Voronoiova dláždění a Cut-and-Project množiny
Voronoi Tiling and Cut-and-Project Sets

Eduard Šubert
Ing. Petr Ambrož, Ph.D.

FJFI ČVUT v Praze

7. září 2014

Iracionalita β

$$x^2 = 4x - 1$$

$$\beta = 2 + \sqrt{3} \doteq 3.732 \qquad \beta' = 2 - \sqrt{3} \doteq 0.268$$

$$\beta = 4 - \beta'$$

Okruh $\mathbb{Z}[\beta]$

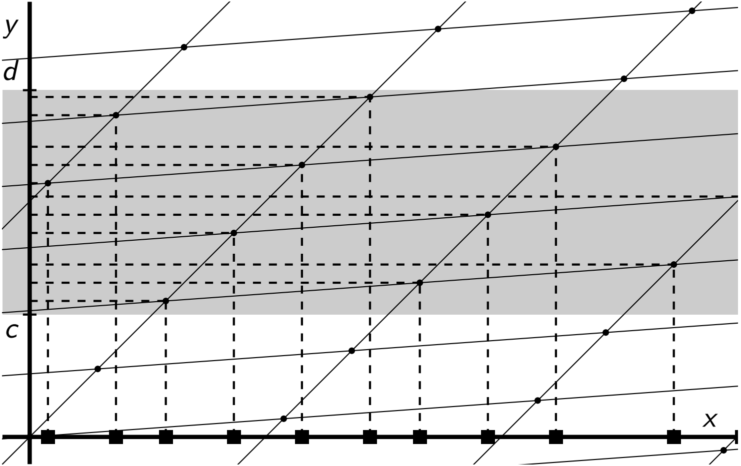
$$\mathbb{Z}[\beta] = \{a + b\beta | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Jednorozměrný kvazikrystal

$$\Sigma(\Omega) = \{x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid x' \in \Omega\}$$

$$' : \mathbb{Z}[\beta] \to \mathbb{Z}[\beta]$$
$$(a + b\beta)' = a + b(\beta').$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}$$



Obrázek : Jednorozměrný kvazikrystal:
souřadnice bodů mřížky $(a + b\beta, a + b\beta')$; $\Omega = [c, d)$

1. $\Omega \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow \Sigma(\Omega) \subset \Sigma\left(\tilde{\Omega}\right)$
2. $\Sigma(\Omega) \cap \Sigma\left(\tilde{\Omega}\right) = \Sigma\left(\Omega \cap \tilde{\Omega}\right)$
3. $\Sigma(\Omega) \cup \Sigma\left(\tilde{\Omega}\right) = \Sigma\left(\Omega \cup \tilde{\Omega}\right)$
4. $\Sigma(\Omega + \lambda') = \Sigma(\Omega) + \lambda$
5. $\Sigma\left(\beta^k \Omega\right) = \frac{1}{\beta^k}\Sigma(\Omega)$

Posloupnost bodů kvazikrystalu

Ostře rostoucí posloupnost $(y_n^\Omega)_{n\in\mathbb{Z}}$

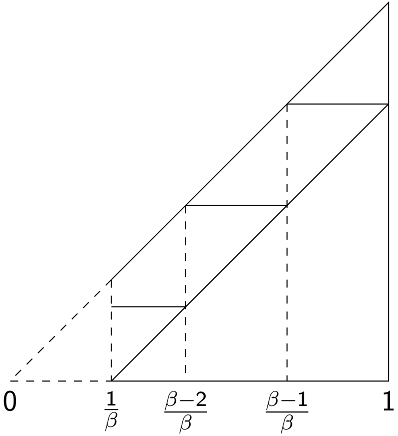
$$\Sigma\left(\Omega\right) = \left\{ y_n^\Omega \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Theorem

Nechť $\Omega = [c, d)$ *kde* $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, 1\right]$. *Pak vzdálenosti* $y_{n+1}^{\Omega} - y_{n}^{\Omega}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *jsou:*

$\left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta-2}{\beta}\right)$	$\frac{\beta-2}{\beta}$	$\left(\frac{\beta-2}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}\right)$	$\frac{\beta-1}{\beta}$	$\left(\frac{\beta-1}{\beta}, 1\right)$	1
$4\beta - 1$					
$3\beta - 1$	$3\beta - 1$	$3\beta - 1$			
		$2\beta - 1$	$2\beta - 1$	$2\beta - 1$	
β	β	β	β	β	β
				$\beta - 1$	$\beta - 1$

Mezery $y_{n+1}^{\Omega} - y_n^{\Omega}$



Abeceda

$$A = 4\beta - 1$$
$$B = 3\beta - 1$$
$$C = 2\beta - 1$$
$$D = \beta$$
$$E = \beta - 1$$

Krokovací funkce

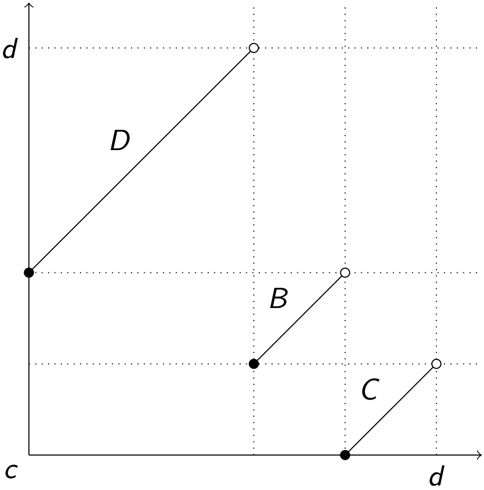
$$f^{\Omega} : \Omega \to \Omega \qquad f^{\Omega}(\,(y_n^{\Omega})'\,) = (y_{n+1}^{\Omega})'$$

$$d-c \in \left(\tfrac{1}{\beta}, \tfrac{\beta-2}{\beta}\right] : f^{\Omega}(x) = \begin{cases} x+(\beta)' & x \in [c, d-\frac{1}{\beta}) \\ x+(4\beta-1)' & x \in [d-\frac{1}{\beta}, c+\frac{\beta-3}{\beta}) \\ x+(3\beta-1)' & x \in [c+\frac{\beta-3}{\beta}, d) \end{cases}$$

$$d-c \in \left(\tfrac{\beta-2}{\beta}, \tfrac{\beta-1}{\beta}\right] : f^{\Omega}(x) = \begin{cases} x+(\beta)' & x \in [c, d-\frac{1}{\beta}) \\ x+(3\beta-1)' & x \in [d-\frac{1}{\beta}, c+\frac{\beta-2}{\beta}) \\ x+(2\beta-1)' & x \in [c+\frac{\beta-2}{\beta}, d) \end{cases}$$

$$d-c \in \left(\tfrac{\beta-1}{\beta}, 1\right] : f^{\Omega}(x) = \begin{cases} x+(\beta)' & x \in [c, d-\frac{1}{\beta}) \\ x+(2\beta-1)' & x \in [d-\frac{1}{\beta}, c+\frac{\beta-1}{\beta}) \\ x+(\beta-1)' & x \in [c+\frac{\beta-1}{\beta}, d) \end{cases}$$

Krokovací funkce pro $d - c = \frac{3\beta - 10}{2}$



Slovo kvazikrystalu

$$\left(t_n^\Omega\right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$d-c\in\left(\tfrac{1}{\beta},\tfrac{\beta-2}{\beta}\right]: \qquad t_n^\Omega=\begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=\beta\\ A & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=4\beta-1\\ B & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=3\beta-1\end{cases}$$

$$d-c\in\left(\tfrac{\beta-2}{\beta},\tfrac{\beta-1}{\beta}\right]: \qquad t_n^\Omega=\begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=\beta\\ B & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=3\beta-1\\ C & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=2\beta-1\end{cases}$$

$$d-c\in\left(\tfrac{\beta-1}{\beta},1\right]: \qquad t_n^\Omega=\begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=\beta\\ C & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=2\beta-1\\ E & y_{n+1}^\Omega-y_n^\Omega=\beta-1\end{cases}$$

Komplexita a jazyk

$$\mathcal{C}_\ell(n)$$

počet faktorů délky n

$$\mathcal{L}_\ell(n)$$

faktory délky n

$$|\Omega| = \ell$$

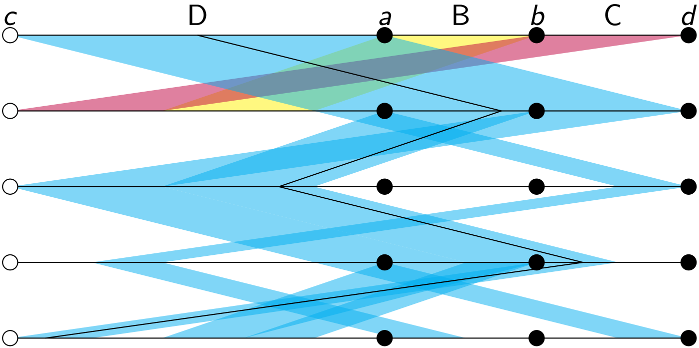
$$\mathcal{C}_\ell(n) = \#\mathcal{L}_\ell(n)$$

Theorem

$(f^{\Omega})^n$ značí n. iteraci krokovací funkce
množina $D_n = \{z_1 < z_2 < \cdots < z_{m-1}\}$ obsahuje všechny body nespojitosti $(f^{\Omega})^n$ kde $z_0 = c$ a $z_m = d$

Potom $(\forall i \in \widehat{m} \cup \{0\})(\forall y_l^{\Omega'}, y_k^{\Omega'} \in (z_i, z_{i+1}))$ platí, že slova $t_l^{\Omega} t_{l+1}^{\Omega} \ldots t_{l+n-1}^{\Omega}$ a $t_k^{\Omega} t_{k+1}^{\Omega} \ldots t_{k+n-1}^{\Omega}$ se rovnají.

Iterace krokovací funkce: $d - c = \frac{3\beta-10}{2}$



Theorem

Nechť $\Omega = [c, c + \ell)$ *a* $\Sigma(\Omega)$ *je příslušný kvazikrystal.*
Pokud $\ell \notin \mathbb{Z}[\beta]$, *pak*

$$\mathcal{C}_\ell(n) = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $\ell \in \mathbb{Z}[\beta]$, *pak* $\exists^1 k \in \mathbb{N}$ *takové, že* $(f^\Omega)^k(a^\Omega) = b^\Omega$ *nebo* $(f^\Omega)^{k+1}(b^\Omega) = a^\Omega$ *a platí*

$$\mathcal{C}_\ell(n) = \begin{cases} 2n + 1 & \forall n \leq k \\ n + k + 1 & \forall n > k \end{cases}$$

Theorem

Označme množinu

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \ell \,\middle|\, \ell \in \left(\frac{1}{\beta}, 1\right] \wedge \mathcal{C}_\ell(n) < 2n+1 \right\}.$$

Pak prvky $\mathcal{D}_n$ dělí interval $I := \left(\frac{1}{\beta}, 1\right]$ na konečný počet disjunktních podintervalů $(I_m)_{m\in\hat{N}}$ takových, že $\mathcal{L}_{\ell_1}(n) = \mathcal{L}_{\ell_2}(n)$ $\forall \ell_1, \ell_2 \in I_m$, $\forall m \in \hat{N}$.

Dvourozměrný kvazikrystal

$$\Sigma\left(\Omega\right) = \left\{x \in M \,|\, x^* \in \Omega\right\}$$

$$\alpha_1 = (1, 0)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{2-\beta}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_1^* = \alpha_1$$

$$\alpha_2^* = \left(\frac{\beta-2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$M = \mathbb{Z}\left[\beta\right]\alpha_1 + \mathbb{Z}\left[\beta\right]\alpha_2$$

$$v* = \left(a\alpha_1 + b\alpha_2\right)^* = a'\alpha_1^* + b'\alpha_2^*$$

$$\begin{aligned}\Sigma(\Omega) &= \{x \in M \mid x^* \in \Omega\} \\ &= \left\{a\alpha_1 + b\alpha_2 \in M \mid a'\alpha_1 + b'\alpha_3 \in \Omega\right\} \\ &= \left\{a\alpha_1 + b\alpha_2 \in M \mid a' \in I_1 \wedge b' \in I_2\right\} \\ &= \Sigma(I_1)\,\alpha_1 + \Sigma(I_2)\,\alpha_2\end{aligned}$$

Delonovská množina

$$P \subset \mathbb{R}^n$$

$$\forall x, y \in P,\ x \neq y : r \leq \|x - y\|,$$

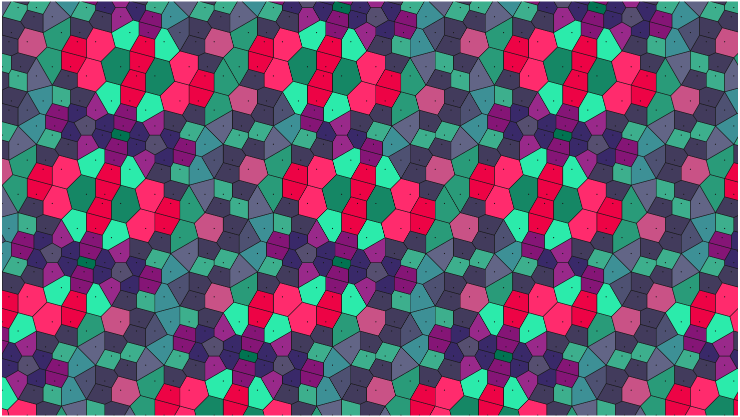
$$\forall z \in \mathbb{R}^n \exists x \in P : \|z - x\| \leq R.$$

$$R_c = \inf\{R > 0 \,|\, z \in \mathbb{R}^n \exists x \in P : \|z - x\| \leq R\}$$

Voronoiovo dláždění

$$V(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \forall z \in M,\ \|y - x\| < \|y - z\| \right\}$$

$$d - c = \frac{3\beta - 10}{2}$$



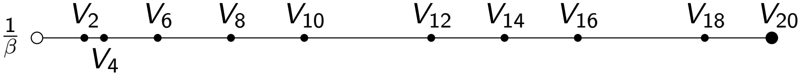
Theorem

Nechť $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal s kosočtvercovým oknem $\Omega = I\alpha_1 + I\alpha_2$. Pro bod $x \in \Sigma(\Omega): x = y_n^I\alpha_1 + y_k^I\alpha_2$ označme množinu

$$N_2(x) = \Big\{ y_i^I\alpha_1 + y_j^I\alpha_2 \,\Big|\, i \in \{n-2,\dots,n+2\}, j \in \{k-2,\dots,k+2\}\Big\} \setminus \{x\}$$

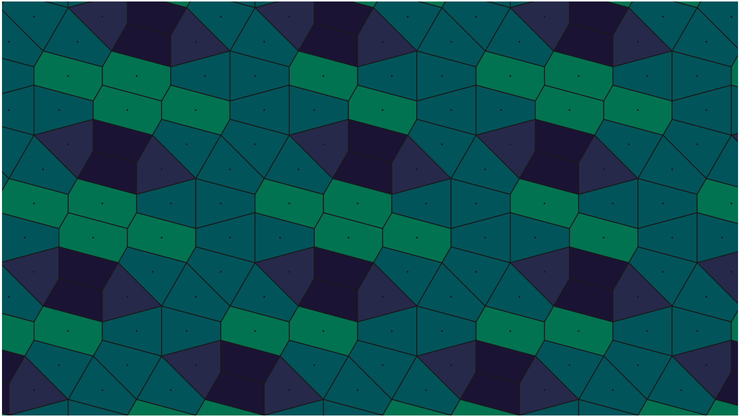
tedy 24 bezprostředních sousedů. Pak pro Voronoiovův polygon $V(x)$ platí

$$V(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall z \in N_2(x) : \|y-x\| < \|y-z\|\}.$$

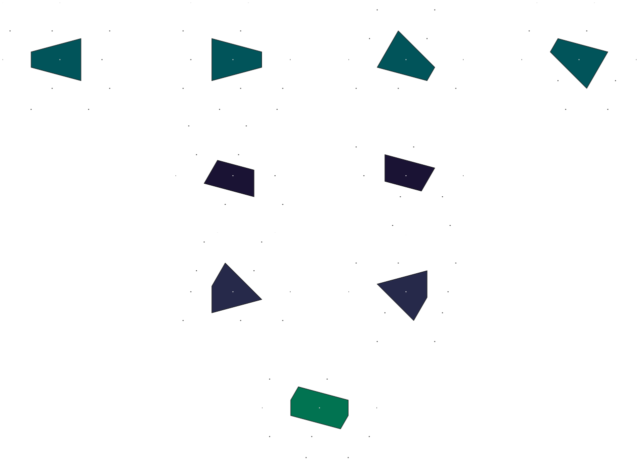


Obrázek : Rozdělení intervalu $\left(\frac{1}{\beta}, 1\right]$ podle jazyků $\mathcal{L}_\ell(4)$.

$$d - c = 1$$

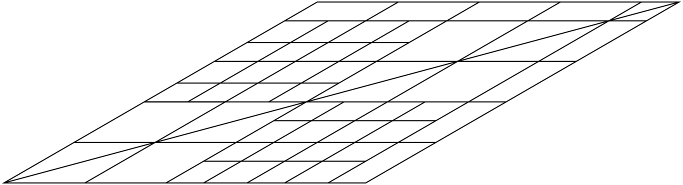


Symetrie voronoiových polygonů $d - c = 1$

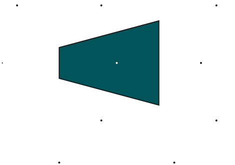


Rozdělení okna kvazikrystalu podle slov $n = 4$:

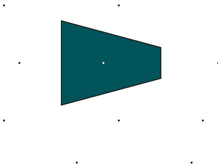
$d - c = \frac{3\beta - 10}{2}$



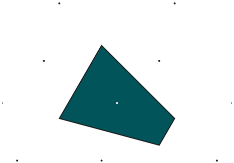
Symetrie voronoiových polygonů



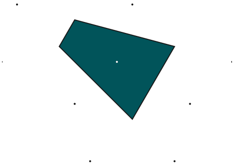
(1) CCDC DCCC



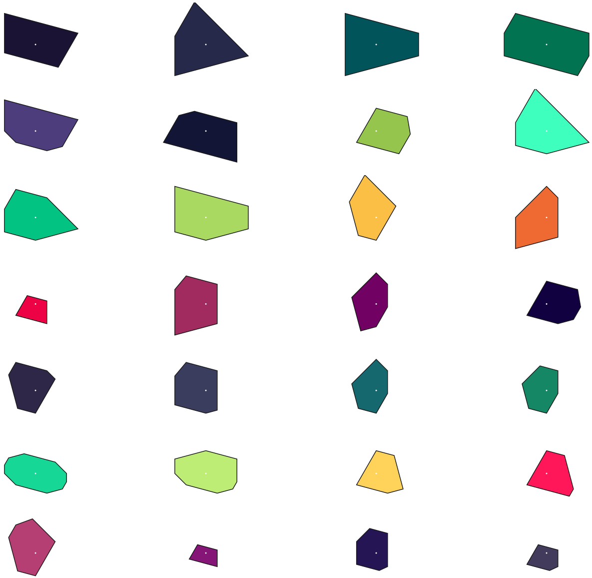
(2) CDCC DCCC

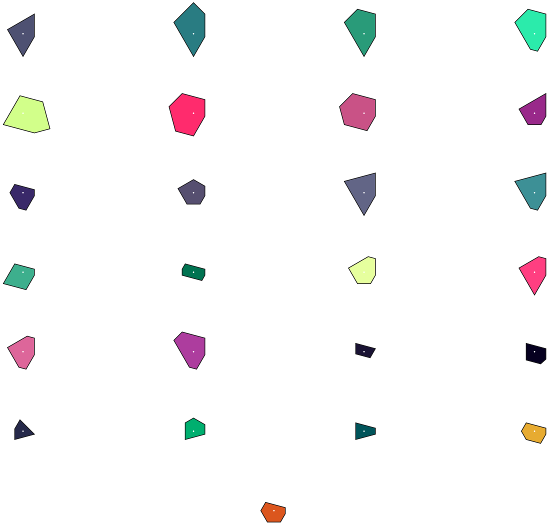


(3) DCCC CCDC



(4) DCCC CDCC





http://github.com/edasubert/quasicrystal
http://youtu.be/97jC8FMX_qI

- Z MASÁKOVÁ, J PATERA a J ZICH. *Classification of Voronoi and Delone tiles in quasicrystals. I. General method.* J. Phys. A **36** (2003), 1869–1894.
- L-S GUIMOND, Z MASÁKOVÁ, E PELANTOVÁ. *Combinatorial properties of infinite words associated with cut-and-project sequences.* J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 697–725.
- J ZICH. *Voronoi & Delone tiling of quasicrystals*. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská České vysoké učení technické v Praze, 2002. Diplomová práce. Vedoucí práce Z Masáková.
- J ZICH. *Voronoiovo dláždění kvazikrystalu*. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská České vysoké učení technické v Praze, 2000. Výzkumný úkol.
- D SHECHTMAN, I BLECH, D GRATIAS, J CAHN. *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*. Physical Review Letters 53 (20), 1951.

Děkuji Ing. Petrovi Ambrožovi, Ph.D. za příkladné vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy. Také děkuji doc. Ing. Zuzaně Masákové, Ph.D. za rady v teoretické části práce.

Věděli jste, že Jaderka je na YouTube?

http://youtube.com/videofjfi

Pokud kvadratickým číslem rozumíte to, co je obvyklé, tedy iracionální kořen polynomu $Ax^2 + Bx + C$ pro nějaká $A, B, C \in \mathbb{Z}$, pak toto tvrzení neplatí, protože obecně množina $\{a + b\beta | a, b \in \mathbb{Z}\}$ není okruh. Jak je třeba tvrzení opravit?

$$x^2 + ax + b$$

$$A|B \text{ a } A|C \implies x^2 = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$$

porovnávání v $\mathbb{Z}[\beta]$

$$sgn(az + bz2 - xc - 2yc)(az + bz2 - xc - 2yc)^2 < 3sgn(yc - bz)(yc - bz)^2$$

$$\frac{a + b\beta}{c} < \frac{x + y\beta}{z}$$
$$\frac{a + b(2 + \sqrt{3})}{c} < \frac{x + y(2 + \sqrt{3})}{z}$$
$$\frac{1}{cz}((a + 2b)z - (x + 2y)c) < \frac{1}{cz}\sqrt{3}(yc - bz)$$
$$(az + 2bz - xc - 2yc)^2 < 3(yc - bz)^2$$