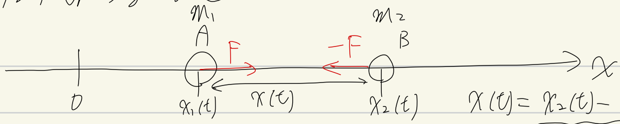
6/27（木）基礎物理レポート③ 24410121 枝野良洋

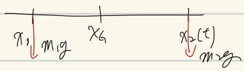
1ページ目



$x(t)=x_2(t)-x_1(t)$ （$x=x_2-x_1$）

（Aを固定して，Aからみた Bの相対運動を表す（変位））

(1)



重心のまわりの力のモーメントは0なので（時計回りの力のモーメント）=（反時計回りの力のモーメント）より

$$\{\cancel{x_G(t)}-x_1(t)\}m_1\cancel{g}=\{x_2(t)-\cancel{x_G(t)}\}\cdot m_2\cancel{g}$$

$$(m_1+m_2)x_G(t)=m_1x_1(t)+m_2x_2(t)$$

$$x_G(t)=\frac{m_1x_1(t)+m_2x_2(t)}{m_1+m_2}$$

(2) 重心の運動方程式は，系の総質量が重心に集まって重心を質点にみなすときの $ma=F$ より，

（運動方程式の左辺）$=(m_1+m_2)\dfrac{d^2x_G(t)}{dt^2}$ …① （①）$=0$ を示す.

A, Bについての運動方程式は

A: $m_1\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}=F$ …②  B: $m_2\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}=-F$ …③

②+③より

$$m_1\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\{m_1x_1(t)+m_2x_2(t)\}=0$$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{m_1x_1(t)+m_2x_2(t)}{m_1+m_2}\right\}=0$$

(1)より $(m_1+m_2)\dfrac{d^2x_G(t)}{dt^2}=0$ よって示せた.

(3) (2)より $(m_1+m_2)\cdot\dfrac{d^2x_G(t)}{dt^2}=0$ から，$m_1+m_2\neq0$ より $\dfrac{d^2x_G(t)}{dt^2}=$（重心の加速度）$=0$ であるため。

(4) 2つの原子の相対運動の方程式が $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=-F$ を示す。ただし $x(t)=x_2(t)-x_1(t)$, $m=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

(2)より $\dfrac{③}{m_2}-\dfrac{②}{m_1}$: $\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}-\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}=-\dfrac{F}{m_2}-\dfrac{F}{m_1}=-\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m}\right)F$

$$\frac{d^2}{dt^2}\{x_2(t)-x_1(t)\}=-\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)F$$

$$\times\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)$$

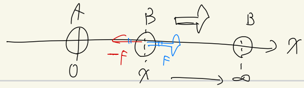
$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-F$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-F$$

よって示せた。

2ページ目

(5) 原子間距離を $x$ から $\infty$ まで広げるために必要な仕事は、
- Aを固定する。
- Aの位置を原点とする座標軸を新たにとる。



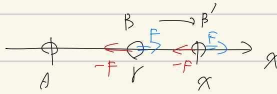

この状況下で、(Bを $x \to \infty$ へ力のつり合いを保ちながら動かしたときの仕事) = (求める仕事) = $W$ より、

$$W = \int_x^\infty F(x)\,dx$$ よって示せた。

(6) (・Aを固定してBを動かす ・(5)の座標系で考える) とする。また、基準点を $x = r$ とする。

予想
$U(\infty)$ の方が大きい。
保存力は引力と同じだから

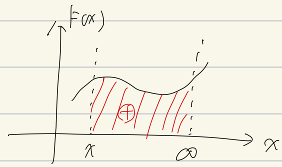
$U(x) = (r \to x$ にBを動かしたときに外力がする仕事$)$
$= \int_r^x F(x)\,dx$




$U(\infty) = (r \to \infty$ にBを動かしたときに外力がする仕事$)$
$= \int_r^\infty F(x)\,dx$

ここで、(外力) $= F(x) > 0$ (保存力は引力なので、$-F(x) < 0$)

$$U(\infty) - U(x) = \int_r^\infty F(x)\,dx - \int_r^x F(x)\,dx$$
$$= \int_x^r F(x)\,dx + \int_r^\infty F(x)\,dx$$
$$= \int_x^\infty F(x)\,dx \cdots ①$$




ここで、$F(x) > 0$ より、
$\int_x^\infty F(x)\,dx > 0$ から

$U(\infty) - U(x) > 0$ より $U(\infty) > U(x)$ よって $U(\infty)$ の方が $U(x)$ よりも大きい。

また①より $U(\infty) - U(x) = \int_x^\infty F(x)\,dx$ よって示せた。

(7) $\int F(x)\,dx = A(x) + C$ ($C$ は積分定数) とすると、

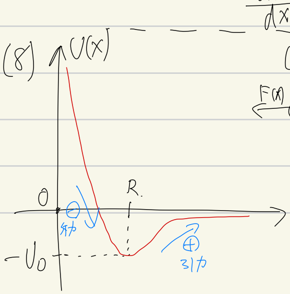
$$F(x) \underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}} A(x)+C$$

$$U(\infty) - U(x) = \int_x^\infty F(x)\,dx$$
$$= [A(x)]_x^\infty$$
$$U(\infty) - U(x) = A(\infty) - A(x)$$

$x$ で微分。
$U(\infty)$、$A(\infty)$ は定数。

$$-\frac{dU(x)}{dx} = -F(x)$$
$$\frac{dU(x)}{dx} = F(x)$$ よって示せた。

(8)




(i) $x < R$ のとき、[$U(x)$ の接線の傾き] $= \frac{dU(x)}{dx} = F(x) < 0$ より、

$F(x)$ A　B $-F(x)$　AとBの間には斥力が働き、互いに離れる。

(ii) $x > R$ のとき

[$U(x)$ の接線の傾き] $= \frac{dU(x)}{dx} = F(x) > 0$ より

A $F(x)$　B $-F(x)$　AとBの間には引力が働き、互いに近づく。

(iii) $x = R$ のとき、$\frac{dU(x)}{dx} = F(x) = 0$ より AとBの間に力は働かない。

(i)〜(iii)より、$x < R$ のとき (AとBが近いとき) 斥力が働き $x = R$ に近づき、
$x > R$ のとき (AとBが遠いとき) 引力が働き $x = R$ に近づき、 $x = R$ では力が働かない。
よって原子間距離は $x = R$ に収束しようとするため、$x = R$ が安定な原子間距離である。

(9) $E = -U_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \cdots ①$

~~(相対運動の力学的エネルギー) = (相対運動の運動エネルギー) + (相対運動の位置エネルギー)~~

3ページ目

~~2物体がお互いに対して速度を持っているかのエネルギー。~~ 2物体の速度が異なると0より大きくなる。

~~分子の結合が切れるときとは、AとBの速度が異なるときであり、(相対運動の運動エネルギー) > 0 のときである。~~

~~分子の結合が切れるギリギリを考える。つまり(相対運動の運動エネルギー) = 0~~ のとき,

[分子の結合が切れるためのギリギリのエネルギー]　(AとBの相対速度は0)

= [Aを固定してBをAから無限に、力のつり合いを保ったまま遠ざけたときの外力がする仕事]
(ゆっくり)

= [Bが $x \to \infty$ のときにもつ位置エネルギー]

$= U(\infty)$

$= 0$ (グラフより)　　　$-U_0 + \varepsilon < 0$　　$\varepsilon < U_0$

よって、[Aを固定して、Aから見たBの相対運動の力学的エネルギー] $\geqq 0$ のとき、結合が切れる。

(※ 力学的エネルギー = 運動エネルギー + 位置エネルギー であるが、結合が切れるギリギリを求めるため 相対 運動エネルギー = 0 として考える。)

従って結合が切れないためには、$E = -U_0 + \varepsilon < 0$ となればよい。

$$\varepsilon < U_0$$

$\varepsilon > 0$ より　$\underline{0 < \varepsilon < U_0}$ //

(10) $\alpha > 0, \quad U(x) = U_0\left[e^{-2\alpha(x-R)} - 2e^{-\alpha(x-R)}\right]$

αの単位.

$U(x), U_0$ はエネルギーより $[J]$ (エネルギー) なので、$\{e^{-2\alpha(x-R)} - 2e^{-\alpha(x-R)}\}$ の単位はない(無次元量)

$e$ は $e = 2.71\cdots$ の無次元量より、$-2\alpha(x-R)$ や $-\alpha(x-R)$ も無次元量。$(x-R)$ の単位は距離(明記されてないが $[m]$ (メートル) か。) なので、

$\alpha$ の単位は $\left[\frac{1}{m}\right]$ (メートル)

(バネエネルギー $= \frac{1}{2}kx^2$ (自然長からのずれ) $= \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ として $x_0 \to R$　$\frac{k}{2} \to \alpha$ $\alpha^2$?)

(11) (a) ① $\alpha|x-R| \ll 1$ のとき、$U(x) \fallingdotseq \alpha^2(x-R)^2$ までです,
② 原子間力の定数 $k$ を求める。

① $\alpha|x-R| \ll 1$ より、$|-2\alpha(x-R)| \ll 1$,　$|-\alpha(x-R)| \ll 1$ から、

$$e^{-2\alpha(x-R)} \fallingdotseq 1 + \{-2\alpha(x-R)\} + \frac{1}{2}\{-2\alpha(x-R)\}^2 = 1 + \{-2\alpha(x-R)\} + 2\alpha^2(x-R)^2$$

$$e^{-\alpha(x-R)} \fallingdotseq 1 + \{-\alpha(x-R)\} + \frac{1}{2}\{-\alpha(x-R)\}^2 = 1 + \{-\alpha(x-R)\} + \frac{\alpha^2}{2}(x-R)^2$$

よって $U(x) \fallingdotseq U_0\left[e^{-2\alpha(x-R)} - 2e^{-\alpha(x-R)}\right]$

$$= U_0\left[1 + \cancel{\{-2\alpha(x-R)\}} + 2\alpha^2(x-R)^2 - 2 + \cancel{2\alpha(x-R)} - \alpha^2(x-R)^2\right]$$

$$= U_0\{\alpha^2(x-R)^2 - 1\}$$

よって $\underline{U(x) \fallingdotseq U_0\{\alpha^2(x-R)^2 - 1\}}$ //

4ページ目

(1) (a) 図1 (バネの弾性エネルギー) $=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ より。

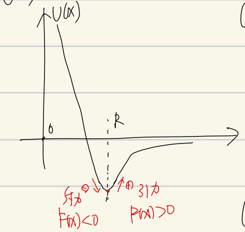
$x_0$：力のつり合い、もしくは自然長

$$U(x)=U_0\alpha^2(x-R)^2-U_0$$

$$U(x)=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(2U_0\alpha^2)}_{=k}\cdot(x-R)^2 \quad \left\{\begin{array}{l}\text{よく分からないので無視する。}\\ x_0\text{とRが対応する。}\end{array}\right.$$

よって $k=2U_0\alpha^2$

(b) 図2



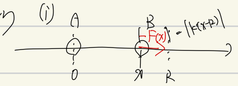

Aを固定し、Bが動くとする。

(ア)より、(i) $x\to R-0$ のとき Bは斥力を受ける。

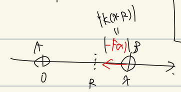
(ii) $x\to R+0$ のとき Bは引力を受ける。

(a)より、$|F(x)|=k|x-R|$ としてよい。 (バネの力 $=k(x-x_0)$ と同様。)

つまり (i)




(ii)




(iii) $x=R$ のとき Bは力を受けないので、それまで受けていた力による等速直線運動をする。

(i)〜(iii)より、Aからみて Bは単振動をする。

また(イ)より $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-F(x)$

$=-k(x-R)$ より、$x(t)$ は単振動をすると言える。 (Aからみた Bの変位)

$(x-R)$：平衡点からの変位

[(a)より $k=2U_0\alpha^2>0$]

(c) (b)より $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k(x-R)$，

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{k}{m}(x-R)$$

$a=-\omega^2x$

ここで $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2(x-x_0)$ より。

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega=\alpha\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

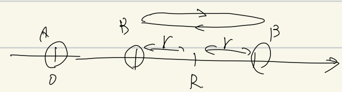
→ よって $\omega T=2\pi$， $T=\frac{1}{f}$ より

$$\frac{\omega}{f}=2\pi$$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

$$f=\frac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

(d)




(a)より、(相対運動の力学的エネルギー) $=E=-U_0+\varepsilon$

ここで、単振動の力学的エネルギー保存則より、$\frac{1}{2}k(x-R)^2+\frac{1}{2}mv^2=$ (一定) を利用すると、

$(x-R)$：(中心) 力のつり合いからのずれ　$\frac{1}{2}mv^2$：運動エネルギー

振幅を求めるので、Aに対してBが止まるとき (端にいるとき) を考えて、

$$\frac{1}{2}kr^2+0=-U_0+\varepsilon$$

$$r^2=\frac{2(-U_0+\varepsilon)}{k}$$

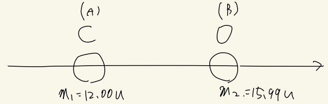
$r>0$ より

$$r=\sqrt{\frac{2(-U_0+\varepsilon)}{k}} \qquad (k=2U_0\alpha^2)$$

$$r=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{-U_0+\varepsilon}{U_0}}$$

($-U_0+\varepsilon<0$ よりおかしいが…。)

# (12)




$1u = 1.660\times10^{-27}$ kg
$f = 6.494\times10^{13}$ Hz
$V_0 = 1.780\times10^{-18}$ J
$R = 1.128\times10^{-10}$ m

ここで $m_1 = 12.00\cancel{u} \times \dfrac{1.660\times10^{-27}\,\text{kg}}{1\cancel{u}}$

$= 19.92\times10^{-27}$ kg

$m_2 = 15.99u \times \dfrac{1.660\times10^{-27}\,\text{kg}}{1u}$

$= 26.5434\times10^{-27}$ kg

より $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$= \dfrac{19.92\times10^{-27}\times 26.5434\,\cancel{\times10^{-27}}}{19.92\,\cancel{\times10^{-27}} + 26.5434\,\cancel{\times10^{-27}}}$

$\fallingdotseq \dfrac{528.7\times10^{-27}}{46.4634}$

$\fallingdotseq 11.38\times10^{-27}$ (kg)

5ページ目

(11) (C)より $f = \dfrac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2V_0}{m}}$, $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$\alpha = 2\pi f\sqrt{\dfrac{m}{2V_0}}$ ($\pi = 3.14$とする)

$= 2\cdot3.14\cdot6.494\times10^{13}\times\sqrt{\dfrac{11.38\times10^{-27}}{2\cdot1.780\times10^{-18}}}$

3.56
~~17-8~~

$\fallingdotseq 40.78\times10^{13}\times\sqrt{3.197\times10^{-9}}$

$\sqrt{10^2} = 10$
$\sqrt{10^4} = 10^2$

$= 40.78\times10^{13}\times\sqrt{31.97\times10^{-10}}$

$= 40.78\times10^{13}\times10^{-5}\times\sqrt{31.97}$

$\fallingdotseq 40.78\times10^{8}\times5.654$

$\fallingdotseq 230.6\times10^{8}$

$\alpha = 2.306\times10^{10}$ (1/m)

(13) (条件を満たす電磁波の振動数) $\fallingdotseq f = 6.494\times10^{13}$ Hz, (電磁波の速度) $= c = 3.00\times10^{8}$ m/s より.

$c = f\lambda$ から $\lambda = \dfrac{c}{f}$

$= \dfrac{3.00\times10^{8}}{6.494\times10^{13}}$

$\fallingdotseq 0.4620\times10^{-5}$

$\lambda = 4.620\times10^{-6}$ (m)

$10\times10^{-6}$
"

ここで、$10^{-6}$ m $< \lambda = 4.620\times10^{-6}$ m $< 10^{-5}$ m より 赤外線