0.1 Introducciónwww

Queremos buscar los mínimos del siguiente problema:$\mathscr{L}$ es un operador lineal $\mathscr{L}u = f$. Si definimos

$$A(u,v) = \int\int_{\Omega} \mathscr{L}uvdxdy$$

donde $dxdy$ representará un diferencial de area y en general lo omitiremos. A es tal que $A(u,v) \geq \alpha ||u||^2$ si u_0 es mínimo de

$$A(u,u) - 2(f,u)$$

donde se define

$$(f,u) = \int\int_{\Omega} fu.$$

entonces a u_0 se le llama la solución generalizada de $\mathscr{L}u = f$. El operador $\mathscr{L}$ puede ser por ejemplo la biarmónica Δ^2. si

$$\int\int_{\Omega} \mathscr{L}u\phi = \int\int_{\Omega} f\phi$$

para todo $\phi \in C_0^{\infty}$, entonces definimos el operador autoadjunto como

$$\int\int_{\Omega} \mathscr{L}^* u\phi$$

donde $*$ indica complejo conjugado. Ejemplos físicos de este operador son la membrana elástica y el campo electrostático. En cualquiera de estos casos vemos que la energía almacenada por el campo se puede escribir de la forma

$$I(u) = \int\int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

El problema lo plantearemos como : encontrar u que minimiza $I(u)$ con $u|_{\partial\Omega} = f$. Primero veremos que el minimizar la energia es equivalente a encontrar la solución al problema del laplaciano con valor en la frontera. Sea v tal que $v|_{\partial\Omega} = f$ y sea $h = v - u$ entonces $h|_{\partial\Omega} = 0$. Ahora

$$I(v) = I(u+h) = \int\int_{\Omega} (u_x + h_x)^2 + (u_y + h_y)^2$$

donde si utilizamos una de las identidades de Green que se sigue del teorema de la divergencia con el campo vectorial $u\nabla v$ y usando el hecho que $\partial_k(u\partial_k v) = u\partial_k\partial_k v + \partial_k u\partial_k v$, donde se asume suma sobre indices repetidos, entonces

$$\int\int_{\Omega} \nabla\cdot(u\nabla v) = \int\int u\Delta v + \int\int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v$$

donde aplicandolo a la energ'ia y recordando que h vale cero en la frontera encontramos que

$$I(v) = I(u) + I(h) - 2\int\int_{\Omega} h\Delta u$$

donde usamos el hecho que h vale cero en la frontera. Si el laplaciano de u es positivo en un punto (x_0, y_0) entonces será positivo en una vecindad de (x_0, y_0).

Tomamos $h < 0$ en la vecindad de (x_0, y_0) fuera de dicha vecindad, entonces se tiene que $I(u+h) \geq I(u)$. Ahora si tomamos $h > 0$ en la vecindad y cero fuera y tal que $\int\int_\Omega |\nabla h|^2 = 1$ entonces

$$I(u + \epsilon h) - I(u) = \epsilon^2 - 2\epsilon \int\int_\Omega h\Delta u < 0$$

si ϵ es pequeño, lo que contradice que $I(u)$ sea mínimo. Lo que implica que $\Delta u \leq 0$ y por lo tanto $\Delta u = 0$ y por lo tanto u mínimo de $I(u)$ con $u|_{\partial\Omega} = f$ es necesario y suficiente para que $\Delta u = 0$ en Ω y $u|_{\partial\Omega} = f$.

La solución es única.

Si u_1 y u_2 son soluciones, $h = u_1 - u_2$ entonces

$$I(u_1) = I(u_2 + h) = I(u_2) + I(h)$$

y como $I(u_1) = I(u_2)$ implica que $I(h) = 0$ y por lo tanto $\nabla h = 0$ y por lo tanto $h = cte = 0$ en $\partial\Omega$.

Principio de Dirichlet.

Tenemos las siguientes preguntas:

1. ¿Existe una solución de $Deltau = 0$ en Ω, talque $u|_{\partial\Omega} = f$?.¿Que tipo de soluci'on es ? Acaso $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ donde la barra indica la cerradura de Ω. Si es única $h = u_1 - u_2$ implica $\Delta h = 0$ y $h|_{\partial\Omega} = 0$ implica el principio del máximo que a su vez implica que $h = 0$.

2. ¿Existe un mínimo ?

3. ¿Como se calcula el mínimo $I(u) = \int\int_\Omega |\nabla u|^2$.

4. Si existe el mínimo u implica acaso que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ implica acaso que la energía es finita ?

Ilustraremos estas preguntas con un ejemplo.

1)Ejemplo de Hadamard.

Sea Ω un disco unitario. Consideremos la función sobre la frontera del disco unitario parametrizada por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2^{2n}\theta)}{2^n} \tag{1}$$

Como $|f(\theta)| \leq \sum \frac{1}{2^n} = 1$ (como puede verse de sumar la serie geométrica con $r = 1/2$), entonces al serie es absolutamente convergente. Que implica que $f(\theta)$ es continua. sea

$$u(x, y) = u(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2^{2n}} \frac{\cos(2^{2n}\theta)}{2^n}$$

esta función cumple que $u|_{\partial\Omega} = f(\theta)$ y $|u(x,y)| \leq 1$ y

$$u(x,y) = Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}\right)$$

es una función analítica para $|z| < 1$ lo que implica que u es armónica. Ahora para pasar a coordenadas polares usamos el hecho que

$$u_x = u_\rho \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$u_y = u_\rho \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{\rho}.$$

La energía se calcula como

$$I(u) = \int\int_\Omega (u_x^1 + u_y^2) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(u_\rho^2 + \frac{u_\theta^2}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

Sustituyendo se tendría que

$$I(u) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \frac{\rho^{2^{2n}-1}}{2^n} \frac{\cos(2^{2n}\theta)}{2^n}\right)^2 +$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-) 2^{2n} \frac{\rho^{2^{2n}}}{2^n} \frac{\sin(2^{2n}\theta)}{2^n}\right)^2 \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta.$$

Como los dobles productos de senos y cosenos son cero, entonces

$$I(u) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+1}} \rho^{2^{2n+1}} \Bigg|_0^1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n+1} = \infty.$$

Moraleja, tengo que trabajar con una clase más chica de funciones en la frontera. Esta clase será $f|_{\partial\Omega}$ y si definimos los siguientes espacios, entonces

$$L^2(S^1) = \left\{ g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \in Re \Leftrightarrow a_{-n} = \bar{a}_n \right\}$$

con

$$\sum |a_n|^2 = \int_0^{2\pi} |g(\theta)|^2 d\theta < \infty$$

Podemos definir los espacios de funciones

$$H^\alpha(S^1) = \left\{ g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, a_{-n} = \bar{a}_n, \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 n^{2\alpha} < \infty \right\}.$$

en particular

$$H^1(S^1) = \left\{ g : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 n^2 = \int_0^{2\pi} |g'(\theta)|^2 d\theta \right\} < \infty$$

Para ver a que espacio de funciones corresponde la función del ejemplo de Hadamard (**??**) vemos que

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2 n^{2\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 (2^{2n})^{2\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(1-2\alpha)}}$$

que será menor que infinito si $\alpha < 1/2$ y la serie converge uniformenente. Si $\alpha \geq 1/2$ tenemos una suma infinita y por lo tanto $f(\theta) \in H^{\alpha}(S^1)$ con $\alpha < 1/2$. Se puede probar que si $f(\theta) \in H^{\alpha}(S^1)$, $\alpha \geq 1/2$ entonces existe u tal que $u|_{\rho=1} = f$ y $I(u) < \infty$. (teorema de traza, además f es continua)

2)Tipo de soluciones.

Sea $f|_{\partial\Omega}$ tal que exista $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $u_0|_{\partial\Omega} = 1$ y $I(u_0) < \infty$. Sea u talque $\nabla^2 u = 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $I(u) < \infty$, $u|_{\partial\Omega} = f$ sea $h = u - u_0$ implica $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Delta h = \Delta u - \Delta u_0 = -\Delta u_0 = g$ es continua.

Sea

$$J(k) = \int\int_{\Omega}|\nabla k|^2 + 2\int\int_{\Omega} gk$$

para $k \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $k|_{\partial\Omega} = 0$, $I(k) < \infty$. Si definimos

$$J(h) = I(h) + 2\int\int_{\Omega}\Delta h h = I(h) - 2\int\int_{\Omega}|\nabla h|^2 = -I(h)$$

donde hemos utilizado la identidad de Green. Ahora

$$J(h+k) = I(h+k) + 2\int\int(h+k)g$$

$$J(h+k) = I(h) + I(k) - 2\int\int k\Delta h + 2\int\int(h+k)g$$

$$J(h+k) = J(h) + I(k) + 2\int\int_{\Omega}(g - \Delta h)k$$

cuando $g - \Delta h = 0$ da el mínimo de $J(k)$. Alrevés, si h tiene esas propiedades y $J(h)$ es mínimo entonces $\Delta h = g$ en Ω. Entonces tenemos que si definimos el espacio de funciones

$$E = \left\{k \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), k|_{\partial\Omega} = 0\right\}, I(k) < \infty$$

entonces $\underset{E}{min} J(k)$ es una condición necesaria y suficiente para que h sea solución de la ecuación si $\Delta h = g$ y como se vió se tiene que

1. $J(h) = -I(h)$
2. $J(h+k) = J(k) + I(k)$
3. $J(k) \geq I(k) - 2\int\int_{\Omega}|g||k| \geq I(k) - \epsilon\int\int_{\Omega}k^2 - \frac{1}{\epsilon}\int\int_{\Omega}g^2$

donde en 3) se utilizó el hecho que si a, b son dos números cualesquiera entonces siempre se tiene que $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$ (teorema del binomio) . Si $|k| = 0$ en $\partial\Omega$ entonces el lema de Poincaré nos da que

$$\int\int_\Omega k^2 \leq \kappa \int\int_\Omega |\nabla k|^2$$

donde tomando $\epsilon = 1/\kappa$ tenemos que

$$J(k) \geq -\kappa \int\int_\Omega g^2$$

es decir J es acotado por abajo.

Chapter 1

Espacios de Hilbert

1.1 Espacios vectoriales

Sea E con operaciones $+$ y $\times$ por escalar, $f, g \in E$ $\lambda \in \mathbb{R}$(ó $\mathbb{C}$), entonces $\lambda f \in E$. Ejemplos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ $C^0(\bar{\Omega}), C^1(\bar{\Omega}), ...$ Espacio Normado : E vectorial con $\| \| : E \to \mathbb{R}^+ \Rightarrow \|f - g\| =$ distancia de f a g
$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$
$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$
Ejemplos: $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|x\| = \max_{j=1,\ldots n} |x_j|$, o, $\|x\| = \left(\sum_j x_j^2 \right)^{1/2}$
$C^0(\bar{\Omega})$, $\|f\| = |f|_0 = \max_{x\in\bar{\Omega}} |f(x)|$
$C^1(\bar{\Omega})$, $\|f\| = |f|_1 = \max_{x\in\bar{\Omega}} |f(x)| + \sum_\lambda \max_{x\in\Omega} |\partial_\lambda f|$
$L^2(\Omega)$ con la norma $\|f\|_2 = \left(\int\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
$H^1(\Omega)$ con la norma $\|f\|_1 = \left(\int\int_\Omega |f|^2 dx + \sum_\lambda |\partial_\lambda f| \right)^{\frac{1}{2}}$
$L^2(\Omega) = \{f \ \ medible \ \ con \ \ \int\int_\Omega |f|^2 dx < \infty\}$

Espacio con producto escalar Espacio vectorial con $(\ \ , \ \ ) \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). Si $(f, g) = \overline{(g, f)}$ entonces $(f, f) \in \mathbb{R}$.

$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
$(f, f) > 0$ si $f \neq 0$ entonces se define $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ porque de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$ implica

$$
\begin{aligned}
\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + (g, f) + (f, g) \\
&\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + \|f\|\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2
\end{aligned}
$$

Cauchy-Schwarz
$0 \leq (f + \lambda g, f + \lambda g) = \|f\|^2 + \lambda^2\|g\|^2 + \bar{\lambda}(f, g) + \lambda(g, f) = \|f\|^2 + \lambda^2\|g\|^2 + 2Re(\lambda(g, f))$ si $(g, f) = Re^{i\phi}$ tomemos $\lambda = \rho e^{-i\phi}$ entonces
$0 \leq \rho^2\|g\| + 2\rho|(g, f)| + \|f\|^2$ no tiene raíces implica el discriminante

$(g,f)|^2 - \|f\| + \lambda^2\|g\| \leq 0$
ejemplos
$\mathbb{R}^n$,$\mathbb{C}$ $(x,y) = \sum x_i \bar{y}_i$
$L^2(\Omega) : (f,g) = \int_\Omega f\bar{g}dx$
$H^1(\Omega)$ con producto interno $(f,g)_1 = \int_\Omega f\bar{g} + \sum_{i=1}^n f_{x_i}\bar{g}_{x_i}$

1.2 Sucesión de Cauchy en un espacio normado

Sea E con $\| \ \|$, Una sucesión $\{u_n\} \in E$ es de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $\|u_n - u_m\| \leq \epsilon$, $n, m \geq N$.

E es de Banach si E tiene (,) y es completo, E es de Hilbert.

No todo espacio vectorial es completo, pero se puede completar tomando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy por ejemplo $C^0[0,1]$