1. El método de variación de parámetros

A continuación describimos un método muy general para encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

una vez que las soluciones de la ecuación homogénea

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \tag{2}$$

son conocidas. El principio básico de este método es usar nuestro conocimiento de las soluciones de la ecuación homogénea para ayudarnos a encontrar una solución de la ecuación no homogénea.

Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2). Trataremos de encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea (1) de la forma

$$\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t); \tag{3}$$

esto es, trataremos de encontrar las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ tal que la combinación lineal $u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ es una solución de (1). En este método, se buscará encontrar $u_1(t)$ y $u_2(t)$ como las soluciones de dos ecuaciones de primer orden simples. Observemos que la ecuación diferencial (1) impone solamente una condición sobre las dos funciones desconocidas $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Por lo tanto, tenemos uan cierta "libertad" en la elección de $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Nuestro objetivo es imponer una condición adicional sobre $u_1(t)$ y $u_2(t)$ la cual hará la expresión $L[u_1y_1 + u_2y_2]$ tan simple como sea posible. Calculando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{d}{dt}[u_1y_1 + u_2y_2] \\ &= [u_1y_1' + u_2y_2'] + [u_1'y_1 + u_2'y_2] \end{aligned}$$

De esta expresión, se puede notar que si ponemos como condición que

$$y_1(t)u_1'(t) + y_2(t)u_2'(t) = 0, \tag{4}$$

entonces, $d^2\psi/dt^2$ y consecuentemente $L[\psi]$, no contendrá derivadas de segundo orden de u_1 y u_2. Esto sugiere que, imponiendo la condición (4) sobre las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$, en este caso, entonces,

$$\begin{aligned} L[\psi] &= [u_1y_1' + u_2y_2']' + p(t)[u_1y_1' + u_2y_2'] + q(t)[u_1y_1 + u_2y_2] \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1[y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1] + u_2[y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2] \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2' \end{aligned}$$

Dado que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Consecuentemente, $\psi = u_1y_1 + u_2y_2$ es una solución de la ecuación no homogenea (1) si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ satisfacen las dos ecuaciones

$$y_1(t)u_1'(t) + y_2(t)u_2'(t) = 0 \tag{5}$$
$$y_1'(t)u_1'(t) + y_2'(t)u_2'(t) = g(t) \tag{6}$$

Aquí podemos notar que las ecuaciones (5) y (7) pueden rescribirse como

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

y que el determinante de este sistema es el Wronskiano de las soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de $L[y] = 0$. De (7), usando el Wronskiano de $y_1(t)$ y $y_2(t)$, las soluciones para u_1' y u_2' se pueden calcular como

$$u_1'(t) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = -\frac{g(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)} \tag{8}$$

y

$$u_1'(t) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_2'(t) & g(t) \end{vmatrix} = \frac{g(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)}. \tag{9}$$

Finalmente, obtenemos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ integrando los lados derechos de (8) y (9).

1.1. Comentario

La solución general de la ecuación homogénea (2) es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \tag{10}$$

Permitiendo que c_1 y c_2 varíen con el tiempo, obtenemos una solución de la ecuación no homogénea. Por esa razón, este método es conocido como el **método de variación de parámetros**.

2. Ejemplo

(a) Encuentre una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t \tag{11}$$

sobre el intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(b) Encuentre la solución $y(t)$ de (11) la cual satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Solución.

(a) Las funciones $y_1(t) = \cos t$ y $y_2(t) = \sin t$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ con

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\cos t)\sin t - (-\sin t)\cos t = 1 \tag{12}$$

Entonces, de (8),

$$u_1'(t) = -\tan t \sin t \tag{13}$$

y de (9),
$$u_2'(t) = \tan t \cos t \tag{14}$$
Integrando la ecuación (13)
$$\begin{aligned}
u_1(t) &= -\int \tan t \sin t \, dt = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \\
&= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} dt = \sin t - \ln|\sec t + \tan t| \\
&= \sin t - \ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{15}$$
mientras que integrando (14)
$$u_2(t) = \int \tan t \cos t \, dt = \int \sin t \, dt = -\cos t. \tag{16}$$
Consecuentemente,
$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \cos t[\sin t - \ln(\sec t + \tan t)] + \sin t(-\cos t) \\
&= (-\cos t)\ln(\sec t + \tan t)
\end{aligned} \tag{17}$$
es una solución particular de (11) sobre el intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(b) A la luz de la información anterior, la solución general de (1) está dada por
$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cos t \ln(\sec t + \tan t) \tag{18}$$
para alguna elección de las constantes c_1 y c_2. Las constantes c_1 y c_2 se determinan usando las condiciones iniciales
$$c_1 = y(0) = 1, \ \text{y} \ c_2 - 1 = y'(0) = 1. \tag{19}$$
Por lo tanto, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y
$$y(t) = \cos t + 2\sin t - \cos t \ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$
En resumen, (20) es la solución del problema de valor inicial (1) con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; obtenida por el método de variación de parámetros.

3. Reactivos

1. Sea $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$. Entonces $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ es

   A) una ecuación diferencial lineal no homogénea

   B) una ecuación diferencial lineal homogénea

   C) una ecuación diferencial no lineal

   R=A

2. Sea $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$, donde $p(t)$ y $q(t)$ son funciones continuas. Si se propone $\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, y suponemos que $y_1(t)u_1'(t) + y_2(t)u_2'(t) = 0$, ¿a qué es igual $L[\psi]$?

   A) $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1$

   B) $y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2$

   C) $u_1'y_1' + u_2'y_2'$

   R=C

3. Considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

   ¿A qué es igual el determinante del sistema?

   A) El Wronskiano de $u_1(t)$ y $u_2(t)$

   B) El Wronskiano de $y(t)$ y $g(t)$

   C) El Wronskiano de $y_1(t)$ y $y_2(t)$

   R=C

4. Considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

   ¿Cuál es la solución para $u_1'(t)$?

   A) $-\frac{g(t)}{W(y_1,y_2)}$

   B) $-\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)}$

   C) $-\frac{g(t)y_2(t)}{W(y_1,y_2)}$

   R=C

5. Considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la solución para $u_2'(t)$?

A) $-\frac{g(t)}{W(y_1,y_2)}$

B) $\frac{g(t)y_1(t)}{W(y_1,y_2)}$

C) $-\frac{g(t)y_2(t)}{W(y_1,y_2)}$

R=B

6. Si definimos $L[y] = y'' + y$, la ecuación $y'' + y = \tan t$ es equivalente a

A) $L[y] = \tan t$

B) $L[y] = 0$

C) $L[y] = t$

R=A

7. ¿Cuál es la ecuación homogénea asociada a la ecuación $y'' + y = \tan t$

A) $y'' + y = \tan t$

B) $y'' + y = t$

C) $y'' + y = 0$

R=C

8. Definiendo $L[y] = y'' + y$, ¿cuáles son las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación $L[y] = 0$?

A) $1 + j,\ 1 - j$

B) $1, -1$

C) $j,\ -j$

R=C

9. La solución de la ecuación $y'' + y = 0$ es de la forma

   A) $c_1 \cos t + c_2 \sin t$
   B) $e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$
   C) $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

   R=A

10. ¿Cuáles son dos soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$?

   A) e^t y e^{-t}
   B) $\cos t$ y $\sin t$
   C) $e^t \cos t$ y $e^t \sin t$

   R=B

11. Usando el método de variación de parámetros para resolver $y'' + y = \tan t$, ¿a qué es igual $u_1'(t)$?

   A) $\tan t \sin t$
   B) $-\tan t \sin t$
   C) $-\tan t \cos t$

   R=B

12. Usando el método de variación de parámetros para resolver $y'' + y = \tan t$, ¿a qué es igual $u_2'(t)$?

   A) $\tan t \cos t$
   B) $-\tan t \cos t$
   C) $-\tan t \sin t$

   R=A

13. Siguiendo el método de variación de parámetros, ¿Cuál es la función $u_1(t)$?

   A) $\sin t - \ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   B) $\sin t - \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   C) $\ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   R=A

14. Siguiendo el método de variación de parámetros, ¿Cuál es la función $u_2(t)$?

   A) $\sin t \cos t$

   B) $\cos t$

   C) $-\cos t$

R=C

15. Utilizando las dos respuestas anteriores, obtenidas por el método de variación de parámetros; ¿Cuál es la solución particular de $y'' + y = \tan t$?

   A) $(-\cos t)\ln(\sin t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   B) $(-\cos t)\ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   C) $(-\sin t)\ln(\sec t + \tan t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

R=B