

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2014

Eduard Šubert

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Voronoiova dlážďení a Cut-and-Project množiny

Voronoi Tiling and Cut-and-Project Sets

Vypracoval: Eduard Šubert

Školitel: Ing. Petr Ambrož, Ph.D.

Akademický rok: 2013/2014

Na toto místo přijde svázat **zadání diplomové práce!**
V jednom z výtisků musí být **originál** zadání, v ostatních kopie.

prázdná strana pro zadání

Čestné prohlášení

Prohlašuji na tomto místě, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 27. srpna 2014

.....
Eduard Šubert

Děkuji Ing. Petrovi Ambrožovi, Ph.D. za příkladné vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy. Také děkuji doc. Ing. Zuzaně Masákové, Ph.D. ze rady v teoretické části práce.

Název práce: **Voronoiova dlážďení a Cut-and-Project množiny**

Autor: Eduard Šubert

Obor: Inženýrská informatika

Zaměření: Softwarové inženýrství a matematická informatika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Petr Ambrož Ph.D., Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt: Práce se zabývá kvazikrystaly definovanými iracionalitou $2 + \sqrt{3}$. Jsou rozebrány jednorozměrné kvazikrystaly především s okny ve tvaru $(c, d]$, ale uvádíme metody, jak výsledky zobecnit na libovolné okno. Dále poznatky aplikujeme na dvourozměrné kvazikrystaly a analyzujeme jejich strukturu pomocí Voronoiova okolí. Na závěr uvádíme všechny možné tvary Voronoiových okolí, které se vyskytují na studovaných kvazikrystalech.

Title: **Voronoi Tiling and Cut-and-Project Sets**

Author: Eduard Šubert

Abstract: Main focus of the thesis are quasicrystals defined by irrationality $2 + \sqrt{3}$. One dimensional case is analysed primarily for windows as intervals $(c, d]$, however methods for generalization are presented. Next findings are applied to Two dimensional case and the structure is investigated with the aid of Voronoi tessellation. In conclusion all different shapes of observed Voronoi tiles are listed.

Obsah

1	Základní pojmy a definice	15
2	Jednorozměrné kvazikrystaly	16
2.1	Definice jednorozměrného kvazikrystalu	16
2.2	Struktura kvazikrystalu	18
2.3	Řetězce mezer	22
3	Jednorozměrné kvazikrystaly – algoritmy	26
3.1	Přesné výpočty v $\mathbb{Q}(\beta)$	26
3.2	Generování úseku posloupnosti bodů kvazikrystalu (y_n^Ω)	26
4	Dvourozměrné kvazikrystaly	29
4.1	Voronoiovo dláždění dvourozměrných kvazikrystalů	30
5	Seznam Voronoiových okolí	33

Úvod

V polovině minulého století byly objeveny slitiny s difrakčními obrazy, které neměly krystalografickou symetrii [5]. Rychle byl zahájen experimentální i teoretický výzkum takových struktur. Díky zdánlivé podobnosti s krystaly vznikl název kvazikrystal.

Dnes bylo již o kvazikrystalech, jako o matematické struktuře, odvozeno a dokázáno mnoho tvrzení. Většina prací se zabývá kvazikrystaly definovanými pomocí iracionální konstanty $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ známější jako zlatý řez. V této práci budeme studovat kvazikrystaly definované pomocí iracionality $2 + \sqrt{3}$.

V sekci 2 definujeme jednorozměrné kvazikrystaly a analyzujeme jejich strukturu. Sekce 3 shrnuje algoritmy použité při analýze jednorozměrných kvazikrystalů. V sekci 4 definujeme dvourozměrné kvazikrystaly a ukážeme jejich souvislost s jednorozměrnými. Sekce 5 shrnuje nabyté poznatky grafickou formou.

1 Základní pojmy a definice

V této sekci zavedeme konstantu β , která je klíčová pro celou práci. Dále se podíváme na některé vlastnosti této konstanty a zavedeme okruh $\mathbb{Z}[\beta]$.

Definice 1.1. Kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 = 4x - 1,$$

označíme

$$\beta = 2 + \sqrt{3} \doteq 3,732, \quad \beta' = 2 - \sqrt{3} \doteq 0,268.$$

Poznámka 1. Čísla β a β' z definice 1.1 budeme tímto způsobem značit v celé práci. Často budeme potřebovat vztahy mezi β a β' , které shrnuje následující věta.

Věta 1.2. *Vlastnosti β a β' .*

1. $\beta\beta' = 1$
2. $\beta + \beta' = 4$
3. $\beta^{k+2} = 4 \cdot \beta^{k+1} - \beta^k$, $\beta'^{k+2} = 4 \cdot \beta'^{k+1} - \beta'^k$
4. $\frac{1}{\beta} = \beta' = 4 - \beta$, $\frac{1}{\beta'} = \beta = 4 - \beta'$

Definice 1.3. Symbolem $\mathbb{Z}[\beta]$ značíme nejmenší okruh obsahující celá čísla \mathbb{Z} a iracionální konstantu β . Protože je β kvadratické číslo, platí

$$\mathbb{Z}[\beta] = \{a + b\beta | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Poznámka 2. Stejným způsobem můžeme zavést i okruh $\mathbb{Z}[\beta']$ a podle věty 1.2 platí

$$\mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z}[\beta'].$$

Poznámka 3. V celé práci budeme často porovnávat čísla v $\mathbb{Z}[\beta]$. V tabulce 1 uvádíme několik často užívaných čísel seřazených podle velikosti.

$15 - 4\beta$	0,0718	$19 - 5\beta$	0,3397	$23 - 6\beta$	0,6077	$27 - 7\beta$	0,8756
$-26 + 7\beta$	0,1244	$-22 + 6\beta$	0,3923	$-18 + 5\beta$	0,6603	$-14 + 4\beta$	0,9282
$30 - 8\beta$	0,1436	$-7 + 2\beta$	0,4641	$-3 + 1\beta$	0,7321	$16 - 4\beta$	1,0718
$-11 + 3\beta$	0,1962	$8 - 2\beta$	0,5359	$12 - 3\beta$	0,8038	$-25 + 7\beta$	1,1244
$4 - 1\beta$	0,2679	$-33 + 9\beta$	0,5885	$-29 + 8\beta$	0,8564	$31 - 8\beta$	1,1436

Tabulka 1: Často užívané nerovnosti v $\mathbb{Z}[\beta]$. Tabulka obsahuje podle velikosti seřazená čísla ze $\mathbb{Z}[\beta]$ a jejich přibližné hodnoty.

2 Jednorozměrné kvazikrystaly

V této sekci zavedeme pojem jednorozměrný kvazikrystal a uvedeme jeho základní vlastnosti.

2.1 Definice jednorozměrného kvazikrystalu

Definice 2.1. Zavedeme zobrazení $' : \mathbb{Z}[\beta] \rightarrow \mathbb{Z}[\beta]$ vztahem

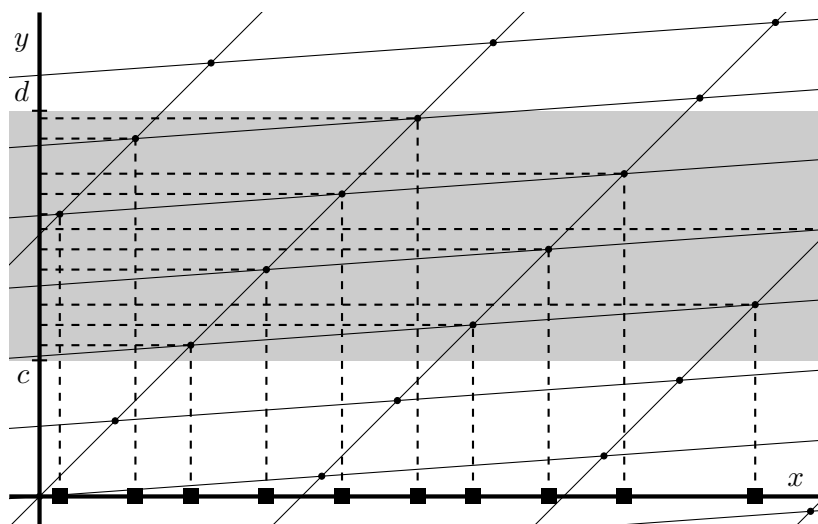
$$(a + b\beta)' = a + b(\beta').$$

Definice 2.2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}$ je omezená množina s neprázdným vnitřkem. Potom

$$\Sigma(\Omega) = \{x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid x' \in \Omega\}$$

nazveme **jednorozměrný kvazikrystal** a Ω nazveme oknem kvazikrystalu.

Poznámka 4. Pokud neuvedeme jinak, v této sekci bude $\Sigma(\Omega)$ vždy značit jednorozměrný kvazikrystal.



Obrázek 1: Ilustrace jednorozměrného kvazikrystalu. Souřadnice každého bodu mřížky jsou ve tvaru $(a + b\beta, a + b\beta')$. Na ose y se nachází okno $\Omega = [c, d]$. Na ose x se nachází body kvazikrystalu.

Věta 2.3. *Vlastnosti kvazikrystalu.* Nechť $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$ jsou okna kvazikrystalů $\Sigma(\Omega), \Sigma(\tilde{\Omega})$ a $\lambda \in \mathbb{Z}[\beta]$. Pak

$$1. \quad \Omega \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow \Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\tilde{\Omega})$$

$$2. \Sigma(\Omega) \cap \Sigma(\tilde{\Omega}) = \Sigma(\Omega \cap \tilde{\Omega})$$

$$3. \Sigma(\Omega) \cup \Sigma(\tilde{\Omega}) = \Sigma(\Omega \cup \tilde{\Omega})$$

$$4. \Sigma(\Omega + \lambda') = \Sigma(\Omega) + \lambda$$

$$5. \Sigma(\beta\Omega) = \frac{1}{\beta}\Sigma(\Omega)$$

Poznámka 5. Okno Ω jednorozměrného kvazikrystalu v definici 2.2 volíme jako interval. V dalším rozboru budeme uvažovat zleva uzavřený, zprava otevřený interval. Toto si můžeme dovolit díky větě 2.3 a následujícímu rozboru dalších typů intervalů:

$$\begin{aligned} \Sigma((c, d)) &= \begin{cases} \Sigma([c, d)) & c \notin \mathbb{Z}[\beta] \\ \Sigma([c, d)) \setminus \{c'\} & c \in \mathbb{Z}[\beta], \end{cases} \\ \Sigma([c, d]) &= \begin{cases} \Sigma([c, d)) & d \notin \mathbb{Z}[\beta] \\ \Sigma([c, d)) \cup \{d'\} & d \in \mathbb{Z}[\beta], \end{cases} \\ \Sigma((c, d]) &= \Sigma((c, d)) \cap \Sigma([c, d]). \end{aligned}$$

Věta 2.4. Pro $\Sigma(\Omega)$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\Sigma\left(\frac{1}{\beta^k}\Omega\right) = \beta^k \Sigma(\Omega)$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle $k \in \mathbb{N}$.

$k = 0$ Nastává rovnost.

$k = 1$

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{1}{\beta}\Omega\right) &= \{a + b\beta \mid a\beta + b \in \Omega\} \\ &= \{a + b\beta \mid (b + 4a) + (-a)\beta' \in \Omega\} \\ &\quad c = b + 4a, \quad d = -a \\ &\quad a = -d, \quad b = c + 4d \\ &= \{-d + (c + 4d)\beta \mid c + d\beta' \in \Omega\} \\ &= \{\beta(c + d\beta) \mid c + d\beta' \in \Omega\} \\ &= \beta(\Sigma(\Omega)) \end{aligned}$$

$k \rightarrow k + 1$

$$\Sigma\left(\frac{1}{\beta^k} \frac{1}{\beta}\Omega\right) = \beta^k \Sigma\left(\frac{1}{\beta}\Omega\right) = \beta^{k+1} \Sigma(\Omega)$$

$k < 0$

$$\begin{aligned} m &= -k > 0 \\ \Sigma(\Omega) &= \Sigma\left(\frac{\beta^m}{\beta^m}\Omega\right) = \beta^m \Sigma(\beta^m \Omega) = \frac{1}{\beta^k} \Sigma\left(\frac{1}{\beta^k}\Omega\right) \end{aligned}$$

□

Důsledek 2.5. Z vět 2.3 a 2.4 plyne, že není nezbytné zkoumat kvazikrystaly pro všechna okna, ale stačí se omezit na okna $\Omega = [c, d)$ kde $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, 1\right]$, které nazveme intervaly v základním tvaru. Všechny ostatní kvazikrystaly vzniknou násobením kvazikrystalu s oknem v základním tvaru vhodnou konstantou.

2.2 Struktura kvazikrystalu

Jednorozměrný kvazikrystal můžeme vnímat jako množinu bodů na přímce. V této sekci rozebereme rozložení těchto bodů. Zjistíme, že mezi sousedními body v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ mohou být mezery nejvýše 3 velikostí a že tyto velikosti závisí na velikosti okna Ω .

Definice 2.6. Ostře rostoucí posloupnost $(y_n^\Omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ definovanou jako $\Sigma(\Omega) = \{y_n^\Omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$ nazveme **posloupností bodů** kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$.

Lemma 2.7. Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c = 1$. Pak platí $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta, \beta - 1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega) &= \left\{ a + b\beta \mid a + \frac{b}{\beta} \in \Omega, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ a + b\beta \mid c \leq a + \frac{b}{\beta} < c + 1, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ a + b\beta \mid c - \frac{b}{\beta} \leq a < c + 1 - \frac{b}{\beta}, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ a + b\beta \mid a = \left\lceil c - \frac{b}{\beta} \right\rceil, b \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Tímto je definována posloupnost $\varphi_b = \left\lceil c - \frac{b}{\beta} \right\rceil + b\beta$.

$$\begin{aligned} \varphi_{b+1} - \varphi_b &= \left\lceil c - \frac{b+1}{\beta} \right\rceil + (b+1)\beta - \left\lceil c - \frac{b}{\beta} \right\rceil - b\beta \\ &= \lceil c - (b+1)(4-\beta) \rceil - \lceil c - b(4-\beta) \rceil + \beta \\ &= \lceil c - b(4-\beta) + \beta - 4 \rceil - \lceil c - b(4-\beta) \rceil + \beta \end{aligned}$$

Protože $-1 < \beta - 4 < 0$ liší se horní celé části o 0 nebo o 1.

$$\varphi_{b+1} - \varphi_b = \begin{cases} \beta \\ \beta - 1 \end{cases}$$

Posloupnost φ_b je ostře rostoucí a generuje body kvazikrystalu, lze tedy volit $y_n^\Omega = \varphi_n$. □

Lemma 2.8. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c = \beta^k$ $k \in \mathbb{Z}$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta^{1-k}, \beta^{1-k} - \beta^{-k}\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Dle lemma 2.4 platí:

$$\Sigma\left(\frac{1}{\beta^k}\Omega\right) = \beta^k \Sigma(\Omega).$$

Pro kvazikrystal $\Sigma(\beta^{-k}\Omega)$ platí:

$$\frac{1}{\beta^k}\Omega = \frac{1}{\beta^k}[c, d) = \left[\frac{1}{\beta^k}c, \frac{1}{\beta^k}d\right),$$

$$\frac{d-c}{\beta^k} = 1.$$

Z lemma 2.7 platí pro kvazikrystal $\Sigma(\beta^{-k}\Omega)$ platí $y_{n+1}^{(\beta^{-k}\Omega)} - y_n^{(\beta^{-k}\Omega)} \in \{\beta, \beta - 1\}$.
Pro kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ tedy platí

$$y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \left\{ \frac{\beta}{\beta^k} = \beta^{1-k}, \frac{\beta-1}{\beta^k} = \beta^{1-k} - \beta^{-k} \right\}.$$

□

Nyní rozebereme kvazikrystaly pro okna $\Omega = [c, d)$ kde $\beta^{k-1} < d - c < \beta^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Z důsledku 2.5 víme, že se stačí omezit na okna v základní tvaru $\left\{ \Omega = [c, d) \mid d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, 1\right) \right\}$.
Tuto množinu oken ještě rozdělíme na 3 podmnožiny podle velikosti mezer, které se v kvazikrystalech s danými okny vyskytují.

Lemma 2.9. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c = 1 - \frac{2}{\beta}$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta, 3\beta - 1\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Využijeme věty 2.3. Nalezneme okna $\Omega^{\frac{1}{\beta}}$ a Ω^1 taková, že

$$\Omega^{\frac{1}{\beta}} \subset \Omega \subset \Omega^1,$$

$$\Omega^{\frac{1}{\beta}} = [c^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}, d^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}) \text{ kde } d^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil} - c^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil} = \frac{1}{\beta} \quad \wedge \quad \Omega^1 = [c^{[1]}, d^{[1]}) \text{ kde } d^{[1]} - c^{[1]} = 1,$$

pak pro kvazikrystaly příslušící těmto oknům platí

$$\Sigma\left(\Omega^{\frac{1}{\beta}}\right) \subset \Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega^1).$$

Z lemmat 2.7 a 2.8 víme $y_{n+1}^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} - y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} \in \{\beta^2 = 4\beta - 1, \beta^2 - \beta = 3\beta - 1\}$ a $y_{n+1}^{\Omega^1} - y_n^{\Omega^1} \in \{\beta, \beta - 1\}$.

Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ obsahuje všechny body kvazikrystalu $\Sigma\left(\Omega^{\frac{1}{\beta}}\right)$ a jen některé body kvazikrystalu $\Sigma(\Omega^1)$. Chceme dokázat, že pro každý $y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} \in \Sigma\left(\Omega^{\frac{1}{\beta}}\right)$ takový, že $y_{n+1}^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} - y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} = 4\beta - 1$, následuje v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ bod $y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} + \beta$. Tedy že mezeru $4\beta - 1$ rozdělíme dalším bodem na mezery β a $3\beta - 1$. Volíme $x \in \Sigma\left(\Omega^{\frac{1}{\beta}}\right)$.

$$\begin{aligned} x' \in [c^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}, d^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}) &\wedge (x + 4\beta - 1)' \in [c^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}, d^{\lceil \frac{1}{\beta} \rceil}) \\ \Rightarrow x' \in [c, d) &\wedge (x + 4\beta - 1)' \in [c, d) \\ \Rightarrow x' \in [c, d) \cap [c - 4\beta' + 1, d - 4\beta' + 1) \\ &= [c, d) \cap [c - 15 + 4\beta, d - 15 + 4\beta) = [c, d - 15 + 4\beta) \end{aligned}$$

Nyní dokážeme, že $x + \beta \in \Sigma(\Omega)$ pro $x' \in [c, d - 15 + 4\beta)$.

$$\begin{aligned} x' + \beta' &\in [c, d) \\ \Rightarrow x' &\in [c - 4 + \beta, d - 4 + \beta) \cap [c, d - 15 + 4\beta) = [c, d - 4 + \beta) \subset [c, d) \end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že

$$(\forall x \in \Sigma(\Omega), x' \in [c, d - 15 + 4\beta)) (\exists y \in \Sigma(\Omega)) (y = x + \beta).$$

Zbývá dokázat, že mezeru $3\beta - 1$ již žádný bod kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ nerozdělí. Ověříme, že nebude rozdělena mezerou β ani mezerou $\beta - 1$.

$$\begin{aligned} x' \in [c, d) &\wedge (x + 3\beta - 1)' \in [c, d) \\ \Rightarrow x' &\in [c, d) \cap [c - 11 + 3\beta, d - 11 + 3\beta) = [c - 11 + 3\beta, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' + \beta' &\in [c, d) \\ \Rightarrow x' &\in [c - 4 + \beta, d - 4 + \beta) \cap [c - 11 + 3\beta, d) \\ &= [c - 4 + \beta, c - 11 + 3\beta) \cap [c - 11 + 3\beta, d) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' + \beta' - 1 &\in [c, d) \\ \Rightarrow x' &\in [c - 3 + \beta, d - 3 + \beta) \cap [c - 11 + 3\beta, d) \\ &= [c - 3 + \beta, c - 11 + 3\beta) \cap [c - 10 + 3\beta, d) = \emptyset \end{aligned}$$

Využili jsme předpokladu $d = c + 1 - \frac{2}{\beta}$ a vztahu $d < c - 3 + \beta$.

Dokázali jsme tak, že pro každý $y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}}$ takový, že $y_{n+1}^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} - y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} = 4\beta - 1$ platí:

$$\begin{aligned} y_n^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} &= y_k^{\Omega}, y_{k+1}^{\Omega} - y_k^{\Omega} = \beta \\ y_{n+1}^{\Omega^{\frac{1}{\beta}}} &= y_{k+2}^{\Omega}, y_{k+2}^{\Omega} - y_{k+1}^{\Omega} = 3\beta - 1 \end{aligned}$$

□

Lemma 2.10. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c = 1 - \frac{1}{\beta}$. Pak platí $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta, 2\beta - 1\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Nalezneme okna $\Omega^{1-\frac{2}{\beta}}$ a Ω^1 taková, že

$$\Omega^{1-\frac{2}{\beta}} \subset \Omega \subset \Omega^1,$$

tedy $\Omega^{1-\frac{2}{\beta}} = [c^{[1-\frac{2}{\beta}]}, d^{[1-\frac{2}{\beta}]})$ kde $d^{[1-\frac{2}{\beta}]} - c^{[1-\frac{2}{\beta}]} = 1 - \frac{2}{\beta}$ a $\Omega^1 = [c^{[1]}, d^{[1]})$ kde $d^{[1]} - c^{[1]} = 1$.

Pro kvazikrystaly příslušící těmto oknům platí

$$\Sigma\left(\Omega^{1-\frac{2}{\beta}}\right) \subset \Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega^1).$$

Mezery mezi sousedními body v kvazikrystalu $\Sigma\left(\Omega^{1-\frac{2}{\beta}}\right)$ jsou $3\beta - 1$ a β , mezery mezi sousedními body v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega^1)$ jsou β a $\beta - 1$. Dále postupujeme obdobně jako v důkazu lemma 2.9. \square

Obdobným způsobem jako lemma 2.10 dokážeme i následující 3 lemmata.

Lemma 2.11. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, 1 - \frac{2}{\beta}\right)$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta, 3\beta - 1, 4\beta - 1\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

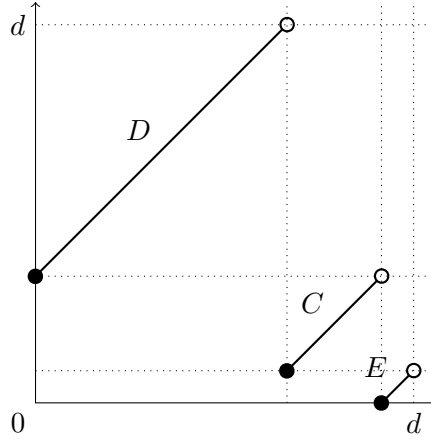
Lemma 2.12. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c \in \left(1 - \frac{2}{\beta}, 1 - \frac{1}{\beta}\right)$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta, 2\beta - 1, 3\beta - 1\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 2.13. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c \in \left(1 - \frac{1}{\beta}, 1\right)$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \in \{\beta - 1, \beta, 2\beta - 1\} \forall n \in \mathbb{N}$.*

Věta 2.14. *Nechť $\Omega = [c, d)$ kde $d - c \in \left[\frac{1}{\beta}, 1\right]$. Pak vzdálenosti $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega \forall n \in \mathbb{N}$ jsou v tabulce 2.*

$\frac{1}{\beta}$	$\left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta-2}{\beta}\right)$	$\frac{\beta-2}{\beta}$	$\left(\frac{\beta-2}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}\right)$	$\frac{\beta-1}{\beta}$	$\left(\frac{\beta-1}{\beta}, 1\right)$	1
$4\beta - 1$	$4\beta - 1$					
$3\beta - 1$	$3\beta - 1$	$3\beta - 1$	$3\beta - 1$			
			$2\beta - 1$	$2\beta - 1$	$2\beta - 1$	
	β	β	β	β	β	β
					$\beta - 1$	$\beta - 1$

Tabulka 2: Mezery, které se vyskytují mezi sousedními body v kvazikrystalech s okny dané velikosti.



Obrázek 2: Graf krokovací funkce pro kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ kde $\Omega = [c, d)$, $c = 0$, $d = 12 - 3\beta$. $C = 2\beta - 1$, $D = \beta$ a $E = \beta - 1$.

2.3 Řetězce mezer

V předchozí sekci jsme ukázali, že mezi sousedními body kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ se mohou vyskytovat mezery nejvýše 3 velikostí. Nyní budeme zkoumat možné posloupnosti těchto mezer. Nejdříve zadefinujeme několik pojmů, které nám umožní rozebírat kvazikrystaly obecně.

Definice 2.15. Mezery $y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega$ budeme značit $A = 4\beta - 1$, $B = 3\beta - 1$, $C = 2\beta - 1$, $D = \beta$ a $E = \beta - 1$.

Definice 2.16. Funkci $f^\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ pro $\Omega = [c, d)$ definovanou

$$\begin{aligned}
 d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta - 2}{\beta}\right] : f^\Omega(x) &= \begin{cases} x + (\beta)' & x \in [c, d - \frac{1}{\beta}) \\ x + (4\beta - 1)' & x \in [d - \frac{1}{\beta}, c + \frac{\beta - 3}{\beta}) \\ x + (3\beta - 1)' & x \in [c + \frac{\beta - 3}{\beta}, d) \end{cases} \\
 d - c \in \left(\frac{\beta - 2}{\beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}\right] : f^\Omega(x) &= \begin{cases} x + (\beta)' & x \in [c, d - \frac{1}{\beta}) \\ x + (3\beta - 1)' & x \in [d - \frac{1}{\beta}, c + \frac{\beta - 2}{\beta}) \\ x + (2\beta - 1)' & x \in [c + \frac{\beta - 2}{\beta}, d) \end{cases} \\
 d - c \in \left(\frac{\beta - 1}{\beta}, 1\right] : f^\Omega(x) &= \begin{cases} x + (\beta)' & x \in [c, d - \frac{1}{\beta}) \\ x + (2\beta - 1)' & x \in [d - \frac{1}{\beta}, c + \frac{\beta - 1}{\beta}) \\ x + (\beta - 1)' & x \in [c + \frac{\beta - 1}{\beta}, d) \end{cases}
 \end{aligned}$$

nazveme **krokovací funkcí** kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$.

Věta 2.17. *Vlastnosti krokovací funkce f^Ω :*

1. *Krokováci funkce vrací obraz při zobrazení ' následujícího bodu v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$: $f^\Omega((y_n^\Omega)') = (y_{n+1}^\Omega)'$.*
2. *Krokováci funkce je po částech translace.*
3. *Body nespojitosti rozdělují okno Ω na intervaly, které obsahují body, po jejichž vzorech v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ následují stejné mezery.*
4. *Inverzní krokovací funkce vrací obraz při zobrazení ' předchozího bodu v kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$. $(f^\Omega)^{-1}((y_{n+1}^\Omega)') = (y_n^\Omega)'$*

Poznámka 6. Body nespojitosti krokovací funkce kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ označíme a^Ω a b^Ω . Tedy pro $\Omega = [c, d)$ máme:

$$\begin{aligned} d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta - 2}{\beta} \right] : \quad & a^\Omega = d - \frac{1}{\beta} \\ & b^\Omega = c + \frac{\beta - 3}{\beta} \\ d - c \in \left(\frac{\beta - 2}{\beta}, \frac{\beta - 1}{\beta} \right] : \quad & a^\Omega = d - \frac{1}{\beta} \\ & b^\Omega = c + \frac{\beta - 2}{\beta} \\ d - c \in \left(\frac{\beta - 1}{\beta}, 1 \right] : \quad & a^\Omega = d - \frac{1}{\beta} \\ & b^\Omega = c + \frac{\beta - 1}{\beta} \end{aligned}$$

Definice 2.18. Slovo $(t_n^\Omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ pro $\Omega = [c, d)$ definované jako

$$\begin{aligned} d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta - 2}{\beta} \right] : \quad & t_n^\Omega = \begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = \beta \\ A & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = 4\beta - 1 \\ B & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = 3\beta - 1 \end{cases} \\ d - c \in \left(\frac{\beta - 2}{\beta}, \frac{\beta - 1}{\beta} \right] : \quad & t_n^\Omega = \begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = \beta \\ B & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = 3\beta - 1 \\ C & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = 2\beta - 1 \end{cases} \\ d - c \in \left(\frac{\beta - 1}{\beta}, 1 \right] : \quad & t_n^\Omega = \begin{cases} D & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = \beta \\ C & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = 2\beta - 1 \\ E & y_{n+1}^\Omega - y_n^\Omega = \beta - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

nazveme **slovem** kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$.

Poznámka 7. Podslovem délky n rozumíme konečné slovo délky n , které se vyskytuje v daném slově.

Definice 2.19. Funkci $\mathcal{C}_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která přiřazuje k $n \in \mathbb{N}$ počet různých podslov délky n ve slově kvazikrystalu $(t_n^\Omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ kde $|\Omega| = \ell$ nazveme **komplexitou** slova kvazikrystalu.

Definice 2.20. Množinu $\mathcal{L}_\ell(n)$, která obsahuje všechna různá podslova délky n ve slově kvazikrystalu $(t_n^\Omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ kde $|\Omega| = \ell$ nazveme **jazykem** slova kvazikrystalu.

Poznámka 8. Všimněme si, že komplexita i jazyk kvazikrystalu závisejí pouze na délce okna, nikoli na jeho pozici. Přesvědčíme se o tom v následující větě 2.21.

Věta 2.21. *Nechť $(f^\Omega)^n$ značí n . iteraci krokovací funkce kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$ a množina $D_n = \{z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1}\}$ obsahuje všechny body nespojitosti $(f^\Omega)^n$. Navíc $z_0 = c$ a $z_m = d$.*

Potom $(\forall i \in \widehat{m} \cup \{0\})(\forall y_l^{\Omega'}, y_k^{\Omega'} \in (z_i, z_{i+1}))$ platí, že slova $t_l^\Omega t_{l+1}^\Omega \dots t_{l+n-1}^\Omega$ a $t_k^\Omega t_{k+1}^\Omega \dots t_{k+n-1}^\Omega$ se rovnají.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

$n = 1$ Protože platí $z_1 = a^\Omega$, $z_2 = b^\Omega$, je z definice 2.16 krokovací funkce platnost tvrzení zřejmá.

$n - 1 \rightarrow n$ Zřejmě platí $D_{n-1} \subset D_n$. Nechť $y_l^\Omega, y_k^\Omega \in \Sigma(\Omega)$ jsou takové, že mezi $y_l^{\Omega'}$ a $y_k^{\Omega'}$ není žádný bod nespojitosti $(f^\Omega)^n$, tedy ani žádný bod nespojitosti $(f^\Omega)^{n-1}$. Podle indukčního předpokladu se slova $t_l^\Omega t_{l+1}^\Omega \dots t_{l+n-2}^\Omega$ a $t_k^\Omega t_{k+1}^\Omega \dots t_{k+n-2}^\Omega$ rovnají.

Platí, že $(f^\Omega)^n|_{(z_i, z_{i+1})}$ je lineární funkce se směrnici 1. Označme $\tilde{y}_l^\Omega = (f^\Omega)^{n-1}(y_l^{\Omega'})$ a $\tilde{y}_k^\Omega = (f^\Omega)^{n-1}(y_k^{\Omega'})$ a předpokládejme $\tilde{y}_l^\Omega < \tilde{y}_k^\Omega$. Potom

$$f^\Omega(\tilde{y}_l^\Omega) < f^\Omega(\tilde{y}_k^\Omega).$$

Pokud by platilo $a^\Omega \in (\tilde{y}_l^\Omega, \tilde{y}_k^\Omega)$ nebo $b^\Omega \in (\tilde{y}_l^\Omega, \tilde{y}_k^\Omega)$, tedy $t_{k+n-1}^\Omega \neq t_{l+n-1}^\Omega$, pak nutně platí $f^\Omega(\tilde{y}_l^\Omega) > f^\Omega(\tilde{y}_k^\Omega)$, což je spor.

Tím jsme dokázali $t_{l+n-1} = t_{k+n-1}$. □

Věta 2.22. *Nechť $\Omega = [c, c + \ell)$ a $\Sigma(\Omega)$ je příslušný kvazikrystal.*

Pokud $\ell \notin \mathbb{Z}[\beta]$ pak

$$\mathcal{C}_\ell(n) = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $\ell \in \mathbb{Z}[\beta]$ pak $\exists^1 k \in \mathbb{N}$ takové, že $(f^\Omega)^k(a^\Omega) = b^\Omega$ nebo $(f^\Omega)^{k+1}(b^\Omega) = a^\Omega$ a platí

$$\mathcal{C}_\ell(n) = \begin{cases} 2n + 1 & \forall n \leq k \\ n + k + 1 & \forall n > k \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz věty najdeme například v [2]. □

Poznámka 9. Následující lemma 2.23 a věta 2.24 jsou přímé analogie výsledků [1].

Lemma 2.23. *Pro každé $\frac{1}{\beta} < \ell \leq 1$, $I = [c, c + \ell)$ a $n \in \mathbb{N}$ existují ℓ_1 a ℓ_2 takové, že $\frac{1}{\beta} \leq \ell_1 < \ell < \ell_2 \leq 1$ a*

$$\mathcal{L}_\ell(n) \subset \mathcal{L}_{\hat{\ell}}(n) \quad \forall \hat{\ell} \in (\ell_1, \ell_2).$$

Důkaz. Pro každé slovo $t_i^\Omega \dots t_{i+n-1}^\Omega \in \mathcal{L}_\ell(n)$ existuje odpovídající posloupnost bodů z kvazikrystalu $y_j^\Omega, \dots, y_{j+n}^\Omega$. Pro jejich ' obrazy musí platit

$$\max \left\{ y_j^{\Omega'}, \dots, y_{j+n}^{\Omega'} \right\} - \min \left\{ y_j^{\Omega'}, \dots, y_{j+n}^{\Omega'} \right\} < \ell.$$

Tato nerovnost platí pro všech $\mathcal{C}_\ell(n)$ slov z $\mathcal{L}_\ell(n)$.

Určitě existuje $\ell_1 < \ell$, pro které budou nerovnosti splněny a tedy bude splněna inkluze $\mathcal{L}_\ell(n) \subset \mathcal{L}_{\ell_1}(n)$. Inkluze bude zřejmě platit i pro všechna $\hat{\ell} \in [\ell_1, \ell)$.

Existenci ℓ_2 dokážeme sporem. Předpokládejme, že po libovolném zvětšení okna inkluze neplatí, tedy že pro nějaké slovo $t_k^\Omega \dots t_{k+n-1}^\Omega \in \mathcal{L}_\ell(n)$, přibude do kvazikrystalu spočetně mnoho bodů, tak aby zmizely všechny výskyty daného slova. To ale neplatí při zvětšení pouze o krajní bod okna, pro kvazikrystal $\Sigma([c, c + \ell])$, při kterém přibude pouze jeden bod. Z tohoto sporu plyne existence ℓ_2 . \square

Věta 2.24. *Mějme kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$, kde $\Omega = [c, c + \ell)$, označme množinu*

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \ell \mid \ell \in \left(\frac{1}{\beta}, 1 \right] \wedge \mathcal{C}_\ell(n) < 2n + 1 \right\}.$$

Pak prvky \mathcal{D}_n dělí interval $I := \left(\frac{1}{\beta}, 1 \right]$ na konečný počet disjunktních podintervalů $(I_m)_{m \in \hat{N}}$ takových, že $\mathcal{L}_{\ell_1}(n) = \mathcal{L}_{\ell_2}(n) \forall \ell_1, \ell_2 \in I_m, \forall m \in \hat{N}$.

Důkaz. Dokážeme, že množina \mathcal{D}_n je konečná. Podle věty 2.22 hledáme okna splňující rovnice

$$(f^\Omega)^k(a^\Omega) = b^\Omega \quad (f^\Omega)^{k+1}(b^\Omega) = a^\Omega \quad \forall k \leq n.$$

Neznámou v těchto rovnicích je $\ell \in \mathbb{Z}[\beta]$, neboť f^Ω závisí na ℓ . Víme, že $(f^\Omega)^k$ je pro pevné k po částech lineární a tedy rovnice mají nejvýše konečně mnoho řešení.

Zvolme pevné $l \notin \mathbb{Z}[\beta]$. Podle lemma 2.23 existují ℓ_1 a ℓ_2 takové, že $\frac{1}{\beta} \leq \ell_1 < \ell < \ell_2 \leq 1$ a $\mathcal{L}_\ell(n) \subset \mathcal{L}_{\hat{\ell}}(n)$ pro všechna $\hat{\ell} \in (\ell_1, \ell_2)$. Protože $\mathcal{C}_\ell(n) = 2n + 1$, inkluze se stává rovností. Zvolíme nejmenší ℓ_1 a největší ℓ_2 , pro která rovnost platí.

Nyní sporem dokážeme, že $\ell_1 \in \mathcal{D}_n$. Pokud by platilo $\ell_1 \notin \mathcal{D}_n$ pak podle lemma 2.23 existuje $\ell_3 < \ell_1$ takové, že $\mathcal{C}_{\ell_3}(n) = 2n + 1$ a $\mathcal{L}_{\ell_3}(n) = \mathcal{L}_{\ell_1}(n) = \mathcal{L}_\ell(n)$, což je spor s volbou ℓ_1 .

Stejným způsobem dokážeme $\ell_2 \in \mathcal{D}_n$. \square

Tímto ukončujeme rozbor jednorozměrných kvazikrystalů. Dozvěděli jsme se, že jednorozměrný kvazikrystal můžeme vnímat jako posloupnost bodů na přímce, mezi kterými se vyskytují mezery nejvýše 3 velikostí. Pokud mezery označíme písmeny, můžeme kvazikrystal vnímat i jako nekonečné slovo, pro jehož komplexitu jsme dokázali, že závisí na velikosti okna. V následující sekci navrhneme algoritmus generující posloupnost bodů kvazikrystalu i slovo kvazikrystalu.

3 Jednorozměrné kvazikrystaly – algoritmy

V této sekci navrhujeme algoritmy pro generování a analýzu jednorozměrných kvazikrystalů.

3.1 Přesné výpočty v $\mathbb{Q}(\beta)$

Abychom mohli provést řádnou analýzu kvazikrystalu, nemůžeme se spolehnout na omezenou přesnost numerických výpočtů. Proto veškeré výpočty provádíme přesně v tělese $\mathbb{Q}(\beta) = \{p + q\beta \mid p, q \in \mathbb{Q}\} = \left\{ \frac{a+b\beta}{c} \mid a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N} \right\}$ pomocí dodefinovaného číselného typu. Zde uvádíme vzorce na potřebné operace.

Algoritmus 1: Funkce pro přesné počítání v $\mathbb{Q}(\beta)$.

```
Struct (p)
1 | int a;
2 | int b;
3 | int c;

Function sčítání(p,q)
1 | p.a = p.a*q.c + q.a*p.c;
2 | p.b = p.b*q.c + q.b*p.c;
3 | p.c = p.c * q.c;
4 | return p;

Function násobeníČíslem(p,i)
1 | p.a = p.a*i;
2 | p.b = p.b*i;
3 | p.c = p.c;
4 | return p;

Function násobení(p,q)
1 | p.a = p.a*q.a - p.b*q.b;
2 | p.b = p.b*q.a + p.a*q.b + 4*p.b*q.b;
3 | p.c = p.c * q.c;
4 | return p;

Function dělení(p,q)
1 | p.a = (p.a*q.a + p.b*q.b + 4*p.a*q.b)*q.c;
2 | p.b = (p.b*q.a - p.a*q.b)*q.c;
3 | p.c = (q.a*q.a + 4*q.a*q.b + q.b*q.b)*p.c;
4 | return p;
```

3.2 Generování úseku posloupnosti bodů kvazikrystalu (y_n^Ω)

Jako první nás bude zajímat přímo posloupnost bodů kvazikrystalu (y_n^Ω) . K tomuto využijeme krokovací funkce f^Ω z definice 2.16. Budeme generovat pouze úseky posloupnosti na intervalu $[0, a)$ pro kvazikrystal s oknem v základním tvaru, algoritmus to značně

zjednoduší a dle věty 2.3 takový algoritmus postačí pro generování úseků posloupností pro všechny typy oken.

Musíme rozlišovat mezi 3 případy $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta-2}{\beta}\right]$, $d - c \in \left(\frac{\beta-2}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}\right]$ a $d - c \in \left(\frac{\beta-1}{\beta}, 1\right]$. Zde uvádíme algoritmus jen pro první případ.

Algoritmus 2: Generování úseku posloupnosti bodů kvazikrystalu $\Sigma([c, d))$ kde $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta-2}{\beta}\right]$.

Data: $\{c, d \text{ (okno)}\}, \{a \text{ (úsek)}\}$
 $y = 0;$
while $y < a$ **do**
 kvazikrystal $\ll y;$
 if $y \in [c, d - 4 + \beta)$ **then**
 $y += \beta;$
 else if $y \in [d - 4 + \beta, c - 11 + 3\beta)$ **then**
 $y += 4\beta - 1;$
 else
 $y += 3\beta - 1;$
 end
end
return *kvazikrystal*

Poznámka 10. V zápise algoritmu značíme značkou $(B \ll a)$ přidání prvku a do množiny B .

Obdobný algoritmus můžeme použít i pro generování úseku slova kvazikrystalu t_n^Ω . Spíše než celé slovo nás ale zajímají jeho různá konečná podslova, tedy množina $\mathcal{L}_\ell(n)$. K jejich generování využijeme iterací krokovací funkce jako ve větě (2.21).

Algoritmus 3: Generování množiny $\mathcal{L}_{d-c}(n)$ kvazikrystalu $\Sigma([c, d))$ kde $d - c \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\beta-2}{\beta}\right]$.

```

Data:  $\{c, d \text{ (okno)}\}, \{n \text{ (délka)}\}$ 
 $D, D_1$  ; /* seznamy intervalů */
 $S, S_1$  ; /* seznamy slov */
 $D \ll [c, a^\Omega) \ll [a^\Omega, b^\Omega) \ll [b^\Omega, d)$ ;
 $S \ll D \ll A \ll B$ ;
for  $i = 1$  to  $n$  do
    foreach  $[u, v) \in D, W \in S$  do
         $[u_1, v_1) = f^\Omega([u, v))$ ;
        if  $a^\Omega \in (u_1, v_1) \wedge b^\Omega \in (u_1, v_1)$  then
             $D_1 \ll [u_1, a^\Omega) \ll [a^\Omega, b^\Omega) \ll [b^\Omega, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WD \ll WA \ll WB$ ;
        else if  $a^\Omega \in (u_1, v_1)$  then
             $D_1 \ll [u_1, a^\Omega) \ll [a^\Omega, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WD \ll WA$ ;
        else if  $b^\Omega \in (u_1, v_1)$  then
             $D_1 \ll [u_1, b^\Omega) \ll [b^\Omega, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WA \ll WB$ ;
        else if  $v_1 \leq a^\Omega$  then
             $D_1 \ll [u_1, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WD$ ;
        else if  $v_1 \leq b^\Omega$  then
             $D_1 \ll [u_1, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WA$ ;
        else
             $D_1 \ll [u_1, v_1)$ ;
             $S_1 \ll WB$ ;
        end
    end
     $D = D_1$ ;
     $S = S_1$ ;
end
return  $D, S$ 

```

Z algoritmu získáme i rozdělení okna na intervaly, na kterých se daná podslova délky n vyskytují.

4 Dvourozměrné kvazikrystaly

V této sekci se budeme zabývat dvourozměrnými kvazikrystaly. Ukážeme, že při dodržení jistých podmínek bude dvourozměrný kvazikrystal představovat kartézský součin dvou jednorozměrných kvazikrystalů.

Definici obecného kvazikrystalu v této práci neuvádíme, je možné ji nalézt v [1]. Uvádíme definici kontrétní pro případ dvourozměrného kvazikrystalu s iracionalitou β .

Definice 4.1. Označme vektory

$$\alpha_1 = (1, 0), \quad \alpha_2 = \left(\frac{2 - \beta}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \alpha_3 = \left(\frac{\beta - 2}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

a množinu

$$M = \mathbb{Z}[\beta] \alpha_1 + \mathbb{Z}[\beta] \alpha_2.$$

Poznámka 11. Vektory z předchozí definice jsou klíčové pro definici dvourozměrného kvazikrystalu. Množina M bude sloužit jako dvourozměrný ekvivalent $\mathbb{Z}[\beta]$ v jednorozměrném kvazikrystalu. Všimněme si také, že vektory α_1, α_2 svírají úhel $\frac{10\pi}{12}$ a vektory α_1, α_3 svírají úhel $\frac{2\pi}{12}$. Z tohoto faktu plyne symetrie řádu 12.

Definice 4.2. Zobrazení $*$: $M \rightarrow M$ definované jako

$$v^* = (a\alpha_1 + b\alpha_2)^* = a'\alpha_1 + b'\alpha_3 \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}[\beta]$$

nazveme **hvězdicové**.

Poznámka 12. Snadno nahlédneme, že $\alpha_1^* = \alpha_1$ a $\alpha_2^* = \alpha_3$.

Definice 4.3. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená s neprázdným vnitřkem. Množinu

$$\Sigma(\Omega) = \{x \in M \mid x^* \in \Omega\}$$

nazveme **dvourozměrný kvazikrystal**.

Poznámka 13. Pokud neuvedeme jinak, v této sekci bude $\Sigma(\Omega)$ vždy značit dvourozměrný kvazikrystal.

Stejně jako v případě jednorozměrného kvazikrystalu i zde se omezíme na speciální typ okna Ω , na rovnoběžník.

Věta 4.4. Necht' $I_1 = [c_1, d_1)$ a $I_2 = [c_2, d_2)$, pro kvazikrystal s rovnoběžníkovým oknem $\Omega = I_1\alpha_1^* + I_2\alpha_2^*$ platí

$$\Sigma(\Omega) = \Sigma(I_1)\alpha_1 + \Sigma(I_2)\alpha_2,$$

kde $\Sigma(I_1)$ a $\Sigma(I_2)$ jsou jednorozměrné kvazikrystaly.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Omega) &= \{x \in M \mid x^* \in \Omega\} \\
&= \{a\alpha_1 + b\alpha_2 \in M \mid a'\alpha_1 + b'\alpha_3 \in \Omega\} \\
&= \{a\alpha_1 + b\alpha_2 \in M \mid a' \in I_1 \wedge b' \in I_2\} \\
&= \Sigma(I_1)\alpha_1 + \Sigma(I_2)\alpha_2
\end{aligned}$$

□

Definice 4.5. Množinu $P \subset \mathbb{R}^n$ nazveme delonovskou, pokud existují konstanty $R > 0$ a $r > 0$, takové že:

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \in P, x \neq y : r \leq \|x - y\|, \\
&\forall z \in \mathbb{R}^n \exists x \in P : \|z - x\| \leq R.
\end{aligned}$$

Pro delonovskou množinu definujeme pokrývací poloměr

$$R_c = \inf\{R > 0 \mid z \in \mathbb{R}^n \exists x \in P : \|z - x\| \leq R\}$$

Z dosavadních poznatků o jednorozměrných kvazikrystalech a z definice dvourozměrného kvazikrystalu je zřejmé, že oba kvazikrystaly jsou delonovské množiny.

4.1 Voronoiovo dláždění dvourozměrných kvazikrystalů

Dále se budeme zajímat o různé tvary Voronoiových polygonů na dvourozměrném kvazikrystalu s rovnoběžníkovým oknem. Využijeme k tomu znalosti jednorozměrných kvazikrystalů z předchozí kapitoly.

Definice 4.6. Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ diskrétní a $x \in P$. Potom množinu

$$V(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in P, z \neq x : \|y - x\| < \|y - z\|\}$$

nazveme Voronoiovo okolí (polygon) bodu x v množině P .

Věta 4.7. Nechť P je delonovská množina a R_c její pokrývací poloměr. Pro $x \in P$ označíme množinu

$$N = \{z \in P \mid z \neq x \wedge \|z - x\| \leq 2R_c\}.$$

Potom Voronoiovo okolí bodu x můžeme vyjádřit jako

$$V(x) = \bigcap_{z \in N} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \|y - z\|\}.$$

Poznámka 14. Přechází věta nám dovoluje omezit se při konstrukci Voronoiova okolí bodu pouze na jemu blízké body z množiny M a ukazuje, jak konstruovat Voronoiovo okolí jako průnik polorovin. Důkaz předchozí věty je podrobně rozebrán v [4].

Lemma 4.8. *Nechť $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal s rovnoběžníkovým oknem $\Omega = I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2$. Pro pokrývací poloměr kvazikrystalu R_c platí*

$$R_c \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ y_{j+1}^{I_1} - y_j^{I_1}, y_{j+1}^{I_2} - y_j^{I_2} \right\}.$$

Tedy R_c můžeme odhadnout největší mezerou v jednorozměrných kvazikrystalech.

Důkaz. Z rozboru jednorozměrných kvazikrystalů víme, že existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $y_{j+1}^{I_k} - y_j^{I_k} < L$ kde $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, 2\}$. Zřejmě mezi body dvourozměrného kvazikrystalu $\Sigma(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2)$ nemůžeme vepsat kouli o větším poloměru než je L . Z toho plyne odhad pokrývacího poloměru. \square

Věta 4.9. *Nechť $\Sigma(\Omega)$ je kvazikrystal s kosočtvercovým oknem $\Omega = I\alpha_1 + I\alpha_2$. Pro bod $x \in \Sigma(\Omega) : x = y_n^I\alpha_1 + y_k^I\alpha_2$ označme množinu*

$$N_2(x) = \{y_i^I\alpha_1 + y_j^I\alpha_2 \mid i \in \{n-2, \dots, n+2\}, j \in \{k-2, \dots, k+2\}\} \setminus \{x\}$$

tedy 24 bezprostředních sousedů. Pak pro Voronoiovův polygon $V(x)$ platí

$$V(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in N_2(x) : \|y - x\| < \|y - z\|\}.$$

Důkaz. Dle věty 4.7 víme, že se při konstrukci Voronoiova okolí stačí omezit na body

$$N = \{z \in M \mid z \neq x \wedge \|z - x\| \leq 2R_c\}.$$

Protože neznáme přesnou hodnotu pokrývacího poloměru, použijeme odhad z lemma 4.8. Označme L největší mezeru na jednorozměrném kvazikrystalu $\Sigma(I)$.

Nyní vytvoříme vrchní odhad počtu vedle sebe ležících bodů kvazikrystalu $\Sigma(I)$, které se vejdou do koule o poloměru $2L$. I když víme, že taková situace nemůže nastat, předpokládejme, že vedle sebe leží body v nejmenší možné vzdálenosti v daném jednorozměrném kvazikrystalu. Snadno nahlédneme, že vrchní odhad tohoto počtu je 16.

Dále postupujeme tak, že na počítači generujeme všechna možná slova délky 15 (16 bodů), po dvojicích je skládáme podle věty 4.4 a generujeme tak všechna možná Voronoiova okolí na kvazikrystalu $\Sigma(\Omega)$. Stejný postup aplikujeme i na slova délky 4 (odpovídá N_2) a shledáme, že v obou případech jsou nagenеровaná okolí stejná. \square

Nyní podle věty 2.24 rozdělíme interval $\left(\frac{1}{\beta}, 1\right]$ na části se stejnými jazyky $\mathcal{L}_\ell(4)$. Pokud následně obdobně rozdělíme okno $\Omega = I\alpha_1 + I\alpha_2$ dvourozměrného kvazikrystalu, dostaneme tak oblasti, na kterých se zachovává množina Voronoiových okolí. Na hledání dělicích bodů opět využijeme počítač.

Podle tabulky 3 vidíme, že budeme dvourozměrné kvazikrystal s kosočtvercovým oknem dělit na 20 typů, podle tvaru Voronoiových okolí, které se v nich vyskytují, 10 typů je singulárních ve smyslu, že se vyskytují pro konkrétní hodnotu ℓ .



Obrázek 3: Rozdělení intervalu $\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)$ podle jazyků $\mathcal{L}_\ell(4)$. Hodnoty dělicích bodů jsou v tabulce 3.

velikost okna ℓ $\mathcal{C}_\ell(4)$			velikost okna ℓ	
V_2	$-37 + 10\beta$	7	V_1	$(4 - \beta, -37 + 10\beta)$
V_4	$19 - 5\beta$	7	V_3	$(-37 + 10\beta, 19 - 5\beta)$
V_6	$-22 + 6\beta$	6	V_5	$(19 - 5\beta, -22 + 6\beta)$
V_8	$-7 + 2\beta$	6	V_7	$(-22 + 6\beta, -7 + 2\beta)$
V_{10}	$8 - 2\beta$	6	V_9	$(-7 + 2\beta, 8 - 2\beta)$
V_{12}	$-18 + 5\beta$	7	V_{11}	$(8 - 2\beta, -18 + 5\beta)$
V_{14}	$-3 + \beta$	6	V_{13}	$(-18 + 5\beta, -3 + \beta)$
V_{16}	$12 - 3\beta$	7	V_{15}	$(-3 + \beta, 12 - 3\beta)$
V_{18}	$-14 + 4\beta$	8	V_{17}	$(12 - 3\beta, -14 + 4\beta)$
V_{20}	1	8	V_{19}	$(-14 + 4\beta, 1)$

Tabulka 3: Hodnoty pro označení dělicích bodů z obrázku 3 a označení intervalů mezi těmito body.

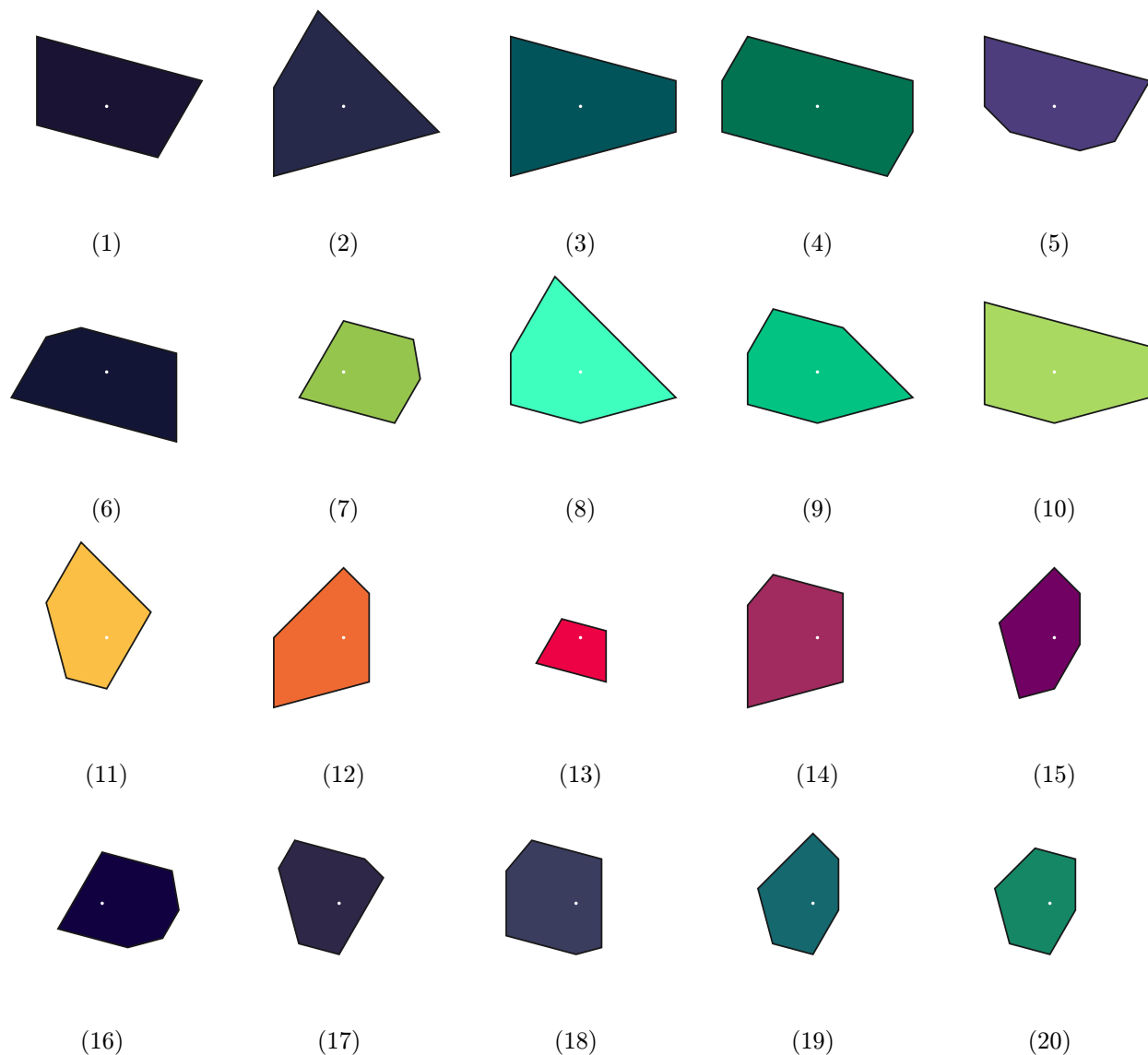
Pokud rozdělíme kosočtvercové okno kvazikrystalu na oblasti podle slov z jazyka $\mathcal{L}_\ell(4)$, zjistíme, že je osově symetrické podle os úhlů sevřených vektory α_1 a α_3 . Tyto symetrie odpovídají osovým symetriím v kvazikrystalu podle os úhlů sevřených vektory α_1 a α_2 .

Tímto ukončujeme rozbor dvourozměrných kvazikrystalů, v následující sekci uvedeme přehled všech různých Voronoiových okolí na kvazikrystalech s oknem v základním tvaru a několik příkladů konkrétních kvazikrystalů.

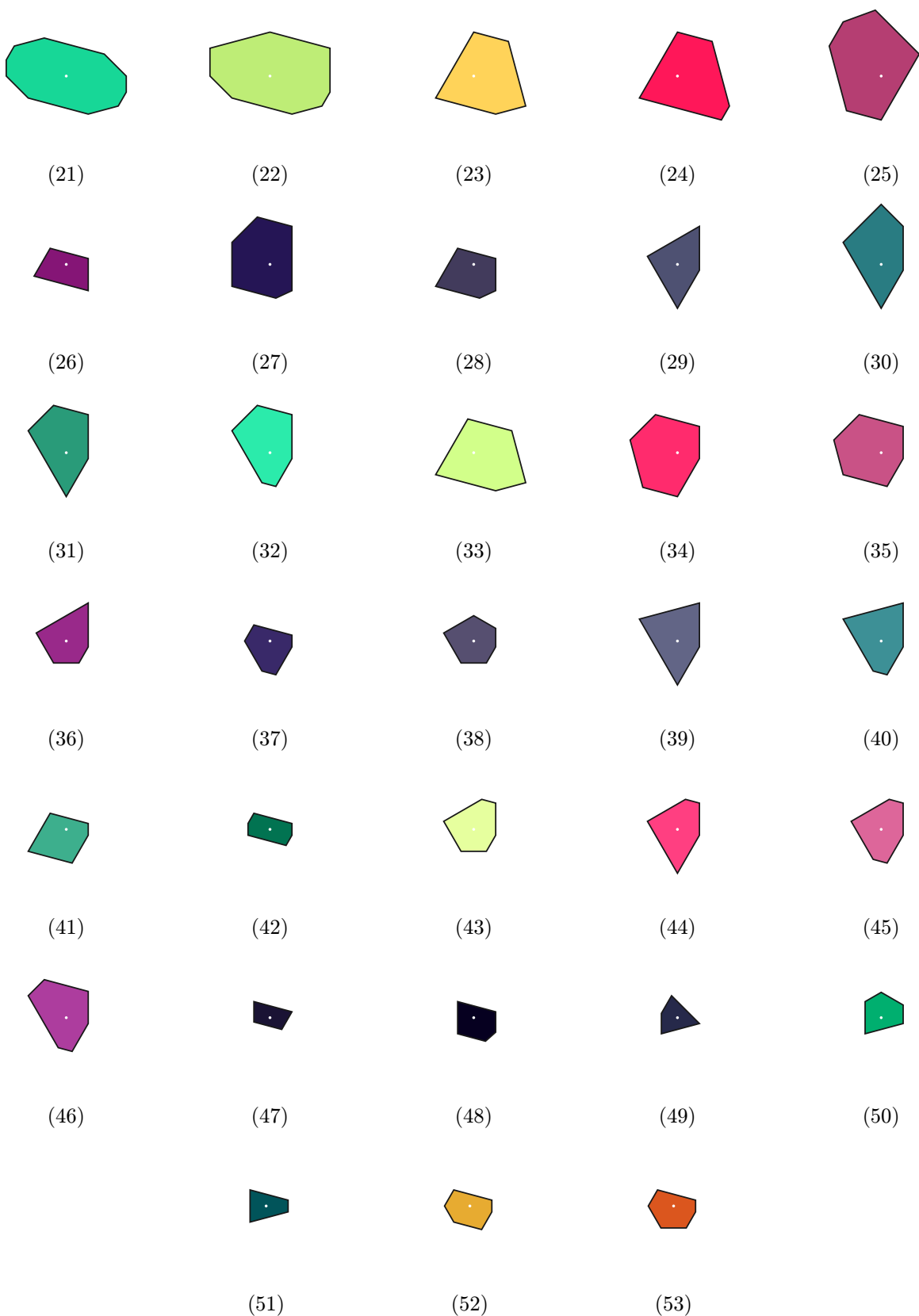
5 Seznam Voronoiových okolí

V předchozí sekci jsme ukázali vše potřebné pro generování různých Voronoiových okolí vyskytujících se na kvazikrystalech s oknem v základním tvaru. Zjistíme, že různých okolí je celkem 53. Dále uvádíme jejich úplný seznam.

Všimněme si, že okolí 1, 2, 3, 4 a 47, 49, 51, 42 mají po dvojicích stejný tvar, ale rozdílnou velikost. Tato okolí přísluší mimo jiné kvazikrystalům s okny o velikostech $|\Omega_1| = \frac{1}{\beta}$ a $|\Omega_2| = 1$, pro které platí $\Sigma(\Omega_1) = \beta \Sigma(\Omega_2)$.



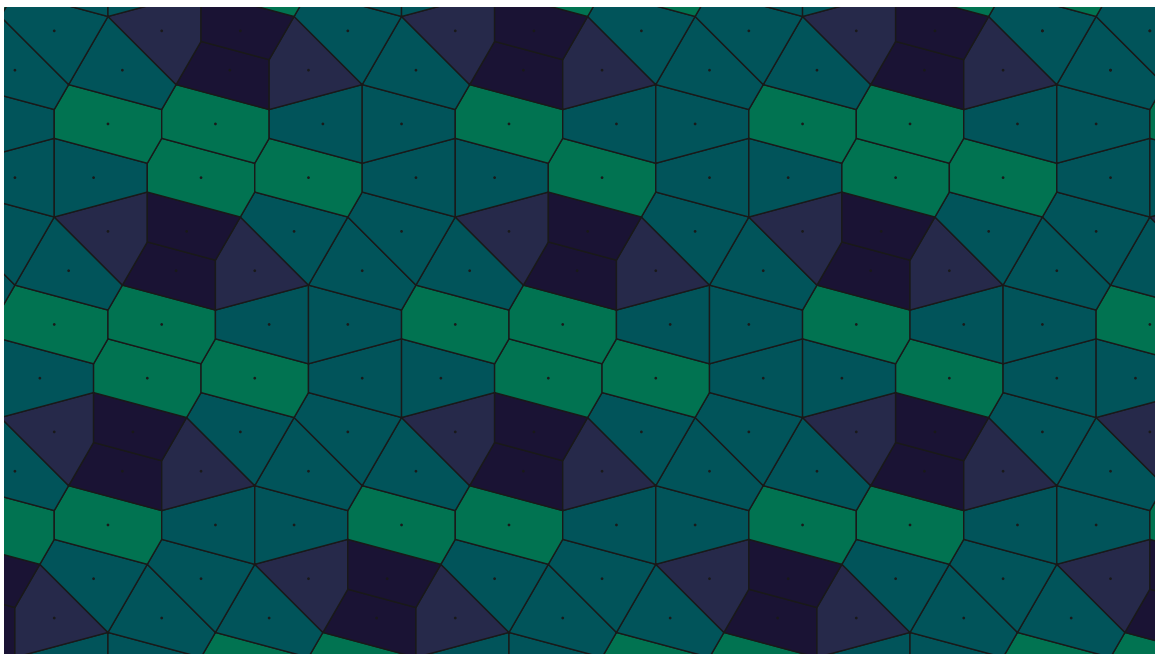
Obrázek 4: Tvary Voronoiových okolí na kvazikrystalech s oknem v základním tvaru. Jejich přidělení k jednotlivým kvazikrystalům se nachází v tabulce 4.



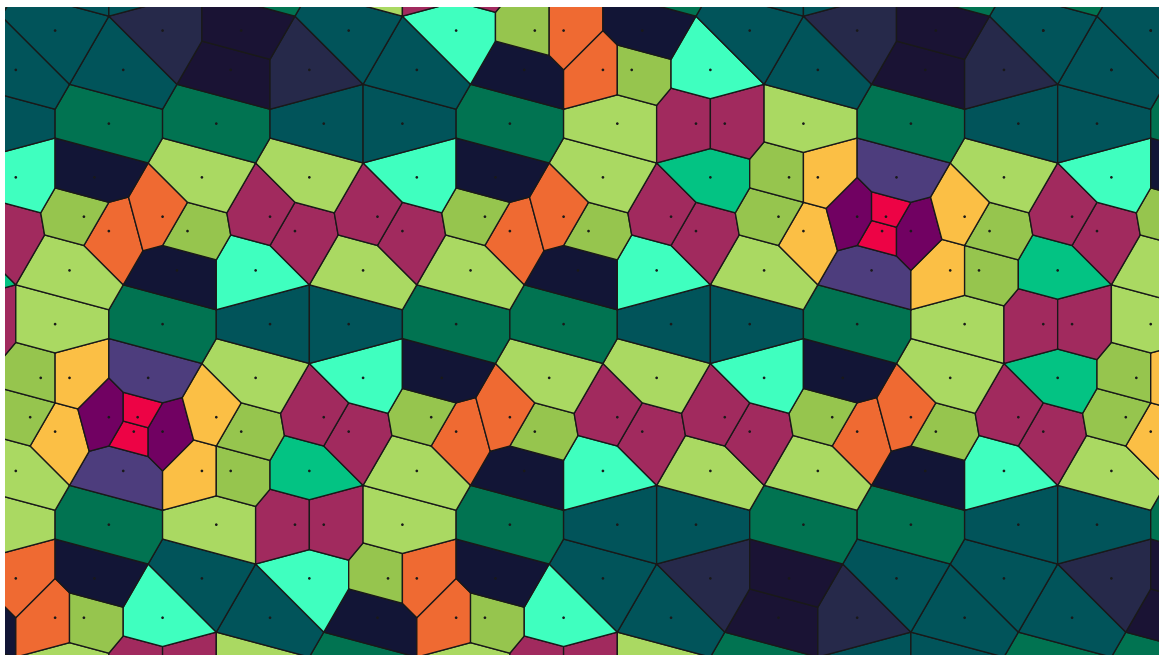
Obrázek 4: Tvary Vornoiových okolí na kvazikrystalech s oknem v základním tvaru. Jejich přidělení k jednotlivým kvazikrystalům se nachází v tabulce 4.

Tabulka 4: Souhrn Voroiiových okolí a jejich příslušnost ke kvazikrystalům s oknem v základním tvaru. Jejich tvary se nachází na obrázku 4.

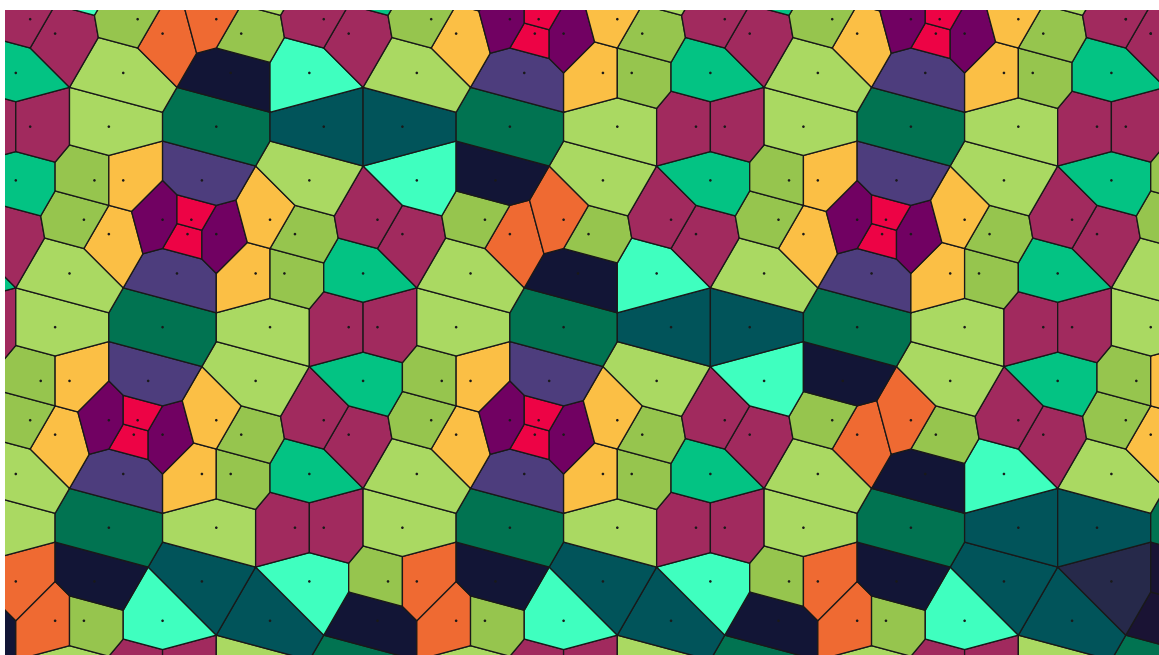
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}
1	•	•	•	•	•	•	•													
2	•	•	•																	
3	•	•	•	•	•	•	•													
4	•	•	•																	
5	•	•	•	•	•	•	•													
6	•	•	•	•	•															
7	•	•	•	•	•	•	•													
8	•	•	•																	
9	•	•	•																	
10	•	•	•																	
11	•	•	•																	
12	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•							
13	•	•	•	•	•															
14	•	•	•	•	•	•	•	•	•											
15	•	•	•	•	•															
16					•	•	•													
17					•	•	•													
18					•															
19					•	•	•	•	•											
20					•	•	•	•	•	•	•									
21							•	•	•											
22							•													
23							•	•	•											
24							•	•	•											
25							•													
26									•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



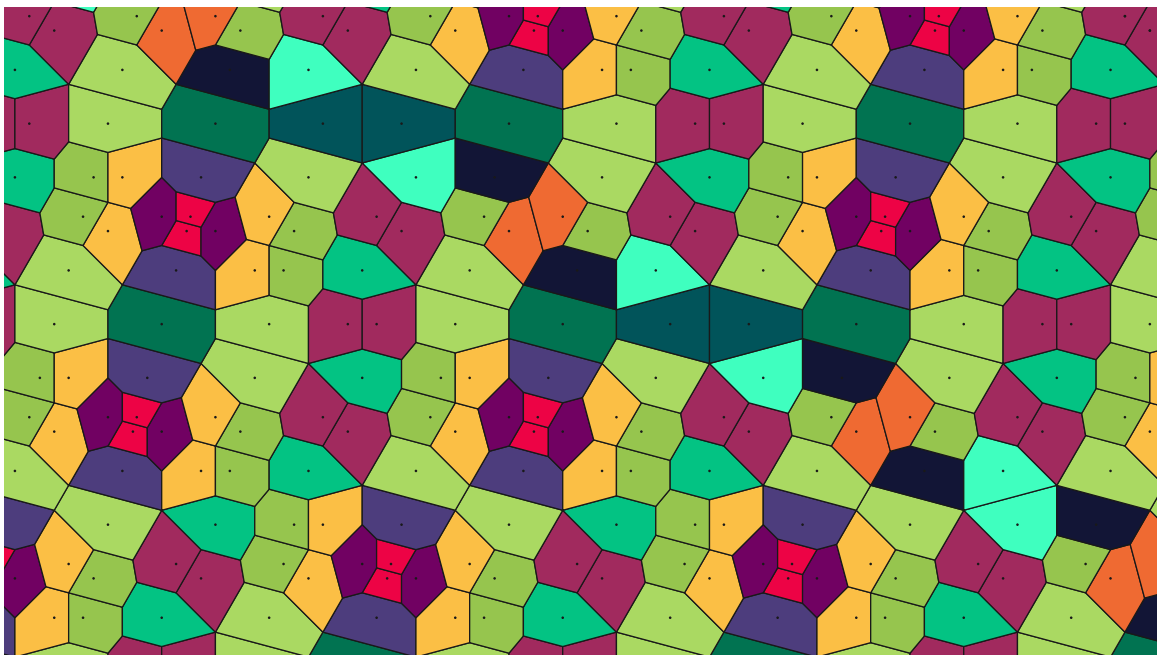
Obrázek 5: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = 4 - \beta$.



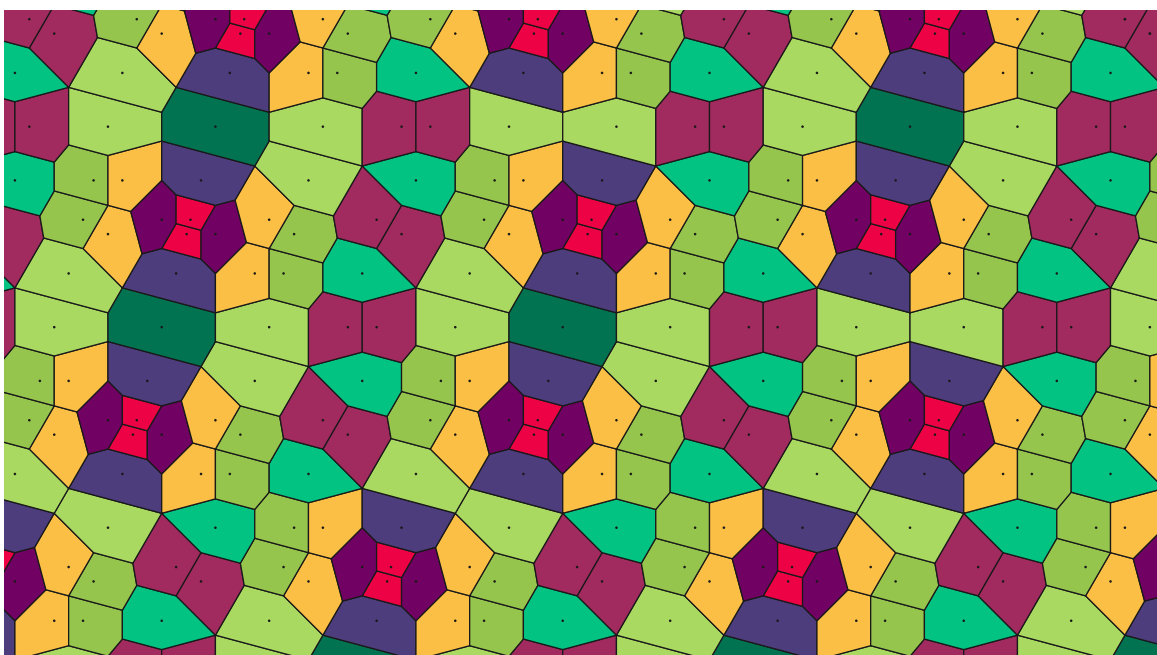
Obrázek 6: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-33+9\beta}{2}$, což odpovídá případu V_1 z tabulky 3.



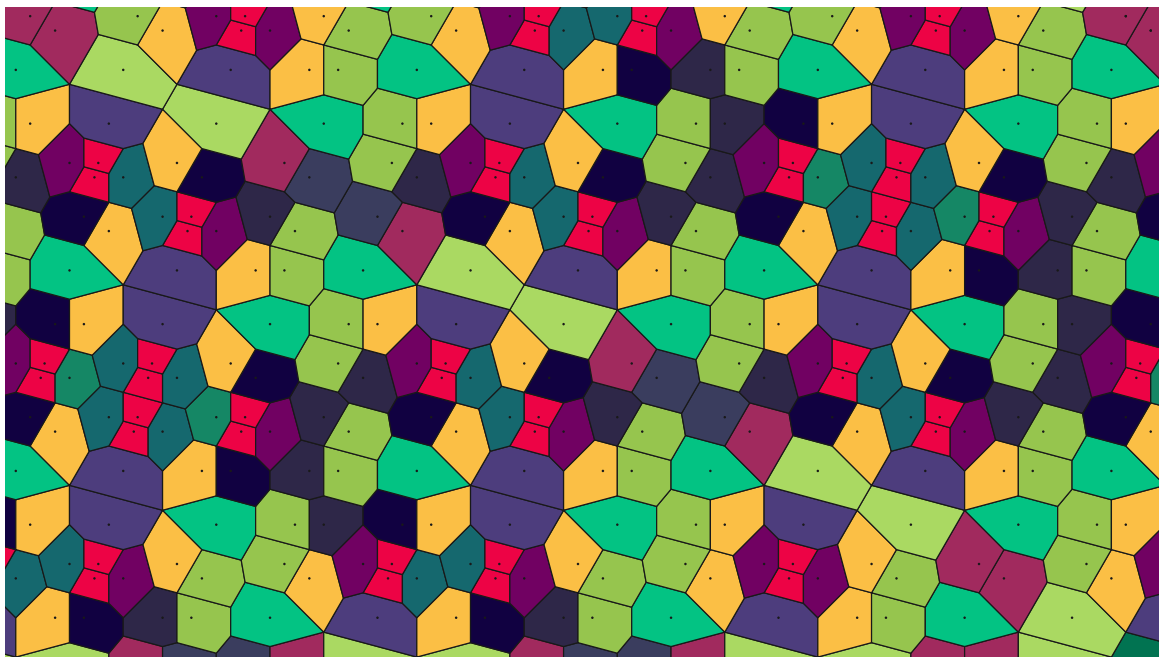
Obrázek 7: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -37 + 10\beta$, což odpovídá případu V_2 z tabulky 3.



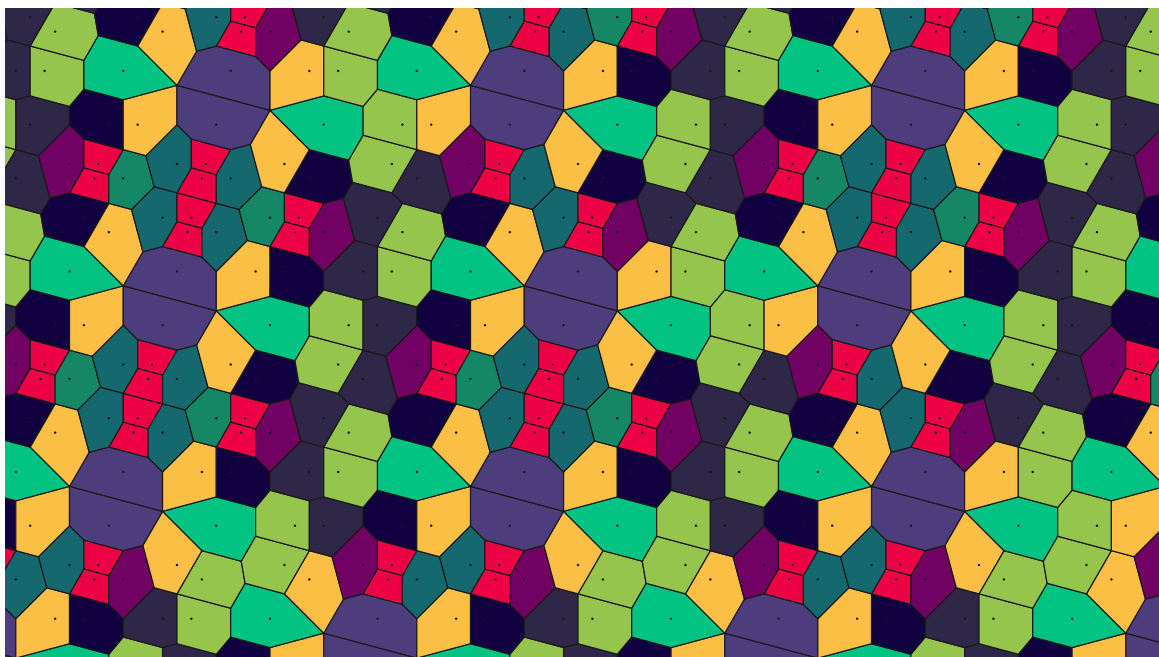
Obrázek 8: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-18+5\beta}{2}$, což odpovídá případu V_3 z tabulky 3.



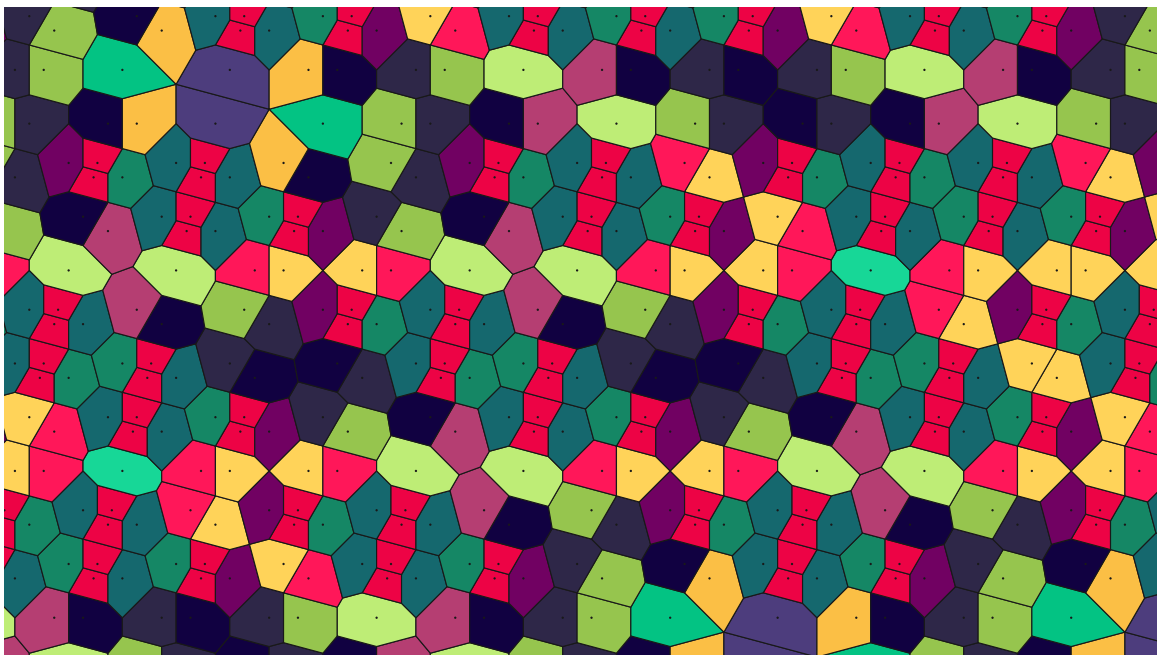
Obrázek 9: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = 19 - 5\beta$, což odpovídá případu V_4 z tabulky 3.



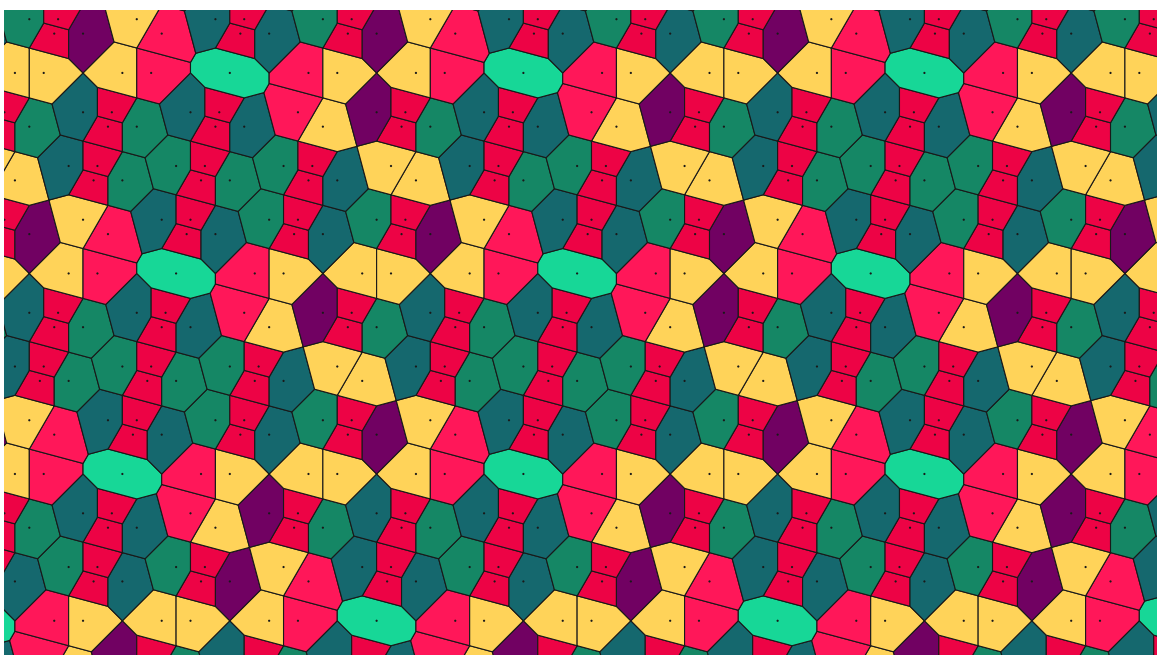
Obrázek 10: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-3+1\beta}{2}$, což odpovídá případu V_5 z tabulky 3.



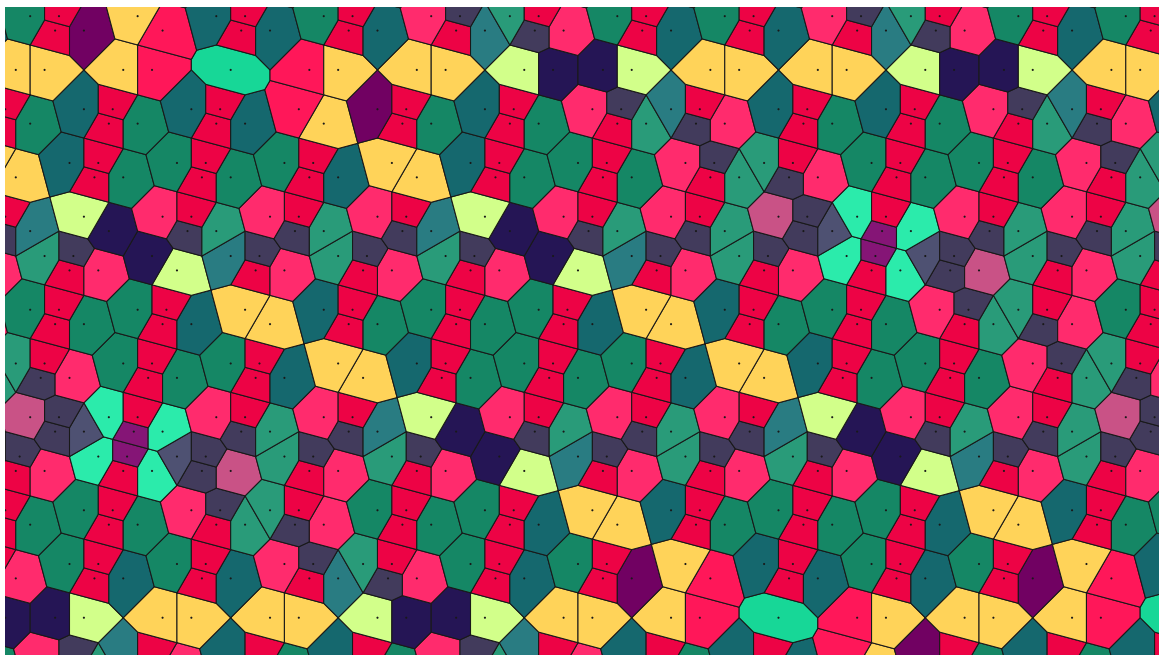
Obrázek 11: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -22 + 6\beta$, což odpovídá případu V_6 z tabulky 3.



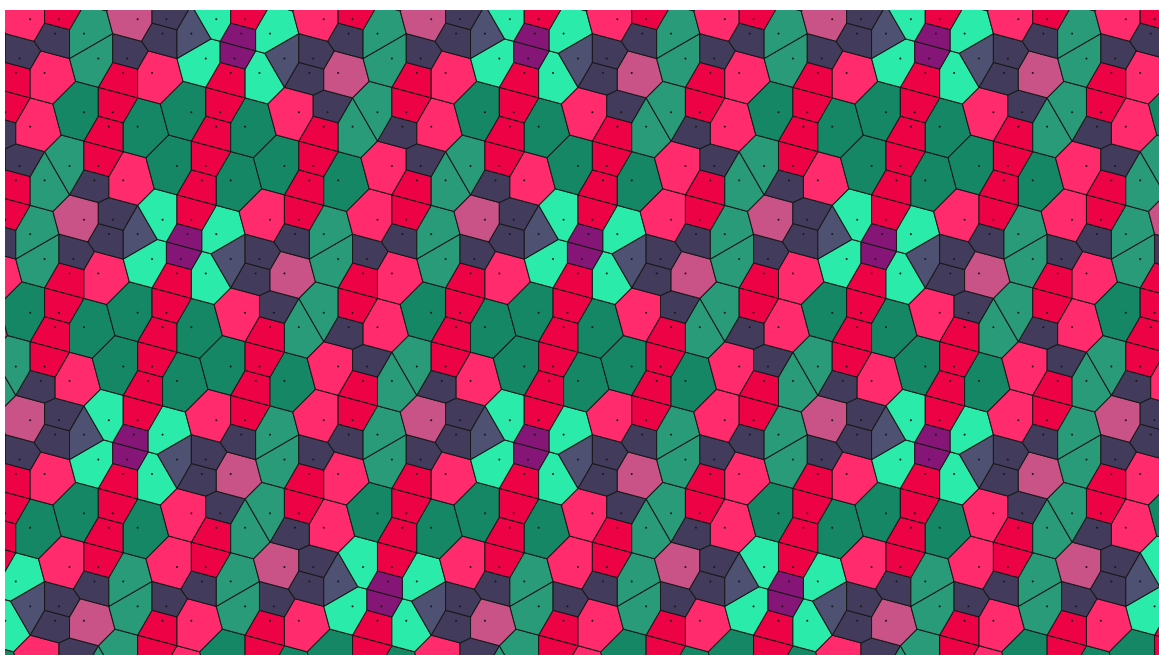
Obrázek 12: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-29+8\beta}{2}$, což odpovídá případu V_7 z tabulky 3.



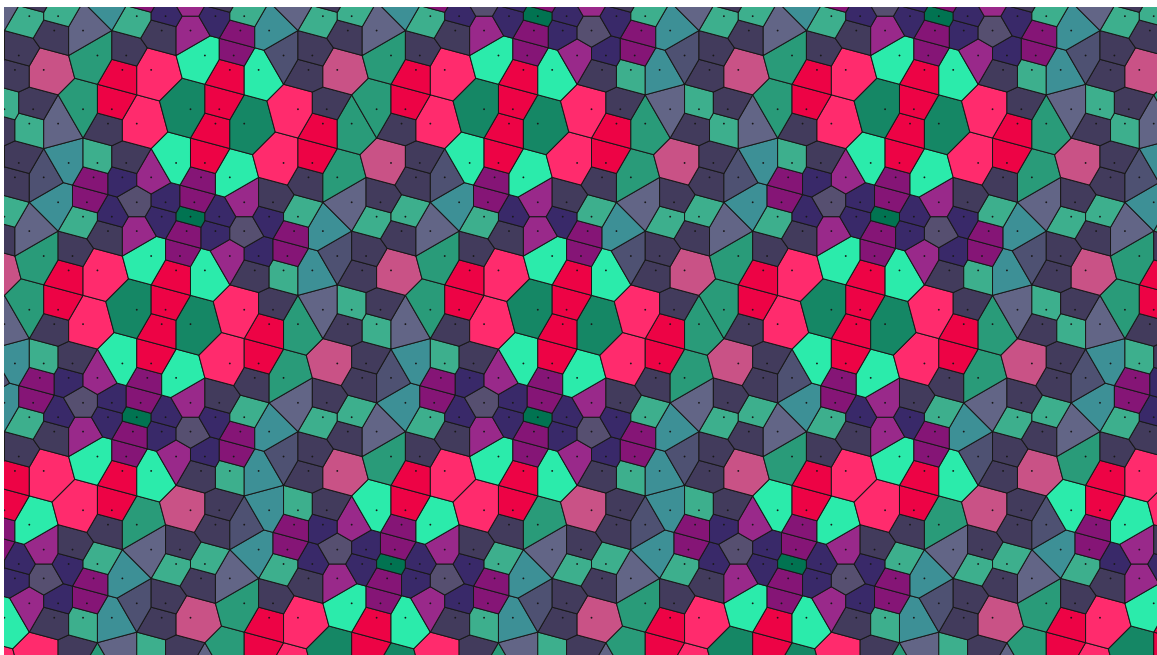
Obrázek 13: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -7 + 2\beta$, což odpovídá případu V_8 z tabulky 3.



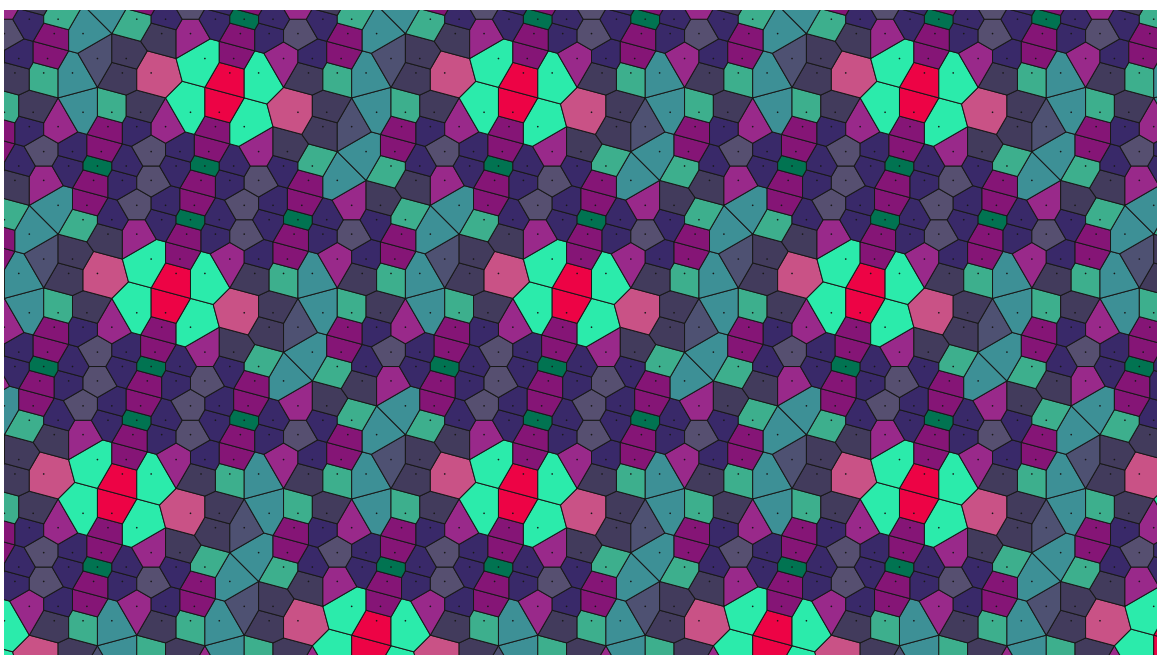
Obrázek 14: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{1-0\beta}{2}$, což odpovídá případu V_9 z tabulky 3.



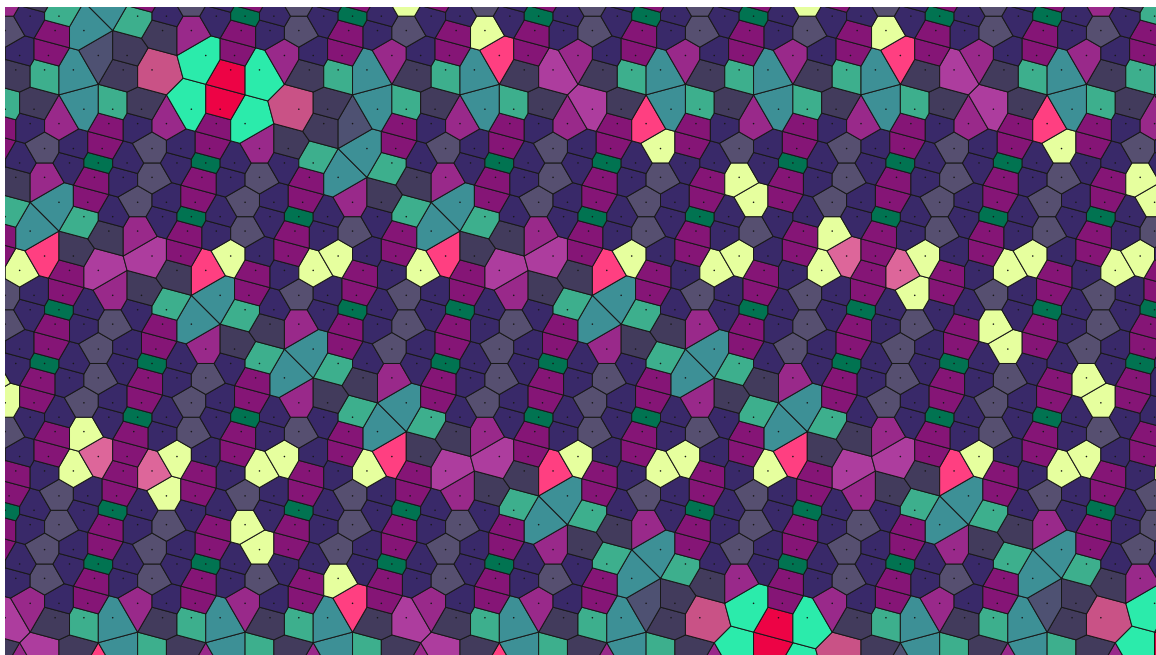
Obrázek 15: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = 8 - 2\beta$, což odpovídá případu V_{10} z tabulky 3.



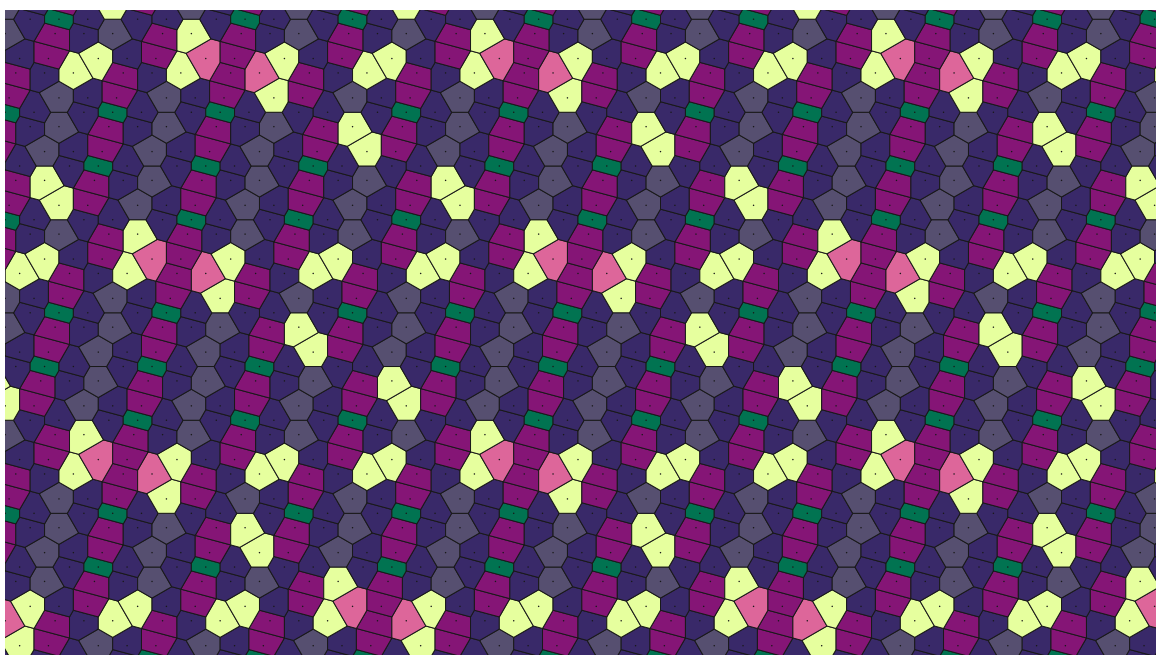
Obrázek 16: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-10+3\beta}{2}$, což odpovídá případu V_{11} z tabulky 3.



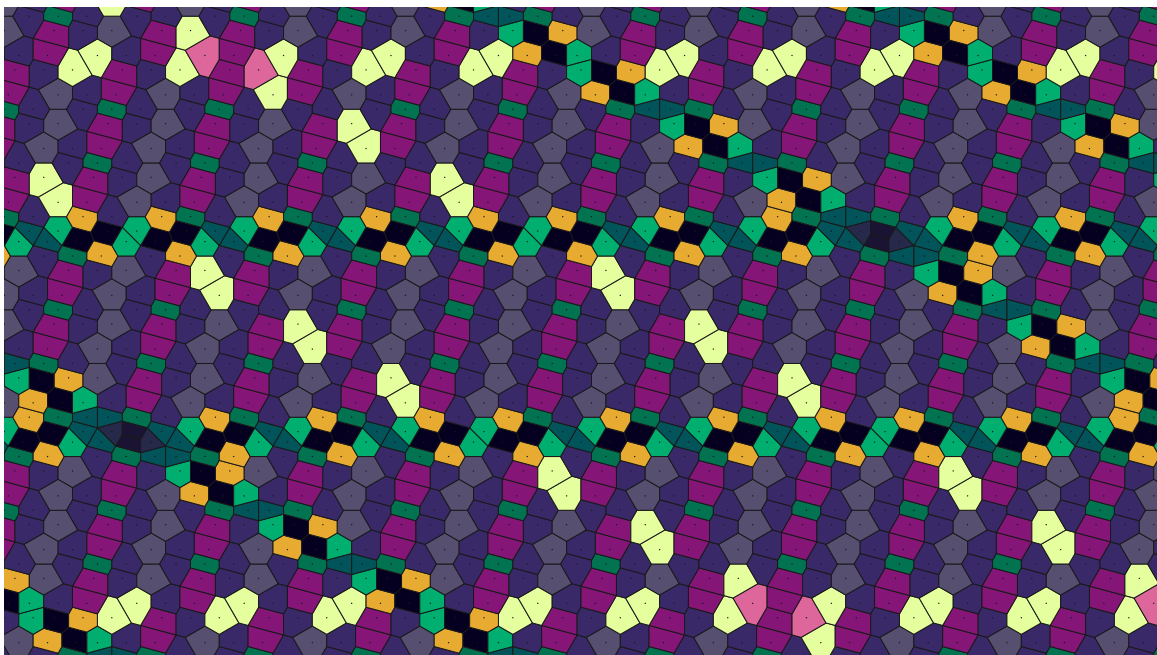
Obrázek 17: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -18 + 5\beta$, což odpovídá případu V_{12} z tabulky 3.



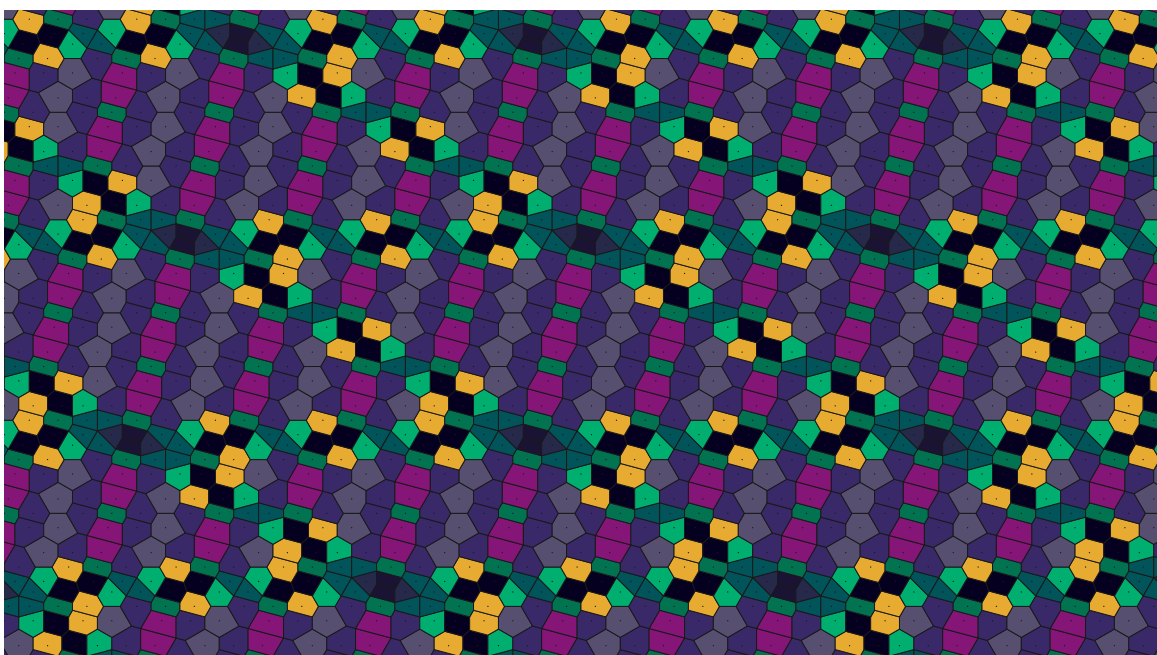
Obrázek 18: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-21+6\beta}{2}$, což odpovídá případu V_{13} z tabulky 3.



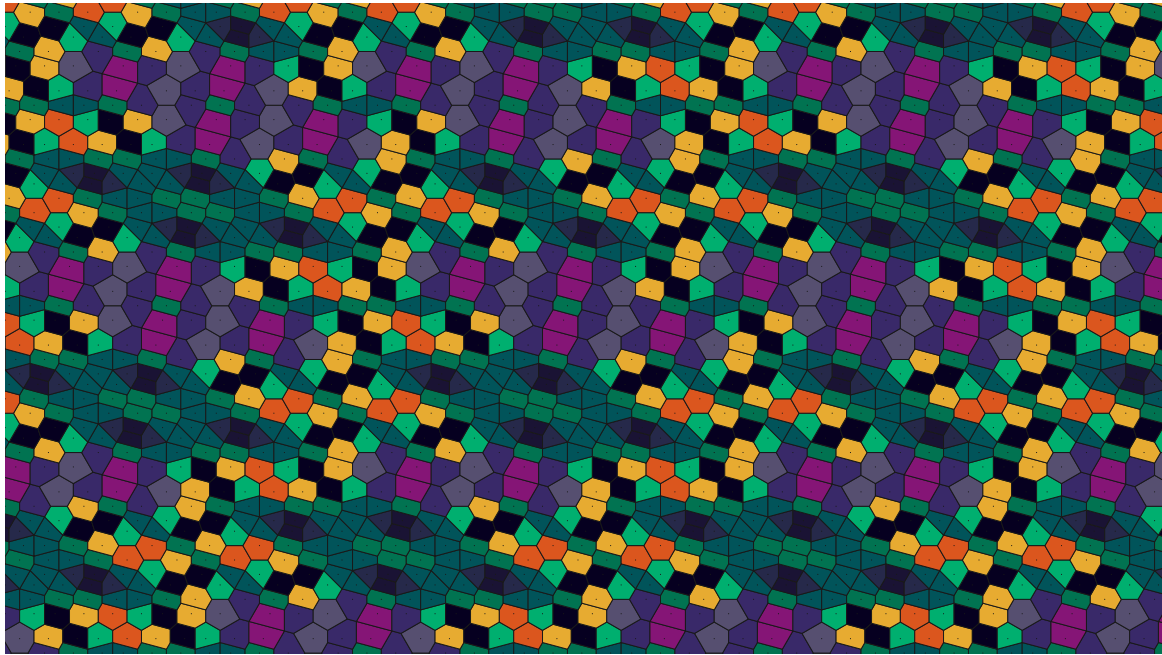
Obrázek 19: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -3 + 1\beta$, což odpovídá případu V_{14} z tabulky 3.



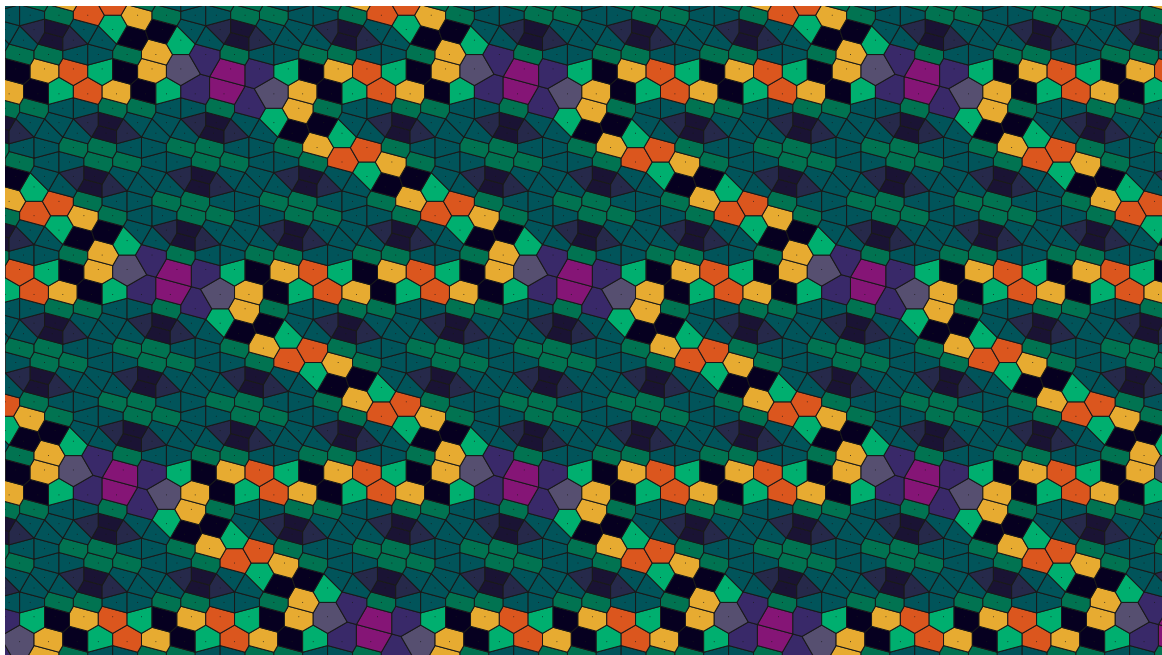
Obrázek 20: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{9-2\beta}{2}$, což odpovídá případu V_{15} z tabulky 3.



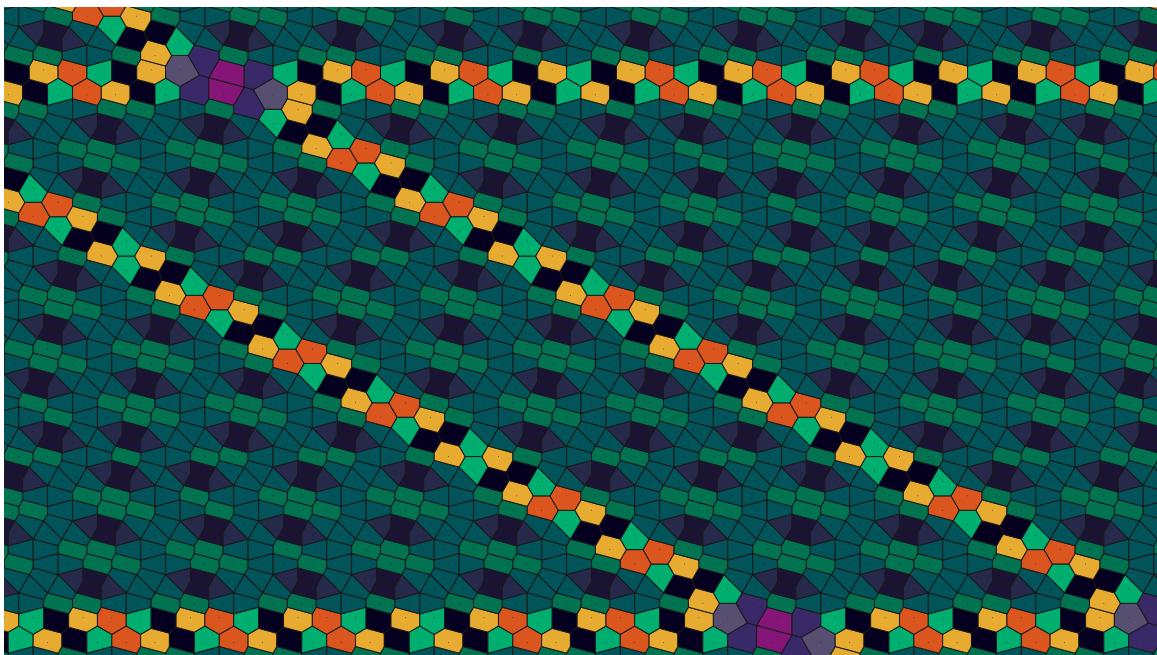
Obrázek 21: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = 12 - 3\beta$, což odpovídá případu V_{16} z tabulky 3.



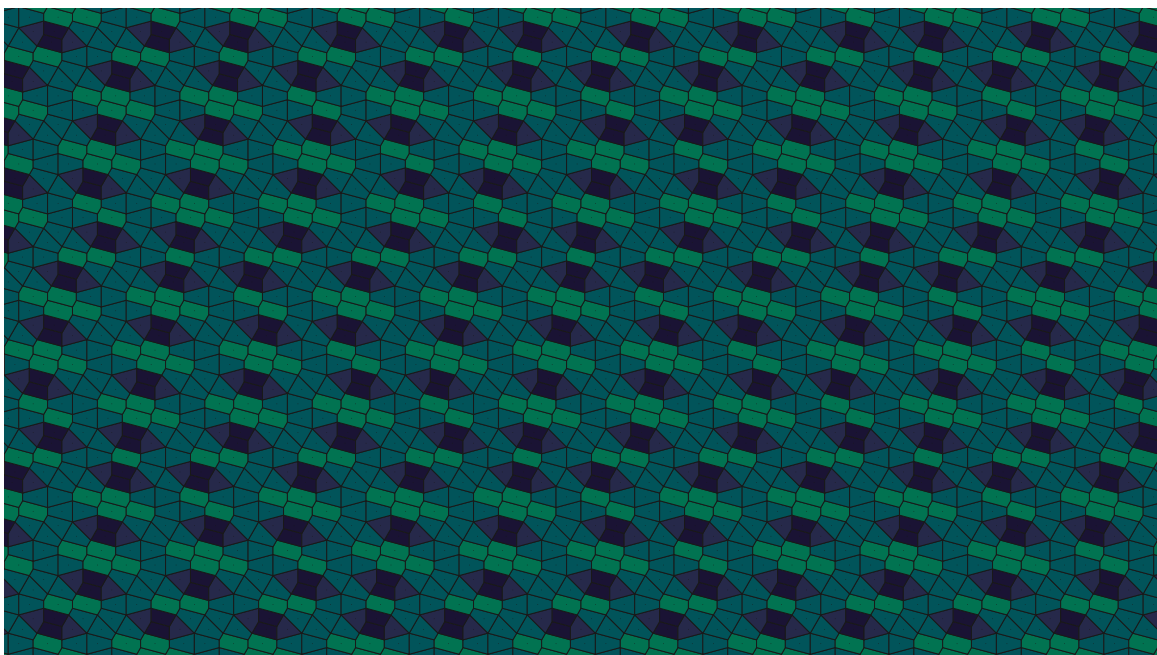
Obrázek 22: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-2+1\beta}{2}$, což odpovídá případu V_{17} z tabulky 3.



Obrázek 23: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = -14 + 4\beta$, což odpovídá případu V_{18} z tabulky 3.



Obrázek 24: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = \frac{-13+4\beta}{2}$, což odpovídá případu V_{19} z tabulky 3.



Obrázek 25: Kvazikrystal $\Sigma(\Omega)$ pro $|\Omega| = 1$, což odpovídá případu V_{20} z tabulky 3.

Závěr

Výsledkem této práce je především analýza různých Voronoiových okolí, které se vyskytují na kvazikrystalech definovaných pomocí iracionality $\beta = 2 + \sqrt{3}$. Tuto analýzu jsme zatím provedli pouze pro speciální případ kosočtvercového okna. Nicméně nabyté znalosti jsou velmi užitečné i pro analýzu kvazitrystalů s obecnými okny.

V průběhu celé práce vznikla řada krátkých programů, které generovaly úseky slov kvazikrystalu, hledaly singulární body a nakonec i generovaly uvedené obrázky. Všechny zdrojové kódy jsou k nalezení na adrese:

<http://github.com/edasubert/quasicrystal>

Zde uvádím seznam programů s krátkým popisem:

betaSet.cpp Popis třídy `betaSet`, která poskytuje číselný typ $\mathbb{Z}[\beta]$.

geometricObject.h Třídy pro geometrické útvary jako bod, množina bodů nebo Voronoiovo okolí.

generate.cpp Funkce pro práci s jednorozměrnými kvazikrystaly

diagramMachine2.cpp Generátor dvourozměrných kvazikrystalů.

finite.cpp Generátor množných podslov dané délky (množiny $\mathcal{L}_\ell(n)$).

generateTile.cpp Generátor všech různých Voronoiových okolí.

Reference

- [1] Z MASÁKOVÁ, J PATERA a J ZICH. *Classification of Voronoi and Delone tiles in quasicrystals. I. General method.* J. Phys. A **36** (2003), 1869–1894.
- [2] L-S GUIMOND, Z MASÁKOVÁ, E PELANTOVÁ. *Combinatorial properties of infinite words associated with cut-and-project sequences.* J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 697–725.
- [3] J ZICH. *Voronoi & Delone tiling of quasicrystals.* Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská České vysoké učení technické v Praze, 2002. Diplomová práce. Vedoucí práce Z Masáková.
- [4] J ZICH. *Voronoiovo dláždění kvazikrystalu.* Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská České vysoké učení technické v Praze, 2000. Výzkumný úkol.
- [5] D SHECHTMAN, I BLECH, D GRATIAS, J CAHN. *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry.* Physical Review Letters **53** (20), 1951.