy = 0.$

5. $(3x^2y - y^3)\,dx - (x^3 + 3y^2x)\,dy = 0.$

6. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\,dx - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0.$

7. $2x \log y\,dx + \dfrac{x^2}{y}\,dy = 0.$

8. $\dfrac{x\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx + y\,\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy = 0.$

9. $(2x + e^x \log y)\,dx + \dfrac{e^x}{y}\,dy = 0.$

10. $2x \sin y\,dx - x^2 \cos y\,dy = 0.$

11. $(2x + yx^3)\,dx + 5(x - 3x^2y)\,dy = 0.$

12. $\left(2x + \dfrac{1}{y}e^{x/y}\right)dx - \dfrac{1}{y^2}e^{x/y}\,dy = 0.$

13. $\sin 2y\,dx + 2x \cos 2y\,dy = 0.$