1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea que describe el comportamiento del circuito eléctrico de la figura Utilizando la ley de corrientes de

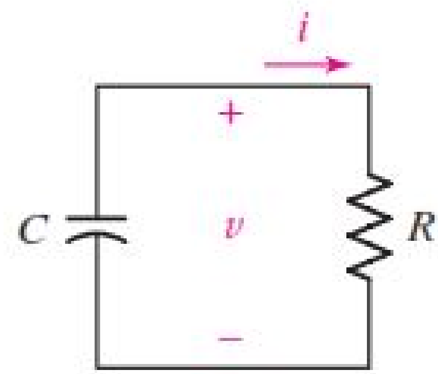

Figure 1: Circuito RC sin fuente

Kirchhoff se obtiene la ecuación diferencial

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \tag{1}$$

Dividiendo entre C obtenemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{2}$$

Para resolver la ecuación utilizaremos un método que consiste en sustituir la expresión $k_0 e^{\lambda t}$ (donde $k_0 \neq 0$ es una constante real) en todos los lugares de la ecuación (2) en donde aparece v. Haciendo esto, se tiene

$$\frac{d(k_0 e^{\lambda t})}{dt} + \frac{k_0 e^{\lambda t}}{RC} = 0 \tag{3}$$

derivando y factorizando

$$\lambda k_0 e^{\lambda t} + \frac{k_0}{RC} e^{\lambda t} = 0 \tag{4}$$

$$(\lambda + \frac{1}{RC}) k_0 e^{\lambda t} = 0 \tag{5}$$

dado que para todo $t \in R$, $e^{\lambda t} \neq 0$ (de hecho, si $\lambda \in R$, $e^{\lambda t} > 0 \; \forall t \in R$). De (5), concluimos que

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \tag{6}$$

de donde concluimos que $v(t) = k_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ es la solución general de la ecuación diferencial (2), (donde $k_0 \neq 0$ es una constante real).

2 Ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

Consideremos el circuito RLC serie sin fuente de la siguiente figura Suponiendo

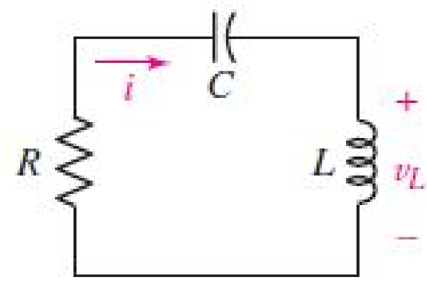

Figure 2: Circuito RLC sin fuente

valores de R, L y C constantes, derivaremos a continuación una ecuación diferencial de segundo orden que describe el comportamiento del circuito de la figura anterior. Dado que los tres elementos del circuito están conectados en serie, la corriente i indicada para el capacitor, con la dirección adecuada es también la corriente en la inductancia y en el resistor. De la ley de voltajes de Kirchhoff, tenemos que

$$v_R + v + v_L = 0 \tag{7}$$

donde v_R es el voltaje entre las terminales de la resistencia, v es el voltaje entre las terminales del capacitor, y v_L es el voltaje entre las terminales del inductor. Utilizaremos el voltaje v (del capacitor) como variable dependiente para nuestra ecuación diferencial de segundo orden. La relación entre el voltaje v y la corriente i es

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}, \tag{8}$$

por lo que por la ley de Ohm, para v_R usaremos la expresión

$$v_R(t) = RC\frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Por último, como la relación entre el voltaje v_L en la inductacia y la corriente i está dada por

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt}. \tag{10}$$

Sustituyendo (8) en (10),

$$v_L(t) = LC\frac{d^2v}{dt^2}. \tag{11}$$

Ahora, sustituyendo (9) y (11) en la ecuación (7),

$$RC\frac{dv}{dt} + v(t) + LC\frac{d^2v}{dt^2} = 0 \tag{12}$$

Reacomodando los términos de la ecuación (12) obtenemos

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v(t) = 0 \tag{13}$$

3 Solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

Para solucionar la ecuación diferencial lineal

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v(t) = 0 \tag{14}$$

Propondremos una solución de la siguiente forma

$$v(t) = V_1e^{s_1t} + V_2e^{s_2t} \tag{15}$$

donde V_1, V_2, s_1, s_2 son constantes distintas de cero (no necesariamente números reales, pueden ser números complejos). Dado que ambos términos en (15), son de la forma

$$v = K_0e^{st} \tag{16}$$

con K_0 y s son dos constantes (no necesariamente números reales). Sustituyendo (16) en (14) se tiene

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\left(K_0e^{st}\right) + RC\frac{d}{dt}\left(K_0e^{st}\right) + K_0e^{st} = 0 \tag{17}$$

$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right)K_0e^{st} = 0 \tag{18}$$

Por hipoótesis $K_0 \neq 0$ y para todo $s \neq 0$ se tiene que $e^{st} \neq 0$; por lo tanto

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \tag{19}$$

En esta ecuación, recordemos que los productos LC y RC son constantes. Bajo estas condiciones, como es bien sabido, la ecuación (19) tiene dos soluciones, estas pueden ser ambas reales, o bien, ambas complejas; y cuando son complejas, son complejas conjugadas. Ya sea que las raíces de la ecuación (19) sean reales o complejas, si denotamos esas raíces por s_1 y s_2, la solución de la ecuación diferencial (14) se puede expresar como se planteó en la expresión (15), es decir, de acuerdo concluimos

$$v(t) = V_1e^{s_1t} + V_2e^{s_2t} \tag{20}$$

Dado que si s_1 y s_2 son ambas soluciones de (19), entonces,

$$LCs_1^2 + RCs_1 + 1 = 0 \tag{21}$$

y también

$$LCs_2^2 + RCs_2 + 1 = 0 \tag{22}$$

Al sustituir (20) en el lado izquierdo de (EcuNplus13) se llega a

$$\left(LCs_1^2 + RCs_1 + 1\right) V_1 e^{s_1 t} + \left(LCs_2^2 + RCs_2 + 1\right) V_2 e^{s_2 t} = 0 \tag{23}$$

dado que los términos entre paréntesis son ambos iguales a cero.