

# 我国股市收益概率分布的统计特性分析

都国雄<sup>1,2</sup>, 宁宣熙<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 南京 210016; 2. 南京工业职业技术学院, 南京 210046)

**摘 要:** 本文根据我国上证综指和深证成指在过去七年中的高频数据, 分析了在六种时间标度(1分钟至60分钟)下股指收益的概率分布, 发现具有明显的尖峰和胖尾特征; 上证综指每分钟收益的概率分布和累积概率分布的渐近行为均遵循幂律关系, 特征指数分别为2.86和2.31, 均超出了利维稳定分布的范围, 这对风险管理和衍生产品定价非常重要; 利维稳定分布较好地描述了收益概率分布的中间区域, 上证综指和深证成指的利维指数分别为1.26和1.74, 都属于非线性分形系统, 前者的非线性动力学特征更明显。

**关键词:** 经济物理学; 中国证券指数; 概率分布; 利维分布

**中图分类号:** F830 **文献标识码:** A

## 1 引言

越来越多的研究表明, 一些金融理论的假设条件并不完全符合实证结果, 金融市场(如股票市场、汇率市场)是复杂的非线性动力学系统, 人们开始用新的视角来审视金融市场的变化特征及其规律, 从而在二十世纪八十年代由 Mantegna 和 Stanley 提出了经济物理学(econophysics)这一新的交叉学科<sup>[1]</sup>。它将物理学的知识、方法和理论应用于经济领域, 尤其是金融市场, 获得了许多具有重要理论意义和实际价值的研究成果。文献[2]将统计物理学中的标度概念引入金融市场, 分析了美国标准普尔500指数(S&P 500 index)、日本日经指数(NIKKEI index)和香港恒生指数(Hang-Seng index)的标度特性, 发现它们的收益分布都具有标度不变性(scale invariance)和幂律(power law)特性; 文献[3]对我国证券市场的波动特性进行了研究, 发现我国证券市场的波动存在持久性和特征时间标度。文献[4]将物理学在研究复杂系统时常用的混沌理论和分形几何学应用于金融市场波动特性的研究, 全面分析了美国证券市场的分形特征; 文献[5-9]分

别论述了日本、香港、巴西、台湾和上海等证券市场的分形和多重分形特征, 从而表明无论是成熟市场, 还是新兴市场, 证券市场的波动都存在分形特征。文献[10, 11]将平均场理论和重整化群理论应用于证券市场突变(stock market crashes)特征的研究, 发现道·琼斯指数和标准普尔500指数在1929年和1987年的大突变前都呈指数周期变化, 振荡幅度和周期都逐渐减小。文献[12, 13]将随机矩阵理论(random matrix theory)应用于标准普尔500中证券收益的相关矩阵研究, 通过分析特征值的分布和特征矢量的特性, 发现存在与随机矩阵之间的偏差, 这为研究风险管理和投资优化提供了新的途径。综上所述, 人们发现证券市场是一个复杂的非线性系统, 具有多重分形特征; 收益的概率分布并不完全遵循通常所认为的正态分布, 在一定时间标度内呈现尖峰瘦态(leptokurtic)和胖尾(fat-tail)分布, 并具有幂律特性。

对国外证券市场收益概率分布特性和分形特性的研究文献已比较多, 对我国证券市场分形特性的研究也略有报导, 但对我国证券市场收益的概率分布特性还暂无全面、成熟的研究。随着对证券市场各种数据记录技术的提高, 获取各种高频数据已成为可能。本文根据我国上海证券交易所综合指数(以下简称上证综指)和深圳证券交易所成份指数(以下简称深证成指)在六种时间标度(1分钟~60分钟)下的收盘指数, 研究分析收益序列的概率分布特征。

收稿日期: 2006-03-13; 修订日期: 2007-08-18

基金项目: 2005年江苏省高校自然科学研究据估计指导性计划资助项目(05KJD140087)

作者简介: 都国雄(1964), 男(汉族), 江苏无锡人, 南京航空航天大学经济与管理学院副教授, 博士研究生, 南京工业职业技术学院教师, 研究方向: 经济物理学, 非线性动力学。

## 2 理论背景

定义对称分布  $P(x)$  的傅立叶变换 (Fourier Transforms), 即特征函数 (characteristic function) 为  $\hat{P}(k)$ , 则可以用  $\hat{P}(k)$  的积分来表示  $P(x)$ :

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(k) e^{-ikx} dk \quad (1)$$

对于对称的利维稳定分布 (Lévy stable distribution)  $L(x)$ , 其傅立叶变换, 即特征函数为  $\hat{L}(k)$ :

$$\hat{L}(k) = \exp(-\gamma \cdot \Delta t \cdot |k|^a) \quad (2)$$

则

$$L(x, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma \cdot \Delta t \cdot k^a) \cos(kx) dk \quad (3)$$

其中  $a(0 < a \leq 2)$  称为利维特征指数,  $\gamma$  为标度因子,  $\Delta t$  为时间标度。

定义  $P(t)$  为证券市场收盘指数序列,  $Z(\Delta t)$  为收盘指数差分收益,

$$Z(\Delta t) \equiv P(t) - P(t - \Delta t) \quad (4)$$

根据(3)式,  $Z(\Delta t)$  所满足的利维稳定分布的表达式为

$$L(Z, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma \cdot \Delta t \cdot k^a) \cos(kZ) dk \quad (5)$$

当  $\Delta t=1$  时, 有

$$L(Z, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma \cdot k^a) \cos(kZ) dk \quad (6)$$

上式中, 当  $Z=0$  时, 令  $k=t^{1/a}$ , 则  $dk = \frac{1}{a} t^{\frac{1}{a}-1} dt$ , 积分得:

$$L(0, 1) = \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{\pi a \gamma^{1/a}} \quad (7)$$

其中,  $\Gamma(x)$  称为 Gamma 函数,  $\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} k^{x-1} e^{-k} dk (x > 0)$ 。

当  $|Z| \rightarrow \infty$  时, (6) 式的积分结果为

$$L(Z, 1) \approx \Gamma(1+a) \cdot \frac{\gamma \sin(\pi a/2)}{\pi} \cdot |Z|^{-(1+a)} \quad (8)$$

即其渐近行为 (asymptotic behavior) 呈幂律关系。

利维稳定分布和正态分布都具有对称性, 但两者的主要区别是前者呈现尖峰瘦态和胖尾特征。利维稳定分布的重要特征之一是自相似性, 也就是说, 当我们将不同时间标度标准化后, 不同时间标度的分布曲线将趋于重合。Mantegna 和 Stanley 在研究美国标准普尔 500 指数的标度特性时, 提出了很

好的变换方法, 即对于不同的时间标度, 当我们按

$$Z_1 \equiv \frac{Z_2}{(\Delta t)^{1/a}} \quad (9)$$

进行标准化后, (5) 式变为

$$L(Z_1, 1) = \frac{L(Z, \Delta t)}{(\Delta t)^{-1/a}} \quad (10)$$

这表明, 不同时间标度的分布标准化后将与  $\Delta t=1$  时的分布重合。如果实证中, 能实现这一目标, 则说明收益的概率分布遵循利维稳定分布。

## 3 实证分析

我们将上证综指和深证成指在 1998 年 5 月 4 日~2005 年 6 月 1 日间六种时间标度的连续不重复的收盘指数序列作为研究样本。这六种时间标度依次为 1 分钟、5 分钟、10 分钟、20 分钟、40 分钟和 60 分钟, 其中 1 分钟的数据量达 40 多万个。所有数据来源于深圳天软金融分析 (Shenzhen Tinysoft's Financial Database), 全部程序和图形都采用 Matlab 编写、绘制。

### 3.1 收益的概率分布

根据有效市场假设 (EMH), 收益的概率分布服从正态分布, 但实证研究表明, 许多证券市场交易指数的收益序列, 无论是 (4) 式定义的差分收益, 如美国标准普尔 500 指数<sup>[14]</sup>, 还是 (11) 式定义的对数差分收益

$$z(\Delta t) \equiv \ln P(t) - \ln P(t - \Delta t) \quad (11)$$

如美国标准普尔 500 指数、布达佩斯证券交易指数<sup>[16]</sup>、巴西圣保罗证券交易指数<sup>[17,18]</sup>; 无论是时间标度短至 1 分钟<sup>[14,15]</sup>, 还是长至 1 天<sup>[15,17]</sup>, 甚至 20 天<sup>[8]</sup>, 收益的概率分布均呈现尖峰瘦态和胖尾特征。

通过对我国证券市场收益的概率分布的研究, 发现也存在偏离正态分布的尖峰瘦态特征。以上证综指 1 分钟收盘指数收益序列的概率分布为例 (图 1), 与同方差的正态分布相比, 具有明显的尖峰瘦态形状。为了比较尾部情况, 我们将上图的纵坐标取对数, 以放大尾部分布 (图 2), 发现具有明显的胖尾特征。由此可见, 我国证券市场的收益变化遵循非线性动力学过程。

进一步将图 1 的坐标轴都变为对数形式 (收益取绝对值), 发现在收益概率分布曲线的中间段, 概率与收益呈幂律关系,  $P(Z) \propto Z^{-\beta}$ , 特征指数  $\beta$  为 2.86 (图 3)。这一结果超出了利维稳定分布的范围 ( $0 < \beta \leq 2$ ), 类似于美国标准普尔 500 指数每分钟数据的研究结果<sup>[2]</sup>, 表明分布的方差或二阶矩 (the

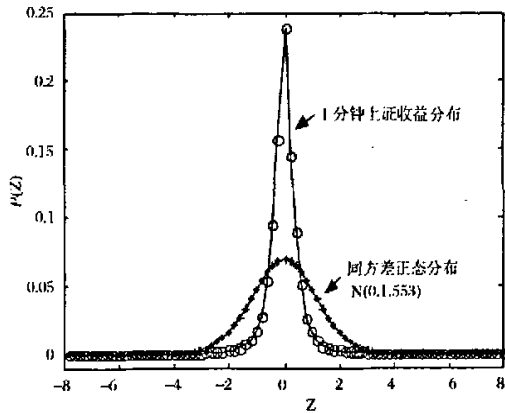


图 1 收益概率分布与同方差正态分布的比较

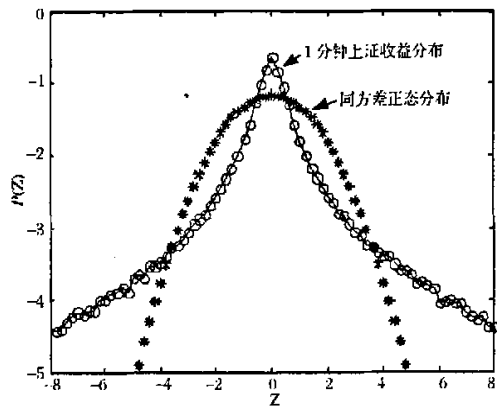


图 2 收益概率的对数分布与同方差正态分布的比较  
second moment) 是有限的。这对风险管理和衍生产品的定价是非常重要的。

图 4 是上证综指收益序列在不同时间标度下的累积概率分布曲线,可以发现它们具有较好的一致性。图 5(a)和图 5(b)是其中时间标度分别为 1 分钟

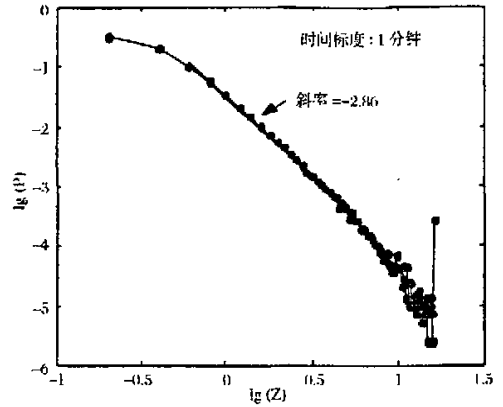


图 3 概率与收益的双对数曲线

和 60 分钟时的分布曲线。不难发现,两者的中间部分也呈幂律分布,特征指数分别为 2.31 和 2.71,同样超出了利维稳定分布的范围。

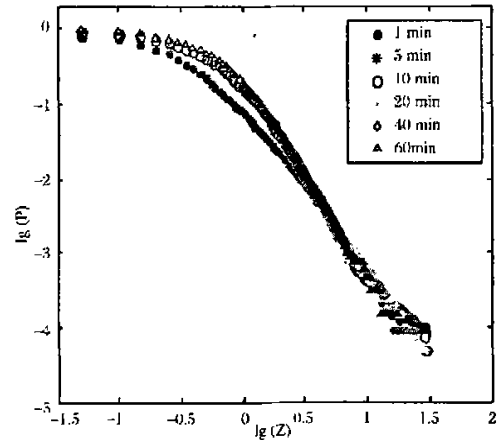


图 4 不同时间标度收益的累积概率分布

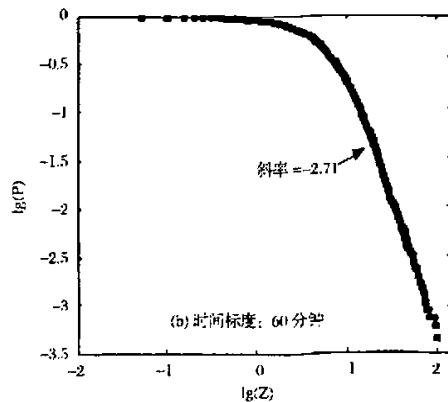
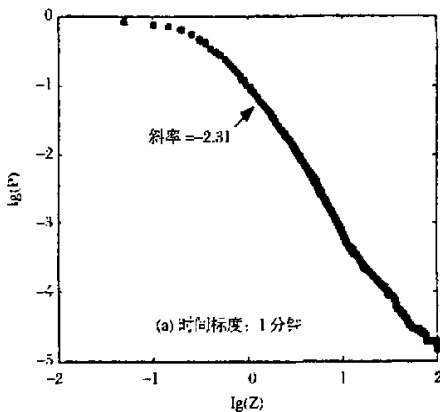


图 5 时间标度为 1 分钟和 60 分钟时收益的累积概率分布

3.2 不同时间标度收益概率分布的比较

图 4 反映了不同时间标度收益累积概率分布之间的一致性。为了进一步考察它们之间的关系,我

们描绘了不同时间标度收益概率分布的半对数曲线,如图 6 和图 7 所示。不难发现,分布几乎是对称的,且随着时间标度的增大,分布逐渐扩散。

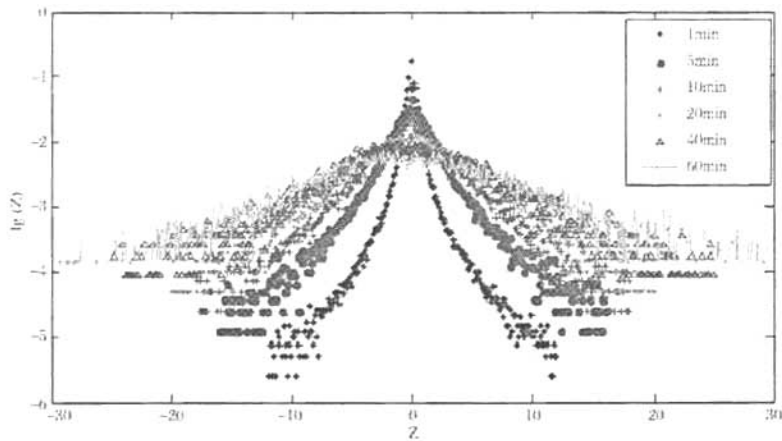


图 6 不同时间标度上证综指收益的概率分布

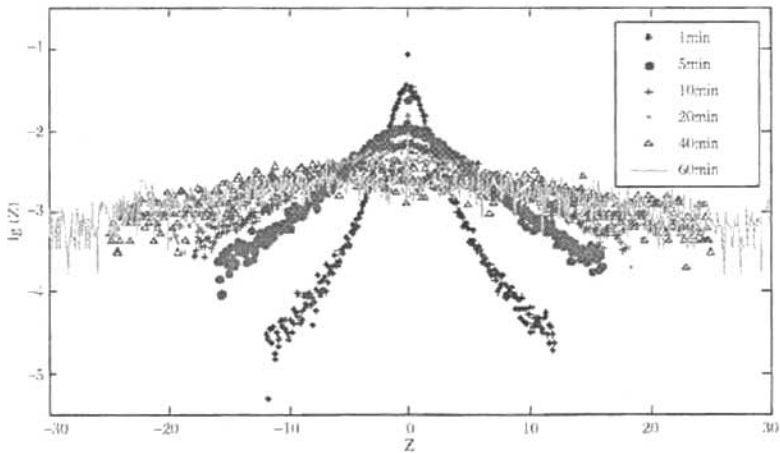


图 7 不同时间标度深证成指收益的概率分布

3.3 利维指数值  $\alpha$  的估计

为了估计利维特征指数  $\alpha$  的大小,Mantegna 和 Stanley 提出了计算的方法<sup>[14]</sup>。这一方法已被证明是正确和可行的。

首先,计算收益  $Z(\Delta t)=0$  时的概率  $P[Z(\Delta t)=0]$ ,如表 1 所示。

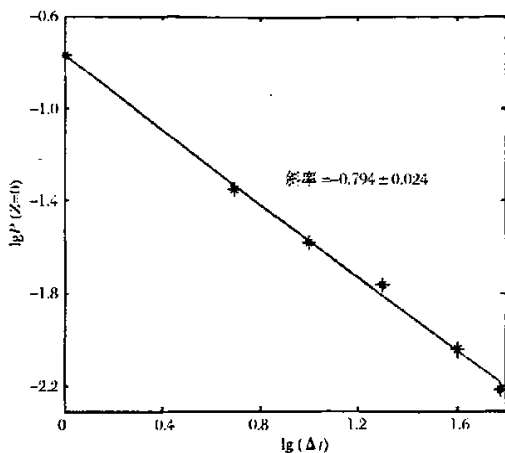
其次,用最小二乘法拟合  $\lg P[Z(\Delta t)=0]$  随  $\lg(\Delta t)$  变化的曲线,分别如图 8 和图 9 所示。拟合曲线为直线,表明  $P(Z=0)$  与  $\Delta t$  之间具有幂律关系,  $P \propto (\Delta t)^{\alpha}$ 。

最后,计算直线的斜率。上述拟合直线的斜率

表 1 收益为零的概率值

$\Delta t$ (分钟)	$\lg(\Delta t)$	上证综指	深证成指
		$\lg P[Z(\Delta t)=0]$	$\lg P[Z(\Delta t)=0]$
1	0	-0.7674	-1.0605
5	0.6990	-1.3486	-1.6082
10	1	-1.5759	-1.8162
20	1.3020	-1.7588	-1.8277
40	1.6021	-2.0375	-1.9724
60	1.7782	-2.2104	-2.0184

分别为  $\lambda_{\text{上}}=-0.7940.024$  和  $\lambda_{\text{深}}=-0.5730.082$ , 均不同于正态分布时的斜率-0.5。美国标准普尔 500 指数的拟合直线的斜率为  $-0.712 \pm 0.025$ <sup>[14]</sup>,

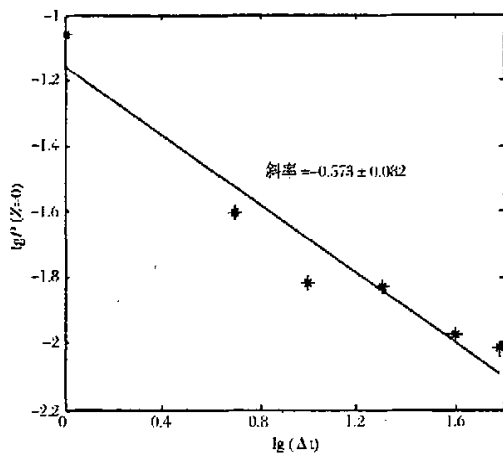
图 8 上证综指拟合曲线(斜率  $\lambda_p = -0.794 \pm 0.024$ )

与上证综指的结果非常接近。

根据  $\lambda$  和  $\alpha$  的关系

$$\alpha = -1/\lambda^{[14]} \quad (12)$$

可知上海证券市场和深圳证券市场的利维特征指数分别为  $\lambda_p = 1.26$  和  $\lambda_m = 1.74$ 。两者都小于 2 (等于 2 为正态分布), 说明两市的收益序列都呈现尖峰胖尾的利维分布, 都是非线性分形系统;  $\lambda_p < \lambda_m$ , 表明上证综指的收益序列具有更“胖”的尾部。

图 9 深证成指拟合曲线(斜率  $\lambda_m = -0.573 \pm 0.082$ )

### 3.4 标准化后的概率分布

根据(9)式, 将收益标准化后, 上证综指和深证成指的概率分布分别如图 10 和图 11 所示, 六条曲线几乎重叠在一起, 尤其是在中间区域, 上证综指的实证情况明显优于深证成指的情况。由此, 我们可以得出结论, 在两个数量级上, 利维稳定分布能较好地描述证券市场收益概率分布的动力学过程。

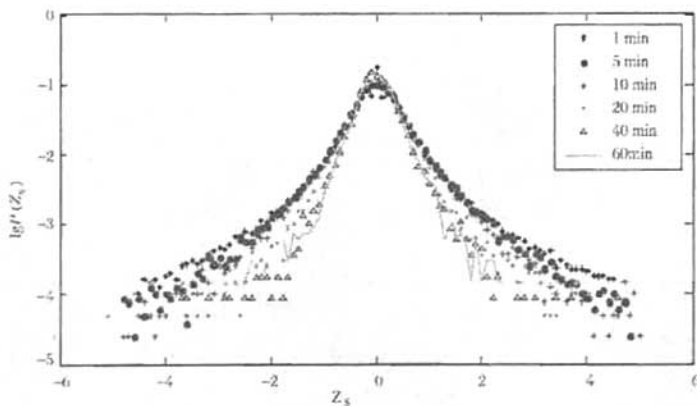


图 10 重标后上证综指收益的概率分布

## 4 结语

作者根据上证综指和深证成指在过去七年中不同时间标度的高频数据, 对收益的波动特性进行了实证分析, 发现收益的概率分布不仅具有明显的尖峰胖尾特征和标度不变性, 而且遵循渐近幂律特性, 利维稳定分布较好地描述了分布的中间区域, 利维特征指数分别为 1.26 和 1.74, 表明价格波动具有

非线性分形特征。这类似于国外证券市场的特征指数(美国标准普尔 500 指数、布达佩斯和巴西证券市场的利维特征指数分别为 1.40<sup>[14]</sup>、1.6<sup>[16]</sup> 和 1.64<sup>[18]</sup>)。由此可见, 无论是成熟的证券市场, 还是新兴的证券市场, 收益的概率分布都可以用利维稳定分布和幂律分布的组合来描述, 而且特征指数非常接近, 表明不同国家或地区证券市场的价格波动具有某种共性。

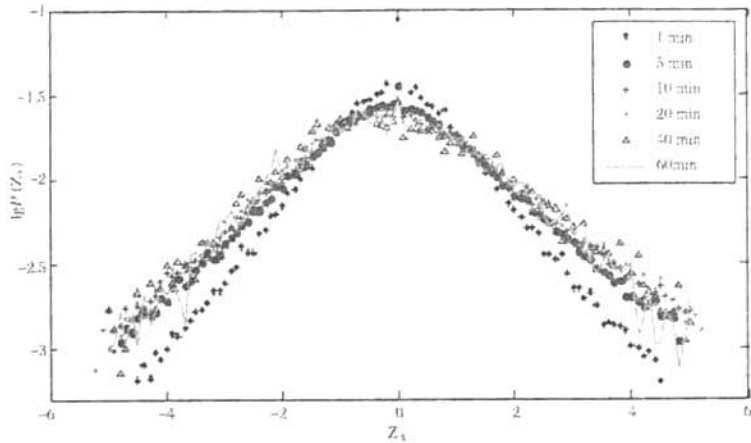


图 11 重标后深证成指收益的概率分布

同时,作者认为,虽然高频数据更能反映证券市场动态演变过程的微观结构,但由于我国证券市场详细记录高频数据的时间还比较短,证券市场的规范性还有待提高,因此数据分析的结果还不很理想。

证券市场的收益直接于投资者的利益有关,因此对证券市场收益分布特征的研究具有重要意义。本文对收益波动的外在表现进行了实证分析,为进一步研究波动的微观动力学机理提供了实证基础。

#### 参考文献:

- [1] R. N. Mantegna, H. E. Stanley. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [2] Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, Luis A. Nunes Amaral, et al. Scaling of the distribution on fluctuations of financial market indices [J]. Physical Review E, 1999, 60(5): 5305—5316.
- [3] 魏宇,黄登仕. 中国股票市场波动持久性特征的 DFA 分析[J]. 中国管理科学, 2004, 12(4): 12—19.
- [4] [美]埃德加·E·彼得斯著,储海林,殷勤译. 分形市场分析——将混沌理论应用到投资与经济理论上[M]. 北京: 经济科学出版社, 2002.
- [5] Hiroaki Katsuragi. Evidence of multi-affinity in the Japanese stock market [J]. Physica A, 2000, 278: 275—281.
- [6] Xia Sun, Huiping Chen, Ziqin Wu, Yongzhuang Yuan. Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market [J]. Physica A, 2001, 291: 553—562.
- [7] Rogério L. Costa, G. L. Vasconcelos. Long-range correlations and nonstationary in the Brazilian stock market [J]. Physica A, 2003, 329: 231—248.
- [8] Ding-Shun Ho, Chung-Kung Lee, Cheng-Cai Wang, et al. Scaling characteristics in the Taiwan stock market [J]. Physica A, 2004, 332: 448—460.
- [9] 何建敏,常松. 中国股票市场多重分形游走及其预测 [J]. 中国管理科学, 2002, 10(3): 11—17.
- [10] Didier Sornette, Anders Johansen. Large financial crashes [J]. Physica A, 1997, 245: 411—422.
- [11] N. Vandewalle, Ph. Boveroux, A. Minguet, et al. The crash of October 1987 seen as a phase transition: amplitude and universality [J]. Physica A, 1998, 255: 201—210.
- [12] Laurent Laloux, Pierre Cizeau, Jean-Philippe Bouchaud, et al. Noise Dressing of Financial Correlation Matrices [J]. Physical Review Letters, 1999, 83(7): 1467—1470.
- [13] Vasiliki Plerou, Parameswaran Gopikrishnan, Bernd Rosenow, et al. Universal and Nonuniversal Properties of Cross Correlations in Financial Time Series [J]. Physical Review Letters, 1999, 83(7): 1471—1474.
- [14] R. N. Mantegna, H. E. Stanley. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index [J]. Nature, 1995, 376: 46—49.
- [15] L. Kullmann, J. Tótyli, J. Kertesz, et al. Characteristic times in stock market indices [J]. Physica A, 1999, 269: 98—110.
- [16] Zoltán Palágyi, Rosario N. Mantegna. Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market [J]. Physica A, 1999, 269: 132—139.
- [17] L. Couto Miranda, R. Riera. Truncated Lévy walks and an emerging market economic index [J]. Physica A, 2001, 297: 509—520.
- [18] Iram Gleria. Scaling power laws in the Sao Paulo Stock Exchange [J]. Economics Bulletin, 2002, 7(3): 1—12.

## Statistical Properties of Probability Distributions of Returns in Chinese Stock Markets

DU Guo-xiong<sup>1,2</sup>, NING Xuan-xi<sup>1</sup>

- (1. School of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;  
2. Nanjing Institute of Industry and Technology, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** According to the high-frequency closing stock index in Shanghai and Shenzhen during the past seven years, we study the probability distributions and the accumulative distributions of returns over the six different time scales. We find that both distributions for time scale of 1min in Shanghai are consistent with a power-law asymptotic behavior, characterized by exponents 2.86 and 2.31. We also find that the time evolution of returns is well described by the Lévy stable distribution with Lévy exponents 1.26 (in Shanghai) and 1.74 (in Shenzhen) respectively.

**Key words:** econophysics; chinese stock index; probability distribution; Lévy distribution