Crecimiento Continuo

Ing. Lamberto Maza Casas

Marzo, 2020

En este documento se presentan algunos comentarios sobre una ecuación diferencial para modelar el crecimiento continuo de una cantidad.

1 Crecimiento Continuo

Decimos que una cantidad C tiene **crecimiento continuo** a una tasa dada en porcentaje $p > 0$ si existe un número fijo $T > 0$ tal que para cualesquiera números reales $t \in (-\infty, +\infty)$ y $|h| \in (0, T]$ se cumple que

$$c(Tt + h) = c(Tt) + \frac{h}{T} r c(Tt), \text{ donde } r = \frac{p}{100} \tag{1}$$

También decimos que la cantidad c crece p "por ciento" cada T unidades de tiempo; es decir, c crece con un factor de proporción $r = p/100$ cada T unidades de tiempo.

2 Obtención de la ecuación diferencial de crecimiento continuo

Supongamos que la cantidad y tiene crecimiento continuo a una tasa p. Entonces, sabemos que existe $T > 0$ para el cual cuando t es un número real y $|h| \in (0, T]$, entonces

$$y(Tt + h) = y(Tt) + \frac{h}{T} r y(Tt), \text{ donde } r = \frac{p}{100} \tag{2}$$

Lo cual significa que

$$\frac{y(Tt+h)-y(Tt)}{h}=\frac{r}{T}y(Tt) \tag{3}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = Tt$, obtenemos

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\frac{r}{T}y(x) \tag{4}$$

Si ahora tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{r}{T}y(x)=\frac{r}{T}y(x) \tag{5}$$

El lado derecho es la forma en que se calcula la derivada de y con respecto a x. Por lo que hemos llegado a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r}{T}y(x) \tag{6}$$

Agregando la condición inicial $y(x_0) = y_0$ (donde $x_0 = Tt_0$) obtenemos un problema de valor inicial (o problema de Cauchy):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r}{T}y(x),\ \text{donde } y(x_0)=y_0 \tag{7}$$

La solución general de este problema de valor inicial está dada por

$$y(x)=y(x_0)e^{\frac{r}{T}(x-x_0)} \tag{8}$$

Susttituyendo nuevamente el cambio de variable $x = Tt$ se llega a

$$y(Tt)=y(Tt_0)e^{r(t-t_0)} \tag{9}$$

donde $y(Tt_0)$ es cualquier valor real constante. Si definimos la función del tiempo $z(t)$ como

$$z(t)=y(Tt)=y(Tt_0)e^{r(t-t_0)},\ \text{nótese que } z(t_0)=y(Tt_0) \tag{10}$$

obtenemos la función que describe el crecimiento continuo de una cantidad cuando esta crece a una tasa fija p (en pocentaje) cada T unidades de tiempo. ¿En cuánto tiempo se duplica una cantidad que crece a una tasa fija p (en porcentaje) cada T unidades de tiempo? En otras palabras, ¿cuál es el valor de $t-t_0$ para el cual $z(t)=2z(t_0)$? Para responder a la pregunta escribimos

$$\begin{aligned} z(t) &= 2z(t_0) && (11)\\ z(t_0)e^{r(t-t_0)} &= 2z(t_0) && (12)\\ e^{r(t-t_0)} &= 2 && (13)\\ r(t-t_0) &= ln(2) && (14)\\ t-t_0 &= \frac{ln(2)}{r} && (15) \end{aligned}$$

Si se expresa el factor de proporcionalidad en función de la tasa de crecimiento p en porcentaje obtenemos $r=p/100$, sustituyendo esto en la ecuación (15) llegamos a

$$t-t_0=\frac{100ln(2)}{p}=\frac{100(0.6931)}{p}\approx\frac{70}{p} \tag{16}$$