Stærðfræðigreining I

Útgáfa 2015

Benedikt Steinar Magnússon

July 02, 2015

Efnisyfirlit

Verkefnalisti

Global:

- setja inn nauðsynlegar undirstöður fyrir hvern kafla
- ensk heiti í sviga á eftir skilgreiningum?
- liti á allar (sub(sub))sections?
- Listi yfir setningar: *index:: setning; .....*
- Formúlublað
- táknalisti

0.1 Tölur og föll

0.1.1 Inngangur

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened.

- Douglas Adams, The Restaurant at the End of the Universe

Grunnhugmyndin

Stærðfræðigreining grundvallast á því að mæla breytingu (oft með tilliti til tíma)

- Eðlisfræði; hraði, hröðun, massi, orka, vinna, afl, þrýstingur
- Rúmfræði; flatarmál, rúmmál, lengd, massamiðja
- Hagnýtingar; hagfræði, stofnstærðir, hámörkun/lágmörkun
- Stærðfræði; markgildi, hermun, jafnvægisástand

Sett fram samtímis, en óháð, af Isaac Newton og Gottfried Leibniz í lok 17. aldar.

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

Ítarefni

Fyrir nánari útlistun á hugtökunum sem við fjöllum um þá er hægt að skoða auk kennslubókarinnar

- http://stæ.is (hugtakasafn og orðaskrá)
- http://planetmath.org
- http://mathworld.wolfram.com
- http://en.wikipedia.org (ath. enska útgáfan)

Forrit

- GeoGebra http://www.geogebra.org
- WolframAlpha http://www.wolframalpha.com
- Matlab http://www.mathworks.com

  (sjá https://notendur.hi.is/~jonasson/matlab/)
- Octave http://www.gnu.org/software/octave/ (opið og ókeypis, svipað og Matlab)
- Sage http://www.sagemath.org/ (opið og ókeypis, byggt á Python)
- Mathematica http://www.wolfram.com/mathematica/

Skiladæmi

Frágangur skiladæma

- Skrifið upp **dæmið** og lausnina snyrtilega
- Vísið í setningar sem þið notið
- Notið ekki rökfræðitákn eins og $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$
- Textinn á að vera samfelldur og læsilegur (lesið hann sjálf yfir)

- Skýrt svar/niðurstaða

“Forty-two!” yelled Loonquawl. “Is that all you’ve got to show for seven and a half million years’ work?”

“I checked it very thoroughly,” said the computer, “and that quite definitely is the answer. I think the problem, to be quite honest with you, is that you’ve never actually known what the question is.”

-Douglas Adams, The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy

0.1.2 Tölur

Skilgreining

1. *Náttúrlegu tölurnar* eru tölurnar $1, 2, 3, 4, \ldots$ og mengi þeirra er táknað með $\mathbb{N}$.
2. Mengi *heiltalna* er táknað með $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
3. Mengi *ræðra talna* er táknað með $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$.
4. Mengi *rauntalna* er táknað með $\mathbb{R}$.
5. Mengi *tvinntalna* er táknað með $\mathbb{C}$.

Athugasemd: Margir vilja telja 0 með sem náttúrlega tölu. Það er eðlilegt ef maður lítur á náttúrlegu tölurnar þannig að þær tákni fjölda. Ef maður lítur hins vegar þannig á að þær séu notaðar til að númera hluti þá er 0 ekki með.

Smíði rauntalna

Rauntölur eru smíðaðar úr ræðu tölunum með því að fylla upp í götin.

T.d. eru

$$\pi = 3,1415926\ldots, \qquad \text{og}$$
$$\sqrt{2} - 4 = -2,58578\ldots$$

ekki ræðar tölur (það er ekki hægt að skrifa þær sem brot $\frac{a}{b}$, þar sem a og b eru heilar tölur), en þær eru rauntölur.

Frumsendan um efra mark

Látum A vera mengi af rauntölum sem er þannig að til er tala x, þannig að fyrir allar tölur $a \in A$ þá er

$$a \leq x.$$

Þá er til rauntala x_0 sem kallast *minnsta efra mark* fyrir A, sem er þannig að $a \leq x_0$ fyrir allar tölur $a \in A$ og ef $x < x_0$ þá er til tala $a \in A$ þannig að $a > x$.

0.1.3 Bil

Skilgreining

Látum a og b vera rauntölur þannig að $a < b$. Skilgreinum

1. *opið bil* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
2. *lokað bil* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
3. *hálf opið bil* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
4. *hálf opið bil* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

Þessi bil sem er skilgreind hér fyrir ofan eru kölluð endanleg. Til eru fleiri gerðir af bilum:

22. *opið óendanlegt bil* $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$
6. *opið óendanlegt bil* $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$
7. *lokað óendanlegt bil* $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$
8. *lokað óendanlegt bil* $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$
9. *allur rauntalnaásinn* $(-\infty, \infty)$.

Verkefnalisti

Afhverju er númeringin svona skrítin?

Skilgreining

Mengi A af rauntölum kallast bil ef um allar tölur $a < b$ sem eru í menginu A gildir að ef $a < x < b$ þá er x líka í menginu A. Þ.e. *engin göt*.

Athugasemd: Sérhvert bil á rauntalnaásnum er af einni þeirra gerða sem talin er upp í Skilgreining 1.4.1. Þessi staðhæfing er jafngild frumsendunni um efra mark.

Athugasemd: Það er jafngilt að segja

$$x \in (a - \eta, a + \eta)$$

og

$$|x - a| < \eta.$$

0.1.4 Föll

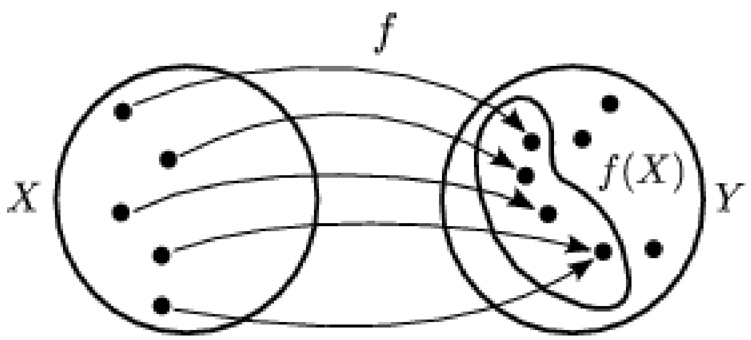
Skilgreining

Vörpun frá mengi X yfir í mengi Y er regla sem úthlutar sérhverju staki x í X nákvæmlega einu staki $f(x)$ í Y. Táknum þetta með $f : X \to Y$.

Stakið $f(x)$ kallast *gildi* vörpunarinnar (í punktinum x).

Skilgreining

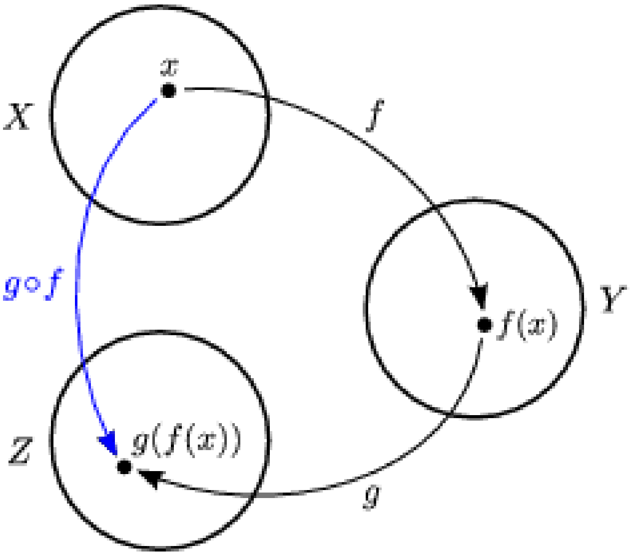
Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* f, mengið Y kallast *bakmengi* f og mengið $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ kallast *myndmengi* f.



Aðvörun: Það er ekki víst að öll gildin í Y séu tekin (það er $f(X)$ getur verið minna en Y). Eins þá er mögulegt að f taki sama gildið oftar en einu sinni.

Skilgreining

Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera varpanir. Vörpunin $g \circ f : X \to Z$ sem skilgreind er með $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ kallast *samskeyting* f og g. Stakið $g(f(x)) \in Z$ fæst með því að beita fyrst vörpuninni f á stakið x og síðan vörpuninni g á stakið $f(x)$.



Skilgreining

Við segjum að vörpunin f sé *átæk* ef $f(X) = Y$, það þýðir að fyrir sérhvert stak y í Y þá er til (amk. eitt) stak x í X þannig að $f(x) = y$.

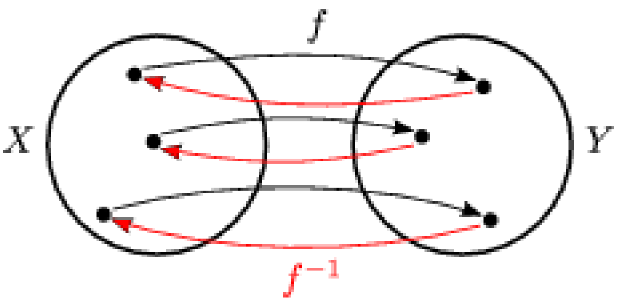
Segjum að vörpunin f sé *eintæk* ef $f(x_1) = f(x_2)$ hefur í för með sér að $x_1 = x_2$, það er sérhvert gildi sem vörpunin tekur er bara tekið einu sinni.

Skilgreining

Vörpun sem er bæði eintæk og átæk kallast *gagntæk*.

Skilgreining

Látum $f : X \to Y$ vera vörpun. Sagt er að f sé andhverfanleg ef til er vörpun $f^{-1} : Y \to X$ þannig að samskeyting varpananna f og f^{-1} annars vegar og f^{-1} og f hins vegar sé viðeigandi samsemdarvörpun, þ.e. $f^{-1} \circ f = id_X$ og $f \circ f^{-1} = id_Y$.



Athugasemd: Venjulega hjá okkur þá eru mengin X og Y mengi af rauntölum. Þegar Y er mengi af tölum þá er notast við orðið *fall* í stað orðsins *vörpun*.

Skilgreining

Látum $f : X \to Y$ vera fall þannig að X og Y eru mengi af rauntölum. *Graf* fallsins f er þá mengi allra punkta í planinu $\mathbb{R}^2$ af gerðinni $(x, f(x))$ þar sem $x \in X$. Hér notum við oft y í stað $f(x)$.

Verkefnalisti

mynd

0.2 Markgildi og samfelldni

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- Jafna línu, P.2
- Jafna hrings, P.3
- Hliðrun og skölun grafs, P.3
- (Stranglega) minnkandi og (stranglega) vaxandi föll, 2.8
- Jafnstæð og oddstæð föll, P.4
- Margliður; deiling, þáttun og rætur, P.6
- Tölugildisfallið, P.1
- Þríhyrningsójafnan, P.1
- Formerkjafallið, $sgn(x)$, P.5

0.2.1 Markgildi

Óformleg skilgreining á markgildi

Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé "eins nálægt L" og við viljum bara með því að velja x "nógu nálægt* a".

Skilgreining: Markgildi

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x þannig að

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \text{þá er} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Við segjum að talan L sé *markgildi* $f(x)$ þegar x stefnir á a.

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

Athugasemd: Þegar athugað er hvort markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ er til og hvert gildi þess er þá skiptir ekki máli hvort $f(a)$ er skilgreint eða ekki.

0.2.2 Markgildi frá hægri

Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (a, b). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá hægri*, og ritum $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé "eins nálægt L" og við viljum bara með því að velja $x > a$ "nógu nálægt* a".

Skilgreining (Markgildi frá hægri)

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (a, b). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá hægri*, og ritum $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x þannig að

$$a < x < a + \delta, \quad \text{þá er} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

0.2.3 Markgildi frá vinstri

Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (b, a). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L þegar x *stefnir á* a *frá vinstri*, og ritum $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé "eins nálægt* L" og við viljum bara með því að velja $x < a$ "nógu nálægt* a".

Skilgreining – Markgildi frá vinstri

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (b, a). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá vinstri*, og ritum $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x þannig að

$$a - \delta < x < a, \quad \text{þá er} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

0.2.4 Reiknireglur fyrir markgildi

Setning

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Þá er

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ef og aðeins ef

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Setning

Gerum ráð fyrir að $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og að $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Þá gildir

1. $\lim_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = L + M$.
2. $\lim_{x\to a} \Big(f(x) - g(x)\Big) = L - M$.
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.
4. $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$, þar sem k fasti.
5. $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$, að því gefnu að $M \neq 0$.
6. Gerum ráð fyrir að m og n séu heiltölur þannig að $f(x)^{m/n}$ sé skilgreint fyrir öll x á bili (b, c) umhverfis a (en ekki endilega fyrir $x = a$) og að $L^{m/n}$ sé skilgreint. Þá er $\lim_{x\to a} f(x)^{m/n} = L^{m/n}$.
7. Ef til er bil (b, c) sem inniheldur a þannig að $f(x) \leq g(x)$ fyrir öll $x \in (b, c)$, nema kannski $x = a$, þá er $\lim_{x\to a} f(x) = L \leq M = \lim_{x\to a} g(x)$.

Aðvörun: Liður (i) í setningunni á undan segir að ef markgildin $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ eru til þá sé markgildið $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ einnig til.
En hún segir **ekki** að ef f og g eru föll þannig að markgildið $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ er til, að þá séu markgildin $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ einnig til.

Setning – Klemmureglan

Gerum ráð fyrir að $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll x á bili (b, c) sem inniheldur a, nema kannski $x = a$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Þá er $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Verkefnalisti

Mynd

0.2.5 Algeng markgildi

Verkefnalisti

Myndir og nokkrar sannanir

Sýnidæmi

1. $\lim_{x \to a} c = c$, c fasti
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} |x| = |a|$

Sýnidæmi – Markgildi með sínus

1. $$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{er ekki til}$$

2. $$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

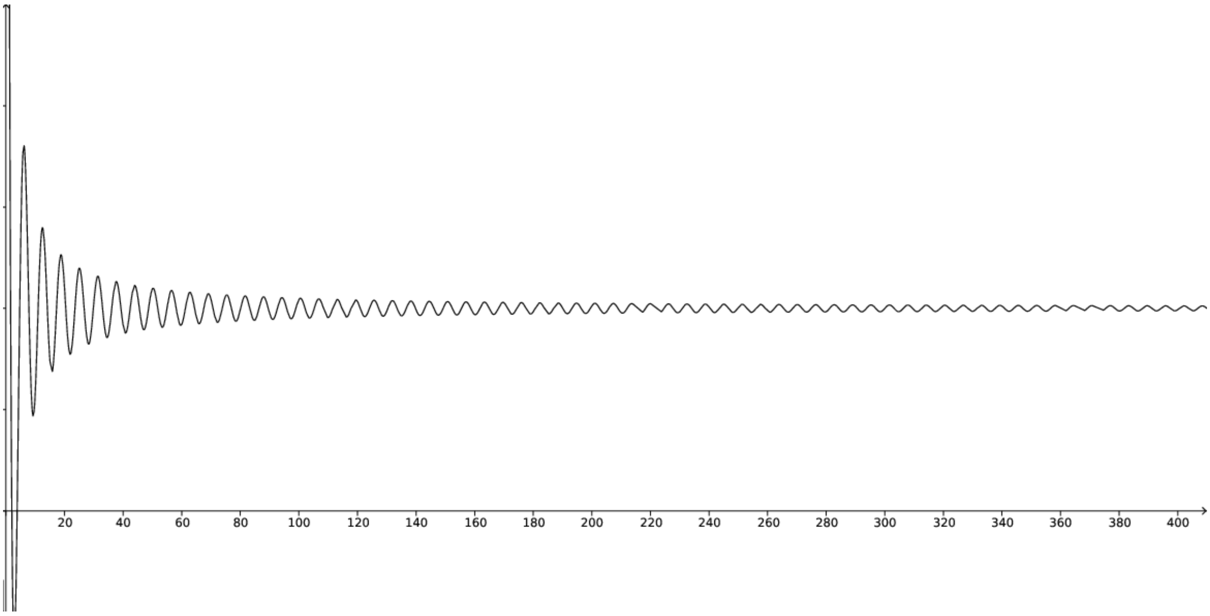
Sýnidæmi – Markgildi með tölugildisfallinu

1. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

2. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{er ekki til}$$

0.2.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt



Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili (a, ∞). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* ∞, og ritum $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins “nálægt L” og við viljum bara með því að velja “x nógu stórt”.

Skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili (a, ∞). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* ∞, og ritum $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala R þannig að um öll $x > R$ gildir að $|f(x) - L| < \epsilon$.

Fyrir $-\infty$ er þetta gert með sama sniði.

Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili $(-\infty, a)$. Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* $-\infty$, og ritum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins “nálægt L” og við viljum bara með því að velja x sem “nógu stóra* mínus tölu”.

Skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili $(-\infty, a)$. Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* $-\infty$, og ritum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala R þannig að um öll $x < R$ gildir að $|f(x) - L| < \epsilon$.

0.2.7 Óendanlegt sem markgildi

Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Segjum að $f(x)$ *stefni á* ∞ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé *hversu stórt sem við viljum* bara með því að velja x *nógu nálægt* a.

Skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á* ∞ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu B er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x þannig að $0 < |x-a| < \delta$ gildir að $f(x) > B$.

Athugasemd: Athugið að ∞ er **ekki** tala. Þó að $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ þá er samt sagt að markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ sé ekki til.

Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Segjum að $f(x)$ *stefni á* $-\infty$ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé "hversu lítið sem við viljum" bara með því að velja x "nógu nálægt a".

Skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á* $-\infty$ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu B er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x þannig að

$0 < |x-a| < \delta$ gildir að $f(x) < B$.

Athugasemd: Athugið að $-\infty$ er **ekki** tala. Þó að $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ þá er samt sagt að markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ sé ekki til.

0.2.8 Samfelldni

Skilgreining

Látum $A \subseteq \mathbb{R}$ og $x \in A$. Við segjum að x sé *innri punktur* A ef A inniheldur opið bil umhverfis x, það er að segja til er tala $\delta > 0$ þannig að $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A$.

Ef x er ekki innri punktur A og $x \in A$ þá segjum við að x sé *jaðarpunktur* A.

Skilgreining

Látum f vera fall og c innri punkt skilgreiningarsvæðis f. Sagt er að f sé *samfellt í punktinum* c ef

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Setning

Látum f og g vera föll. Gerum ráð fyrir að c sé innri punktur skilgreiningarsvæðis beggja fallanna og að bæði föllin séu samfelld í punktinum c. Þá eru eftirfarandi föll samfelld í c:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. fg
4. kf, þar sem k er fasti

5. f/g, ef $g(c) \neq 0$
6. $\big(f(x)\big)^{1/n}$, að því gefnu að $f(c) > 0$ ef n er slétt tala og $f(c) \neq 0$ ef $n < 0$.

Setning – Samskeyting samfelldra falla

Látum g vera fall sem er skilgreint á opnu bili umhverfis c og samfellt í c og látum f vera fall sem er skilgreint á opnu bili umhverfis $g(c)$ og samfellt í $g(c)$. Þá er fallið $f \circ g$ skilgreint á opnu bili umhverfis c og er samfellt í c.

Athugasemd: Ef fall er skilgreint með formúlu og skilgreingamengið er ekki tilgreint sérstaklega, þá er venjan að líta alla þá punkta þar sem formúlan gildir sem skilgreingarmengi fallsins

---

Skilgreining

Við segjum að fall f sé *samfellt* ef það er samfellt í sérhverjum punkti skilgreingarmengisins.

Dæmi

Eftirfarandi föll eru samfelld

1. margliður
2. ræð föll
3. ræð veldi
4. hornaföll; $\sin$, $\cos$, $\tan$
5. tölugildisfallið $|x|$

Að búa til samfelld föll

Með því að nota föllin úr dæminu á undan sem efnivið þá getum við búið til fjölda samfelldra fall með því að beita aðgerðunum úr Setningu 3.14 og Setningu 3.15.

0.2.9 Hægri/vinstri samfelldni

Rifjum upp skilgreininguna á samfelldni.

Skilgreining

Látum f vera fall og c innri punkt skilgreiningarsvæðis f. Sagt er að f sé *samfellt í punktinum* c ef

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Athugasemd

Þessi skilgreining virkar aðeins fyrir innri punkta skilgreiningarsvæðisins. Þannig að ef ætlunin er að rannsaka samfelldni í jaðarpunktum þá gengur þessi skilgreining ekki. Hins vegar getum við útvíkkað skilgreininguna á samfelldni fyrir hægri og vinstri endapunkta bila með því að einskorða okkur við markgildi frá vinstri og hægri.

Skilgreining

1. Fall f er *samfellt frá hægri í punkti* c ef $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$.

   Hér er gert ráð fyrir að fallið f sé amk. skilgreint á bilinu $[c, a)$.

2. Fall f er *samfellt frá vinstri í punkti* c ef $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.

   Hér er gert ráð fyrir að fallið f sé amk. skilgreint á bilinu $(a, c]$.

Uppfærum nú skilgreiningu [skilgr:samfellt:sub:$f$all].

Skilgreining (uppfærð)

Gerum ráð fyrir að f sé fall sem er skilgreint á mengi A, þar sem A er sammengi endanlega margra bila. Við segjum að fallið f sé *samfellt* ef það er samfellt í öllum innri punktum skilgreingarmengisins, og ef það er samfellt frá hægri/vinstri í jaðarpunktum skilgreingarmengisins, eftir því sem við á.

Athugasemd: Ef fall er samfellt á opnu bili (a, b), og ef $a < c < d < b$, þá er fallið einnig samfellt á bilinu $[c, d]$.

0.2.10 Eiginleikar samfelldra falla

Setning – Há- og lággildislögmálið

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu takmörkuðu bili $[a, b]$. Þá eru til tölur x_1 og x_2 í $[a, b]$ þannig að fyrir allar tölur x í $[a, b]$ er

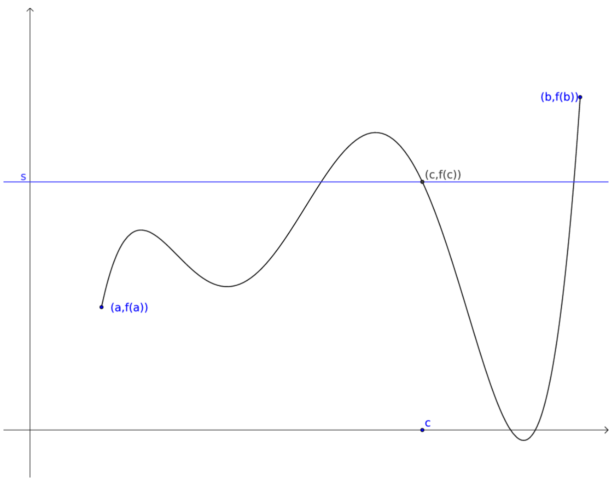
$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$

Þetta þýðir að samfellt fall f á lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$ tekur bæði hæsta og lægsta gildi á bilinu. Hæsta gildið er þá $f(x_2)$ og lægsta gildið er $f(x_1)$.

Athugasemd: Það er mögulegt að fallið taki há/lággildi sitt í fleiri en einum punkti.

Setning: Milligildissetningin

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu takmörkuðu bili $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að s sé tala sem liggur á milli $f(a)$ og $f(b)$. Þá er til tala c sem liggur á milli a og b þannig að $f(c) = s$.



Fylgisetning

Ef $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ er margliða af oddatölu stigi, þá er til rauntala c þannig að $P(c) = 0$.

Verkefnalisti

Þarf að setja sannanir undir > takk, show/hide fídus

Sönnun

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$. Þá er $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. Það þýðir að til eru tölur a og b þannig að $P(a) < 0$ og $P(b) > 0$. Með því að beita Milligildissetningunni á fallið P á bilinu $[a, b]$ og með $s = 0$ þá fæst að til er núllstöð á bilinu $[a, b]$.

Ef $a_n < 0$ þá víxlast markgildin að ofan en röksemdafærslan er að öðru leyti eins.

0.3 Afleiður

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- todo

0.3.1 Skilgreining á afleiðu

Skilgreining

Látum x vera innri punkt skilgreiningarsvæðis falls f. *Afleiða falls* f *í punkti* x er skilgreind sem

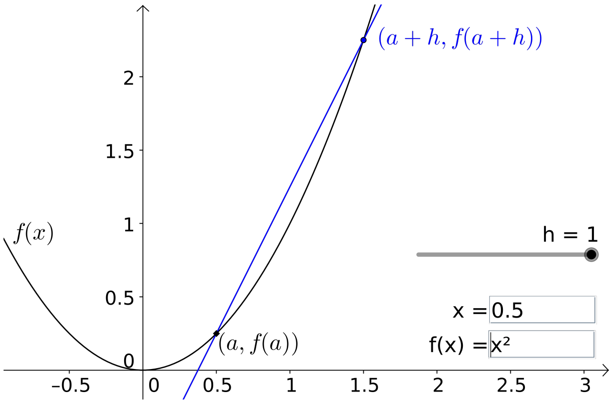
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ef markgildið er til þá er sagt að fallið f sé *diffranlegt í punktinum* x, en annars er sagt að fallið sé *ekki diffranlegt í punktinum* x.

Dæmi

Fallið $f(x) = x^2$ er diffranlegt í sérhverjum punkti x. Það sést af því að

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.\end{aligned}$$



Setning

Ef fall f er diffranlegt í punkti c þá er f samfellt í punktinum c.

Sönnun

Skoðum markgildið $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Þar sem $h \to 0$ þá verður teljarinn einnig að stefna á 0. Það er $\lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) = 0$, eða $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Þetta má einnig rita $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, sem þýðir að fallið f er samfellt í $x = c$.

Athugasemd: Fall getur verið samfellt í punkti c án þess að það sé diffranlegt í c.

Dæmi

Fallið $f(x) = |x|$ er samfellt. En það er ekki diffranlegt í punktinum $x = 0$. Það sést af því að

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

en

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Það er, markgildið $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ er ekki til.

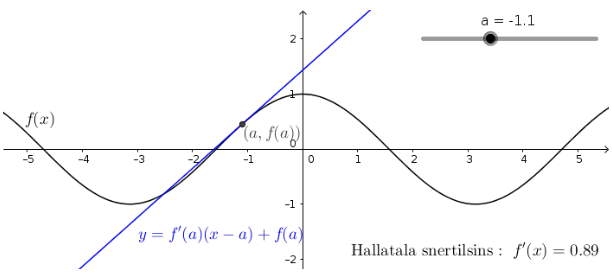
Snertill

Afleiðu falls f í punktinum a fæst með því að taka sniðil í gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$, og láta svo h stefna á 0.

Þetta gefur hallatölu snertilsins við graf fallsins í punktinum $(a, f(a))$

Snertilsins við graf fallsins er þá línan

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

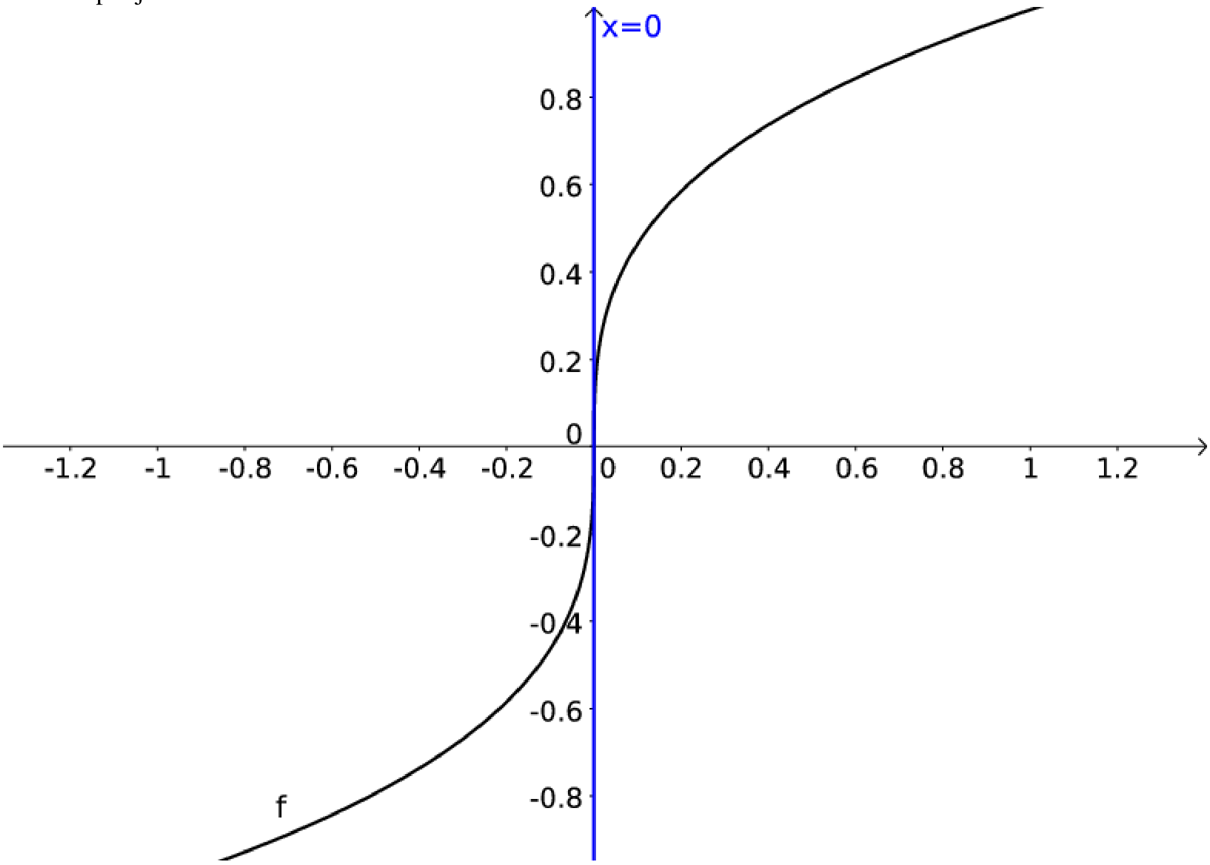


Athugasemd: Hallatalan ∞ ekki leyfð

Við leyfum ekki að $f'(a) = \infty$. Samanber $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ í punktinum $a = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty.$$

Hér ætti því jafna snertilsins að vera $x = 0$.



Við viljum að snertillinn sé nálgun við graf fallsins fyrir x nálægt a, lóðrétt lína er gagnslaus nálgun því hún er ekki skilgreind sem fall af x nálægt a.

0.3.2 Útvíkkun fyrir lokuð bil

Ef fallið f er skilgreint á lokuðu bili þá getum við skilgreint afleiðuna í endapunktunum með því að taka markgildi frá hægri/vinstri eftir því sem við á.

Skilgreining

1. *Hægri afleiða falls f í punkti x* er skilgreind sem

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. *Vinstri afleiða falls f í punkti x* er skilgreind sem

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Setning

Ef x er innri punktur í skilgreiningarsvæði fallsins f þá er f diffranlegt í x þá og því að eins

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

og þá er $f'(x)$ jafnt og markgildin hér fyrir ofan.

Dæmi: $|x|$ aftur

Við sáum hér fyrir ofan að fallið $|x|$ er ekki diffranlegt í $x = 0$. Það er hins vegar bæði diffranlegt frá hægri og vinstri; Hægri afleiðan í $x = 0$ er 1 og vinstri afleiðan í $x = 0$ er -1. En þar sem hægri og vinstri afleiðunum ber ekki saman er fallið ekki diffranlegt í 0.

Skilgreining

Látum f vera fall með skilgreiningarsvæði A. Gerum ráð fyrir að A sé sammengi endanlega margra bila. Við segjum að fallið f sé *diffranlegt* ef það er diffranlegt í öllum innri punktum A og diffranlegt frá vinstri/hægri í jaðarpunktum A eftir því sem við á.

Ritháttur

Afleiða falls f er ýmist táknuð með

$$f', \qquad \frac{df}{dx}, \qquad D_x f \qquad \text{eða} \qquad Df.$$

Ef við skrifum $y = f(x)$ þá má einnig tákna hana með

$$y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad D_x y \qquad \text{eða} \qquad Dy.$$

Dæmi

Fallið $f(x) = \sqrt{x}$, $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ er diffranlegt á menginu $]0,\infty[$ og afleiðan er gefin með $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ þar. Hins vegar er f ekki diffranlegt í $x = 0$ þrátt fyrir að fallgildið sé vel skilgreint (og fallið samfellt frá hægri) þar.

Ef $x > 0$ þá fæst

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

sem segir okkur að $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.

Í vinstri endapunkti skilgreingarsvæðisins, $x = 0$, þá fæst hins vegar

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,
\end{aligned}$$

sem sýnir að fallið er ekki diffranlegt frá hægri í $x = 0$.

0.3.3 Reiknireglur

Setning

Látum f og g vera föll sem eru diffranleg í punkti x. Þá eru föllin $f+g,\ f-g, kf$ (þar sem k er fasti) og fg diffranleg í punktinum x, og ef $g(x) \neq 0$ þá eru föllin $1/g$ og f/g líka diffranleg í x.

Eftirfarandi formúlur gilda um afleiður fallanna sem talin eru upp hér að framan:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(kf)'(x) = kf'(x)$, þar sem k er fasti
4. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$, ef $g(x) \neq 0$
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, ef $g(x) \neq 0$

Nokkrar afleiður

1. $\frac{d}{dx}c = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$

Setning

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Sönnun

Sýnum þetta með þrepun.Tilfellið $n=1$ er afgreitt hér að ofan. Gerum ráð fyrir að niðurstaðan gildi fyrir n og sýnum að þá gildi hún einnig fyrir $n+1$,

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \left(\frac{d}{dx}x\right)x^n + x\frac{d}{dx}x^n = x^n + x\underbrace{n\,x^{n-1}}_{\text{þ.f.}} = (n+1)x^n.$$

Afleiður margliða

Með því að nota setningarnar að ofan þá eigum við ekki í neinum vandræðum með að diffra margliður. Setning [setn:diffreglur] (i) segir að við getum diffrað hvern lið fyrir sig, liður (iii) í sömu setningu segir að við getum tekið fastana fram fyrir afleiðuna og loks segir setning [setn:diff:sub:xn] hvernig við diffrum x^n.

Dæmi

Finnum afleiðu margliðunnar $p(x) = 4x^3 - 2x + 5$. Nú er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}p(x) &= \frac{d}{dx}4x^3 - \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}5 \\ &= 4\frac{d}{dx}x^3 - 2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}5 = 4\cdot 3x^2 - 2\cdot 1 + 0 = 12x^2 - 2\end{aligned}$$

Setning (Keðjureglan)

Gerum ráð fyrir að f og g séu föll þannig að g er diffranlegt í x og f er diffranlegt í $g(x)$. Þá er samskeytingin $f \circ g$ diffranleg í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

0.3.4 Hærri afleiður

Skilgreining

Látum f vera fall. Afleiðan f' er fall sem skilgreint er í öllum punktum þar sem f er diffranlegt.

Ef fallið f' er diffranlegt í punkti x þá er afleiða f' í punktinum x táknuð með $f''(x)$ og kölluð *önnur afleiða f í punktinum x*. Líta má á aðra afleiðu f sem fall f'' sem er skilgreint í öllum punktum þar sem f' er diffranlegt.

Almennt má skilgreina *n-tu afleiðu f*, táknaða með $f^{(n)}$, þannig að í þeim punktum x þar sem fallið $f^{(n-1)}$ er diffranlegt þá er $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$.

Dæmi

Ef $f(x) = 3x^2$, þá er $f'(x) = 3\frac{d}{dx}x^2 = 3 \cdot 2x = 6x$ og $f''(x) = 6\frac{d}{dx}x = 6$.

Ritháttur

Ritum $y = f(x)$.

Þá má tákna fyrstu afleiðu f með

$$y' = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) \ = \ D_x y = \frac{dy}{dx},$$

aðra afleiðuna með

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = D_x^2 f(x) = D_x^2 y = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

og almennt n-tu afleiðuna

$$\begin{aligned} y^{(n)} = f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right) \\ &= D_x^n f(x) \ = \ D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \end{aligned}$$

Athugasemd: Venja er að rita f''' til að tákna þriðju afleiðu f en afar sjaldgæft að f'''' sé notað til að tákna fjórðu afleiðu f og mun algengara að nota $f^{(4)}$.

0.3.5 Útgildi

Skilgreining

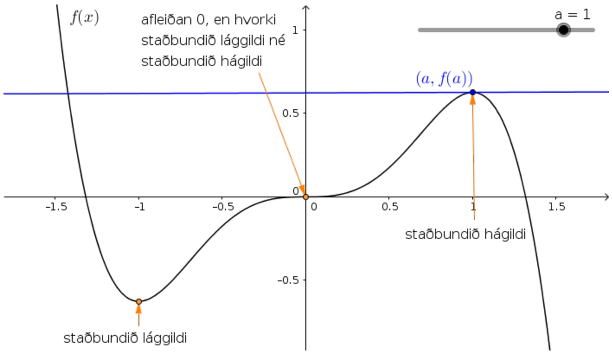
Við segjum að fall f hafi *staðbundið hágildi í punktinum x_0* ef til er bil (a, b) umhverfis x_0, sem er þannig að

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \text{fyrir öll } x \in (a, b)$$

Við segjum að fall f hafi *staðbundið lággildi í punktinum x_0* ef til er bil (a, b) umhverfis x_0, sem er þannig að

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{fyrir öll } x \in (a, b)$$

Tölum um að fallið f hafi *staðbundið útgildi í punktinum x_0* ef það hefur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi þar.



Setning

Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punktinum x_0 og er diffranlegt þá er $f'(x_0) = 0$.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að f hafi staðbundið hágildi í punktinum x_0. Þá er $f(x_0) - f(x) \geq 0$ ef $x < x_0$, þ.e. $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \geq 0$ ef $x < x_0$. Þetta þýðir að

$$\lim_{x \to x_0^-} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0.$$

Eins þá er $f(x_0) - f(x) \geq 0$ ef $x_0 < x$, þ.e. $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq 0$ ef $x_0 < x$. Þetta þýðir að

$$\lim_{x \to x_0^+} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Við vitum að markgildið $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ er til þar sem fallið er diffranlegt, það þýðir að markgildin frá hægri og vinstri eru þau sömu. Eina leiðin til þess að það samræmist ([vinstri]) og ([haegri]) er að

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0.$$

Aðvörun: Þó að $f'(a) = 0$ þá er ekki víst að a sé útgildi.
Til dæmis þá hefur fallið $f(x) = x^3$ ekkert staðbundið útgildi en $f'(x) = 3x^2$, þ.e. $f'(0) = 0$.

0.3.6 Hornaföll og afleiður þeirra

Til þess að geta fundið afleiður hornafallanna þá þurfum við eftirfarandi mikilvæg markgildi.

Setning

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Fylgisetning

1. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
2. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

0.3.7 Meðalgildissetningin

Setning Rolle

Látum $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Gerum ráð fyrir að g sé diffranlegt í öllum punktum í bilinu (a, b). Ef $g(a) = g(b)$ þá er til punktur c á bilinu (a, b) þannig að $g'(c) = 0$.

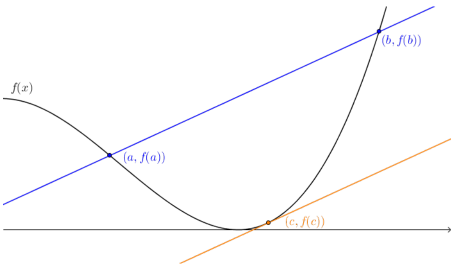
Sönnun

Ef $g(x) = c$ er fasti, þá er $g'(x) = 0$. Ef hins vegar g er ekki fasti þá er til $x \in (a, b)$ þannig að $g(x) \neq 0$, gerum ráð fyrir að $g(x) > 0$(tilfellið ef $g(x) < 0$ gengur nánast eins fyrir sig).Samkvæmt Há- og lággildislögmálinu (Setning 4.6) þá er tekur fallið g sitt hæsta gildi í punkti c á bilinu $[a, b]$.Þar sem $g(c) \geq g(x) > 0 = g(a) = g(b)$ þá getur c hvorki verið a né b.

Meðalgildissetningin

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í öllum punktum í bilinu (a, b). Þá er til punktur c í bilinu (a, b) þannig að

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Með öðrum orðum

Í einhverjum punkti á bilinu er stundarbreytingin jöfn meðalbreytingunni yfir allt bilið.

Alhæfða meðalgildissetningin

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á lokaða bilinu $[a, b]$ og diffranleg á opna bilinu (a, b). Gerum auk þess ráð fyrir að fyrir allar tölur x í (a, b) sé $g'(x) \neq 0$. Þá er til tala $c \in (a, b)$ þannig að

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

0.3.8 Vaxandi og minnkandi föll

Skilgreining

Fall f er *vaxandi* (nondecreasing) á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$, þá er

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Fall f er *stranglega vaxandi* (increasing) á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$, þá er

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Fall f er *minnkandi* (nonincreasing) á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$, þá er

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Fall f er *stranglega minnkandi* (decreasing) á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$, þá er

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Þá er f vaxandi þá og því aðeins að $f' \geq 0$.

Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Þá er f minnkandi þá og því aðeins að $f' \leq 0$.

Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Ef $f' > 0$ þá er f stranglega vaxandi.

Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Ef $f' < 0$ þá er f stranglega minnkandi.

Aðvörun: Diffranlegt fall getur verið stranglega vaxandi/minnkandi án þess að afleiðan sé alls staðar stærri/minni en 0. Til dæmis er afleiða $f(x) = x^3$ jöfn 0 í $x = 0$ en fallið er stranglega vaxandi á öllum rauntalnaásnum.

Afleiður fastafalla

Við vitum að ef f er fasti, það er $f(x) = c$, þá er $f'(x) = 0$ fyrir öll x (Dæmi 5.6).

Nú fáum við einnig eftirfarandi út úr setningunum hér á undan eftirfarandi.

Fylgisetning

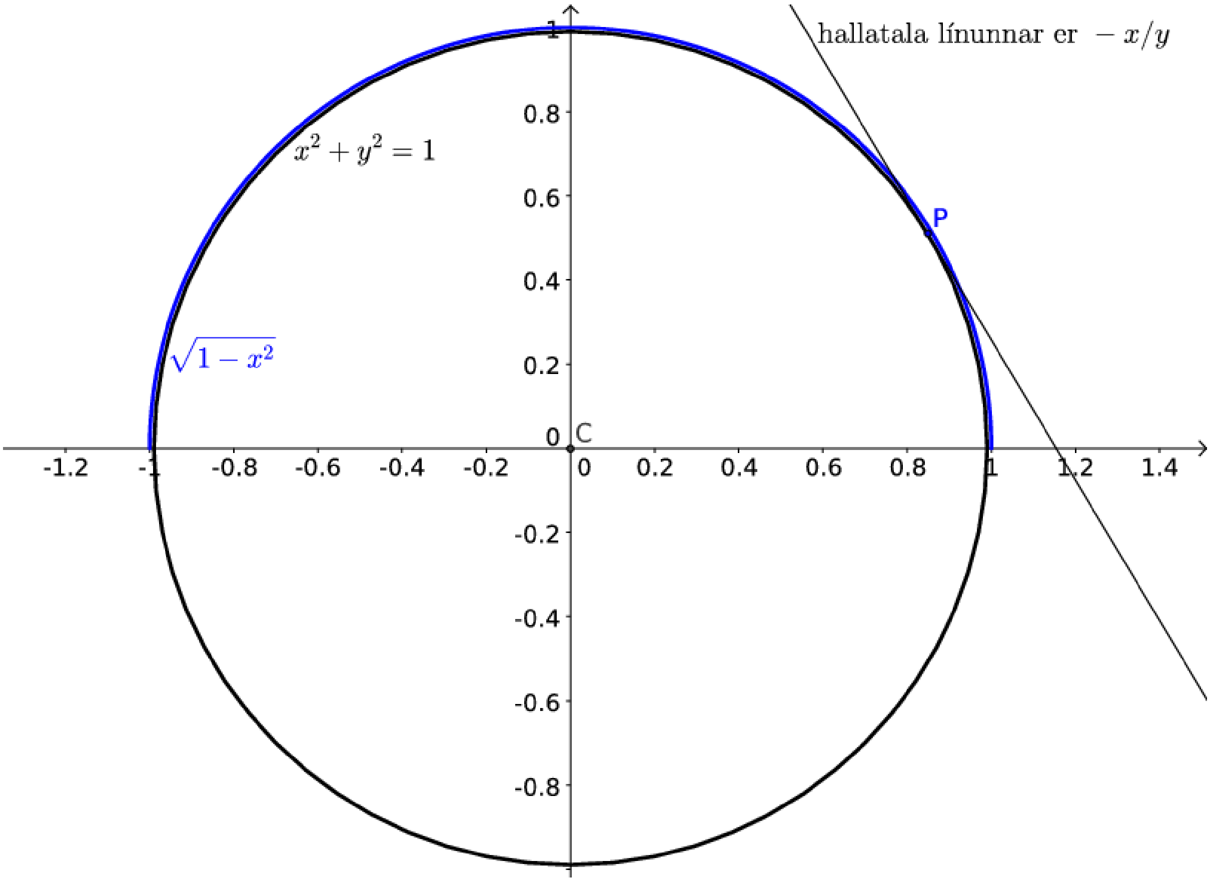
Ef f er diffranlegt fall á bili I sem er þannig að $f'(x) = 0$ á I, þá er f fasti, þ.e. $f(x) = c$ fyrir öll $x \in I$.

0.3.9 Fólgin diffrun

Dæmi

Jafna hrings með geisla 1 er $x^2 + y^2 = 1$. Við vitum að hægt er að skrifa efri og neðri helminga hans sem föll af y, annars vegar $y = \sqrt{1 - x^2}$ og hins vegar $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Ef við viljum finna snertil við hringinn getum við notað þessi föll. En þar sem við vitum að hægt er að skrifa y sem fall af x þá getum við einnig diffrað jöfnu hringsins beint með aðstoð keðjureglunnar,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}0 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ y\frac{dy}{dx} &= -x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$



Setning

Látum feril vera gefinn með $F(x,y) = 0$, þar sem F er diffranlegt í bæði x og y. Í punktum þar sem ferillinn er ekki lóðréttur (þ.e. $\frac{d}{dy}F \neq 0$) þá er hægt að skrifa y sem fall af x og þá fæst af keðjureglunni að

$$\frac{d}{dx}F(x,y) + \frac{d}{dy}F(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

þ.e.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}F(x,y)}{\frac{d}{dy}F(x,y)}.$$

Með öðrum orðum

Það kemur á sama stað niður að einangra $y = f(x)$, ef það er mögulegt, og finna y' með því að diffra, eins og að diffra $F(x,y) = 0$ og einangra svo $y' = \frac{dy}{dx}$.

Vinnulag

1. Diffrum beggja vegna jöfnuna með tilliti til x, og lítum á y sem fall af x sem við diffrum með aðstoð keðjureglunnar (og gleymum ekki y')
2. Einangrum y'
3. Skiptum y fyrir $f(x)$.

Setning (Hagnýting á fólginni diffrun)

Ef n og m eru heilar tölur þá er

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Sönnun

Verkefnalisti

Bæta við

0.3.10 Andhverf föll

Verkefnalisti

Flytja/vísa í kafla 1?

Skilgreining

Skilgreining

Skilgreiningarsvæði falls f (e. domain) er mengi allra talna x þannig að $f(x)$ er skilgreint.

Skilgreining

Við segjum að fallið f sé *eintækt* (e. one-to-one, injective) ef fyrir allar tölur x_1 og x_2 úr skilgreiningarsvæði f gildir að ef $x_1 \neq x_2$ þá er $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Ólík stök varpast í ólík stök.) Þetta má líka orða þannig að fallið f er eintækt ef alltaf þegar $f(x_1) = f(x_2)$ má álykta að $x_1 = x_2$.

Skilgreining

Látum f vera fall með skilgreiningarsvæði D. *Myndmengi* f (e. range) er skilgreint sem mengið

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

Myndmengið er mengi allra mögulegra útkoma úr f.

Skilgreining og setning

Látum f vera fall sem skilgreint er á mengi D. Gerum ráð fyrir að f sé eintækt. Þá er til fall f^{-1} sem er skilgreint á menginu $f(D)$ þannig að

$$y = f(x) \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad x = f^{-1}(y).$$

Fallið f^{-1} kallast *andhverfa* f.

Setning

Fall sem er strangt vaxandi eða strangt minnkandi er eintækt og á sér því andhverfu.

Eiginleikar

1. $y = f^{-1}(x)$ þá og því aðeins að $x = f(y)$.
2. Skilgreingarsvæði f er myndmengi f^{-1}.
3. Myndmengi f^{-1} er jafnt skilgreiningarsvæði f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f^{-1}.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f, alltsvo $(f^{-1})^{-1} = f$.
7. Graf f^{-1} er speglun á grafi f um línuna $y = x$.

Setning: Afleiða andhverfunnar

Gerum ráð fyrir að fall f hafi andhverfu f^{-1}. Látum x vera á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum $f^{-1}(x)$ og að $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Þá er f^{-1} diffranlegt í punktinum x og

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

0.3.11 Línulegar nálganir

Staðbundnar nálganir

Ef við skoðum diffranlegt fall f í grennd um fastann punkt a. Þá sjáum við að ef fallið graf fallsins er ekki „mjög krappt” og Δx er „frekar lítið” þá fæst eftirfarandi:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &\approx \frac{\gamma}{\Delta x} = f'(x) \\
\Delta y &\approx \Delta x\, f'(x) \\
f(x+\Delta x) - f(x) &\approx \Delta x\, f'(x) \\
f(x+\Delta x) &\approx \Delta x\, f'(x) + f(x)
\end{aligned}$$

Aðvörun: Athugið að hér er x fast en Δx breytist.

Ef við látum $t = x + \Delta x$ þá þýðir þetta að $f(t) \approx f'(x)(t - x) + f(x)$.

Skilgreining

Línuleg nálgun á falli f nálægt a, eða 1. stigs Taylor margliða f í a, er gefin með $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Setning

Skekkjan í nálguninni, $E_1(x) = f(x) - P_1(x)$, uppfyllir að til er tala $X \in (a, x)$ þannig að

$$E_1(x) = \frac{f''(X)}{2}(x - a)^2.$$

Fylgisetning: Skekkjumat fyrir línulegar nálganir

Gerum ráð fyrir að $f''(t)$ sé skilgreint fyrir öll t í opnu bili sem inniheldur bæði a og x. Gerum enn fremur ráð fyrir að m og M séu tölur þannig að fyrir öll $t \in (a, x)$ gildi að $m \leq f''(t) \leq M$. Þá er

$$\frac{m}{2}(x-a)^2 \leq E_1(x) = \frac{f''(X)}{2}(x-a)^2 \leq \frac{M}{2}(x-a)^2,$$

sem gefur að

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{m}{2}(x-a)^2 \leq f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

0.3.12 Taylormargliður

Línuleg nálgun á falli er ekkert annað en nálgun með fyrsta stigs margliðu.

Spurningin er því hvort hægt sé að nota margliður af hærra stigi, og fá þá betri nálgun?

Hvernig er 0. stigs nálgun á falli?

Skilgreining

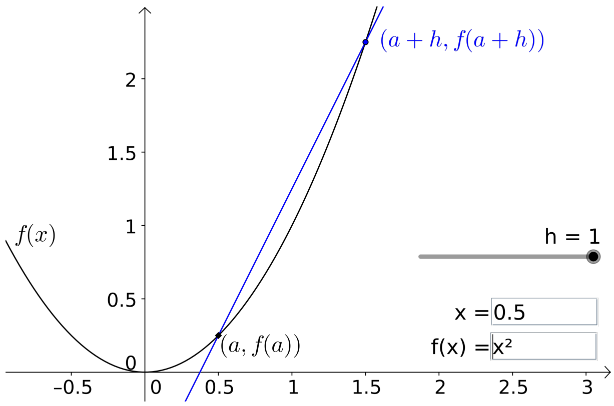
Gerum ráð fyrir að fall f sé diffranlegt n sinnum í punkti a, þ.e.a.s. við gerum ráð fyrir að n-ta afleiðan $f^{(n)}(a)$ sé skilgreind.*Taylor margliða* af n-ta stigi fyrir f um $x = a$ (oft líka sagt með *miðju* í a) er margliðan

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Talað er um n-ta stigs Taylor nálgun þegar gildið $P_n(x)$ er notað sem nálgun fyrir $f(x)$.

Skekkjan í nálguninni (munurinn á réttu fallgildi og nálgunargildi) er táknaður með

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x).$$



Setning: Skekkjumat fyrir Taylor nálgun

Gerum ráð fyrir að $n+1$-afleiðan $f^{(n+1)}(t)$ sé skilgreind fyrir öll t í opnu bili sem inniheldur bæði a og x. Þá er til tala X á milli a og x þannig að

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Því má rita

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \\
& \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x) \\
=& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \\
& \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Fylgisetning

Gerum ráð fyrir að f sé $n+1$ diffranlegt á bili sem inniheldur bæði a og x. Gerum enn fremur ráð fyrir að m og M séu tölur þannig að fyrir öll $t \in (a, x)$ gildi að $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$. Þá er

$$P_n(x) + \frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq f(x) \leq P_n(x) + \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Skilgreining

Við ritum

$$f(x) = O(u(x)) \text{ þegar } x \to a$$

ef til er fasti K og tala $\delta > 0$ þannig að

$$|f(x)| < K|u(x)| \quad \text{fyrir öll} \quad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Einnig ritað

$$f(x) = g(x) + O(u(x)) \text{ þegar } x \to a$$

ef $f(x) - g(x) = O(u(x))$ þegar $x \to a$.

Athugasemd

Við sjáum að

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1}) \text{ þegar } x \to a,$$

því hægt er að nota $k = \frac{\max\{-m, M\}}{(n+1)!}$ í skilgreiningunni hér á undan.

Setning

Gerum ráð fyrir að $Q_n(x)$ sé margliða af stigi ekki hærra en n. Ef $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ þegar $x \to a$ þá er $Q_n(x) = P_n(x)$ þar sem $P_n(x)$ er n-ta stigs Taylor margliða f með miðju í a.

0.3.13 Regla l'Hôpital

Regla l'Hôpital, einhliða útgáfa

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á opnu bili (a, b) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in (a, b)$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Regla l'Hôpital

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (x_1, a) og (a, x_2) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll x í þessum bilum.Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Regla l'Hôpital, ∞-útgáfa

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (a, ∞) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in (a, \infty)$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Regla l'Hôpital, útgáfa 4

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (x_1, a) og (a, x_2) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll x í þessum bilum. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

0.4 Torræð föll

0.4.1 Náttúrlegi logrinn

Skilgreining: Náttúrlegi logrinn

Látum A_{x_0} tákna flatarmál svæðisins sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = \frac{1}{x}$ og línunum $x = 1$ og $x = x_0$. Þá skilgreinum við *náttúrlega logrann* með formúlunni

$$\ln x = \begin{cases} A_x & \text{ef } x \geq 1, \\ -A_x & \text{ef } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Setning

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Setning

Fyrir allar tölur $x, y > 0$ gildir að:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\ln(1/x) = -\ln x$
4. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
5. $\ln(x^r) = r\ln x$.

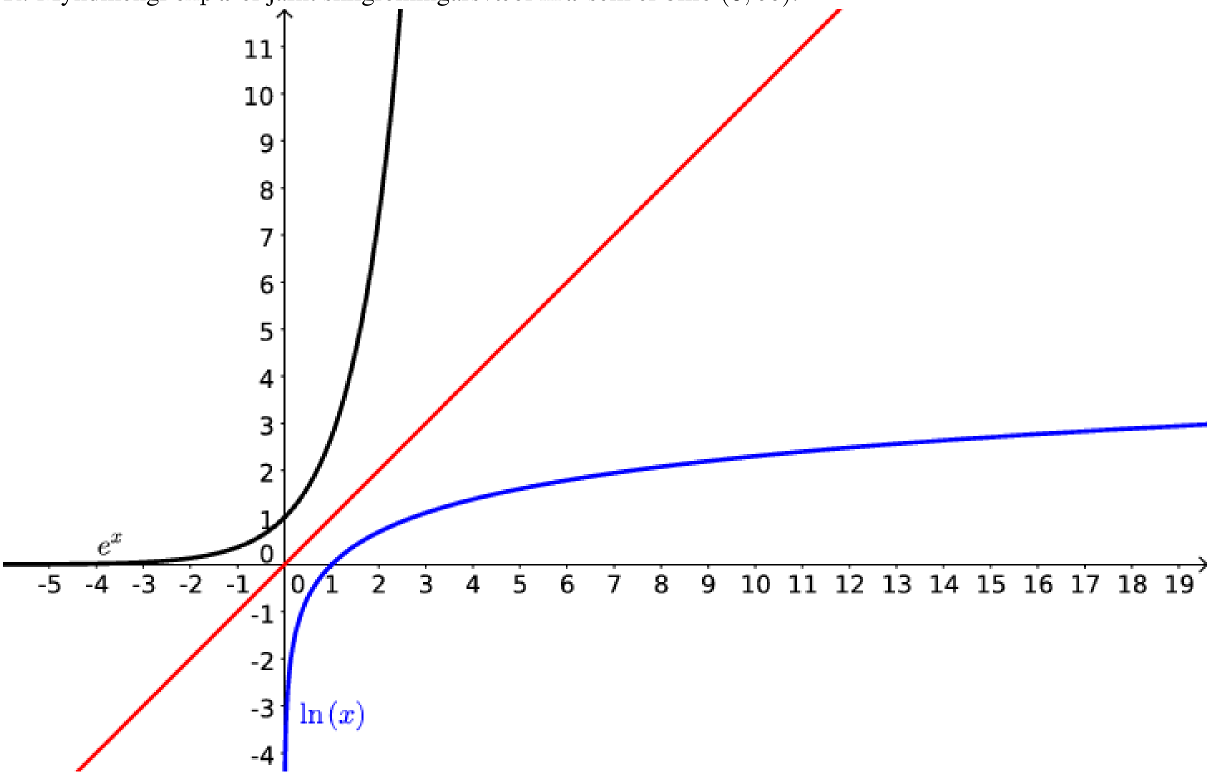
0.4.2 Veldisvísisfallið

Setning

Fallið $\ln x$ er strangt vaxandi og þar með eintækt.

Skilgreining: Veldisvísisfallið

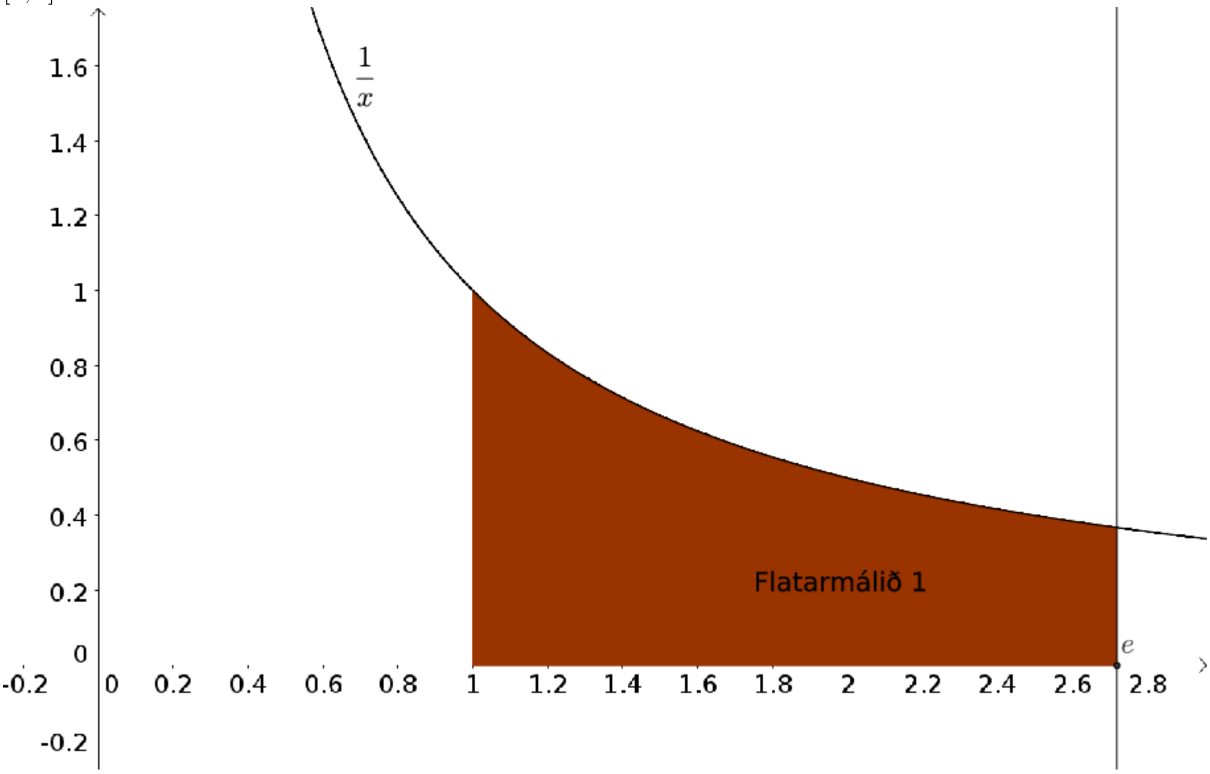
Fallið $\exp x$ er skilgreint sem andhverfa fallsins $\ln x$. Skilgreiningarsvæði $\exp x$ er jafnt myndmengi $\ln x$ sem er $\mathbb{R}$. Myndmengi $\exp x$ er jafnt skilgreiningarsvæði $\ln x$ sem er bilið $(0, \infty)$.



Skilgreining: Talan e

Skilgreinum töluna með $e = \exp 1$.

Það þýðir að $\ln(e) = 1$, og talan e ákvarðast þess vegna af því að flatarmál svæðisins milli x-ás og grafs $\frac{1}{x}$ á bilinu $[1, e]$ sé 1.



Athugasemd: Hver er munurinn á e^x og $\exp(x)$?

e^x er aðeins skilgreint þegar x er ræð tala, en $\exp(x)$ er skilgreint fyrir allar rauntölur því logrinn, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, er átækur.

Það er hins vegar hægt að sýna að

$$\exp(x) = \lim_{r \to x, r \text{ ræð tala}} e^r.$$

Því er eðlilegt að rita fyrir rauntölu x, hvort sem hún er ræð eða óræð, að $e^x = \exp x$. Þannig að héðan í frá gerum við engan greinarmun á e^x og $\exp x$, við notum bara það sem lítur betur út fagurfræðilega.

Athugasemd: Athugið að

$$e^{\ln x} = x \text{ fyrir allar tölur } x > 0 \qquad \text{og} \qquad \ln(e^x) = x \text{ fyrir allar tölur } x.$$

Eiginleikar veldisvísisfallsins

Út frá eiginleikum lograns fáum við svo eftirfarandi

1. $e^0 = 1$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

5. $(e^x)^y = e^{xy}$

Athugasemd: Hænan eða eggið? Hér höfum við nálgast $\ln$ og $\exp$ þannig að við byrjum á að skilgreina $\ln$ með heildi (flatarmáli) og finnum svo andhverfu lograns, $\exp$.

Einnig væri mögulegt að byrja á því að sýna að e^x sé vel skilgreint, ekki bara fyrir ræð x heldur einnig óræð. Það myndum við gera með því að nota markgildið $\exp(x) = \lim_{r\to x, r \text{ ræð tala}} e^r$ hér að ofan, og taka þá e^x sem skilgreiningu á $\exp x$ og finna svo andhverfuna, $\ln$.

Báðar þessar aðferðir hafa kosti og galla, en við notum þá fyrri vegna þess hvað hún gefur myndræna framsetningu á logranum.

0.4.3 Önnur veldisvísisföll og lograr

Skilgreining

Fyrir tölu $a > 0$ og rauntölu x skilgreinum við

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Skilgreining

Andhverfa fallsins a^x er kölluð *logri með grunntölu* a og táknuð með $\log_a x$. Fallið $\log_a x$ er skilgreint fyrir öll $x > 0$.

Athugasemd

$$y = \log_a(x) \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad x = a^y.$$

Setning

Fyrir rauntölu $a > 0$ og allar rauntölur x, y gildir að:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{x+y} = a^x a^y$
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
5. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
6. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
7. $(ab)^x = a^x b^x$ (hér er forsenda að $b > 0$).

Fyrir rauntölu $a > 0$ og allar rauntölur x, y gildir að:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
5. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a(x^y) = y \log_a x$

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (hér er forsenda að $b > 0$).

0.4.4 Eiginleikar veldisvísisfalla og logra

Setning

1. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
2. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
3. $\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$
4. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{(\ln a)x}$

Setning

Ef $a > 0$ þá er

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$
3. $\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$
4. $\lim_{x\to0^+} x^a \ln(x) = 0$

Athugasemd: Athugið að setningin að ofan gildir óháð því hversu stórt a er ((a) og (c) liður) eða hversu lítið a er ((b) og (d) liður).

Með öðrum orðum: - Þegar veldi og veldisvísisfall kljást, þá vinnur veldisvísisfallið. - Þegar veldi og logri kljást, þá vinnur veldið.

0.4.5 Andhverfur hornafalla

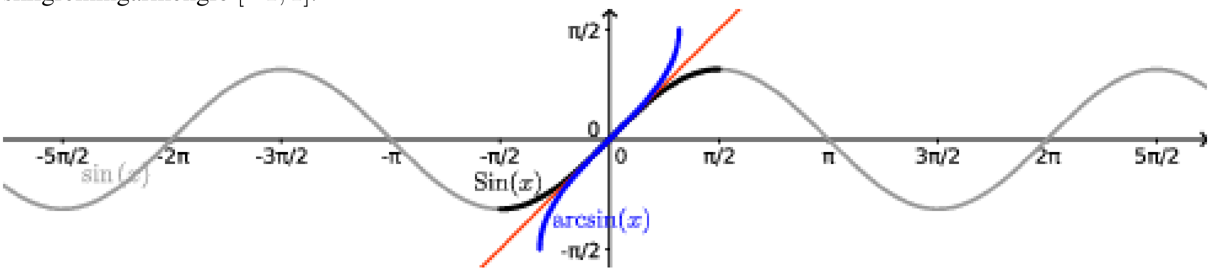
Andhverfa sínussins

Fallið $\sin(x)$ skilgreint á öllum rauntalnaásnum er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við hálfa lotu, þ.e. skoðum bara $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\sin(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með $\text{Sin}(x)$. Sin er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

Skilgreining: $\arcsin$

Andhverfa sínussins, táknuð $\arcsin(x)$ (eða $\sin^{-1}(x)$), er andhverfa Sin og hefur því myndmengið $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og skilgreiningarmengið $[-1, 1]$.



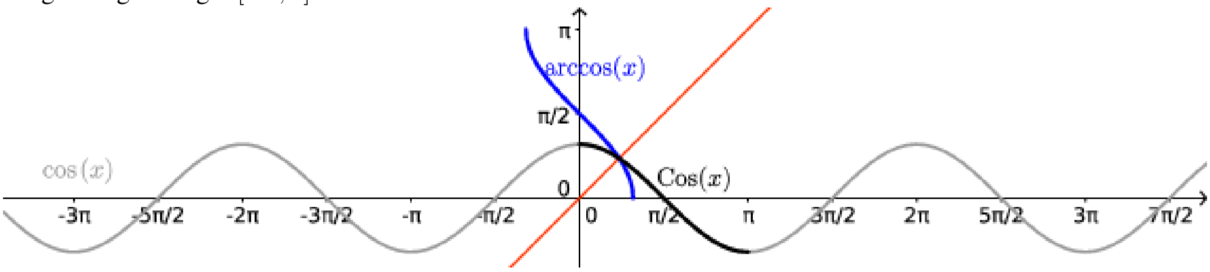
Andhverfa kósínussins

Fallið $\cos(x)$ skilgreint á öllum rauntalnaásnum er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við hálfa lotu, þ.e. skoðum bara $x \in [0, \pi]$. $\cos(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með $\mathrm{Cos}(x)$. Cos er strangt minnkandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

Skilgreining: $\arccos$

Andhverfa kósínussins, táknuð $\arccos(x)$ (eða $\cos^{-1}(x)$), er andhverfa Cos og hefur því myndmengið $[0, \pi]$ og skilgreiningarmengið $[-1, 1]$.



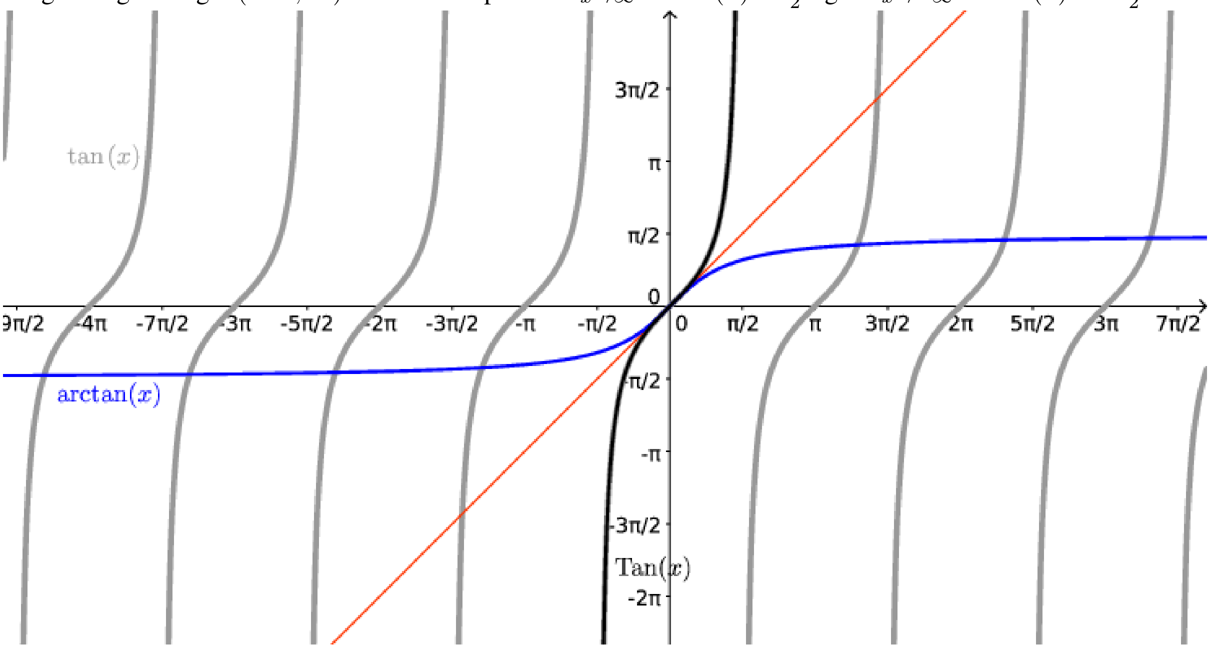
Andhverfa tangens

Fallið $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ skilgreint á $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við eina lotu, þ.e. skoðum bara $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Athugið að hér eru endapunktar bilsins ekki með. $\tan(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með $\mathrm{Tan}(x)$. Tan er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

Skilgreining: $\arctan$

Andhverfa tangensins, táknuð $\arctan(x)$ (eða $\tan^{-1}(x)$), er andhverfa Tan og hefur því myndmengið $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ og skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$. Þar að auki þá er $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ og $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.



Setning

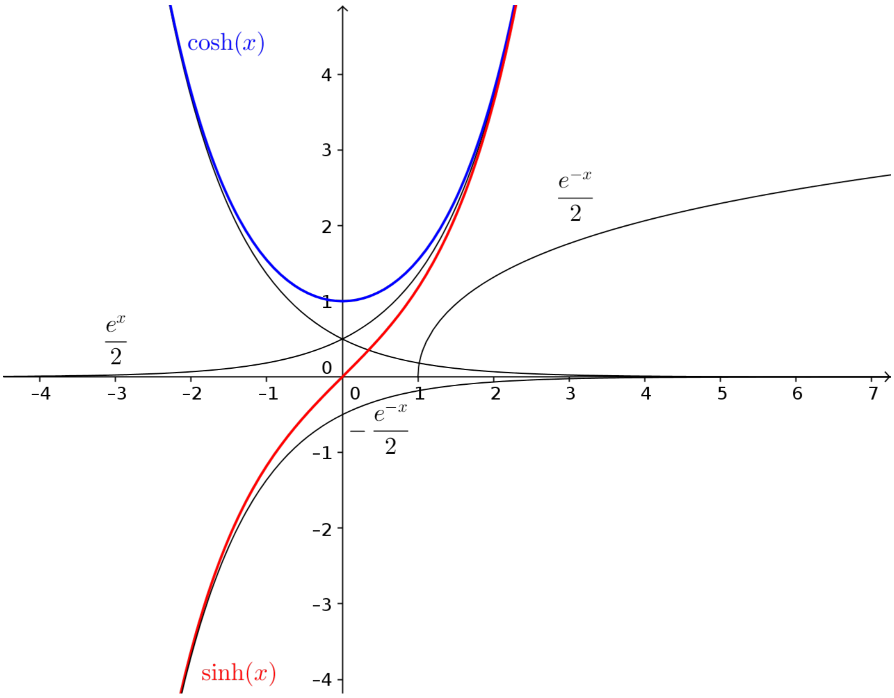
1. $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

0.4.6 Breiðbogaföll

Skilgreining

Við skilgreinum *breiðbogasínus*, sinh, og *breiðbogakósínus*, cosh, með eftirfarandi formúlum

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Setning

1. $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$
2. $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

Setning

1. $\sinh(0) = 0$ og $\cosh(0) = 1$
2. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
3. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
4. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
5. $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

6. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
7. $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1$
8. $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

Skilgreining

Við skilgreinum *breiðbogatangens* með

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Setning

1. $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
2. $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
3. $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$
4. $\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$

0.4.7 Andhverfur breiðbogafalla

Andhverfa breiðbogasínussins og breiðbogatangensins

Af Setningum 10.9 og 10.12 sjáum við að afleiður $\sinh$ og $\tanh$ eru jákvæðar og föllin því stranglega vaxandi. Þau eru þar með eintæk og eiga sér andhverfur.

Skilgreining

Andhverfa breiðbogasínussins, táknuð arsinh(x) (eða $\sinh^{-1}(x)$), er andhverfa $\sinh$ og hefur myndmengið $(-\infty, \infty)$ og skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$. Þar að auki þá er

$$\text{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Andhverfa breiðbogatangensins, táknuð artanh(x) (eða $\tanh^{-1}(x)$), er andhverfa $\tanh$ og hefur myndmengið $(-\infty, \infty)$ og skilgreiningarmengið $(-1, 1)$. Þar að auki þá er

$$\text{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Andhverfa breiðbogakósínussins

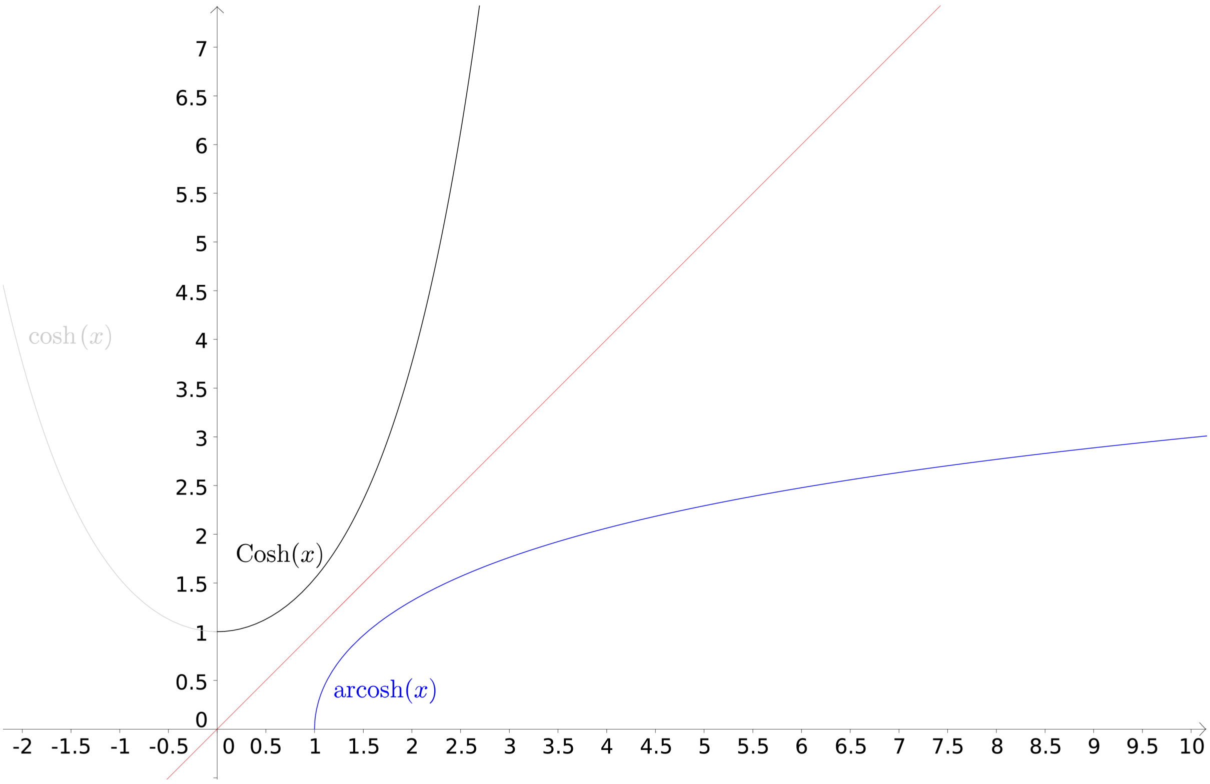
Þar sem $\cosh$ er ekki eintækt fall þá verðum við að beita svipuðum aðferðum eins og þegar við fundum $\arcsin$ til þess að finna andhverfu hans. Það er, við þurfum að takmarka skilgreiningarmengi hans.

Táknum $\cosh(x)$ takmarkað við bilið $[0, \infty)$ með Cosh(x). Fallið Cosh er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og á sér þar með andhverfu.

Skilgreining

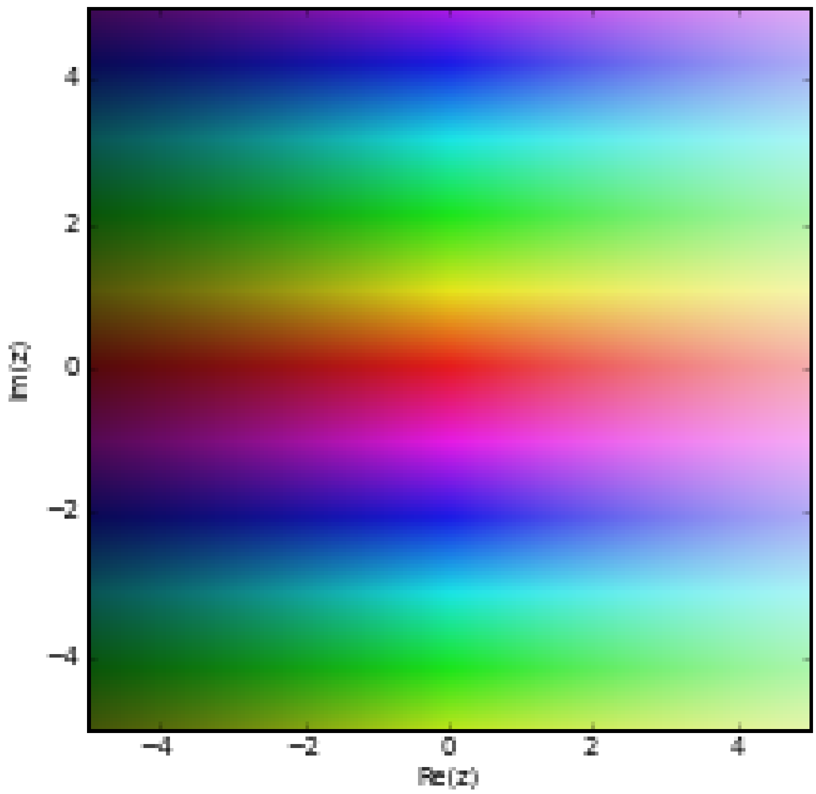
Andhverfa breiðbogakósínussins, táknuð $\operatorname{arcosh}(x)$ (eða $\cosh^{-1}(x)$), er andhverfa Cosh og hefur því myndmengið $[0,\infty)$ og skilgreiningarmengið $[1,\infty)$. Þar að auki þá er

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$



framtíðinni

Við höfum séð að veldisvísisfallið og logrinn tengjast breiðbogaföllunum töluvert og það sama á við um hornaföllin. Seinna, nánar tiltekið í Stærðfræðigreiningu III, þá sjáið þið að hornaföllin og breiðbogaföllin eru bara mismunandi hliðar á veldisvísisfallinu.



0.5 Könnun falla

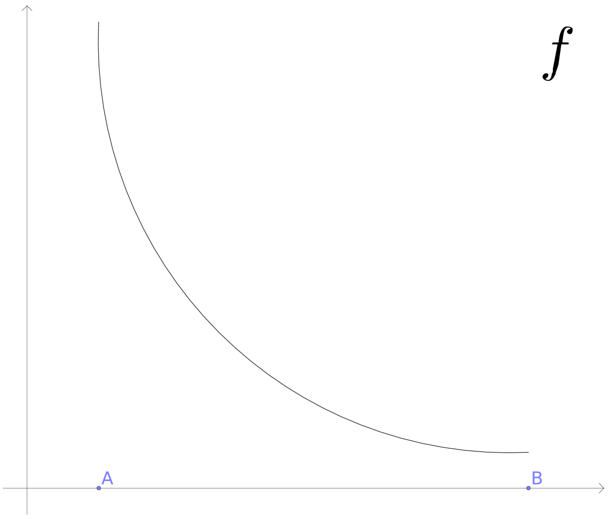
Verkefnalisti

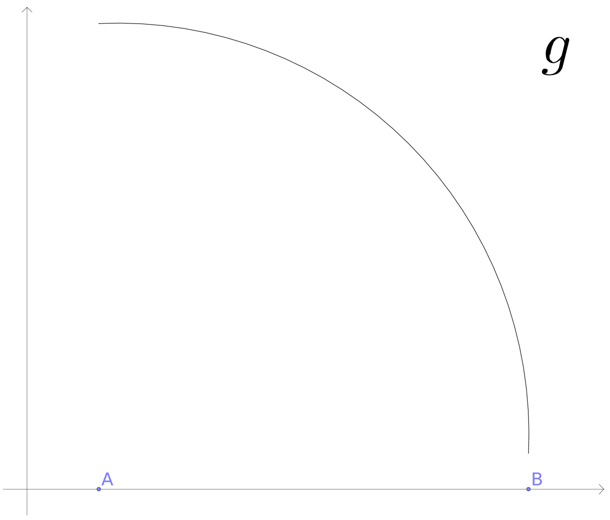
laga myndir, eiga að vera hlið við hlið letrið á þeim of lítið?

0.5.1 Inngangur

Aðvörun: Frávik frá bókinni
Það sem á eftir kemur er eitt af fáum atriðum þar sem mín nálgun og skilgreiningar eru frábrugðnar þeim í bókinni.

Hver er munurinn?



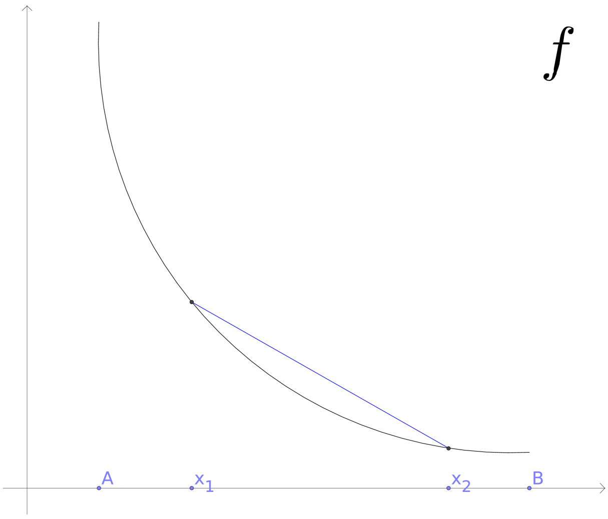


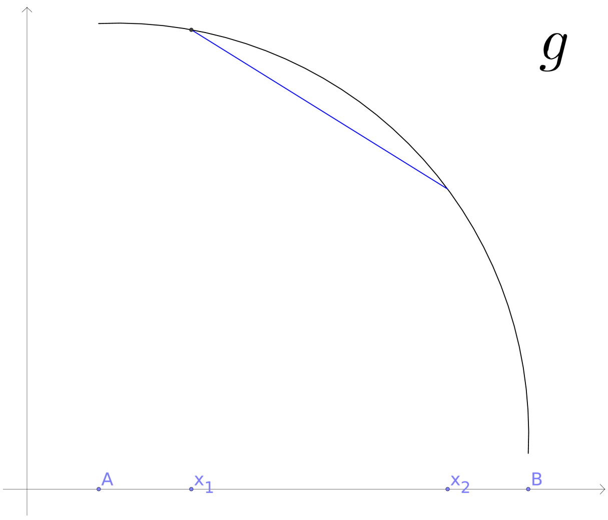
Skoðum föllin tvö að ofan, þau eru augljóslega ekki eins, þannig að spurningin er hvernig getum við lýst því muninum á þeim?

Þau hugtök sem við höfum skoðað hingað til geta ekki greint á milli þessara falla:

1. Þau hafa sama skilgreiningarmengið $[A, B]$
2. Þau taka sömu gildin í endapunktunum
3. Þau hafa bæði hágildi í A og lággildi í B
4. Þau eru bæði minnkandi (neikvæð afleiða)

Drögum sniðil





Ef við veljum nú tvo punkta á $[A, B]$ af handahófi, köllum þá x_1 og x_2, og drögum línu (sniðil) í gegnum punktana á grafum f og g þá sjáum við að sniðillinn lendir fyrir neðan g en ofan f.

Sérhvern punkt á milli x_1 og x_2, getum við skrifað $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in [0, 1]$. Þá er y-hnit punktsins á sniðlinum með þetta x-hnit gefið með

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2), \qquad \alpha \in [0, 1],$$

á fyrri myndinni og

$$\alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2), \qquad \alpha \in [0, 1],$$

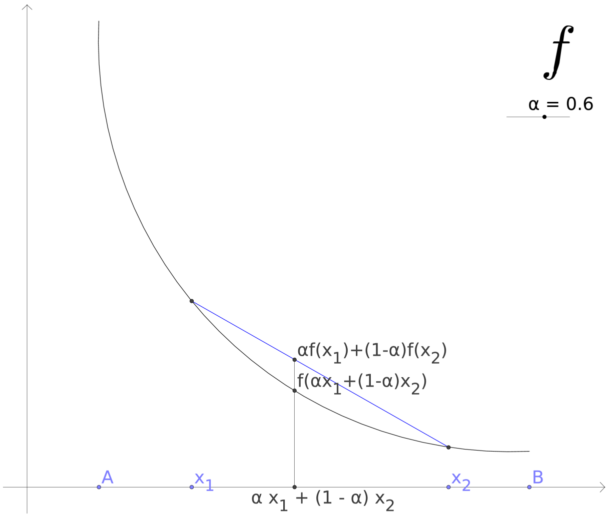
á myndinni fyrir g.

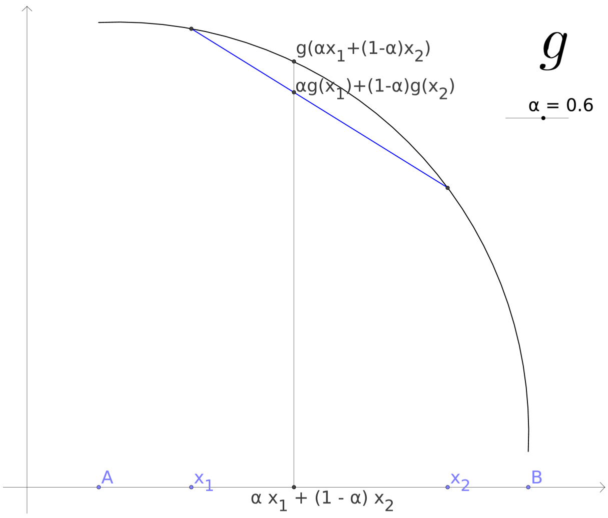
Ef f liggur fyrir neðan sniðilinn þá þýðir það að fallgildi f í punktunum $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ liggur fyrir neðan punktinum á sniðlinum, það er

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Eins, ef g liggur fyrir ofan sniðilinn þá gildir að

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2).$$





0.5.2 Kúpni

Skilgreining

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera fall.

1. Segjum að fallið f sé *kúpt* (e. convex, concave up) ef um alla punkta $x_1, x_2 \in [a, b]$ og sérhverja tölu $0 \leq \alpha \leq 1$ gildir að

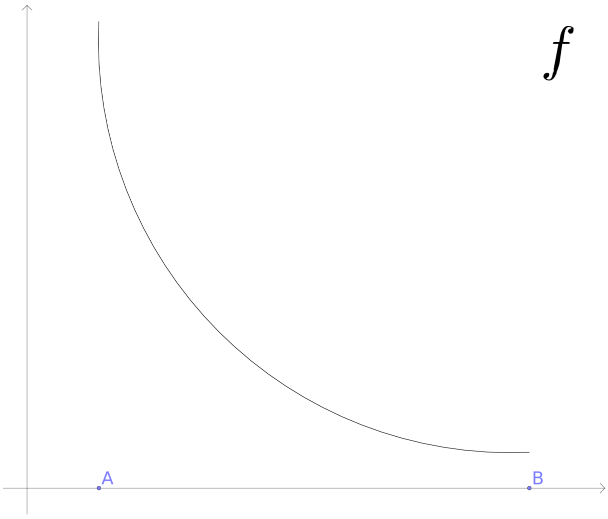
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

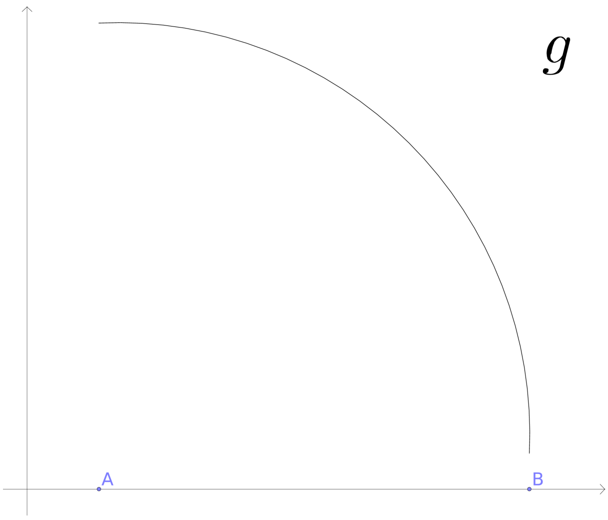
2. Segjum að fallið f sé *hvelft* (e. concave, concave down) ef um alla punkta $x_1, x_2 \in [a, b]$ og sérhverja tölu $0 \leq \alpha \leq 1$ gildir að

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Athugasemd: Hér erum við komin með hugtak sem getur útskýrt muninn á myndunum í byrjun kaflans, f er kúpt og g er hvelft.

0.5.3 Auðkenning á kúpni með afleiðum





Athugasemd

Ef við skoðum afleiður fallanna f og g betur þá sjáum við að:

1. Afleiða f er mjög neikvæð nálægt A og nálgast svo 0 í B, það er afleiðan er vaxandi.
2. Afleiða g er u.þ.b. 0 í A og minnkar svo þegar við nálgumst B, það er afleiðan er minnkandi.

Með öðrum orðum

$$(f')' = f'' \geq 0 \qquad \text{og} \qquad (g')' = g'' \leq 0.$$

Setning

Fyrir tvídiffranlegt fall f þá er eftirfarandi jafngilt

1. f er kúpt
2. f' er vaxandi
3. $f'' \geq 0$

Setning

Fyrir tvídiffranlegt fall g þá er eftirfarandi jafngilt

1. g er hvelft
2. g' er minnkandi
3. $g'' \leq 0$

Aðvörun: Hvort fall er kúpt eða hvelft er **algjörlega óháð** því hvort það er vaxandi eða minnkandi. Til dæmis er $f(x) = x^2$ kúpt en það er vaxandi þegar $x > 0$ og minnkandi þegar $x < 0$.

Aðvörun: Fall þarf eru ekki alltaf annað hvort kúpt eða hvelft alls staðar. Alveg eins og það eru til föll sem eru sums staðar vaxandi og sums staðar minnkandi, þá eru mörg föll sums staðar kúpt og sums staðar hveld, til dæmis hornaföllin.

0.5.4 Beygjuskilapunktar

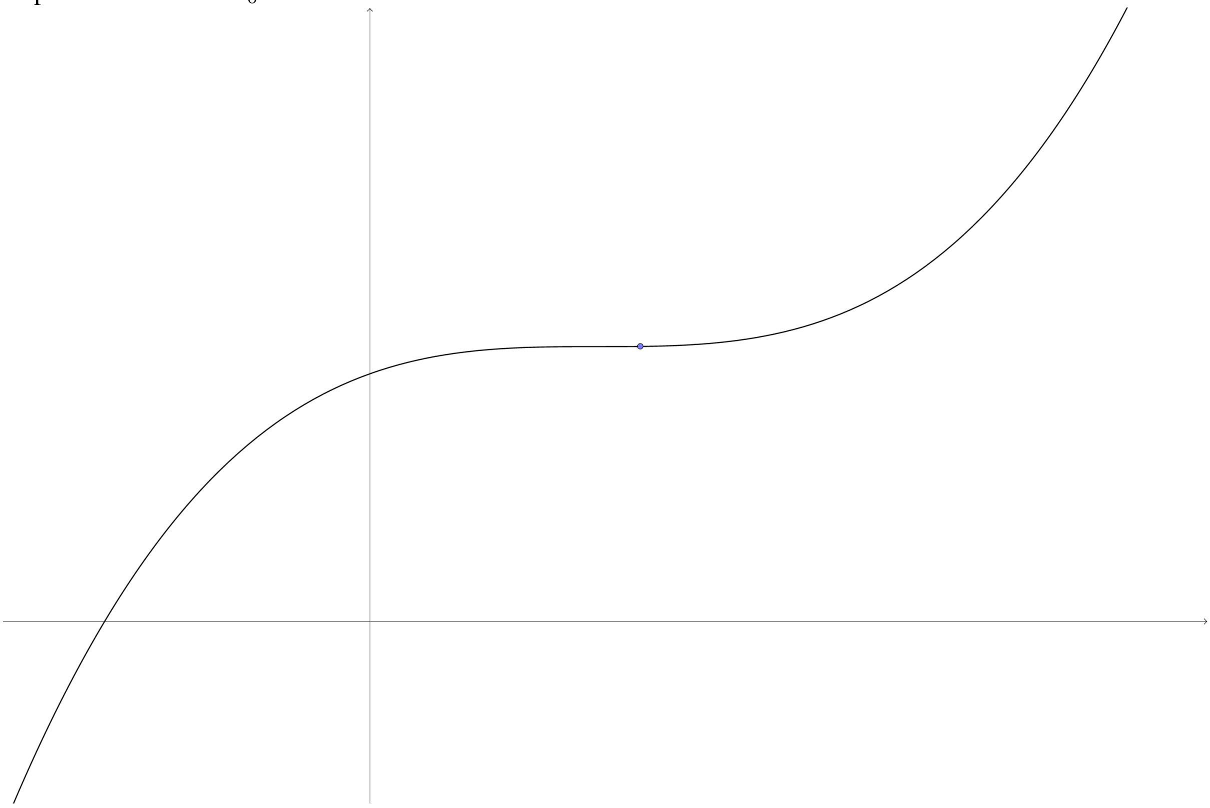
Skilgreining

Punktur $(x_0, f(x_0))$ er sagður vera *beygjuskilapunktur* (e. inflection point) grafsins $y = f(x)$ ef

1. grafið hefur snertilínu í x_0, og
2. grafið er kúpt öðru megin við x_0 og hvelft hinum megin við x_0.

Setning

Ef fallið f er tvídiffranlegt þá er punkturinn x_0 beygjuskilapunktur fallsins f ef og aðeins ef $f''(x_0) = 0$ og f'' skiptir um formerki í x_0.



0.5.5 Útgildi

Hvar á að leita útgilda

Sjá kafla 3 fyrir skilgreinginu á útgildi. .. todo:: Búa til tilvísun milli kafla Punktar sem koma til greina fyrir staðbundin útgildi falls f eru

1. punktar x_0 þar sem $f'(x_0) = 0$,
2. punktar x_0 þar sem $f'(x_0)$ er ekki skilgreint,
3. þeir endapunktar skilgreiningarmengisins þar sem fallið er skilgreint.

Hágildi/lágildi út frá formerki afleiðu

Látum x_0 vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f. Gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í öllum punktum í einhverju bili utan um x_0 og að $f'(x_0) = 0$.

1. Ef formerki f' breytist úr plús í mínus í x_0 (farið frá vinstri til hægri eftir rauntalnaásnum) þá er staðbundið hágildi í x_0.
2. Ef formerki f' breytist úr mínus í plús í x_0 þá er staðbundið lággildi í x_0.
3. Ef formerki f' breytist ekki í x_0 þá er hvorki há- né lággildi í x_0.

Útgildi og önnur afleiðan

1. Ef $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$ þá er x_0 staðbundið hágildi.
2. Ef $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$ þá er x_0 staðbundið lággildi.

Aðvörun: Athugið að ef $f''(x_0) = 0$ þá getur x_0 verið hvort sem er staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða beygjuskilapunktur.

0.5.6 Aðfellur

Skilgreining: Lóðrétt aðfella

Fallið f hefur *lóðrétta aðfellu* í punktinum a ef $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ og/eða $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Aðfellan er þá línan $x = a$.

Skilgreining: Lárétt aðfella

Fallið f hefur *lárétta aðfellu* ef $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ og/eða $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Aðfellan er þá línan $y = L$.

Skáfella

Fallið f hefur *skáfellu* ef til eru a og b þannig að $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$ og/eða $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax - b = 0$.

Skáfellan er þá línan $y = ax + b$.

Verkefnalisti

myndir

0.5.7 Að teikna graf falls

Verkefnalisti

þýða og staðfæra

Checklist for curve sketching

1. Calculate $f'(x)$ and $f''(x)$, and express the results in factored form.
2. Examine $f(x)$ to determine its domain and the following items:
   (a) Any vertical asymptotes. (Look for zeros of denominators.)
   (b) Any horizontal or oblique asymptotes. (Consider $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.)
   (c) Any obvious symmetry. (Is f even or odd?)
   (d) Any easily calculated intercepts (points with coordinates $(x, 0)$ or $(0, y)$) or endpoints or other "obvious" points. You will add to this list when you know any critical points, singular points, and inflection points. Eventually you should make sure you know the coordinates of at least one point on every component of the graph.
3. Examine $f'(x)$ for the following:
   (a) Any critical points.
   (b) Any points where f' is not defined. (These will include singular points, endpoints of the domain of f, and vertical asymptotes.)
   (c) Intervals on which f' is positive or negative. It's a good idea to convey this information in the form of a chart such as those used in the examples. Conclusions about where f is increasing and decreasing and classification of some critical and singular points as local maxima and minima can also be indicated on the chart.
4. Examine $f''(x)$ for the following:
   (a) Points where $f''(x) = 0$.
   (b) Points where $f''(x)$ is undefined. (These will include singular points, endpoints, vertical asymptotes, and possibly other points as well, where f' is defined but f'' isn't.)
   (c) Intervals where f'' is positive or negative and where f is therefore concave up or down. Use a chart.
   (d) Any inflection points.

0.5.8 Útgildisverkefni

Markmiðið

Þessi verkefni sem við skoðum snúast um það að finna fall fyrir stærð sem við höfum áhuga á (verð, rúmmál, lengd,...) og hámarka/lágmarka hana.

Til þess að þetta sé mögulegt má fallið bara vera háð einni breytu og það þarf helst að vera diffranlegt.

Þá getum við fundið útgildi með þeim aðferðum sem við erum búin að koma okkur upp.

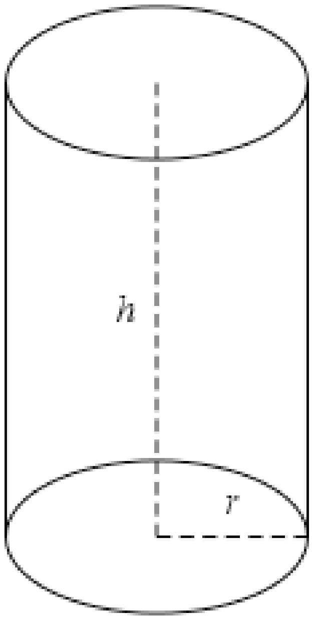
Að leysa útgildisvandamál

Sjá einnig bls. 259 (238 í 6. útgáfu) í kennslubók.

1. Lesið vandamálið vandlega og áttið ykkur á því hvert það er og hvað á að finna.
2. Teiknið mynd ef mögulegt er, hún gefur oft upplýsingar um skorður sem hjálpa okkur við að útbúa fallið.
3. Skilgreinið aukabreytur.
4. Skilgreinið fallið, sem fall af einni eða fleiri breytum.
5. Finnið skorður (jöfnur) sem hægt er að stinga inn í fallið
6. Skrifið fallið sem fall af einni breytu.
7. Finnið útgildi
8. Dragið ályktanir af niðurstöðunni, og athugið hvort hún sé raunhæf miðað við verkefnið (rúmmál á ekki að vera neikvætt og þess háttar).

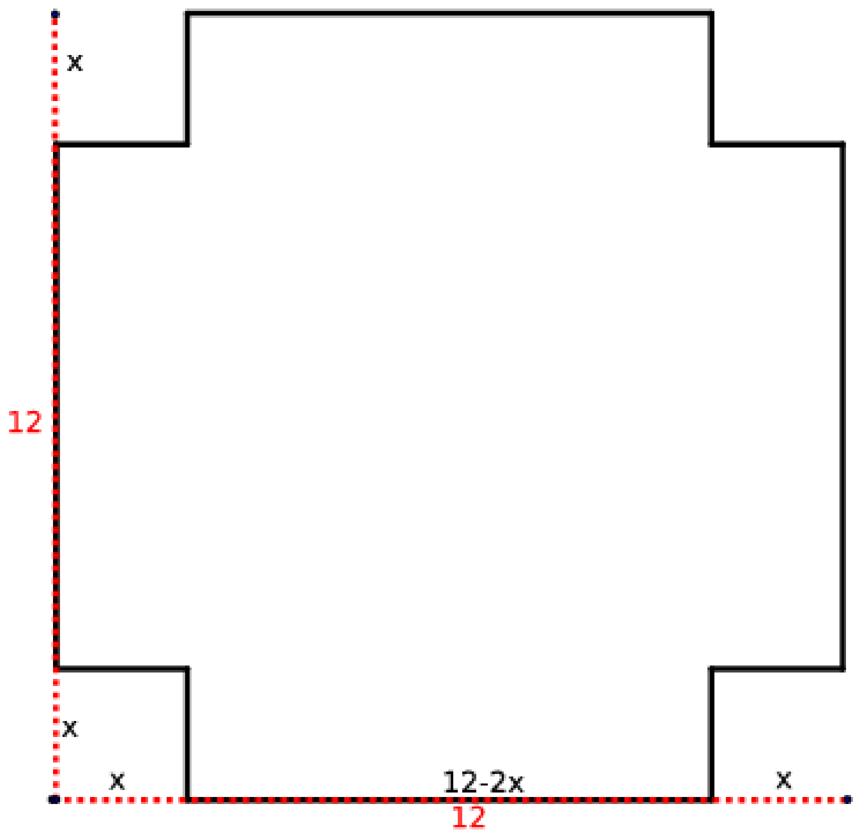
Dæmi: Gosdós

Hvert er hagkvæmasta formið á sívalningslaga gosdós?



Dæmi: Kassi

Hver er stærsti (mesta rúmmálið) loklausi kassinn sem hægt er búa til úr örk sem er 12×12?



0.6 Heildun

0.6.1 Heildun

Skilgreining: Heildi jákvæðs falls

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera fall þannig að $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$.

Þegar heildið $\int_a^b f(x)\,dx$ er skilgreint er útkoman úr því flatarmál svæðisins sem liggur á milli x-ás og grafs fallsins (og afmarkast til vinstri af línunni $x = a$ og til hægri af línunni $x = b$).

Ef heildið $\int_a^b f(x)\,dx$ er skilgreint þá segjum við að fallið f sé *heildanlegt* yfir bilið $[a, b]$.

Tölurnar a og b kallast *heildismörk* heildisins.

Skilgreining

Látum f vera fall. Skilgreinum föllin f_+ og f_-, sem bæði hafa sama skilgreiningarsvæði og f, með

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ef } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{ef } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{ef } f(x) < 0. \end{cases}$$

Athugið að $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

Verkefnalisti

mynd

Skilgreining: Heildi falls

Takmarkað fall f er *heildanlegt* yfir bilið $[a, b]$ ef bæði föllin f_+ og f_- eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$. Ef fallið f er heildanlegt þá skilgreinum við heildi þess með formúlunni

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx.$$

Athugasemd: Flatarmálið sem er undir x-ás reiknast neikvætt.

Setning

1. Ef fallið f er samfellt á bilinu $[a, b]$ þá er f heildanlegt yfir bilið $[a, b]$.
2. Einhalla fall skilgreint á bili $[a, b]$ er heildanlegt.

Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Þá er

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

0.6.2 Eiginleikar heildisins

Skilgreining: Heildismörkunum snúið við

Ef fallið f er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$ (hér er $a < b$) þá skilgreinum við

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Setning

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
   (Hér er náttúrlega forsenda að öll heildin séu skilgreind.)

Setning

Látum f og g vera föll sem eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$ og látum A og B vera fasta. Þá er

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

Með öðrum orðum, heildun er línuleg aðgerð.

Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $f(x) \geq 0$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Fylgisetning

1. Látum f og g vera föll sem eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $f(x) \leq g(x)$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Ef m og M eru fastar þannig að um öll $x \in [a, b]$ gildir að $m \leq f(x) \leq M$ þá er

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bil $[-a, a]$.

1. Ef fallið f er oddstætt þá er

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Ef fallið f er jafnstætt þá er

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Skilgreining

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. *Meðalgildi* fallsins f á bilinu $[a, b]$ er skilgreint sem

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Setning (Milligildissetning fyrir heildi)

Gerum ráð fyrir að fallið f sé **samfellt** á bilinu $[a, b]$. Þá er til punktur c í bilinu $[a, b]$ þannig að

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Það er að segja, til er punktur c í bilinu $[a, b]$ þannig að $f(c) = \bar{f}$.

0.6.3 Undir- og yfirsummur

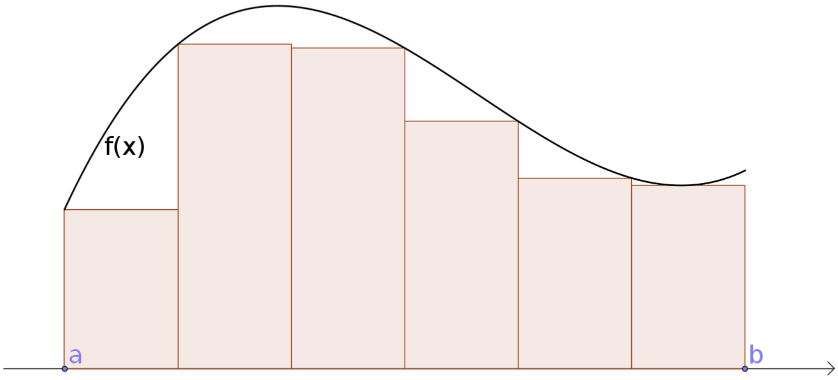
Dæmi: Að finna heildi

Hvernig getum við fundið flatarmálið $\int_a^b f(x)\,dx$?

Svar Við þurfum að nálga flatarmálið með formum sem hafa þekkt flatarmál, til dæmis rétthyrningum.

Skilgreining: Undirsumma

Skiptum bilinu $[a, b]$ í n parta. Á hverjum parti komum við fyrir rétthyrning sem liggur undir grafi fallsins, þ.e. hæðin á honum er lággildi fallsins á þessum tiltekna parti.



Látum u_k vera flatarmál rétthyrninganna, þar sem $k = 1, \ldots, n$.

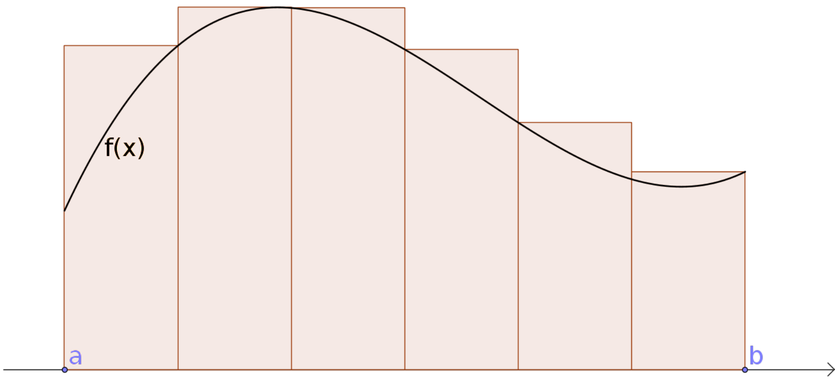
Við köllum flatarmál allra rétthyrninganna *undirsummu* fyrir heildið og táknum hana með $U(n)$, það er $U(n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Þá er augljóslega $U(n) \leq \int_a^b f(x)\, dx$.

Þegar n stækkar þá fáum við betri og betri nálgun á heildinu.

Skilgreining; Yfirsumma

Skiptum bilinu $[a, b]$ í n parta. Á hverjum parti komum við fyrir rétthyrning sem er þannig að hæðin á honum er hágildi fallsins á þessum tiltekna parti.



Táknum flatarmál hans með y_k, þar sem $k = 1, \ldots, n$. Við köllum summu flatarmáls allra rétthyrninganna *yfirsummu* fyrir heildið og táknum hana með $Y(n)$, það er $Y(n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Þá fæst að $\int_a^b f(x)\, dx \leq Y(n)$.

Þegar n stækkar þá fáum við betri og betri nálgun á heildinu.

Setning

Ef til er **nákvæmlega ein** tala I þannig að

$$U(n) \leq I \leq Y(n),$$

fyrir allar undirsummur $U(n)$ og yfirsummur $Y(n)$ þá er fallið f heildanlegt á $[a, b]$ og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Athugasemd: Við sögðum ekkert um það hvernig við skiptum bilinu $[a, b]$ í n parta. Það má gera hvernig sem er, það er ekki nauðsynlegt að þeir séu allir jafn stórir.

Athugasemd: Við erum ekki bundin af því að skoða rétthyrninga sem með hæð sem er há/lággildi fallsins á hverjum parti, t.d. má taka miðgildið á hverjum parti, gildið í hægri endapunkti eða gildið í vinstri endapunkti.

Niðurstaðan þegar $n \to \infty$ verður hins vegar alltaf sú sama, þ.e. við nálgumst heildið.

Athugasemd: Einnig er mögulegt að nálga heildið með öðrum formum en rétthyrningum, t.d.trapisum (sjá kafla 6.6), og hentar það hugsanlega betur í tölulegum útreikningum.

0.6.4 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

Skilgreining og setning: Fall skilgreint með heildi

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bil $[a, b]$. Fyrir $x \in [a, b]$ skilgreinum við $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Fallið F er samfellt á $[a, b]$.

Aðvörun: Athugið að t er breytan sem er heildað með tilliti til, en x er haldið föstu á meðan. t hverfur svo þegar búið er að reikna heildið.

Setning: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningar, fyrri hluti

Gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt á bili I og a sé punktur í I. Fyrir x í I skilgreinum við $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Þá er fallið F diffranlegt og

$$F'(x) = f(x)$$

fyrir öll $x \in I$.

0.6.5 Stofnföll

Skilgreining

Látum f vera fall sem er skilgreint á bili I. Fall G kallast *stofnfall* (e. antiderivative) fyrir f á bilinu I ef $G'(x) = f(x)$ fyrir öll x í I.

Fylgisetning

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili I. Þá er til stofnfall fyrir f samkvæmt Setningu 15.10.

Verkefnalisti

laga ref

Hjálparsetning

Ef F og G eru hvor tveggja stofnföll fyrir f á bilinu I, þá er til fasti C þannig að $F(x) = G(x) + C$ fyrir öll x í I.

Sönnun: Þar sem

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

fyrir öll $x \in I$ þá er $G(x) - F(x) = C$ fasti.

Setning: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningar, seinni hluti

Ef f er samfellt fall á bilinu I og G er eitthvert stofnfall fyrir f þá er

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

Athugasemd: Það skiptir ekki máli hvaða stofnfall er valið í setningunni að ofan, heildið er alltaf það sama.

Ritháttur

Þegar F er stofnfall fyrir f þá ritum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

eða

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

0.6.6 Aðferðir við að reikna stofnföll

Verkfærin

Helstu tæknilegu aðferðirnar við að finna stofnföll eru:

1. Innsetning – Breytuskipti
2. Hlutheildun
3. Stofnbrotaliðun

Athugasemd

Gerum ráð fyrir að F sé stofnfall f, þ.e.

$$F(x) = \int f(t)\,dt.$$

Svo að

$$F'(x) = f(x).$$

Látum nú g vera fall og skoðum fallið $F \circ g$. Þá fæst samkvæmt keðjureglunni að

Verkefnalisti

ref í keðjur.

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

eða, með því að heilda beggja vegna jafnaðarmerkisins,

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Innsetning

Ef við viljum reikna $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ þá dugar okkur að geta fundið $\int f(x)\,dx$.

Notkun á innsetningu

Setjum $u = g(x)$. Þá er

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \qquad \text{eða} \qquad du = g'(x)\,dx.$$

Svo

$$\underbrace{\int f(g(x))g'(x)\,dx}_{\text{Viljum finna}} = \int f(u)\,du \underbrace{=}_{\text{Getum reiknað}} F(u) + C = \underbrace{F(g(x)) + C}_{\text{Svarið}}.$$

Aðvörun: Ef við breytum heildi með tilliti til x í heildi með tilliti til annarar breytistærðar u þá verða **öll** x að hverfa úr heildinu við breytinguna.

Notkun á innsetningu með mörkum

Með mörkum þá verður innsetningin svona

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du = [F(u)]_{x=a}^{x=b} \\ &= [F(g(x))]_{x=a}^{x=b} = F(g(b)) - F(g(a)).\end{aligned}$$

Ef $A = g(a)$ og $B = g(b)$ þá getum við eins skrifað þetta svona

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du = \int_A^B f(u)\,du \\ &= [F(u)]_A^B = F(B) - F(A).\end{aligned}$$

Öfug innsetning

Reiknum $\int f(x)\,dx$, með því að finna hugsanlega flóknara heildi sem við getum reiknað

$$\int f(g(u))g'(u)\,du.$$

Aðvörun: Athugið að hér þurfum við að finna heppilegt g. Það er ekki alltaf augljóst hvaða g er hægt að nota.

Notkun á öfugri innsetningu

Setjum $x = g(u)$. Þá er

$$\frac{dx}{du} = g'(u) \qquad dx = g'(u)\,du.$$

Sem gefur að

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{Viljum finna}} = \int f(g(u))g'(u)\,du \underbrace{=}_{\text{Getum reiknað}} F(u) + C = \underbrace{F(g^{-1}(x)) + C}_{\text{Svarið}}.$$

Öfug innsetning með mörkum

Við öfuga innsetningu þarf að passa að breyta mörkunum. Það er

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = & \int_{x=a}^{x=b} f(g(u))g'(u)\,du \\ = & \; [F(u)]_{x=a}^{x=b} = [F(g^{-1}(x))]_a^b = F(g^{-1}(b)) - F(g^{-1}(a)).\end{aligned}$$

Eða ef $a = g(A)$ og $b = g(B)$ (það er $g^{-1}(a) = A$ og $g^{-1}(b) = B$),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(g(u))g'(u)\,du = [F(u)]_A^B = F(B) - F(A).$$

Hlutheildun

Munum að ef u og v eru föll þá er $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Notum Undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar og heildum beggja vegna jafnaðarmerkisins, þá fæst

$$u(x)v(x) = \int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Það er

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Hlutheildun með mörkum

Eða með mörkum

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

(Athugið að þá verða engin x í svarinu.)

Stofnbrotaliðun

Viljum heilda rætt fall $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þar sem $P(x)$ og $Q(x)$ eru margliður. Stofnbrotaliðun (e. *partial fraction decomposition*) gengur út á það að skrifa ræða fallið $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sem summu af liðum á forminu

$$\frac{1}{ax+b}, \quad \frac{x}{x^2+bx+c} \quad \text{og} \quad \frac{1}{x^2+bx+c},$$

því svona liði getum við heildað hvern fyrir sig.

Nánar er fjallað um stofnbrotaliðun í kafla 6.2.

Verkefnalisti

ath tilvísun

0.6.7 Óeiginleg heildi

Skilgreining: Óeiginleg heildi I

Látum f vera samfellt fall á bilinu $[a, \infty)$. Skilgreinum

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Fyrir fall f sem er samfellt á bili $(-\infty, b]$ skilgreinum við

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx.$$

Heildi eins og þau hér að ofan kallast *óeiginleg heildi af gerð*.

Í báðum tilvikum segjum við að óeiginlega heildið sé samleitið ef markgildið er til, en ósamleitið ef markgildið er ekki til.

Setning

Heildið $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ er samleitið ef $p > 1$ en ósamleitið ef $p \leq 1$.

Ef $p > 1$ þá er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}.$$

Skilgreining: Óeiginleg heildi I, framhald

Látum f vera fall sem er samfellt á öllum rauntalnaásnum.

Heildi af gerðinni $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ er sagt samleitið ef bæði heildin $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ og $\int_0^\infty f(x)\,dx$ eru samleitin og þá er

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Athugasemd: Það skiptir ekki máli í hvaða punkti heildinu er skipt í tvennt, það má velja aðra tölu heldur en 0, útkoman verður alltaf sú sama.

Skilgreining: Óeiginleg heildi II

Látum f vera samfellt fall á bilinu $(a, b]$ og hugsanlega ótakmarkað í grennd við a. Skilgreinum

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Fyrir fall f sem er samfellt á bili $[a,b)$ og hugsanlega ótakmarkað í grennd við b þá skilgreinum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

Heildi eins og þau hér að ofan kallast *óeiginleg heildi af gerð* II.

Í báðum tilvikum segjum við að óeiginlega heildið sé samleitið ef markgildið er til en ósamleitið ef markgildið er ekki til.

Setning

Heildið $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ er samleitið ef $p<1$ en ósamleitið ef $p\geq 1$. Ef $p<1$ þá er

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}.$$

Skilgreining

Látum f vera samfellt fall á bili (a,∞) og ótakmarkað í grennd við a. Látum c vera einhverja tölu þannig að $a<c<\infty$.

Heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er sagt vera samleitið ef bæði heildin $\int_a^c f(x)\,dx$ og $\int_c^\infty f(x)\,dx$ eru samleitin og þá er

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

Athugasemd: Það er sama hvað tala c er valin hér að ofan, útkoman verður alltaf sú sama.

Verkefnalisti

mynd

Setning

Látum $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á (a,b) og að um öll $x\in(a,b)$ gildi að $0\leq f(x)\leq g(x)$.

1. Ef heildið $\int_a^b g(x)\,dx$ er samleitið þá er heildið $\int_a^b f(x)\,dx$ líka samleitið og

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Ef heildið $\int_a^b f(x)\,dx$ er ósamleitið þá er heildið $\int_a^b g(x)\,dx$ líka ósamleitið.

0.7 Rúmmál, massi og massamiðja

Verkefnalisti

myndir/geogebra

0.7.1 Rúmmál, lengd og flatarmál

Rúmmál rúmskika

Rúmskiki D liggur á milli plananna $x = a$ og $x = b$. Táknum með $A(x)$ flatarmál þversniðs D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás. Ef fallið $A(x)$ er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$ þá er rúmmál D jafnt

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Rúmmál keilu

Látum F vera takmarkaðan samanhangandi bút af plani og látum T vera punkt sem liggur ekki í planinu. Látum A tákna flatarmál F og h tákna fjarlægð topppunktsins frá planinu sem grunnflöturinn liggur í. *Keila* með grunnflöt F og topppunkt T er rúmskiki sem afmarkast af grunnfletinum F og öllum strikum sem liggja frá punktum á jaðri F til T. Rúmmál keilunnar er

$$V = \frac{1}{3}hA = \frac{1}{3}(\text{hæð})(\text{flatarmál grunnflatar}).$$

Formúlan gildir óháð lögun grunnflatar.

Rúmmál snúðs, snúið um x-ás

Látum f vera samfellt fall á bili $[a, b]$. Rúmskikinn sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$ er snúið 360° um x-ás hefur rúmmálið

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Rúmmál snúðs með gati

Látum f og g vera tvö samfelld föll skilgreind á bilinu $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Þegar svæðinu milli grafa f og g er snúið 360° um x-ás fæst rúmskiki sem hefur rúmmálið

$$V = \pi \int_a^b g(x)^2 - f(x)^2\,dx.$$

Rúmmál snúðs, snúið um y-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$, með $a < b$. Gerum ráð fyrir að $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Rúmmál rúmskikans sem fæst með að snúa svæðinu sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$ um 360° um y-ás er

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Lengd grafs

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Lengd grafsins $y = f(x)$ milli $x = a$ og $x = b$ er skilgreind sem

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Yfirborðsflatarmál snúðs, snúið um x-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Grafinu $y = f(x)$ er snúið $360°$ um x-ás og myndast við það flötur. Flatarmál flatarins er gefið með formúlunni

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Yfirborðsflatarmál snúðs, snúið um y-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Grafinu $y = f(x)$ er snúið $360°$ um y-ás og myndast við það flötur. Flatarmál flatarins er gefið með formúlunni

$$S = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

0.7.2 Massi

Massi vírs

Vír liggur eftir ferli $y = f(x)$ þar sem $a \le x \le b$. Efnisþéttleiki í punkti $(x, f(x))$ er gefinn sem $\delta(x)$. *Massafrymi* vírsins (massi örbúts af lengd ds) er

$$dm = \delta(x)\, ds = \delta(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

og massi alls vírsins er

$$m = \int_a^b \delta(x)\, ds = \int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Massi plötu

Plata afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$. Á línu sem er hornrétt á x-ás og sker x-ásinn í x er efnisþéttleikinn fastur og gefinn með $\delta(x)$.

Flatarmál örsneiðar milli lína hornréttra á x-ás sem skera ásinn í x og $x + dx$ er $dA = f(x)\, dx$.

Massafrymi fyrir plötuna (massi örsneiðarinnar) er

$$dm = \delta(x)dA = \delta(x)f(x)\, dx,$$

og massi allrar plötunnar er

$$m = \int_a^b \delta(x)f(x)\, dx.$$

Massi rúmskika

Rúmskiki D liggur á milli plananna $x = a$ og $x = b$. Táknum með $A(x)$ flatarmál þversniðs D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás. Gerum ráð fyrir að efnisþéttleikinn sé fastur á hverju þversniði, og að á þversniði D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás sé efnisþéttleikinn gefinn með $\delta(x)$.

Rúmmálsfrymi (rúmmál örsneiðar úr D sem liggur á milli tveggja plana sem eru hornrétt á x-ásinn og skera x-ásinn í x og $x + dx$) er $dV = A(x)\,dx$.

Massafrymi (massi örsneiðarinnar) er

$$dm = \delta(x)\,dV = \delta(x)A(x)\,dx,$$

og massi rúmskikans D er þá

$$m = \int_a^b \delta(x)A(x)\,dx.$$

0.7.3 Massamiðja

Skilgreining: Massamiðja punktmassa

Punktmassar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ eru staðsettir í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ á x-ásnum.

Vægi kerfisins um punktinn $x = 0$ er skilgreint sem

$$M_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i,$$

og *massamiðja* kerfisins er

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Skilgreining: Massamiðja

Ef massi er dreifður samkvæmt þéttleika falli $\delta(x)$ um bili $[a, b]$ á x-ásnum þá er massi og vægi um punktinn $x = 0$ gefið með formúlunum

$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad \text{og} \qquad M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)\,dx.$$

Massamiðjan er gefin með formúlunni

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Skilgreining: Massamiðja plötu

Skoðum plötu af sömu gerð og í 19.2.

Verkefnalisti

laga tilvísun

Vægi plötunnar um y- og x-ása eru gefin með formúlunum

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)f(x)\,dx \qquad \text{og} \qquad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)f(x)^2\,dx,$$

og hnit massamiðju plötunnar, $(\overline{x}, \overline{y})$, eru gefin með jöfnunum

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)f(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)\,dx}$$

$$og$$

$$\overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)f(x)^2\,dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)\,dx}.$$

Setning Pappusar, I

Látum R vera svæði sem liggur í plani öðrum megin við línu L. Látum A tákna flatarmál R og $\overline{r}$ tákna fjarlægð massamiðju R frá L.

Þegar svæðinu R er snúið $360°$ um L myndast snúðskiki með rúmmál

$$V = 2\pi\overline{r}A.$$

Setning Pappusar, II

Látum C vera lokaðan feril sem liggur í plani og er allur öðrum megin við línu L. Látum s tákna lengd C og $\overline{r}$ tákna fjarlægð massamiðju C frá L. Þegar ferlinum C er snúið $360°$ um L myndast snúðflötur með flatarmál

$$S = 2\pi\overline{r}s.$$

0.8 Diffurjöfnur

0.8.1 Diffurjöfnur

Skilgreining: Diffurjafna

Ritum $y = y(x)$ sem fall af x.

Diffurjafna er jafna á forminu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

þar sem F er fall (formúla) í $n + 1$ breytistærð.

Jafnan er sögð vera af n-ta *stigi* ef hæsta afleiða y sem kemur fyrir í formúlu er n.

Athugasemd: Deildajafna, afleiðujafna og diffurjafna eru samheiti yfir sama hlutinn.

Dæmi

Það að finna stofnfall fyrir fall f er jafngilt því að leysa fyrsta stigs diffurjöfnuna

$$y'(x) = f(x),$$

eða með framsetningunni úr *skilgreiningunni* hér að ofan,

$$F(x, y') = f(x) - y'(x) = 0.$$

Skilgreining: Aðgreinanleg diffurjafna

Fyrsta stigs diffurjafna sem má rita á forminu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

kallast *aðgreinanleg* (e. seperable). Það er, þátta má hægri hliðina þannig að annar þátturinn er bara fall af x og hinn þátturinn er bara fall af y.

Umritum jöfnuna yfir á formið

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Aðvörun: Það má ekkert x koma fyrir í vinstri hliðinni og ekkert y má koma fyrir í hægri hliðinni.

Síðan heildum við báðar hliðar og reiknum stofnföllin hægra og vinstra megin í jöfnunni

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

og munum eftir að setja inn heildunarfasta (einn er nóg). Þá höfum við jöfnu sem lýsir sambandi x og y, og inniheldur engar afleiður af y. Út frá þeirri jöfnu má fá upplýsingar um eiginleika lausnarinnar y. Stundum er hægt að einangra y og fá þannig formúlu fyrir lausn diffurjöfnunar.

Verkefnalisti

Dæmi

0.8.2 Línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur

Skilgreining: Línuleg diffurjafna

Diffurjafna á forminu

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

kallast *línuleg diffurjafna*. Hún er n-ta stigs ef $a_n(x)$ er ekki fastafallið 0.

Ef f er fastafallið 0 þá er jafnan sögð *óhliðruð* (e. homogeneous) en ef f er ekki fastafallið 0 þá er hún sögð *hliðruð* (e. nonhomogeneous).

Línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur

Almenna línulega fyrsta stigs jöfnu má rita á forminu

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Samsvarandi óhliðruð jafna er

$$y' + p(x)y = 0.$$

Skilgreinum $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ (eitthvert stofnfall). Þá er

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$$

lausn á diffurjöfnunni.

Aðvörun: Þegar þið reiknið $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ þá megið þið sleppa heildunarfastanum, en **ekki** þegar þið reiknið heildið $\int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$.

0.8.3 Línulegar annars stigs diffurjafnur með fastastuðla

Skilgreining

Línuleg annars stigs diffurjafna með fastastuðla er diffurjafna á forminu

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

þar sem a, b og c eru fastar.

Jafnan er sögð *óhliðruð* (e. homogeneous) ef fallið $f(x)$ er fastafallið 0.

Skilgreining: Kennijafna

Jafnan $ar^2 + br + c = 0$ kallast *kennijafna* (e. auxiliary equation) diffurjöfnunnar $ay'' + by' + cy = 0$.

Setning

Ef föllin $y_1(x)$ og $y_2(x)$ eru lausnir á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$ þá er fallið

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

þar sem A og B eru fastar, líka lausn.

Ef $y_2(x)$ er ekki fastamargfeldi af $y_1(x)$ þá má skrifa **sérhverja** lausn $y(x)$ á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$ á forminu

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

þar sem A og B eru fastar.

Setning

Ef leysa á annars stigs óhliðraða diffurjöfnu með fastastuðla

$$ay'' + by' + cy = 0$$

þá geta komið upp þrjú tilvik.

Tilvik I *Kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur tvær ólíkar rauntölulausnir* r_1 og r_2.

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

Tilvik II *Kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur bara eina rauntölulausn $k = -\frac{b}{2a}$.*

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{kx} + Bxe^{kx}$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

Tilvik III *Kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur engar rauntölulausnir.*

Setjum $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Rætur kennijöfnunnar eru $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$.

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{kx}\cos(\omega x) + Be^{kx}\sin(\omega x)$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

Setning

Látum $y_{\mathrm{p}}(x)$ vera einhverja lausn á hliðruðu jöfnunni

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Látum $y_1(x)$ og $y_2(x)$ vera lausnir sem fást úr 21.4 á óhliðruðu jöfnunni

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Verkefnalisti

laga tilvísun

Sama hvernig fastarnir A og B eru valdir þá er fallið

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$$

alltaf lausn á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = f(x)$ og sérhverja lausn má skrifa á þessu formi.

0.8.4 Ágiskanir

Ágiskun

(Sjá ramma í grein 17.6)

Verkefnalisti

tilvísun í bók?

Lausn á hliðruðu jöfnu $ay'' + by' + cy = f(x)$ kallast *sérlausn*. Stundum, ef f er ekki of flókið, þá er mögulegt að giska á sérlausn.

Látum $P_n(x)$ standa fyrir einhverja n-ta stigs margliðu og látum $A_n(x)$ og $B_n(x)$ tákna n-ta stigs margliður með óákveðnum stuðlum.

- Ef $f(x) = P_n(x)$ þá giskað á $y_{\mathrm{p}}(x) = x^m A_n(x)$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ þá giskað á $y_{\mathrm{p}}(x) = x^m A_n(x)e^{rx}$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin(kx)$ þá giskað á $y_{\mathrm{p}}(x) = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$ þá giskað á $y_{\mathrm{p}}(x) = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$.

Hér táknar m minnstu töluna af tölunum 0, 1, 2 sem tryggir að enginn liður í ágiskuninni sé lausn á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$.

Ef við erum búin að finna sérlausn y_p og almenna lausn y á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$, þá er $y + y_p$ áfram lausn á hliðruðu jöfnunni. Reyndar er sérhver lausn á forminu á óhliðruðu jöfnunni á forminu $y + y_p$, bara með mismundandi A og B í y.

Verkefnalisti

Dæmi: sérlausn, almenn lausn og svo upphafsskilyrðum bætt við.

0.8.5 Samantekt

Aðskiljanlegar jöfnur

Jöfnur sem hægt er að rita á forminu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

má leysa með því að heilda og einangra y út úr

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Línulegar fyrsta stigs jöfnur

Lausn við jöfnu á forminu

$$y'(x) + p(x)y = q(x)$$

er gefin með

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx,$$

þar sem $\mu(x) = \int p(x)\,dx$.

Línulegar annars stigs jöfnur með fastastuðla

Lausn á $ay'' + by' + cy = 0$ er gefin með

Tilvik I $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ ef kennijafnan hefur tvær ólíkar rauntölulausnir r_1 og r_2.

Tilvik II $y(x) = Ae^{kx} + Bxe^{kx}$ ef kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur bara eina tvöfalda rauntölulausn $k = -\frac{b}{2a}$.

Tilvik III $y(x) = Ae^{kx}\cos(\omega x) + Be^{kx}\sin(\omega x)$ ef kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur engar rauntölulausnir, bara tvinntölulausnir $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$, þar sem $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Ĺausn hliðruðu jöfnunni á $ay'' + by' + cy = f(x)$ er mögulega hægt að finna með *ásgiskun*. Sérhver lausn á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = f(x)$ er svo á forminu $y + y_p$ þar sem y er lausn á óhliðruðu jöfnunni.

0.9 Runur og raðir

0.9.1 Runur

Skilgreining: Runa

Runa er raðaður listi af tölum.

Runa hefur fyrsta stak en ekkert síðasta stak. Stökin í runu eru oft númeruð með náttúrlegu tölunum $1, 2, 3, \ldots$. Stökin eru þá

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

Runur eru táknaðar með $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eða bara $\{a_n\}$.

Skilgreining

Runa $\{a_n\}$ er sögð *takmörkuð að neðan* ef til er tala m þannig að

$$m \leq a_n$$

fyrir allar náttúrlegar tölur n.

Runan er sögð *takmörkuð að ofan* ef til er tala M þannig að

$$a_n \leq M$$

fyrir allar náttúrlegar tölur n.

Runa sem er bæði takmörkuð að ofan og neðan er sögð *takmörkuð*.

Skilgreining

Runa $\{a_n\}$ er sögð

1. *vaxandi* ef $a_n \leq a_{n+1}$ fyrir öll n,
2. *stranglega vaxandi* ef $a_n < a_{n+1}$ fyrir öll n,
3. *minnkandi* ef $a_n \geq a_{n+1}$ fyrir öll n,
4. *stranglega minnkandi* ef $a_n > a_{n+1}$ fyrir öll n.

Runa kallast *einhalla* ef hún er annaðhvort vaxandi eða minnkandi.

Skilgreining: Víxlmerkjaruna

Víxlmerkjaruna er runa þannig að formerki skiptast á, annaðhvort $+, -, +, -, \ldots$ eða $-, +, -, +, \ldots$.

Einnig má lýsa þessu þannig að runa $\{a_n\}$ sé víxlmerkjaruna ef $a_n a_{n+1} < 0$ fyrir öll n.

Skilgreining

Segjum að $\{a_n\}$ sé *samleitin* að tölu L (eða *stefni á* L) ef fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ má finna náttúrlega tölu N þannig að ef $n \geq N$ þá er

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Ritað $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ og talan L kallast *markgildi rununnar*.

Sagt er að runa sé *samleitin* ef $\lim_{n\to\infty} a_n$ er skilgreint, en annars er runan sögð *ósamleitin*.

Setning

Látum f vera fall skilgreint á $\mathbb{R}$ og látum $\{a_n\}$ vera runu þannig að $a_n = f(n)$ fyrir öll n. Ef $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ þá er $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Aðvörun: Þetta gildir ekki í hina áttina, runan getur verið samleitin án þess að fallið sé það.

Setning

Látum $\{a_n\}$ vera runu. Eftirfarandi tvö skilyrði eru jafngild:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$,
2. fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ eru aðeins endanlega margir liðir rununnar $\{a_n\}$ utan við bilið $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Fylgisetning

Samleitin runa er takmörkuð.

Setning

Gerum ráð fyrir að runurnar $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ séu samleitnar. Þá gildir:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$, þar sem c er fasti,
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$,
4. ef $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ þá er $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$,
5. ef $a_n \leq b_n$ fyrir öll n sem eru nógu stór, þá er
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$
(frasinn *fyrir öll n sem eru nógu stór* þýðir að til er einhver tala N þannig að skilyrðið gildir fyrir öll $n \geq N$),
6. (Klemmuregla) ef $a_n \leq c_n \leq b_n$ fyrir öll n sem eru nógu stór og $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ þá er runan $\{c_n\}$ samleitin og
$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Setning

Takmörkuð einhalla (vaxandi eða minnkandi) runa er samleitin.

0.9.2 Raðir

Skilgreining: Röð

Látum $a_1, a_2, \ldots$ vera gefnar tölur. *Röðin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

er skilgreind sem formleg summa liðanna $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Skilgreining

Fáum í hendurnar röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þar sem $a_1, a_2, \ldots$ eru tölur. Skilgreinum

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

sem summa fyrstu n liða raðarinnar. Segjum að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé *samleitin með summu s* ef

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Það er að segja, röðin er samleitin með summu s ef

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s.$$

Ritum þá

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Setning

Ef $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, þ.e. báðar raðirnar eru samleitnar, þá gildir að

1. ef c er fasti þá er $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$,
3. ef $a_n \leq b_n$ fyrir öll n þá er $A \leq B$.

Setning

Ef röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin þá er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Athugasemd

Ef $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ þá ekki víst að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin.

Dæmi: Kvótaröð

Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

kallast *kvótaröð*. Hún er samleitin ef $-1 < a < 1$ og þá er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Dæmi: Kíkisröð

Röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

kallast *kíkisröð*. Hún er samleitin og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

0.9.3 Samleitnipróf fyrir raðir

Setning

Ef $\lim_{n\to\infty} a_n$ er ekki til eða $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekki samleitin.

Setning: Samleitnipróf I

Gerum ráð fyrir að $a_n \geq 0$ fyrir allar náttúrlegar tölur n. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er þá annaðhvort samleitin eða ósamleitin að ∞ (þ.e.a.s. hlutsummurnar $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ stefna á ∞ þegar n stefnir á ∞.)

Setning: Samleitnipróf II – Samanburðarpróf

Gerum ráð fyrir að $0 \leq a_n \leq b_n$ fyrir allar náttúrlegar tölur n.

1. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka samleitin.
2. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er ósamleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ líka ósamleitin.

Setning: Samleitnipróf III – Heildispróf

Látum f vera jákvætt, samfellt og minnkandi fall sem er skilgreint á bilinu $[1, \infty)$. Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n setjum við $a_n = f(n)$. Þá eru röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og óeiginlega heildið $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ annaðhvort bæði samleitin eða bæði ósamleitin.

Fylgisetning

Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ er samleitin ef $p > 1$ en ósamleitin ef $p \leq 1$.

Setning: Samleitnipróf IV – Markgildissamanburðarpróf

Gerum ráð fyrir að $a_n \geq 0$ og $b_n \geq 0$ fyrir allar náttúrlegar tölur n og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, þar sem L er tala eða ∞.

1. Ef $L < \infty$ og röðin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka samleitin.
2. Ef $L > 0$ og röðin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka ósamleitin.

Setning: Samleitnipróf V – Kvótapróf

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að markgildið $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ sé skilgreint eða að sé ∞.

1. Ef $0 \leq \rho < 1$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.
2. Ef $1 < \rho \leq \infty$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.
3. Ef $\rho = 1$ þá er ekkert hægt að fullyrða um hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin eða ósamleitin, hvor tveggja kemur til greina og nota þarf aðrar aðferðir til að skera úr um það.

Setning: Samleitnipróf VI – Rótarpróf

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að markgildið $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ sé skilgreint eða að það sé ∞.

1. Ef $0 \leq \sigma < 1$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.
2. Ef $1 < \sigma \leq \infty$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.
3. Ef $\sigma = 1$ þá er ekkert hægt að fullyrða um hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin eða ósamleitin, hvor tveggja kemur til greina og nota þarf aðrar aðferðir til að skera úr um það.

Setning: Samleitnipróf VII – Víxlmerkjaraðapróf

Gerum ráð fyrir að

1. $a_n \geq 0$ fyrir öll n (frekar jákvæðir liðir),
2. $a_{n+1} \leq a_n$ fyrir öll n (frekar minnkandi),
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (stefnir á 0).

Þá er víxlmerkjaröðin

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

samleitin.

Fylgisetning

Gerum ráð fyrir að runa $\{a_n\}$ uppfylli skilyrðin sem gefin eru í setningunni á undan.

Verkefnalisti

laga tilvísun

Látum s_n tákna summu n fyrstu liða raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ og táknum summu raðarinnar með s. Þá gildir að $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$.

0.9.4 Alsamleitni

Skilgreining

Röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er sögð vera *alsamleitin* ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin.

Setning

Röð sem er alsamleitin er samleitin.

Athugasemd

Til eru samleitnar raðir, t.d. röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, sem eru ekki alsamleitnar.

Skilgreining

Samleitin röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er sögð vera *skilyrt samleitin* ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er ósamleitin.

Setning: Umröðun

Dæmi um umröðun á liðum raðar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er

$$a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_{100} + a_{99} + \cdots + a_{11} + a_{1000} + a_{999} + \cdots .$$

1. Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er alsamleitin þá skiptir engu máli hvernig liðum raðarinnar er umraðað, summan verður alltaf sú sama.
2. Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er skilyrt samleitin og L einhver rauntala, eða $\pm\infty$ þá er hægt að umraða liðum raðarinnar þannig að summan eftir umröðun verði L.

Með öðrum orðum

Liðum skilyrt samleitinnar raðar má umraða þannig að summan getur orðið hvað sem er, það skiptir því máli í hvaða röð við leggjum saman.

0.10 Veldaraðir

Verkefnalisti

vantar myndir/geogebra, t.d. eins og Sage/Interact/Taylor

0.10.1 Veldaraðir

Skilgreining

Röð á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

kallast *veldaröð* með *miðju* í punktinum c.

Setning

Um sérhverja veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gildir eitt af þrennu:

1. Röðin er aðeins samleitin fyrir $x = c$.
2. Til er jákvæð tala R þannig að veldaröðin er alsamleitin fyrir öll x þannig að $|x-c| < R$ og ósamleitin fyrir öll x þannig að $|x-c| > R$.
3. Röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x.

Skilgreining: Miðja og samleitnigeisli

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vera veldaröð.

1. Talan c kallast *miðja* eða *samleitnimiðja* veldaraðarinnar.
2. Í tilviki 2. setningunni hér á undan er röðin alsamleitin á opna bilinu $(c-R, c+R)$ og ósamleitin fyrir utan lokaða bilið $[c-R, c+R]$.

   Talan R er kölluð *samleitnigeisli* raðarinnar.

   Mögulegt er að röðin sé samleitin (alsamleitin eða skilyrt samleitin) í öðrum eða báðum punktunum $x = c - R$ og $x = c + R$ (þetta þarf að athuga sérstaklega).

   Í tilfelli 1. í setningunni þegar röðin er bara samleitin fyrir $x = c$ setjum við $R = 0$ og í tilfelli 3. þegar röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x þá setjum við $R = \infty$.
3. *Samleitnibil* veldaraðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ er mengi allra gilda x þannig að röðin er samleitin. Setning hér á undan sýnir að þetta mengi er alltaf bil.
   - Þegar samleitnigeilsinn er 0 er samleitnibilið $\{c\}$.
   - Þegar samleitnigeislinn er $R > 0$ þá koma fjórir möguleikar til greina eftir því hvort röðin er samleitin í hvorugum, öðrum eða báðum punktunum $x = c - R$ og $x = c + R$. Samleitnibilið getur verið $(c-R, c+R)$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$ eða $[c-R, c+R]$.
   - Þegar samleitnigeislinn er ∞ þá er samleitnibilið $(-\infty, \infty)$.

0.10.2 Samleitnipróf

Setning

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vera veldaröð.

1. *Kvótapróf:* Gerum ráð fyrir að $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ sé til eða ∞.

   Þá hefur veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ samleitnigeisla

$$R = \begin{cases} \infty & \text{ef } L = 0, \\ \frac{1}{L} & \text{ef } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{ef } L = \infty. \end{cases}$$

2. *Rótarpróf:* Gerum ráð fyrir að $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ sé til eða ∞. Þá hefur veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ samleitnigeisla

$$R = \begin{cases} \infty & \text{ef } L = 0, \\ \frac{1}{L} & \text{ef } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{ef } L = \infty. \end{cases}$$

Setning Abels

Fallið f skilgreint á samleitnibili með

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

er samfellt á öllu samleitnibili veldaraðarinnar.

Ef samleitnigeislinn er $0 < R < \infty$ og röðin er samleitin í punktinum $x = c + R$ þá er

$$\lim_{x\to(c+R)^-} f(x) = f(c+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((c+R)-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Eins ef röðin er samleitin í punktinum $x = c - R$ þá er

$$\lim_{x\to(c-R)^+} f(x) = f(c-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((c-R)-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n.$$

Setning: Diffrað lið fyrir lið

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Fallið f er diffranlegt og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

og röðin fyrir $f'(x)$ er samleitin fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$.

Þetta þýðir að við getum diffrað veldaraðir lið fyrir lið.

Þar sem diffranleg föll eru samfelld þá fæst eftirfarandi.

Fylgisetning

Fallið f er samfellt á $(c-R, c+R)$.

Setning: Heildað lið fyrir lið

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Fallið f hefur stofnfall

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \\ &= a_0(x-c) + \frac{a_1}{2}(x-c)^2 + \frac{a_2}{3}(x-c)^3 + \frac{a_3}{4}(x-c)^4 + \cdots \end{aligned}$$

og röðin fyrir $F(x)$ er samleitin fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$.

Þetta þýðir að við getum heildað veldaraðir lið fyrir lið.

Setning

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Fallið f er k-sinnum diffranlegt fyrir $k = 1, 2, 3, \ldots$ og

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Skilgreining: Fágað fall

Fall f þannig að til er veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ með samleitnigeisla $R > 0$ þannig að

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$ kallast *fágað* (raunfágað) í punktinum c.

Athugasemd

Dæmi um raunfáguð föll eru margliður, ræð föll, hornaföll, veldisföll og lograr.

0.10.3 Taylorraðir

Skilgreining: Taylorröð

Gerum ráð fyrir að fall $f(x)$ sé óendanlega oft diffranlegt í punktinum $x = c$, (það er $f^{(k)}(c)$ er til fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Veldaröðin

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n =& f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 \\ &+ \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(iv)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \cdots\end{aligned}$$

kallast *Taylorröð* með miðju í $x = c$ fyrir $f(x)$.

Ef svo vill til að $c = 0$ þá er oft talað um *Maclaurinröð*.

Setning

Taylormargliða með miðju í c fyrir f er skilgreind sem margliðan

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.\end{aligned}$$

Skekkjan í n-ta stigs Taylornálgun er $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Til er tala X sem liggur á milli c og x þannig að

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Setning

Gerum ráð fyrir að f sé fall sem er óendanlega oft diffranlegt í punktinum c.

Fyrir fast gildi á x þá er Taylorröðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

samleitin með summu $f(x)$ ef og aðeins ef

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Dæmi: Tvíliðuröðin

Fyrir x þannig að $|x| < 1$ og rauntölu r gildir að

$$\begin{aligned}(1+x)^r =& 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4 + \cdots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n.\end{aligned}$$

Athugasemd

Ef $r \in \mathbb{N}$ þá gefur summan að ofan einfaldlega stuðlanna þegar búið er að margfalda upp úr svigum, og summan er því endanleg því þegar $n \geq r+1$ þá verða stuðlarnir 0.

Ef hins vegar $r \notin \mathbb{N}$ þá er enginn stuðlanna 0.

Taylorraðir nokkra falla

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots && \text{fyrir öll } x \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots && \text{fyrir öll } x \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots && \text{fyrir öll } x \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots && \text{fyrir } -1 < x < 1 \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots && \text{fyrir } -1 < x < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots && \text{fyrir } -1 < x \leq 1 \\
\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots && \text{fyrir } -1 \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots && \text{fyrir öll } x \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots && \text{fyrir öll } x
\end{aligned}
$$

0.11 Viðauki

- *genindex*

Verkefnalisti

- pdf-útgafa
- hlekkir á Uglu
- aðrar upplýsingar
- leiðbeingar vegna skiladæma

0.12 ToDo listi

Verkefnalisti

Global:

- setja inn nauðsynlegar undirstöður fyrir hvern kafla
- ensk heiti í sviga á eftir skilgreiningum?
- liti á allar (sub(sub))sections?
- Listi yfir setningar: *index:: setning;* .....
- Formúlublað
- táknalisti

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/index.rst, línu 10.)

Verkefnalisti

Afhverju er númeringin svona skrítin?

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli01.rst, línu 198.)

Verkefnalisti

mynd

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli01.rst, línu 336.)

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 57.)

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 95.)

Verkefnalisti

Mynd/Geogebra

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 129.)

Verkefnalisti

Mynd

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 200.)

Verkefnalisti

Myndir og nokkrar sannanir

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 207.)

Verkefnalisti

Þarf að setja sannanir undir > takk, show/hide fídus

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli02.rst, línu 583.)

Verkefnalisti

Bæta við

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli03.rst, línu 684.)

Verkefnalisti

Flytja/vísa í kafla 1?

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli03.rst, línu 690.)

Verkefnalisti

laga myndir, eiga að vera hlið við hlið letrið á þeim of lítið?

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli05.rst, línu 4.)

Verkefnalisti

myndir

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli05.rst, línu 291.)

Verkefnalisti

þýða og staðfæra

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli05.rst, línu 296.)

Verkefnalisti

mynd

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli06.rst, línu 45.)

Verkefnalisti

laga ref

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli06.rst, línu 307.)

Verkefnalisti

ref í keðjur.

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli06.rst, línu 377.)

Verkefnalisti

ath tilvísun

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli06.rst, línu 535.)

Verkefnalisti

mynd

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli06.rst, línu 636.)

Verkefnalisti

myndir/geogebra

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli07.rst, línu 4.)

Verkefnalisti

laga tilvísun

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli07.rst, línu 249.)

Verkefnalisti

Dæmi

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli08.rst, línu 79.)

Verkefnalisti

laga tilvísun

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli08.rst, línu 236.)

Verkefnalisti

tilvísun í bók?

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli08.rst, línu 259.)

Verkefnalisti

Dæmi: sérlausn, almenn lausn og svo upphafsskilyrðum bætt við.

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli08.rst, línu 292.)

Verkefnalisti

laga tilvísun

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli09.rst, línu 377.)

Verkefnalisti

vantar myndir/geogebra, t.d. eins og Sage/Interact/Taylor

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/kafli10.rst, línu 4.)

Verkefnalisti

- pdf-útgafa
- hlekkir á Uglu
- aðrar upplýsingar
- leiðbeingar vegna skiladæma

(*upprunaleg færsla* er staðsett í /home/bsm/Kennsla/edbook/Mathematical_Analysis_I/vidauki.rst, línu 6.)

- *genindex*