

Una introducción a los números p -ádicos, su aritmética y algunas simulaciones en Python

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR POR EL
TÍTULO DE MATEMÁTICO

Autor: Edgar Steven Baquero Acevedo

Supervisor: Leonardo Fabio Chacón Cortés, Ph. D.

12 de junio de 2020



Motivación



Figura 1: *Kurt Hensel*

Contenido

Notación

El campo de los números p -ádicos

Topología en \mathbb{Q}_p

Aritmética p -ádica

Sucesiones y series de números p -ádicos

Una mirada algebraica de los números p -ádicos

Modelando números p -ádicos

Laplaciano sobre árboles

Sobre el uso del paquete

Notación

Unidades, decenas y centenas...

Sistemas numéricos

Así:

- Se puede expandir un número por cualquier base q .
- Ejemplos conocidos de sistemas de numeración son el *octal*, *hexadecimal* y *binario*, entre otros.

Ejemplo

Podemos representar el siguiente número:

$$2 \cdot 8^{-2} + 2 \cdot 8^{-1} + 3 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^2,$$

por 743,22 ($q = 8$), o también $743,22_8$.

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.
- Por ejemplo con $p = 2$, el ¡Sistema binario!

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.
- Por ejemplo con $p = 2$, el ¡Sistema binario!
- En general, una expansión de la forma.

$$x = \sum_{k=-\gamma}^J a_k p^k, \text{ con } \gamma \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, p-1\},$$

será

$$a_J \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-\gamma} p. \quad (1.1)$$

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.
- Por ejemplo con $p = 2$, el ¡Sistema binario!
- En general, una expansión de la forma.

$$x = \sum_{k=-\gamma}^J a_k p^k, \text{ con } \gamma \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, p-1\},$$

será

$$a_J \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-\gamma} p. \quad (1.1)$$

- ¿Deberíamos llamar a las expansiones, expansiones pesimales?

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.
- Por ejemplo con $p = 2$, el ¡Sistema binario!
- En general, una expansión de la forma.

$$x = \sum_{k=-\gamma}^J a_k p^k, \text{ con } \gamma \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, p-1\},$$

será

$$a_J \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-\gamma} p. \quad (1.1)$$

- ¿Deberíamos llamar a las expansiones, expansiones pesimales?
- Usaremos los términos: expansión (representación) p -ádica ó *Código de Hensel*.

Representación que usamos

- Particularmente, estamos interesados en expansiones sobre bases primas.
- Por ejemplo con $p = 2$, el ¡Sistema binario!
- En general, una expansión de la forma.

$$x = \sum_{k=-\gamma}^J a_k p^k, \text{ con } \gamma \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, p-1\},$$

será

$$a_J \dots a_2 a_1 a_0, a_{-\gamma} a_{-\gamma-1} \dots a_{-2} a_{-1} p. \quad (1.1)$$

- ¿Deberíamos llamar a las expansiones, expansiones pesimales?
- Usaremos los términos: expansión (representación) p -ádica ó *Código de Hensel*.
- Siendo así, ahora sí empecemos.

El campo de los números p -ádicos

Norma

Definición

Sea K un cuerpo. Una *norma* en K es una función $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $x, y \in K$ satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$,

Además, una norma $|\cdot|$ en K define una métrica natural dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Norma

Definición

Sea K un cuerpo. Una *norma* en K es una función $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $x, y \in K$ satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$,
2. $|xy| = |x| |y|$,

Además, una norma $|\cdot|$ en K define una métrica natural dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Norma

Definición

Sea K un cuerpo. Una *norma* en K es una función $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $x, y \in K$ satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Además, una norma $|\cdot|$ en K define una métrica natural dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Norma

Definición

Sea K un cuerpo. Una *norma* en K es una función $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $x, y \in K$ satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
4. Si $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$, para todo $x, y \in K$, decimos que la norma es *ultamétrica*, o que satisface la *desigualdad triangular fuerte*.

Además, una norma $|\cdot|$ en K define una métrica natural dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Equivalencia entre normas

Definición

Dos normas $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ sobre un cuerpo K se dicen *equivalentes* si inducen la misma topología sobre K .

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$.
2. Existen constantes k_1, k_2 positivas tales que:

$$k_1|x|_1 \leq |x|_2 \leq k_2|x|_1, \text{ para todo } x \in K.$$

3. Existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^c$.
4. Una sucesión (x_n) es de Cauchy respecto a $|\cdot|_1$ si, y sólo si, es de Cauchy respecto a $|\cdot|_2$.

Definición

Fijemos un primo p , sea $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ expresado de forma única como $x = p^v \frac{a}{b}$, donde v es un entero y a, b son primos relativos con p . Definimos la función $\|\cdot\|_p$ de la siguiente manera:

$$\|x\|_p = p^{-v},$$

donde el entero $v = v(x)$ se denomina el orden *p-ádico* de x y será denotado por $\text{Ord}(x)$. Por definición $\|0\|_p = 0$, y $\text{Ord}(0) = +\infty$.

Orden y Norma en \mathbb{Q}

Los 3 mosqueteros

Teorema (Fórmula Adélica del producto)

Sea $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \neq 0$, entonces:

$$\prod_p^{\infty} \|x\|_p = 1, \text{ con } \|x\|_{\infty} = |x| \text{ y } p \text{ primo.}$$

Teorema

$\|\cdot\|_p$ es una norma no arquimediana.

Teorema (Ostrowski)

Cualquier norma no trivial sobre \mathbb{Q} es equivalente al valor absoluto usual, o a una norma p -ádica $\|\cdot\|_p$, para algún primo p .

Sucesiones de Cauchy

Teorema

$(\mathbb{Q}, d(x, y) = \|x - y\|_p)$ y $(\mathbb{Q}, d(x, y) = |x - y|)$ no son espacios completos \circledast .

Teorema

\mathbb{Q}_p es la completación de \mathbb{Q} con la norma $\|\cdot\|_p$.

Teorema (Caracterización de sucesiones de Cauchy)

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{Q}_p es de Cauchy, si, y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|_p = 0. \quad (2.1)$$

Complejaciones de \mathbb{Q}_p

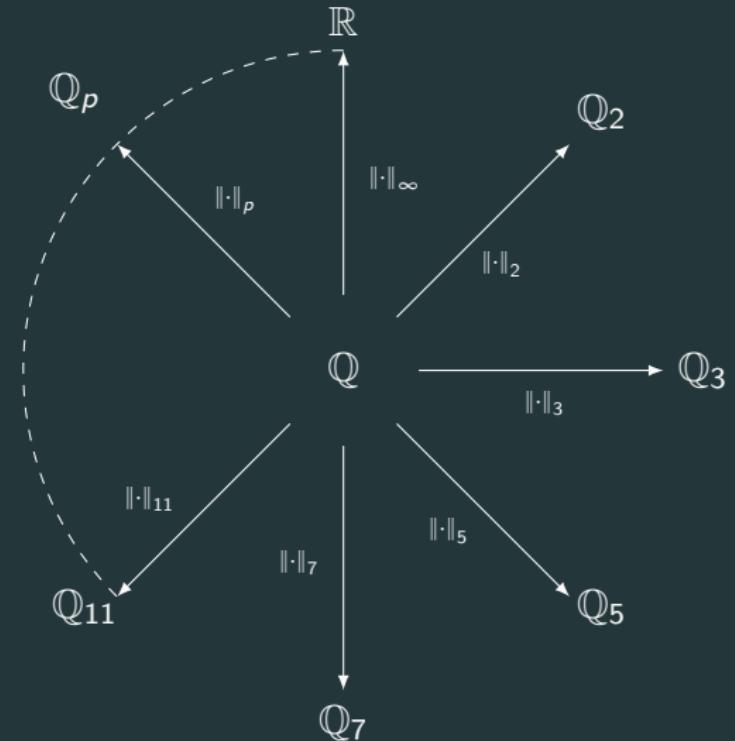


Figura 2: Complejaciones respecto a las distintas normas en \mathbb{Q}

Topología en \mathbb{Q}_p

El espacio \mathbb{Q}_p^n

Podemos definir en \mathbb{Q}_p^n una norma como:

$$\|x\|_p := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_p, \quad \text{para } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Así, $(\mathbb{Q}_p^n, d = \|x - y\|_p)$ es un espacio métrico, donde las distancias están en el conjunto $\{p^\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Luego, tiene sentido definir los abiertos básicos por:

$$B_\gamma^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \|x - a\|_p < p^\gamma\}, \quad \gamma \in \mathbb{Z}.$$

$$S_\gamma^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \|x - a\|_p = p^\gamma\}, \quad \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Observación

$B_\gamma^n(a)$ es un grupo aditivo.

Propiedades bonitas de \mathbb{Q}_p 😊

Teorema

- Si $b \in B_r(a)$, entonces $B_r(a) = B_r(b)$. En otras palabras:
¡Todo punto de una bola abierta es centro de la misma!

Propiedades bonitas de \mathbb{Q}_p 😊

Teorema

- Si $b \in B_r(a)$, entonces $B_r(a) = B_r(b)$. En otras palabras:
¡Todo punto de una bola abierta es centro de la misma!
- Toda bola es a su vez, un conjunto cerrado y abierto.

Propiedades bonitas de \mathbb{Q}_p ☺

Teorema

- Si $b \in B_r(a)$, entonces $B_r(a) = B_r(b)$. En otras palabras:
¡Todo punto de una bola abierta es centro de la misma!
- Toda bola es a su vez, un conjunto cerrado y abierto.
- Dos bolas en \mathbb{Q}_p son disyuntas o una contiene a la otra; es decir, si $a, b \in \mathbb{Q}_p$, y $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene que $B_r(a) \cap B_s(b) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $B_r(a) \subseteq B_s(b)$ o $B_s(b) \subseteq B_r(a)$.

Más propiedades de \mathbb{Q}_p

Teorema

\mathbb{Q}_p es un espacio de *Hausdorff* localmente compacto.

Teorema

$\{B_\gamma(a) : r \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Q}_p\}$ es contable.

Teorema

\mathbb{Q}_p es totalmente desconexo.

Un corolario simple y bonito

Lema

Sean $x, y \in \mathbb{Q}_p$ tales que $\|x\|_p \neq \|y\|_p$, entonces:

$$\|x + y\|_p = \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\}.$$

Corolario

Todos los triángulos en \mathbb{Q}_p son isósceles.

Un corolario simple y bonito

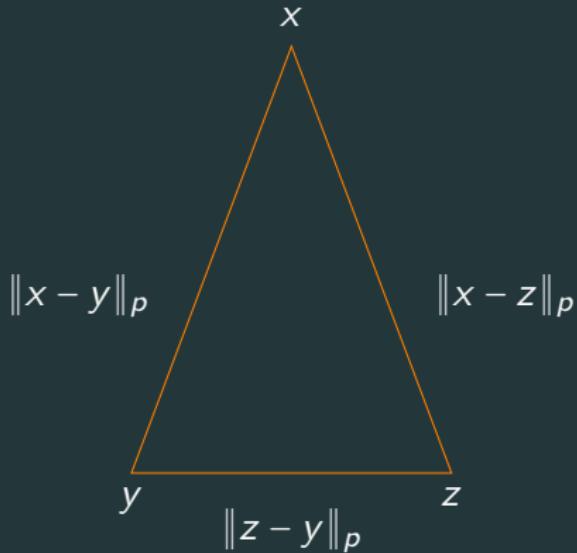


Figura 3: Todos los triángulos en \mathbb{Q}_p son isósceles

Aritmética p -ádica

Expansiones p -ádicas de enteros

- Podemos expandir por cualquier base p un número $n \in \mathbb{Z}$

Expansiones p -ádicas de enteros

- Podemos expandir por cualquier base p un número $n \in \mathbb{Z}$
- El procedimiento es algorítmico:

$$a_0 = n \bmod p \implies n_1 = \frac{n - a_0}{p},$$

$$a_1 = n_1 \bmod p \implies n_2 = \frac{n_1 - a_1}{p},$$

$$a_2 = n_2 \bmod p \implies n_3 = \frac{n_2 - a_2}{p},$$

⋮

Expansiones p -ádicas de enteros

- Podemos expandir por cualquier base p un número $n \in \mathbb{Z}$
- El procedimiento es algorítmico:

$$a_0 = n \bmod p \implies n_1 = \frac{n - a_0}{p},$$

$$a_1 = n_1 \bmod p \implies n_2 = \frac{n_1 - a_1}{p},$$

$$a_2 = n_2 \bmod p \implies n_3 = \frac{n_2 - a_2}{p},$$

⋮

- Así, la representación de un entero p -ádico por dígitos está dada por 1.1

$$n = a_1 \dots a_3 a_2 a_1 a_0{}_p,$$

Expansiones p -ádicas de enteros

- Podemos expandir por cualquier base p un número $n \in \mathbb{Z}$
- El procedimiento es algorítmico:

$$a_0 = n \bmod p \implies n_1 = \frac{n - a_0}{p},$$

$$a_1 = n_1 \bmod p \implies n_2 = \frac{n_1 - a_1}{p},$$

$$a_2 = n_2 \bmod p \implies n_3 = \frac{n_2 - a_2}{p},$$

⋮

- Así, la representación de un entero p -ádico por dígitos está dada por 1.1

$$n = a_1 \dots a_3 a_2 a_1 a_0{}_p,$$

- La representación es conocida como el *Código de Hensel* de n .

Expansiones p -ádicas de enteros

Ejemplo

Sea $n = 5353$ y sea $p = 5$, entonces la representación p -ádica de 5353 en base 5 está dada por:

$$a_0 = 5353 \bmod 5 = 3 \implies n_1 = \frac{5353 - 3}{5} = 1070,$$

$$a_1 = 1070 \bmod 5 = 0 \implies n_2 = \frac{1070 - 0}{5} = 214,$$

$$a_2 = 214 \bmod 5 = 4 \implies n_3 = \frac{214 - 4}{5} = 42,$$

$$a_3 = 42 \bmod 5 = 2 \implies n_4 = \frac{42 - 2}{5} = 8,$$

$$a_4 = 8 \bmod 5 = 3 \implies n_5 = \frac{8 - 3}{5} = 1,$$

$$a_5 = 1 \bmod 5 = 1 \implies n_6 = \frac{1 - 1}{5} = 0.$$

En otras palabras, el código de Hensel de 5353 es 132403_5 .

Expansiones p -ádicas de racionales

Consideremos x tal que su serie de expansión es

$$\begin{aligned}x &= 2 + 3p + p^2 + 3p^3 + p^4 + 3p^5 + p^6 + \dots \\&= 2 + 3p\left(1 + p^2 + p^4 + \dots\right) + p^2\left(1 + p^2 + p^4 + \dots\right) \\&= 2 + (3p + p^2)\left(1 + p^2 + p^4 + \dots\right).\end{aligned}$$

Como $1 + p^2 + p^4 + \dots$ converge a $(1 - p^2)^{-1}$, tenemos

$$x = 2 + \frac{3p + p^2}{1 - p^2}.$$

Como caso particular, tomando $p = 5$, tenemos que

$$x = 2 + \frac{3 \cdot 5 + 5^2}{1 - 5^2} = \frac{1}{3},$$

por lo tanto, la expansión 5-ádica de $\frac{1}{3}$ es $\cdots 1313132_5$.

Ejemplos de expansiones p -ádicas sobre racionales

Ejemplo

$$14,31_5 = 1 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 = 241/25$$

$$1413_5 = 1 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 241$$

$$14310_5 = 0 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 = 1205$$

Suma

Sean $\alpha = (a_i)$ y $\beta = (b_i)$ dos enteros p -ádicos. Definimos la suma como una sucesión (c_i) de dígitos p -ádicos apoyados de una sucesión (ϵ_i) en $\{0, 1\}$ (*carries*), tales que:

- $\epsilon_0 = 0$,

Suma

Sean $\alpha = (a_i)$ y $\beta = (b_i)$ dos enteros p -ádicos. Definimos la suma como una sucesión (c_i) de dígitos p -ádicos apoyados de una sucesión (ϵ_i) en $\{0, 1\}$ (*carries*), tales que:

- $\epsilon_0 = 0$,
- $c_i = a_i + b_i + \epsilon_i$ ó $c_i = a_i + b_i + \epsilon_i - p$, donde alguno de los dos es un dígito p -ádico; es decir, $c_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Dado el caso de c_i se tendrá que $\epsilon_{i+1} = 0$ o $\epsilon_{i+1} = 1$.

Suma

Ejemplo

- Tomando $p = 7$, se tiene:

$$\begin{array}{r} \cdots & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ + & \cdots & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \cdots & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{array}$$

- $0 - 1$ en los 7-ádicos:

$$\begin{array}{r} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \cdots & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

Esto quiere decir que $-1 = \cdots 666_7$.

Numeros unidades

Definición

Un número p -ádico es llamado *unidad* si no es múltiplo de una potencia negativa de p y su primer dígito no es 0; más aún, un número p -ádico x se puede escribir como:

$$x = u \cdot p^{-N}, \text{ con } u \text{ unidad.}$$

Ejemplo

- Los números $\cdots 314_5$ y $\cdots 24_5$ son unidades.

Numeros unidades

Definición

Un número p -ádico es llamado *unidad* si no es múltiplo de una potencia negativa de p y su primer dígito no es 0; más aún, un número p -ádico x se puede escribir como:

$$x = u \cdot p^{-N}, \text{ con } u \text{ unidad.}$$

Ejemplo

- Los números $\cdots 314_5$ y $\cdots 24_5$ son unidades.
- $\cdots 310_5$ y $\cdots 1321,24_5$ no son unidades.

Numeros unidades

Definición

Un número p -ádico es llamado *unidad* si no es múltiplo de una potencia negativa de p y su primer dígito no es 0; más aún, un número p -ádico x se puede escribir como:

$$x = u \cdot p^{-N}, \text{ con } u \text{ unidad.}$$

Ejemplo

- Los números $\cdots 314_5$ y $\cdots 24_5$ son unidades.
- $\cdots 310_5$ y $\cdots 1321,24_5$ no son unidades.
- Pero $\cdots 1321,24_5 = \cdots 132124_5 \cdot 5^{-2}$.

Multiplicación p -ádica

Sean $x = u \cdot p^{-N_1}$ y $y = v \cdot p^{-N_2}$ con u, v unidades. Definimos la multiplicación $x \cdot y = u \cdot v \cdot p^{-(N_1+N_2)}$

Ejemplo

División p -ádica

Los cálculos de divisiones en los enteros p -ádicos no difieren de los métodos tradicionales de división.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 5 \ 1 \ 6\cdots \\ 3 \ 5 \ 1) 1 \ 2 \ 4\cdots \\ \underline{1 \ 6 \ 1\cdots} \\ 3 \ 2\cdots \\ 3 \ 5\cdots \\ \underline{4\cdots} \\ 4\cdots \\ \underline{\dots} \end{array}$$

Así, con $p = 7$, $\frac{\cdots 421_7}{\cdots 153_7} = \cdots 615_7$.

División p -ádica

Observación

Los anteriores procedimientos de multiplicación y división, hechos sobre \mathbb{Z}_p pueden ser extendidos de manera natural a \mathbb{Q}_p , pues el problema se reduce a operar números unidades.

Ejemplo

Al momento de multiplicar los números no-unidades, sean

$$x = \dots 2514,13_7 = \dots 251413_7 \cdot 7^{-2} = u \cdot 7^{-2},$$

$$y = \dots 121,102_7 = \dots 121102_7 \cdot 7^{-3} = v \cdot 7^{-3},$$

Luego

$$x \cdot y = u \cdot v \cdot 7^{-(2+3)}.$$

Por el ejemplo 25, tenemos que $u \cdot v = \dots 310426_7$, entonces:

$$x \cdot y = \dots 310426_7 \cdot 7^{-5} = 3,10426_7.$$

Sucesiones y series de números p -ádicos

El sueño del estudiante de cálculo

Teorema

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ con } x_n, x \in \mathbb{Q}_p \text{ y } \|x\|_p \neq 0,$$

entonces la sucesión $(\|x_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ se estabiliza, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n\|_p = \|x\|_p, \text{ para todo } n \geq N.$$

Teorema

Una serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$ converge en \mathbb{Q}_p , si, y sólo si,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Ejemplos de series

Ejemplo

En \mathbb{Q}_p tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)! = 2.$$

Problema abierto

Desde el año 1971 se abrió el siguiente problema: ¿Puede ser $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ un número racional para algún primo p ? Por ahora, se sabe que $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ converge en cada \mathbb{Q}_p . Pero nada se sabe de su valor.

Unicidad de la representación

Proposición

Todo número p -ádico se puede escribir de manera única como la suma de una serie convergente en \mathbb{Q}_p de la forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p^k, \text{ con } a_k \in \{0, \dots, p-1\} \quad (5.1)$$

y en donde $a_k = 0$, para $k \leq -N$ y $a_{-N} \neq 0$. A $-N$ se le denomina el *orden* del número.

Relación de \mathbb{Q}_p con \mathbb{R}

- Existe una correspondencia con los *Conjuntos de Cantor*.
- También podemos relacionarlos mediante una función $\rho: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ conocida como *Monna map*, definida por

$$\rho : \sum_{j=\gamma}^{\infty} a_j p^j \mapsto \sum_{j=\gamma}^{\infty} a_j p^{-j-1}, \quad a_j = 0, 1, \dots, p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Una mirada algebraica de los números p -ádicos

Los enteros p -ádicos

Definición

El conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i p^i, i_0 \geq 0\},$$

es llamado el conjunto de los *enteros p -ádicos*.

Teorema

\mathbb{Z}_p es un subanillo de \mathbb{Q}_p .

Números invertibles

Proposición

Un entero p -ádico $x = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i p^i$, $i_0 \geq 0$ es invertible en \mathbb{Z}_p si, y sólo si, $a_0 \neq 0$.

- Así, el grupo de los números invertibles en \mathbb{Z}_p está dado por:

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : \|x\|_p = 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k, \quad x_0 \neq 0 \right\},$$

que es un grupo multiplicativo del anillo \mathbb{Z}_p .

- Estos elementos son llamados *unidades* de \mathbb{Q}_p ¡Tal como lo vimos en la sección de aritmética!

Ejemplo

$1 - p$ es invertible en \mathbb{Z}_p , pues su inverso es $\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$.

Ideales en \mathbb{Z}_p

- El anillo \mathbb{Z}_p es un *dominio de ideales principales*.

Ideales en \mathbb{Z}_p

- El anillo \mathbb{Z}_p es un *dominio de ideales principales*.
- Más exactamente, cualquier ideal de \mathbb{Z}_p tiene la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{i \geq m} a_i p^i \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ideales en \mathbb{Z}_p

- El anillo \mathbb{Z}_p es un *dominio de ideales principales*.
- Más exactamente, cualquier ideal de \mathbb{Z}_p tiene la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{i \geq m} a_i p^i \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

- $\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset \dots \supset p^k\mathbb{Z}_p \supset \dots \supset \bigcap_{k \geq 0} p^k\mathbb{Z}_p = \{0\}$

Ideales en \mathbb{Z}_p

- El anillo \mathbb{Z}_p es un *dominio de ideales principales*.
- Más exactamente, cualquier ideal de \mathbb{Z}_p tiene la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{i \geq m} a_i p^i \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

- $\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset \dots \supset p^k\mathbb{Z}_p \supset \dots \supset \bigcap_{k \geq 0} p^k\mathbb{Z}_p = \{0\}$
- \mathbb{Z}_p es un *anillo local*, cuyo ideal maximal es:

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : \|x\|_p < 1\}.$$

Construcción de \mathbb{Z}_p y \mathbb{Q}_p vía álgebra

- $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Construcción de \mathbb{Z}_p y \mathbb{Q}_p vía álgebra

- $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q}_p = \text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$.

Construcción de \mathbb{Z}_p y \mathbb{Q}_p vía álgebra

- $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q}_p = \text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$.
- $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[\frac{1}{p}]$.

Modelando números p -ádicos

La clase Número

- La representación estándar de un número en \mathbb{Q}_p está dada por:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p^k, \text{ con } a_k \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } a_k = 0, \text{ para } k \leq -N.$$

(7.1)

La clase Número

- La representación estándar de un número en \mathbb{Q}_p está dada por:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p^k, \text{ con } a_k \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } a_k = 0, \text{ para } k \leq -N. \quad (7.1)$$

- Para modelar estas representaciones, se hace necesario restringirnos al caso de sumas finitas.

La clase Número

- La representación estándar de un número en \mathbb{Q}_p está dada por:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p^k, \text{ con } a_k \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } a_k = 0, \text{ para } k \leq -N. \quad (7.1)$$

- Para modelar estas representaciones, se hace necesario restringirnos al caso de sumas finitas.
- Las principales características del número las representamos por medio de *atributos* y *métodos*.

Cuadro 1: clase Número (*Number*).

Number		
Atributo	Tipo	Descripción
p	integer	Número primo
n	integer	Número entero negativo tal que $p^n \leq \ x\ _p$
N	integer	Número entero positivo tal que $\ x\ _p \leq p^N$
Método	Retorno	Función
show ()	void	Muestra los dígitos del número
order ()	integer	Retorna el orden del número. Ver 3 y 2.
len ()	integer	Retorna la cantidad de dígitos del número
norm ()	float	Calcula la norma del número. Ver 3

Representación: $x = a_{-n} \cdots a_0 \cdots a_{-N_p}$

Ejemplos de uso en Python

Sea $x = 342,536_7 = 6 \cdot 7^{-3} + 3 \cdot 7^{-2} + 5 \cdot 7^{-1} + 2 \cdot 7^0 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2$

```
1 digits = [3,4,2,5,3,6]
2 x = Number(7,-3,2,digits) #initialization of x
3
4 x.show()
5 >> [3,4,2,5,3,6]
6
7 x.order()
8 >> -2
9
10 x.norm()
11 >> 49
12
13 x.len()
14 >>6
```

Listing 1: Instancia de la clase Número (Number)

En este caso $p = 7$, $n = -3$ y $N = 2$. Además satisface que $7^{-3} \leq \|x\|_p \leq 7^2$.

El conjunto GpN

- Problema: \mathbb{Q}_p es infinito, y tiene elementos con posibles infinitos dígitos.

- **Problema:** \mathbb{Q}_p es infinito, y tiene elementos con posibles infinitos dígitos.
- **Alternativa:** Consideramos un subconjunto finito, el cual modelaremos.

- **Problema:** \mathbb{Q}_p es infinito, y tiene elementos con posibles infinitos dígitos.
- **Alternativa:** Consideramos un subconjunto finito, el cual modelaremos.
- Lo modelamos bajo el *paradigma orientado a objetos*

El conjunto GpnN

- **Problema:** \mathbb{Q}_p es infinito, y tiene elementos con posibles infinitos dígitos.
- **Alternativa:** Consideramos un subconjunto finito, el cual modelaremos.
- Lo modelamos bajo el *paradigma orientado a objetos*
- Definimos a GpnN como un subconjunto de \mathbb{Q}_p tal que:

$$GpnN := \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{k=-N}^{-n} a_k p^k \text{ y } p^n \leq \|x\|_p \leq p^N \right\}, \quad (7.2)$$

donde $a_k \in \{0, \dots, p-1\}$, $n \leq 0$ y $N \geq 0$. La representación por dígitos está dada por 37.

Observaciones de GpnN

- $(GpnN, +)$ es un grupo abeliano de orden p^{N-n+1} .

Observaciones de GpnN

- $(GpnN, +)$ es un grupo abeliano de orden p^{N-n+1} .
- Esta noción de grupo aditivo está relacionada con la topología de bolas en \mathbb{Q}_p

Observaciones de GpnN

- $(GpnN, +)$ es un grupo abeliano de orden p^{N-n+1} .
- Esta noción de grupo aditivo está relacionada con la topología de bolas en \mathbb{Q}_p
- Así, podemos pensar en $GpnN$ como el cociente de los grupos aditivos $B_n(0)/B_N(0)$

Observaciones de GpnN

- $(GpnN, +)$ es un grupo abeliano de orden p^{N-n+1} .
- Esta noción de grupo aditivo está relacionada con la topología de bolas en \mathbb{Q}_p
- Así, podemos pensar en GpnN como el cociente de los grupos aditivos $B_n(0)/B_N(0)$
- La multiplicación y la división no son operaciones cerradas en GpnN

Diseño de la clase GpnN - Atributos

Cuadro 2: Atributos de la clase GpnN.

GpnN		
Atributo	Tipo	Descripción
p	integer	Número primo
n	integer	Número entero negativo tal que $p^n \leq \ x\ _p$
N	integer	Número entero positivo tal que $\ x\ _p \leq p^N$
numbers	seq[Number]	Contenedor con números de la clase número (<i>Number</i>)

Diseño de la clase GpnN - Métodos

Cuadro 3: Métodos principales de la Clase GpnN.

GpnN		
Método	Retorno	Función
console.printing ()	void	Imprime por consola los números pertenecientes a este conjunto
p_sum (n1, n2)	Number	Retorna la suma de dos números
p_sub (n1, n2)	Number	Retorna la resta de dos números
p_mul (n1, n2)	Number	Retorna el producto de dos números
p_div (n1, n2)	Number	Retorna división de dos números
p_inverse (n)	Number	Retorna el inverso multiplicativo de un número
representation_tree ()	void	Crea una imagen que representa todo el conjunto

Ejemplos de uso de GpnN en Python - generate_numbers

Por notación $-R = \underline{R}$. Tomamos la instancia de GpnN, donde $n = -3 = \underline{3}$, $N = 3$ y $p = 7$. Así:

$$G7_{33} = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{k=-3}^3 a_k 7^k \text{ y } 7^{-3} \leq \|x\|_p \leq 7^3 \right\}, \quad (7.3)$$

con $a_k \in \{0, \dots, 6\}$. En Python:

```
1 G7_33 = GpnN(7, -3, 3) #initialization
2 G7_33.generate_numbers()
3
```

Listing 2: Inicialización de la clase $G7_{33}$

La segunda línea genera todos los posibles números de la forma $\sum_{k=-3}^3 a_k 7^k$ y los guarda en una lista de números de tipo Número (Number).

Ejemplos de uso de GpnN en Python - console_printing

Si quisiéramos visualizar los números asociados a $G7_{-}33$, podemos verlos listados usando el método *console_printing* de la clase GpnN:

```
1 G7_33.console_printing()
2
3 >>[0,0,0,0,0,0,0]
4 >>[0,0,0,0,0,0,1]
5 .
6 .
7 .
8 >>[6,6,6,6,6,6,5]
9 >>[6,6,6,6,6,6,6]
```

Listing 3: Visualización de números en $G7_{-}33$

Observación

El orden de los números en GpnN coincide con el orden inducido en \mathbb{R}_+ a través de la función 5.2 definida como *Monna map*.

Ejemplos de uso de GpnN en Python - Suma(p_sum)

Si quisieramos sumar $x = 4324,321_5$ y $y = 23,4123_5$, notamos que x, y son de la forma $x = \sum_{-3}^3 a_k 5^k$ y $y = \sum_{-4}^1 b_k 5^k$; así, el mínimo GpnN $\subset \mathbb{Q}_5$ que contiene a x, y es $G5_34$. Luego $x + y$ en Python:

```
1 G5_34 = GpnN(5,-3,4) #initialization
2
3 x_digits = [4,3,2,4,3,2,1,0]
4 y_digits = [0,0,2,3,4,1,2,3]
5 x = Number(5,-3,4,x_digits)
6 y = Number(5,-3,4,y_digits)
7
8 x_plus_y = G5_34.p_sum(x,y)
9 x_plus_y.show()
10 >>[4, 4, 0, 3, 2, 3, 3, 3]
```

Listing 4: suma de números en $G5_34$

Así $4324,321_5 + 23,4123_5 = 4403,2333_5$.

Ejemplos de uso de GpnN en Python - Resta(p_sub)

Tomemos $x = 4324,321_5$ y $y = 23,4123_5$. De nuevo, construimos el mínimo GpnN que contenga a x, y y así $G5_34$ será el subconjunto de \mathbb{Q}_5 que contiene a x, y .

```
1 G5_34 = GpnN(5,-3,4) #initialization
2
3 x_digits = [4,3,2,4,3,2,1,0]
4 y_digits = [0,0,2,3,4,1,2,3]
5
6 x = Number(5,-3,4,x_digits)
7 y = Number(5,-3,4,y_digits)
8
9 x_minus_y = G5_34.p_sub(x,y)
10 x_minus_y.show()
11 >>[4, 3, 0, 0, 4, 0, 3, 2]
```

Listing 5: resta de números en $G5_34$

Así $4324,321_5 - 23,4123_5 = 4300,4032_5$.

Observación

- Supongamos que se multiplica un número de m dígitos con otro que tiene n dígitos.
- El producto tiene a lo máximo $m + n$ dígitos.
- Realizar estos cómputos, representan costos (computacionalmente) a medida que m, n se hacen grandes (cosa que no pasa con la suma).
- Nos restringimos a hacer multiplicaciones en el conjunto donde se esté trabajando.

Ejemplos de uso de GpnN en Python - Producto(p_mul)

- Tomemos $x = 3214,345356_7$ y $y = 53452,143_7$.
- El mínimo GpnN $\subset \mathbb{Q}_7$ que contiene a x, y es $G7_46$.
- El producto tendrá $-n + N + 1 = -(-4) + 6 + 1 = 11$ dígitos a lo más, y no $10 + 8 = 18$ que es la suma de la cantidad de dígitos de x, y respectivamente.

```
1 G7_46 = GpnN(7,-4,6) #initialization
2 x_digits = [0,3,2,1,4,3,4,5,3,5,6]
3 y_digits = [5,3,4,5,2,1,4,3,0,0,0]
4
5 x = Number(7,-4,6,x_digits)
6 y = Number(7,-4,6,y_digits)
7
8 x_by_y = G7_46.p_mul(x,y)
9 x_by_y.show()
10
11 >>[4, 0, 0, 6, 2, 0, 0, 5, 0, 0, 0]
```

Listing 6: producto de números en $G7_46$

Luego $3214,345356_7 \cdot 53452,143_7 = \cdots 40062,005_7$

Ejemplos de uso de GpnN en Python - División(p_div)

La observación 4, hecha para el producto aplica para la división.

Luego tomando x, y como en el producto:

```
1 G7_46 = GpnN(7,-4,6) #initialization
2
3 x_digits = [0,3,2,1,4,3,4,5,3,5,6]
4 y_digits = [5,3,4,5,2,1,4,3,0,0,0]
5
6 x = Number(7,-4,6,x_digits)
7 y = Number(7,-4,6,y_digits)
8
9 x_div_y = G7_46.p-div(x,y)
10 x_div_y.show()
11 >>[5, 1, 3, 3, 0, 3, 3, 2, 3, 6, 2]
```

Listing 7: división de números en *G7_46*

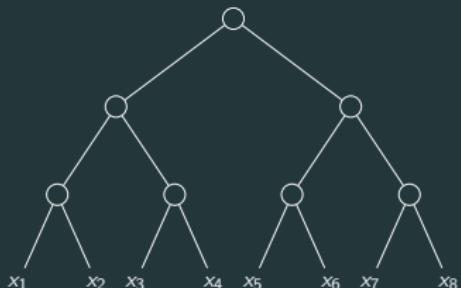
$$\text{Así } \frac{3214,345356_7}{53452,143_7} = \dots 51330,332362_7$$

Árboles

- Denotamos por $M_n^m = \{x_1, \dots, x_{m^n}\}$ a las hojas del árbol con n niveles y m ramas.
 - Podemos dotar a M_n^m , definimos la distancia en M_n^m como $d(x_i, x_j) = C^{N*}$ ($0 < C < 1$).
 - Así, (M_n^m, d) es un espacio ultramétrico.

x_i	x_j	$N*$	distancia
x_1	x_2	2	C^2
x_1	x_3	1	C
x_1	x_5	0	1

(a)



(b)

Figura 4: M_3^2

Árboles-Python

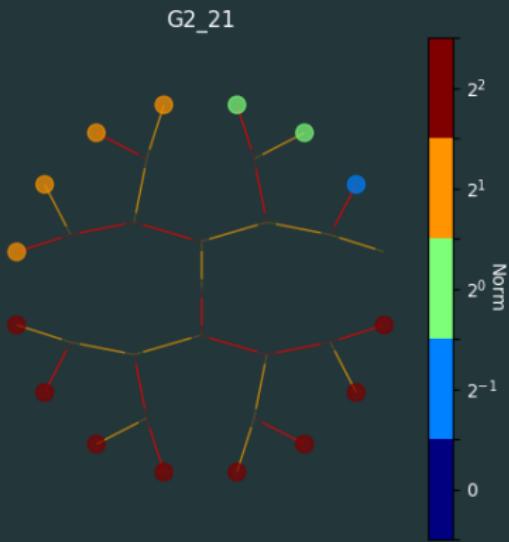
- ¡GpnN se puede representar a través de un árbol!
- Generalmente se toma $C = \frac{1}{p}$.
- Luego, un árbol finito puede representarse en Python, instanciando la función `representation_tree()`:

```
1 G2_21 = GpnN    (2,-2,1) #initialization
2 G2_21.generate_numbers()
3 G2_21.representation_tree()
4
```

Listing 8: Representación en árbol de $G2_{-}21$

Árboles - Visualización

- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.

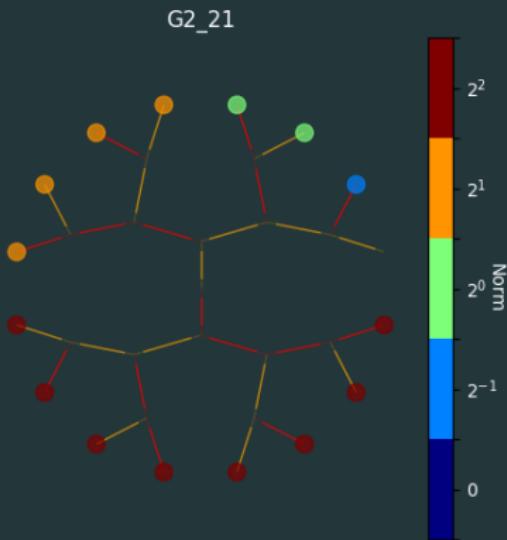


(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

(b) Características

Árboles - Visualización

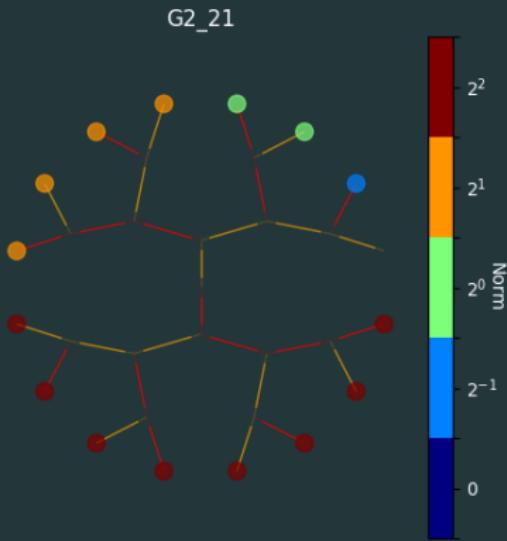
- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.



(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

(b) Características

Árboles - Visualización

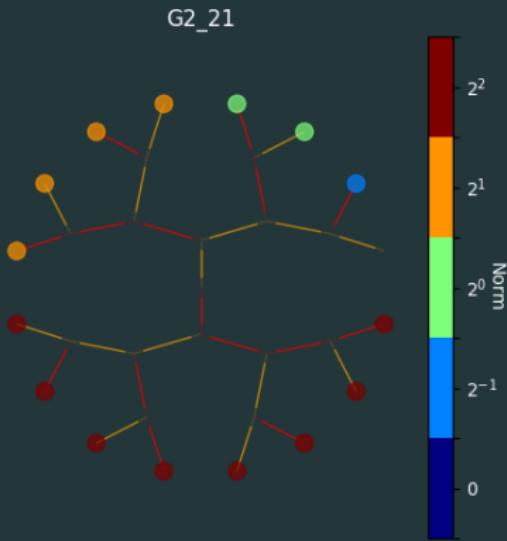


(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Decir que $a_k \in \{0, 1\}$ será equivalente a decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$

(b) Características

Árboles - Visualización



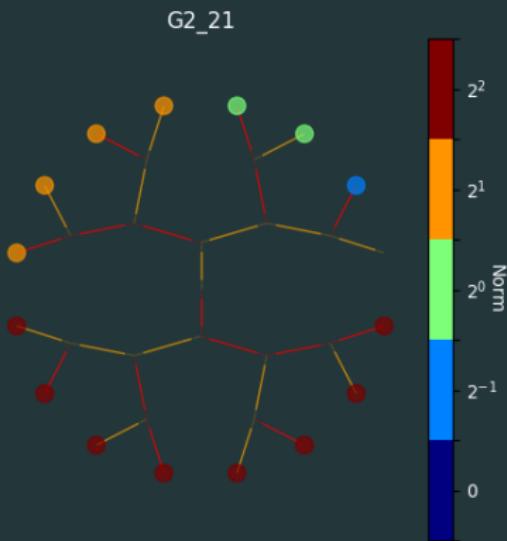
- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Decir que $a_k \in \{\textcolor{orange}{0}, \textcolor{red}{1}\}$ será equivalente a decir que $a_k \in \{\textcolor{orange}{Naranja}, \textcolor{red}{Rojo}\}$
- Si quisiéramos saber qué número es el que está ubicado en la parte derecha del árbol, de color **azul**, sólo seguimos el camino propuesto por la imagen.

(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

(b) Características

Árboles - Visualización

(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

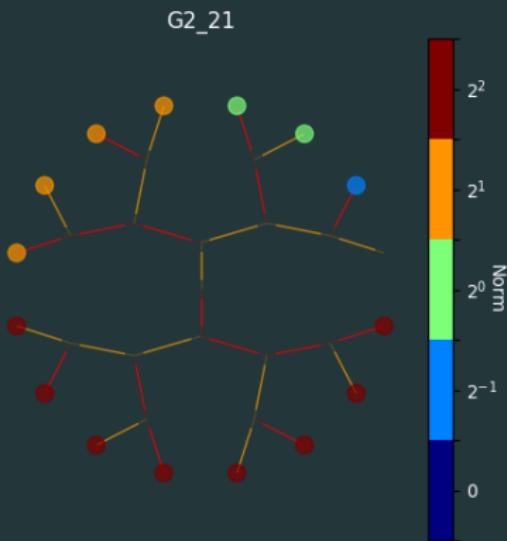


- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$ será equivalente a decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$
- Si quisiéramos saber qué número es el que está ubicado en la parte derecha del árbol, de color azul, sólo seguimos el camino propuesto por la imagen.
- Desde la raíz: Naranja → Naranja → Naranja → Rojo.

(b) Características

Árboles - Visualización

(a) Números de la forma $\sum_{k=1}^2 a_k 2^k$

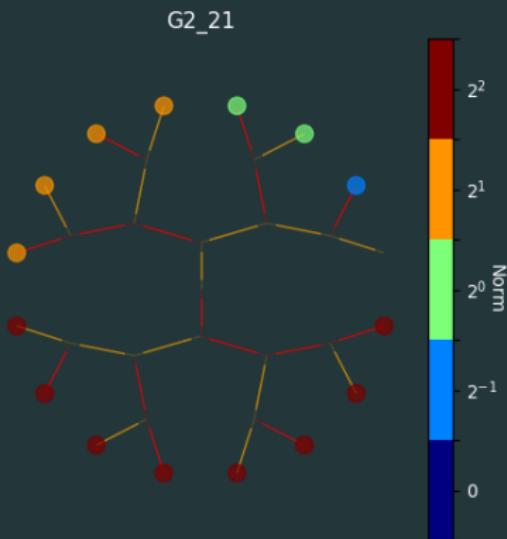


- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$ será equivalente a decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$
- Si quisiéramos saber qué número es el que está ubicado en la parte derecha del árbol, de color azul, sólo seguimos el camino propuesto por la imagen.
- Desde la raíz: Naranja → Naranja → Naranja → Rojo.
- Es decir que el número es 000,1₂ y tiene norma 2^{-1} .

(b) Características

Árboles - Visualización

(a) Números de la forma $\sum_{k=-1}^2 a_k 2^k$



- Los números presentados satisfacen que $2^{-2} \leq \|x\|_2 \leq 2$.
- $a_k \in \{0, 1\}$, con $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
- Decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$ será equivalente a decir que $a_k \in \{\text{Naranja, Rojo}\}$
- Si quisiéramos saber qué número es el que está ubicado en la parte derecha del árbol, de color azul, sólo seguimos el camino propuesto por la imagen.
- Desde la raíz: Naranja → Naranja → Rojo.
- Es decir que el número es 000,1₂ y tiene norma 2⁻¹.
- El camino desde la raíz denota $a_2 \rightarrow a_1 \rightarrow a_0 \rightarrow a_{-1}$.

(b) Características

Visualización de más GpnN's

Figura 6: Ejemplos de 2-ádicos

Visualización de más GpnN's

Figura 7: Ejemplos de 5-ádicos

Laplaciano sobre árboles

Matriz Laplaciana

Definición

Dado un grafo simple G con n vértices, definimos la matriz Laplaciana $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ como:

$$L = D - A,$$

donde D, A son las matrices de grados e incidencia del grafo, respectivamente.

Luego:

$$L_{i,j} := \begin{cases} \text{grado}(v_i) & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } i \neq j \text{ y } v_i \text{ es adyacente a } v_j, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.
- Así, $\phi_i(t)$ es el calor en el nodo i en el tiempo t .

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.
- Así, $\phi_i(t)$ es el calor en el nodo i en el tiempo t .
- El calor transferido entre dos nodos i y j es directamente proporcional a la diferencia de calor entre los mismos.

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.
- Así, $\phi_i(t)$ es el calor en el nodo i en el tiempo t .
- El calor transferido entre dos nodos i y j es directamente proporcional a la diferencia de calor entre los mismos.
- Esto es, $\frac{d\phi_i(t)}{dt} = -k \sum_j A_{ij} (\phi_i(t) - \phi_j(t))$.

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.
- Así, $\phi_i(t)$ es el calor en el nodo i en el tiempo t .
- El calor transferido entre dos nodos i y j es directamente proporcional a la diferencia de calor entre los mismos.
- Esto es, $\frac{d\phi_i(t)}{dt} = -k \sum_j A_{ij} (\phi_i(t) - \phi_j(t))$.
- Ecuación que se puede llevar a la forma $\frac{d\vec{\phi}(t)}{dt} + kL\vec{\phi}(t) = 0$.

Operador Laplaciano discreto

- Supongamos una función $\vec{\phi}(t)$ que describe la distribución de calor dentro de un grafo en un tiempo dado.
- Así, $\phi_i(t)$ es el calor en el nodo i en el tiempo t .
- El calor transferido entre dos nodos i y j es directamente proporcional a la diferencia de calor entre los mismos.
- Esto es, $\frac{d\phi_i(t)}{dt} = -k \sum_j A_{ij} (\phi_i(t) - \phi_j(t))$.
- Ecuación que se puede llevar a la forma $\frac{d\vec{\phi}(t)}{dt} + kL\vec{\phi}(t) = 0$.
- Esta ecuación tiene la forma de la ecuación de calor, salvo que ∇^2 es L .

Matriz de réplica

Si definimos $I: \{1, \dots, p^{N-n+1}\} \rightarrow GpnN \Rightarrow I(i) = x_i$, definimos la *matriz de réplica* \mathbf{Q} de tamaño $p^{N-n+1} \times p^{N-n+1}$:

$$Q_{ij} = \rho(\|I(i) - I(j)\|_p),$$

donde ρ es una función que depende de la distancia p -ádica entre $I(i)$ y $I(j)$. Por ejemplo, con $p = 2$ tenemos una matriz tipo *Parisi*:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_1 & 0 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & 0 & q_1 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & q_1 & 0 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & 0 & q_1 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_1 & 0 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & 0 & q_1 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & q_1 & 0 & \dots \\ & & & & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

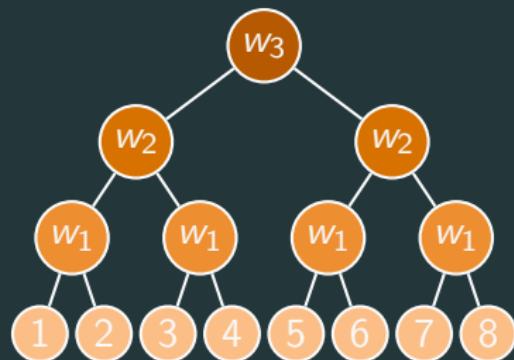
Matriz de transición

Definida la matriz de réplica, introducimos la *matriz de transición*:

$$W_{ij} = \begin{cases} Q_{ij} & i \neq j, \\ -\sum_{\gamma \neq i}^{N-n+1} Q_{i\gamma} & i = j. \end{cases}$$

$$W = \left(\begin{array}{cccccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_2 & w_3 & w_3 & w_3 & w_3 \\ w_1 & w_0 & w_2 & w_2 & w_3 & w_3 & w_3 & w_3 \\ w_2 & w_2 & w_0 & w_1 & w_3 & w_3 & w_3 & w_3 \\ w_2 & w_2 & w_1 & w_0 & w_3 & w_3 & w_3 & w_3 \\ w_3 & w_3 & w_3 & w_3 & w_0 & w_1 & w_2 & w_2 \\ w_3 & w_3 & w_3 & w_3 & w_1 & w_0 & w_2 & w_2 \\ w_3 & w_3 & w_3 & w_3 & w_2 & w_2 & w_0 & w_1 \\ w_3 & w_3 & w_3 & w_3 & w_2 & w_2 & w_1 & w_0 \end{array} \right)$$

(a) Matriz de transición de $G2_11$



(b) Árbol de representación de $G2_11$

$$Q_{ij} = \rho(\|I(i) - I(j)\|_p) = \frac{C}{\|I(i) - I(j)\|_p^{\alpha} + 1}, \quad I(i) - I(j) \in GpnN.$$

Ejemplos de matrices de transición

Figura 9: Matrices de Parisi asociadas a $G2_11$, $G2_12$, $G2_22$, $G2_32$, $G2_33$, $G2_43$, respectivamente. Con $\alpha = 2$ y $C = 3$

Ecuación de ultradifusión

Análogamente a como se estableció la ecuación de calor sobre grafos, definimos la *ecuación maestra* como sigue:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} W_{ji} u_j(t) - \sum_{j \neq i} W_{ij} u_i(t), \quad (8.1)$$

donde u_i es la probabilidad de transición, es decir, la probabilidad de pasar del estado i al estado j en el tiempo t . Esta ecuación se puede llevar a:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = W\vec{u}(t).$$

Cuya solución será:

$$\vec{u}(t) = p^{N-n+1} \sum_{i=1} c_i(t) v_i, \quad c_i(t) = c_i(0) e^{-\lambda_i t}.$$

Proceso de difusión en GpnN

Figura 10: Comportamiento de la solución en distintos $t \in [0, 10]$ para la condición inicial $u(0)$ en forma de campana de Gauss, en *G2_33*.

Proceso de difusión en GpnN

Figura 11: Comportamiento de la solución en distintos $t \in [0, 100]$ para la condición inicial $u(0)$ con entradas aleatorias en *G3_33*.

Sobre el uso del paquete

Configuración de ambiente

- Se supone Python instalado (en Linux viene por defecto).

Configuración de ambiente

- Se supone Python instalado (en Linux viene por defecto).
- En Windows, se recomienda la instalación de una distribución (Anaconda, Python(x,y) o WinPython).

Configuración de ambiente

- Se supone Python instalado (en Linux viene por defecto).
- En Windows, se recomienda la instalación de una distribución (Anaconda, Python(x,y) o WinPython).
- Se recomienda instalar el sistema de gestión de paquetes pip.

Configuración de ambiente

- Se supone Python instalado (en Linux viene por defecto).
- En Windows, se recomienda la instalación de una distribución (Anaconda, Python(x,y) o WinPython).
- Se recomienda instalar el sistema de gestión de paquetes pip.
- A través de pip podemos instalar las dependencias que usamos:

```
1 $ pip install numpy scipy pandas matplotlib pygraphviz pydot networkx  
2
```

Listing 12: Terminal o símbolo del sistema

Instalación de nuestro paquete (py-adics)

- ¡Usted... sí, usted también puede usarlo!

Instalación de nuestro paquete (py-adics)

- ¡Usted... sí, usted también puede usarlo!
- Se recomienda la instalación del sistema de control de versiones, Git (en Linux viene por defecto).

Instalación de nuestro paquete (py-adics)

- ¡Usted... sí, usted también puede usarlo!
- Se recomienda la instalación del sistema de control de versiones, Git (en Linux viene por defecto).
- Con pip podemos instalar el paquete a través del comando:

```
1 $ pip install git+https://github.com/ed4st/py-adics-package  
2
```

Listing 17: Terminal o símbolo del sistema

Instalación de nuestro paquete (py-adics)

- ¡Usted... sí, usted también puede usarlo!
- Se recomienda la instalación del sistema de control de versiones, Git (en Linux viene por defecto).
- Con pip podemos instalar el paquete a través del comando:

```
1 $ pip install git+https://github.com/ed4st/py-adics-package  
2
```

Listing 19: Terminal o símbolo del sistema

- Para testear la instalación, cree un script de Python:

```
1 from padics.Number import Number #our package  
2  
3 x = Number(7,-3,2,[3,2,1,3,4])  
4 print(x.order(),x.norm())  
5 >> -2 49  
6
```

Listing 20: test del paquete

Instalación de nuestro paquete (py-adics)

- ¡Usted... sí, usted también puede usarlo!
- Se recomienda la instalación del sistema de control de versiones, Git (en Linux viene por defecto).
- Con pip podemos instalar el paquete a través del comando:

```
1 $ pip install git+https://github.com/ed4st/py-adics-package  
2
```

Listing 21: Terminal o símbolo del sistema

- Para testear la instalación, cree un script de Python:

```
1 from padics.Number import Number #our package  
2  
3 x = Number(7,-3,2,[3,2,1,3,4])  
4 print(x.order(),x.norm())  
5 >> -2 49  
6
```

Listing 22: test del paquete

- ¡Felicitaciones, puede usar lo visto en este trabajo!

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.
- Crear más modulos para poder modificar el código de manera estructural.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.
- Crear más modulos para poder modificar el código de manera estructural.
- Implementar más algoritmos, como los de expansiones p -ádicas, o los asociados al estudio de álgebra (como el *Lema de Hensel*), para hacer criptografía.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.
- Crear más modulos para poder modificar el código de manera estructural.
- Implementar más algoritmos, como los de expansiones p -ádicas, o los asociados al estudio de álgebra (como el *Lema de Hensel*), para hacer criptografía.
- Implementar la versión del *algoritmo de Karatsuba* en números p -ádicos.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.
- Crear más modulos para poder modificar el código de manera estructural.
- Implementar más algoritmos, como los de expansiones p -ádicas, o los asociados al estudio de álgebra (como el *Lema de Hensel*), para hacer criptografía.
- Implementar la versión del *algoritmo de Karatsuba* en números p -ádicos.
- Para las personas que no tienen suficiente dominio de Linux, sería muy útil crear una interfaz gráfica del paquete.

Notas del paquete - Trabajo a futuro

- Hacer unit testing sobre los algoritmos.
- Mejorar el control de excepciones.
- Mejorar documentación de uso.
- Crear más modulos para poder modificar el código de manera estructural.
- Implementar más algoritmos, como los de expansiones p -ádicas, o los asociados al estudio de álgebra (como el *Lema de Hensel*), para hacer criptografía.
- Implementar la versión del *algoritmo de Karatsuba* en números p -ádicos.
- Para las personas que no tienen suficiente dominio de Linux, sería muy útil crear una interfaz gráfica del paquete.
- Aplicar la representación a modelos en *Biología*, para el estudio de proteínas y genomas.

Gracias 😊

Referencias i

-  Shelkovich V. M. Albeverio S., Khrennikov A. Yu., "Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models." *Cambridge University Press*, 2010.
-  Neal Koblitz. p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Springer-Verlag New York, 1984.
-  G. Parisi; N. Sourlas. P-adic numbers and replica symmetry breaking. *The European Physical Journal B / Condensed Matter and Complex Systems*, 14:535–542, 2000.
-  V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov. p-adic analysis and mathematical physics. *Advanced Mathematics: Computations and Applications*, pages 128–141, 1994.

Referencias ii

-  V. S. Anashin. Uniformly distributed sequences in computer algebra or how to construct program generators of random numbers. *Journal of Mathematical Sciences*, 89:1355–1390, 1998.
-  A. V. Avetisov, A. H. Bikulov, and V. A. Osipov.padic description of characteristic relaxation in complex systems.J. Phys. A: Math. Gen.,36:4239–4246, 2003.
-  Bikulov A.H. Kozyrev S. V. Osipov V. A. Avetisov, V. A. On the ultrametricity of the fluctuation dynamic mobility of protein molecules. (Russian) *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 265:75–81, 2009.

Referencias iii

-  V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, and V. A. Osipov. p-adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(2):177,2002.
-  Svetlana Katok. p-adic analysis compared with real. *Student Mathematical Library* 037. American Mathematical Society, 2007.
-  Anatoly Kochubei. Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields. Number 244. New York, 2001.

Referencias iv

- 
- V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov. *padic analysis and mathematical physics*. Advanced Mathematics: Computations and Applications, pages 128–141, 1994.