Stærðfræðigreining III

Dæmablað 4 - Lausnir við tímadæmum

Dæmi 17

3.11.1 Sýnið að

$$\int_{\partial S(\alpha,r)} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i \qquad \text{og} \qquad \int_{\partial S(\alpha,r)} (z-\alpha)^n = 0$$

fyrir öll $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Lausn: Fyrsta heildið er bein afleiðing af Cauchy-formúlu því $\alpha \in S(\alpha, r)$ og 1 er fágað fall. Í síðara tilfellinu hefur heildisstofninn stofnfall $\frac{1}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$ og þar með er heildi þess eftir lokuðum vegi jafnt 0.

3.11.2abc Reiknið út vegheildin $\int_\gamma f(z)dz$ þar sem

(a) $f(z) = \overline{z}$ og γ er hluti af hring með miðju í 1 og þegar farið er eftir boganum þá breytist hornið frá $-\pi/2$ til $\pi/2$.

(b) $f(z) = z^2$ og γ er vegurinn sem stikar beina línu frá 0 til 1 og þaðan hringboga með miðju í $1+i$ stystu leið til $2+i$.

(c) $f(z) = 2z\sin(z^2)$ og γ er fleygboginn gegnum punktinn $-i$ með $u_\gamma = -1$ og $e_\gamma = 1$.

Lausn: (a) Getum ritað $\gamma(t) = 1 + re^{it}$ þar sem $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ og $r > 0$ er föst tala. Þá er $\gamma'(t) = ire^{it}$ og

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z} dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{(1+re^{it})} ire^{it} dt = ir\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+re^{-it})e^{it}dt \\
&= ir\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{it}+r)dt = ir[\frac{1}{i}e^{it} + rt]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= r(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} + ir(\pi/2 - (-i\pi/2))) = 2ir + ir^2\pi = (2r + r^2\pi)i.
\end{aligned}$$

(b) Getum notað okkur að fallið $F(z) = 1/3z^3$ er stofnfall f og þar með er

$$\int_\gamma f(z)dz = F(2+i) - F(0) = \frac{1}{3}(2+i)^3 = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}.$$

Meiri vinna er að reikna heildið: Stikum línustrikið frá 0 til 1 með $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$ og hringbogann með $\gamma_2(t) = 1 + i + e^{it}$, $t \in [-\pi/2, 0]$. Þár er $\gamma_1'(t) = 1$ og $\gamma_2'(t) = ie^{it}$ svo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt + \int_{-\pi/2}^0 (1+i+e^{it})^2 ie^{it}dt \\
&= \frac{1}{3} + i\int_{-\pi/2}^0 (2ie^{it} + 2(1+i)e^{2it} + e^{3it})dt \\
&= \frac{1}{3} + i\left[2e^{it} + \frac{1+i}{i}e^{2it} + \frac{1}{3i}e^{3it}\right]_{-\pi/2}^0 \\
&= \frac{1}{3} + i\left[2e^{it} + (1-i)e^{2it} - \frac{i}{3}e^{3it}\right]_{-\pi/2}^0 \\
&= \frac{1}{3} + i[(2 + (1-i) - i/3) - (2\cdot(-i) + (1-i)\cdot(-1) - i/3\cdot i)] \\
&= \frac{1}{3} + i[11/3 + -i/3] = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Athugum að $F(z) = -\cos(z^2)$ er stofnfall fyrir $f(z) = 2z\sin(z^2)$. Þar með fæst að heildið er

$$\int_\gamma f(z)dz = F(1) - F(-1) = -\cos(1) + \cos(1) = 0.$$

<u>3.11.3</u> Setjum $\alpha = a + ib$. Heildið fallið $e^{\alpha\tau}$ yfir bilið $[0,t]$ og takið raunhlutann af útkomunni til þess að sýna að

$$\int_0^t e^{a\tau}\cos(b\tau)d\tau = \frac{e^{at}(a\cos(bt) + b\sin(bt) - a}{a^2+b^2}.$$

Hvaða heildi fæst út ef þverhlutinn er tekinn? *Lausn:* Reiknum

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\alpha\tau}d\tau &= [\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}]_0^t = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \\
&= \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}(e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) - 1) \\
&= \frac{e^{at}(a-ib)(\cos(bt) + i\sin(bt)) - a + ib}{a^2+b^2} \\
&= \frac{e^{at}(a\cos(bt) + b\sin(bt)) - a + ie^{at}(a\sin(bt) - b\cos(bt))}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Tökum raunhlutann af báðum hliðum og fáum það sem um var beðið. Ef við tökum þverhlutann af báðum hliðum fæst hins vegar

$$\int_0^t e^{a\tau}\sin(b\tau)d\tau = \frac{e^{at}(a\sin(bt) - b\cos(bt)}{a^2+b^2}.$$

<u>3.11.5cd</u> Reiknið út heildin

$$c) \int_{\partial S(i,1/2)} \frac{\operatorname{Log} z}{(z-i)^2}dz \qquad d) \int_{\partial S(0,2)} \frac{z^2+z+1}{z^2-1}dz.$$

Lausn: c) Athugum að skífan $S(i,1/2)$ sker ekki neikvæða raunásinn og þar með er höfuðgrein lograns Log fágað fall á skífunni. Þar með getum við notað Cauchy-formúluna fyrir afleiður og fengið

$$\int_{\partial S(i,1/2)} \frac{\operatorname{Log} z}{(z-i)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz}\operatorname{Log}(z)\Big|_{z=i} = 2\pi i\frac{1}{i} = 2\pi.$$

d) Byrjum á að þátta nefnarann í $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$. Athugum að báðar núllstöðvarnar eru innan skífunnar $\partial S(0,2)$. Setjum $f(z) = (z^2+z+1)/(z-1)$ og $g(z) = (z^2+z+1)/(z+1)$. Nú gefur Cauchy-formúlan okkur að

$$\int_{\partial S(0,2)} \frac{z^2+z+1}{z^2-1}dz = 2\pi i(f(-1) + g(1)) = 2\pi i(-1/2 + 3/2) = 2\pi i.$$

<u>3.11.6a</u> Látum γ tákna hringinn með miðju í 0 og geislann R. Sýnið að

$$\int_\gamma \left|\frac{e^{iz}}{z}\right||dz| \le 2\pi e^R \qquad \text{og} \qquad \int_\gamma \left|\frac{\sinh z}{z^2}\right||dz| \le \frac{2\pi\cosh R}{R}.$$

Lausn: Athugm að $|\gamma| = 2\pi R$. Notum heildismatið í grein 3.1.4 í fyrirlestranótum og fáum

$$\int_\gamma \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| |dz| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma} \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| \le 2\pi R \frac{\max_{z\in\gamma} e^{\operatorname{Re} z}}{R} = 2\pi R \frac{e^R}{R} = 2\pi e^R$$

þar sem við notuðum að $|z| = R$ ef $z \in \gamma$ og $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Síðara matið verður

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left|\frac{\sinh z}{z^2}\right| |dz| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma} \left|\frac{\sinh z}{z^2}\right| &= 2\pi R \frac{\max_{z\in\gamma} |\sinh z|}{R^2} \\
&= \frac{2\pi}{R} \max_{z\in\gamma} \left|\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right| \le \frac{2\pi}{R} \max_{z\in\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} z} + e^{-\operatorname{Re} z}}{2} \\
&= \frac{2\pi}{R} \max_{z\in\gamma} \cosh(\operatorname{Re} z) = \frac{2\pi \cosh(R)}{R}.
\end{aligned}$$

<u>3.11.7</u> Látum f vera fall sem er sanfellt í grennd um punktinn $\alpha \in \mathbb{C}$ og uppfylli

$$\lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z) = A.$$

Látum γ_r tákna hringbogann sem stikaður er með $\gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$, $t \in [a,b]$. Sýnið að

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = iA(b-a).$$

Lausn: Ritum

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{A}{z-\alpha}\right) dz + \int_{\gamma_r} \frac{A}{z-\alpha} dz.$$

Byrjum á að meta fyrra heildið með

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} \left(f(z) - \frac{A}{z-\alpha}\right) dz\right| &\le L(\gamma_r) \max_{z\in\gamma_r} \left|f(z) - \frac{A}{z-\alpha}\right| \\
&= (b-a) r \max_{z\in\gamma_r} \left|\frac{1}{z-\alpha}\right| |(z-\alpha)f(z) - A| \\
&= (b-a) \max_{z\in\gamma_r} |(z-\alpha)f(z) - A| \to 0
\end{aligned}$$

þegar $r \to 0$. Reiknum loks heildið

$$\int_{\gamma_r} \frac{A}{z-\alpha} dz = A \int_a^b \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = iA \int_a^b dt = iA(b-a).$$

Höfum þá sýnt það sem átti að sýna.

<u>3.11.8b</u> Beitið Cauchy-formúlunni til að reikna heildið

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 3\sin\theta} d\theta.$$

Lausn: Notum umræðu og formúlur bls. 79 í kennslubók og ritum

$$\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz},$$

en þá má rita heildið sem

$$\int_{\partial S(0,1)} \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}} \frac{1}{iz} dz = \frac{i}{2}\int_{\partial S(0,1)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(10z-3i(z^2-1))} dz$$
$$= -\frac{1}{6}\int_{\partial S(0,1)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+10i/3z-1)} dz.$$

Skoðum nú annars stigs margliðuna í nefnara. Hún hefur núllstöðvar

$$z_\pm = \frac{-10i/3 \pm \sqrt{-100/9+4}}{2} = \frac{-10/3 \pm 8/3}{2} i = \frac{-5\pm 4}{3} i.$$

Athugum að einungis núllstöðin sem svarar til + merkis liggur á einingarskífunni þ.e.

$$z_+ = \frac{-5+4}{3} i = -\frac{i}{3}.$$

Nefnarinn hefur þar að auki tvöföldu núllstöðina $z = 0$ sem liggur á einingarskífunni. Cauchy-formúla gefur nú

$$-\frac{1}{6}\int_{\partial S(0,1)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+10i/3z-1)} dz = \frac{-2\pi i}{6}\left(\frac{d}{dz}\frac{(z^2-1)^2}{(z-z_+)(z-z_-)}\Big|_{z=0} + \frac{(z^2-1)^2}{z(z-z_-)}\Big|_{z=z_+}\right)$$
$$=$$
$$= \frac{-2\pi i}{6}\left(\frac{1}{z_+z_-} + \frac{(z_+^2-1)^2}{z_+(z_+-z_-)}\right)$$
$$= \frac{-2\pi i}{6}\left(1 + \frac{\frac{8024-1360\sqrt{34}}{81}}{(-5+\sqrt{34})i/3\frac{2\sqrt{34}i}{3}}\right)$$

<u>3.11.11</u>

<u>3.11.13</u>.