1. Solución de problemas de valor inicial

Se verificará que la función $y = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$ es una solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12t, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = 1. \tag{1}$$

La ecuación diferencial es lineal, los coeficientes y la función $g(t) = 12t$ son continuas, y $a_2(t) = 1 \neq 0$ sobre cualquier intervalo I que contenga $t = 0$. Se concluye, del teorema 4.1.1 (véase REF Zill, pág. 118) que el problema de valor inicial que estamos considerando tiene solución única.

1. La ecuación $y'' - 4y = 12t$ es

   A) una ecuación diferencial lineal homogénea

   B) una ecuación diferencial lineal no homogénea

   C) una ecuación diferencial no lineal

   R=B

2. El problema de encontrar $y(t)$ tal que

   $$y'' - 4y = 12t, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = 1. \tag{2}$$

   es

   A) un problema de valor inicial

   B) un problema de solución única

   C) un problema de valores en la frontera

   R=A

3. Para resolver el problema de encontrar $y(t)$ tal que

   $$y'' - 4y = 12t, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = 1. \tag{3}$$

   primero se debe resolver

   A) la ecuación diferencial reducible a exacta

   B) la ecuación diferencial lineal homogénea asociada

   C) la ecuación diferencial dual

   R=B

4. La ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$ tiene asociada la ecuación característica

   A) $s^2 - 4s = 0$
   B) $s^2 + 4 = 0$
   C) $s^2 - 4 = 0$

   R=C

5. Las raíces de la ecuación característica asociada con $y'' - 4y = 0$ son

   A) $s_1 = 4,\ s_2 = -4$
   B) $s_1 = 2,\ s_2 = 2$
   C) $s_1 = 2,\ s_2 = -2$

   R=C

6. La solución de la ecuación $y'' - 4y = 0$ es de la forma

   A) $y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
   B) $y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$
   C) $y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{-2t}$

   R=B

7. Si definimos $y_p(t) = c_3 t$ (donde c_3 es una constante), y sustituimos $y = y_p(t)$ en $y'' - 4y = 12t$ se encuentra que la constante c_3 es igual a

   A) 12
   B) -4
   C) -3

   R=C

8. La solución del problema de encontrar $y(t)$ tal que $y'' - 4y = 12t$ sujeto a $y(0) = 4,\ y'(0) = 1$ es de la forma

   A) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t$ (donde el valor de c_3 ya se ha calculado)
   B) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t$ (donde el valor de c_3 ya se ha calculado)
   C) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_3 t$ (donde el valor de c_3 ya se ha calculado)

   R=B

9. Sustituyendo $t = 0$ y la condición inicial $y(0) = 4$ en su respuesta al reactivo anterior conduce a la ecuación

   A) $c_1 + c_2 = 4$
   B) $c_1 + 2c_2 = 4$
   C) $4c_1 + c_2 = 4$

   R=A

10. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se debe resolver para encontrar c_1 y c_2 de la solución al problema planteado? ($y'' - 4y = 12t$ sujeto a $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$)

    A) $c_1 + c_2 = 4$, $2c_1 - 2c_2 = 4$
    B) $c_1 + c_2 = 4$, $2c_1 + 2c_2 = 4$
    C) $c_1 + c_2 = 4$, $2c_1 - 2c_2 = 0$

    R=A

11. La solución al problema de encontrar $y(t)$ tal que $y'' - 4y = 12t$ sujeto a $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ es

    A) $y(t) = 3e^{2t} + te^{2t} - 3t$
    B) $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$
    C) $y(t) = e^{2t} + 3e^{-2t} - 3t$

    R=B

1.1. Obtención de la solución a un problema de valor inicial

Para resolver el problema de valor inicial: encontrar $y(t)$ tal que

$$y'' - 4y = 12t, \qquad y(0) = 4, \ y'(0) = 1. \tag{4}$$

primero se encuentra la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y = 0 \tag{5}$$

Sustituyendo, $y = k_0 e^{st}$ en (5), obtenemos la ecuación característica

$$s^2 - 4 = 0 \tag{6}$$

de lo cual, se obtienen las raíces $s_1 = 2$, $s_2 = -2$. Entonces, sabemos que la solución general de (5) es de la forma

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \tag{7}$$

Como sabemos que para cualesquiera dos constantes reales c_1 y c_2 (Ecu3) es solución de la ecuación diferencial lineal homogénea (5), esto es,

$$y_h'' - 4y_h = 0 \tag{8}$$

la solución del problema de valor inicial (1), debe ser de la forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{9}$$

Sustituyendo (9) en (1) se tiene que

$$y_h'' - 4y_h + y_p'' - 4y_p = 12t \tag{10}$$

Usando el hecho indicado por la ecuación (8), de (10) encontramos que

$$y_p'' - 4y_p = 12t \tag{11}$$

Una forma sistemática de encontrar $y_p(t)$, tendrá que esperar hasta que revisemos el tema de sistemas de ecuaciones y el método de variación de parámetros. Por ahora, sólo haremos una deducción medio ingeniosa, medio "mágica" de la solución para (11). Primero notamos que si y_p es una constante que multiplica a t, la segunda derivada de y_p es igual a cero. De tal manera que si $y_p = c_3 t$, (donde c_3 es una constante), $y_p'' = 0$; y se puede despejar y_p de (11):

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p &= 12t \\ 0 - 4y_p(t) &= 12t \\ -4y_p(t) &= 12t \\ y_p(t) &= -3t \end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$y_p(t) = -3t \tag{12}$$

Sustituyendo (7) y (12) en (9) tenemos

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - 3t \tag{13}$$

Finalmente para encontrar las constantes c_1 y c_2 se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - 3t\Big|_{t=0} = y(0) \tag{14}$$

$$2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} - 3\Big|_{t=0} = y'(0) \tag{15}$$

Con los valores iniciales $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$, el sistema (14)-(15) se convierte en

$$c_1 + c_2 = 4 \tag{16}$$

$$2c_1 - 2c_2 - 3 = 1 \tag{17}$$

es decir,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \qquad (18) \\ 2c_1 - 2c_2 &= 4 \qquad (19) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos que $c_1 = 3$ y $c_2 = 1$. Con lo que concluimos que la solución al problema de valor inicial que estamos resolviendo es

$$y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t \qquad (20)$$

Dicho de forma más elegante, la solución al problema de valor inicial: encontrar $y(t)$ tal que

$$y'' - 4y = 12t, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = 1. \qquad (21)$$

es

$$y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t \qquad (22)$$

REF. Dennis G. Zill, Michael Cullen, Differential Equations with Boundary Value Problems