Лабораторная работа №5.

Решение задач массового обслуживания методами имитационного моделирования

Цель работы: научиться оценивать надежность простейших систем методом Монте-Карло; научиться рассчитывать СМО с отказами методом Монте-Карло.

Краткие теоретические сведения.

Суть имитационного моделирования

Имитационное моделирование – получение экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, кроме как экспериментируя с его моделью на ЭВМ.

Имитационный объект имеет вероятностный характер функционирования. Для исследователя представляют интерес выводы, носящие характер статистических показателей, оформленных, может быть, даже в виде графиков или таблиц, в которых каждому варианту исследуемых параметров поставлены в соответствие определенные средние значения с набором характеристик их распределения, без получения зависимости в аналитическом виде.

Эта особенность является и достоинством, и одновременно, недостатком имитационных моделей. Достоинство в том, что резко расширяется класс изучаемых объектов, а недостаток – в отсутствии простого управляющего выражения, позволяющего прогнозировать результат повторного эксперимента. Но в реальной жизни также невозможно для сколько-нибудь сложного объекта получить точное значение экономического показателя, а только лишь его ожидаемое значение с возможными отклонениями.

Главной функцией имитационной модели является воспроизведение с заданной степенью точности прогнозируемых параметров её функционирования, представляющих исследовательский интерес. Как объект, так и его модель, должны обладать системными признаками.

Функционирование объекта характеризуется значительным числом параметров. Особое место среди них занимает временной фактор. В большинстве моделей имеется возможность масштабирования или введения машинного времени, т. е. интервала, в котором остальные параметры системы сохраняют свои значения или заменяются некоторыми обобщенными величинами. Таким образом, за счет этих двух процессов – укрупнения единицы временного интервала и расчета событий этого интервала за зависящий от мощности ЭВМ временной промежуток – и создается возможность прогноза и расчета вариантов управленческих действий.

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло является методом статистического моделирования или имитационного моделирования. Это численный метод решения задач при помощи моделирования случайных величин.

Идея метода чрезвычайно проста и состоит в следующем.

Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, проводится розыгрыш случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. Реализация случайного процесса каждый раз складывается по-разному, т. е. мы получаем различные исходы рассматриваемого процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки можно получить: вероятность события, математическое ожидание и т. д.

При помощи метода Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он является тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло

Пример 1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система отказывает при отказе хотя бы одного блока.

Первый блок содержит два элемента: A, B (они соединены параллельно) и отказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй – содержит один элемент C и отказывает при отказе этого элемента.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0.8, P (B)=0.85, P (C)=0.6;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$ найденного значения, где P-надежность системы, вычисленная аналитически.

Произвести 50 испытаний.

Решение:

а) С помощью генератора случайных чисел получаем (или выбираем из специальных таблиц равномерно распределенных случайных чисел) три случайных числа, например: 0.10, 0.09 и 0.73; далее считаем, если случайное число меньше вероятности соответствующего события, то событие наступило (элемент работает безотказно); если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило (отказ).

Разыграем события A, B, C, состоящие в безотказной работе соответственно элементов A, B, C. Результаты испытания будем записывать в расчетную таблицу. Поскольку P(A)=0.8 и 0.10 <0.8, то событие наступило, т.е. элемент A в этом испытании работает безотказно. Так как P(B)=0.85 и 0.09<0.85, то событие B наступило, т.е. элемент B работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках таблицы 1 ставим знак плюс (или 1).

Так как P(C)=0.6 и 0.73>0.6, то событие C не наступило, т.е. элемент C получает отказ; другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках таблицы 1 ставим знак минус (или 0).

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В таблице 1 приведены результаты четырех испытаний.

Таблица 1.

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
					элементов			блоков	системы
		A	B	C	A	B	C		
1	Первый Второй	0,10	0,09	0,73	+	+	-	+ -	-
2	Первый Второй	0,25	0,33	0,76	+	+	-	+ -	-
3	Первый Второй	0,52	0,01	0,35	+	+	+	+ +	+
4	Первый Второй	0,86	0,34	0,67	-	+	-	+ -	-

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности P примем относительную частоту $P^*=28/50=0.56$.

б) Найдем надежность системы P аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

$$P_1 = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0.2 \cdot 0.15 = 0.97, \qquad P_2 = P(C) = 0.6$$

Вероятность безотказной работы системы

$P=P_1 \cdot P_2=0.97 \cdot 0.6=0.582$

Искомая абсолютная погрешность равна $|P-P^*|=0.582-0.56=0.022$.

Расчет СМО с отказами методом Монте-Карло

Пример 2. В трехканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время T=4 мин.

Решение:

Пусть $T_1=0$ – момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки $T_1+0.5=0+0.5=0.5$. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле

$T_i= T_{i-1}+\tau_i$,

где τ_i - длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами i-1 и i.

Возможные $\tau_i = -(1/\lambda)\ln r_i$.

Учитывая, что, по условию, λ=5, получим $\tau = -0.2 \ln r_i$.

Случайные числа r_i генерируем с помощью генератора случайных чисел (функция СЛЧИС() в MS Excel). Пусть время между поступлениями первой и второй заявок – случайное число, равное r_1=0.10.

Тогда $\tau_2=-0.2\cdot\ln(0.10)=0.460$. Первая заявка поступила в момент T_1=0. Следовательно, вторая заявка поступила в момент $T_2=T_1+0.460=0+0.460=0.460$. В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй и будет им обслужена.

Момент окончания обслуживания второй заявки $T_2+0.5=0.460+0.5=0.960$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

По очередному случайному числу r_2=0.09 разыграем время τ_3 между поступлениями второй и третьей заявок:

$\tau_3=-0.2\cdot\ln(0.09)=0.2\cdot2.41=0.482$.

Вторая заявка поступила в момент T_2=0,460. Поэтому третья заявка поступила в момент $T_3=T_2+0.482=0.460+0.482=0.942$. В этот момент первый канал уже свободен, и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки $T_3+0.5=0.942+0.5=1.442$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу. Дальнейший расчет производят аналогично (таблица 2), причем, если в момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент 4.148>4, поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки T>4.

Таблица 2.

номер заявки i	Случайное число r_i	$-\ln r_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i=0,2(-\ln r_i)$	Момент поступления заявки $T_i= T_{i-1}+\tau_i$	Момент $T_i+0,5$ окончания обслуживания заявки каналом			Счетчик	
					1	2	3	Обслуженных заявок	отказов
1				0	0,500			1	
2	0,10	2,30	0,460	0,460		0,960		1	
3	0,09	2,41	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,130	1,690					1
9	0,01	4,60	0,920	2,610	3,110			1	
10	0,35	1,05	0,210	2,820		3,320		1	
11	0,86	0,15	0,030	2,850			3,350	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,080	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,210	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,002		1
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,010	3,610					1
19	0,90	00,10	0,020	3,630					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148				1
21	0,17	1,77	0,354	4,002					
				(стоп)			итого	X_1=12	8

Из таблицы находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено x_1 =12. Выполним аналогично еще пять испытаний, получим:

x_2=15, x_3=14, x_4=12, x_5 =13, x_6=15.

В качестве оценки искомого математического ожидания a – числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю:

$a = \overline{x}$=(2·12+13+14+2·15)/6=13.5.

Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта равен остатку от деления на 4 номера студента по списку в журнале группы (если остаток равен 0, берем 4-й вариант).

Работу можно выполнить с помощью MS Excel или написать программу на одном из языков программирования.

Вариант 1

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: A, B, C, а второй - два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,8; P(B)=0,9; P(C)=0,85; P(D)=0,7; P(E)=0,78;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 100 испытаний.

2. В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=4e^{-4\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=8 мин.

Вариант 2

1 Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй- три элемента: C, D, E. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,8; P(B)=0,9; P(C)=0,7; P(D)=0,75; P(E)=0,8;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 80 испытаний.

2 В трехканальную СМО с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau)=2e^{-2\tau}$; время обслуживания заявок 1,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время T=7 мин.

Вариант 3

1 Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: A, B, C, а второй – два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,9; P(B)=0,88; P(C)=0,95; P(D)=0,8; P(E)=0,7;

б) найти абсолютную погрешность $|P^*-P|$, где P- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 85 испытаний.

2 В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 4e^{-4\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время T=6 мин.

Вариант 4

1 Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй – три элемента: C, D, E. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,86; P(B)=0,75; P(C)=0,8; P(D)=0,85; P(E)=0,9;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 70 испытаний.

2 В трехканальную СМО с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau) = 8e^{-8\tau}$; время обслуживания заявок = 1 мин.

Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=8 мин.