1 COMPRUEBE

Considerando $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ como

$$(2xy+1)dx + (x^2+4y)dy = 0. \tag{1}$$

Dado que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \tag{2}$$

COMPRUEBE que la sustitución de las expresiones $P(x,y) = 2xy+1$ y $Q(x,y) = x^2+4y$ en la fórmula

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \right] dy. \tag{3}$$

da como resultado

$$F(x,y) = x^2y + x + 2y^2. \tag{4}$$

Comprobación

$$\begin{align}
\int P(x,y)dx &= \int (2xy+1)dx \tag{5}\\
&= 2\int xydx + \int dx \tag{6}\\
&= 2(\frac{x^2}{2}y) + x \tag{7}\\
&= x^2y + x \tag{8}
\end{align}$$

Usando (8)

$$\begin{align}
\frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y + x\right] \tag{9}\\
&= x^2 \tag{10}
\end{align}$$

Ahora calculamos la integral

$$\begin{align}
\int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \right] dy &= \int \left[(x^2+4y) - (x^2)\right] dy \tag{11}\\
&= \int 4ydy \tag{12}\\
&= 2y^2 \tag{13}
\end{align}$$

Por lo tanto, sustituyendo (8) y (13) en (3)

$$F(x, y) = x^2y + x + 2y^2 \tag{14}$$

que es lo que se quería comprobar.