HÁSKÓLI ÍSLANDS
VERKFRÆÐI- OG NÁTTÚRUVÍSINDASVIÐ
RAUNVÍSINDADEILD

Töluleg greining (STÆ405G)

Útgáfa 0.1

Benedikt Steinar Magnússon

January 23, 2016

Efnisyfirlit

KAFLI 1

Inngangur

He was determined to discover the underlying logic behind the universe. Which was going to be hard, because there wasn't one.

- Terry Pratchett, Mort

1.1 Hvað er töluleg greining?

1.1.1 Tilraun að svari

- Fagið *töluleg greining* snýst um að búa til, greina og forrita aðferðir til þess að nálga á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum.
- Aðferðirnar eru settar fram með reikniritum sem síðan eru forrituð og það þarf góðan skilning á eiginleikum lausnanna sem verið er að nálga til þess að geta greint hvernig forritin munu virka.
- Greining á reikniritum er aðallega fólgin í skekkjumati og mati á þeim aðgerðafjölda sem þarf til þess að ná að nálga lausn með fyrirfram gefinni nákvæmni, þ.e. hagkvæmni og nákvæmni reikniritsins.
- Líkanagerð í raunvísindum og verkfræði felur yfirleitt í sér eftirfarandi skref:
  1. *Greina* kerfið sem um ræðir
  2. *Smíða líkan* sem útskýrir hvernig kerfið hegðar sér, þó yfirleitt með töluverðum einföldunum.
  3. *Herma* kerfið í tölvu eins vel og hægt er. Hér þarf að ná ásættanlegri námkvæmni á þeim tíma sem útreikningar mega taka.
  4. *Túlka* niðurstöðurnar og bera saman við upphaflega kerfið.

  Töluleg greining kemur mikið við sögu í lið 3. og einnig í lið 4.

1.2 Dæmi: Eldflaug

Gerum ráð fyrir að við höfum eftirfarandi eldflaug undir höndum:

- Eldsneytið dugir í 18 sek., þ.e. $t \in [0, 18]$.
- Loftmótstaðan er $d = 0.1v^2$, þar sem $v(t)$ er hraðinn á tíma t.
- Krafturinn sem knýr flaugina er $T = 5000$ N.
- Massi eldsneytisins er $m = 180 - 10t$ kg.

- Massi flaugarinnar er $M = 120 + m = 300 - 10t$ kg.

Spurningin er: Í hvaða hæð er eldflaugin þegar eldsneytið klárast?

Úr öðru lögmáli Newtons fæst að $F = (Mv)'$. Kraftarnir sem verka á eldflaugina er T upp á við og loftmótstaðan og þyngdarkrafturinn niður á við. Þannig fæst

$$(Mv)' = F = T - Mg - d$$

það er

$$M'v + Mv' = T - Mg - d.$$

Þetta jafngildir því að

$$v' = \frac{T - Mg - d - M'v}{M} = \frac{5000 - (300 - 10t)g - 0,1v^2 + 10v}{300 - 10t},$$

og upphafsskilyrðin eru $v(0) = 0$.

Þar sem $h' = v$, þá er hæðin á tíma t gefin með $h(t) = \int_0^t v(s)\,ds$. Þegar eldsneytið klárast þá er hæðin $h(18) = \int_0^{18} v(s)\,ds$.

Verkefnið er því að finna v, og reikna svo heildið.

Diffurjafnan hér að ofan er ólínuleg og ekki aðgreinanleg þannig að við getum ekki vænst þess finna lausn með þeim aðferðum sem við höfum þegar lært. Eins er ekki víst að við getum auðveldlega fundið stofnfall h fyrir v til þess að reikna heildið, jafnvel þótt við hefðum v.

Hins vegar getum við leyst diffurjöfnuna tölulega með aðferðunum úr *kafla 6*, og heildið reiknum við svo tölulega með aðferðunum úr *kafla 5*.

1.3 Samleitni runa

1.3.1 Nokkur atriði um samleitni runa

Mörg reiknirit til nálgunar á einhverri rauntölu eru hönnuð þannig að reiknuð er runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sem á að nálgast lausnina okkar.

1.3.2 Skilgreining: Samleitni

Rauntalnaruna (x_n) er sögð vera *samleitin* (e. convergent) að *markgildinu* r ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N > 0$ þannig að

$$|x_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{ef} \quad n \geq N.$$

Þetta er táknað annað hvort með

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad \text{eða} \qquad x_n \to r \text{ ef } n \to \infty.$$

Ef runan (x_n) er samleitin að markgildinu r þá segjum við einnig að hún *stefni á* r.

Hugsum okkur nú að (x_n) sé gefin runa sem stefnir á r og táknum skekkjuna með $e_n = r - x_n$.

Runan er sögð vera *línulega samleitin* (e. linear convergence) ef til er $\lambda \in]0,1[$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda,$$

ofurlínulega samleitin (e. superlinear convergence), ef

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0,$$

ferningssamleitin (e. quadratic convergence) ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lambda,$$

og *samleitin af stigi* α (e. convergence of order α), þar sem $\alpha > 1$, ef til er $\lambda > 0$ þannig að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda.$$

Athugasemd: Runa er ofurlínulega samleitin ef hún er samleitin af stigi $\alpha > 1$.
Ferningssamleitin runa er samleitin af stigi 2 þannig að hún er einnig ofurlínulega samleitin.

1.3.3 Skilgreining

Oft eru notuð veikari hugtök til þess að lýsa samleitni runa (t.d. ef við getum ekki fundið λ og α nákvæmlega).

Þannig segjum við að runan (x_n) sé *að minnsta kosti línulega samleitin* ef til er $\lambda \in]0,1[$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \le \lambda |e_n|, \qquad n \ge N,$$

ef til er $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \le \lambda |e_n|^2, \qquad n \ge N,$$

og *að minnsta kosti samleitin af stigi* α, þar sem $\alpha > 1$, ef til eru $\lambda > 0$ og $N > 0$ þannig að

$$|e_{n+1}| \le \lambda |e_n|^\alpha, \qquad n \ge N.$$

1.4 Setning Taylors

Sometimes it's better to light a flamethrower than curse the darkness. - Terry Pratchett, Men at Arms: The Play

1.4.1 Ritháttur fyrir diffranleg föll

Látum nú $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall á bili I sem tekur gildi í tvinntölunum. Ef f er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá táknum við afleiðuna með f'. Ef f' er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá táknum við *aðra afleiðu* f með f'', og svo framvegis.

Við skilgreinum með þrepun $f^{(k)}$ fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$ þannig að $f^{(0)} = f$ og ef $f^{(k-1)}$ er deildanlegt í sérhverjum punkti í I, þá er $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

Við látum $C^k(I)$ tákna línulega rúmið sem samanstendur af öllum föllum $f : I \to \mathbb{C}$ þannig að $f', \ldots, f^{(k)}$ eru til í sérhverjum punkti í I og $f^{(k)}$ er samfellt fall á I.

1.4.2 Nálgun með Taylor-margliðu

Ef $a \in I$, m er jákvæð heiltala og $f \in C^m(I)$, þá nefnist margliðan

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

Taylor-margliða fallsins f í punktinum a af stigi m, og er stundum táknuð með $T_m f(x;a)$.

Athugið að stig margliðunnar p er minna eða jafnt og m.

1.4.3 Setning Taylors

Látum $I \subseteq \mathbb{R}$ vera bil, $f : I \to \mathbb{C}$ vera fall, $m \geq 0$ vera heiltölu og gerum ráð fyrir að $f \in C^m(I)$ og að $f^{(m+1)}(x)$ sé til í sérhverjum innri punkti bilsins I. Þá er til punktur ξ á milli a og x þannig að

$$f(x) - T_m f(x;a) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Hægri hliðin er oft táknuð $R_m(x)$.

Athugasemd: Þetta þýðir að skekkjan í því að nálga fallið $f(x)$ með Taylor-margliðu af stigi m hagar sér eins og $(x-a)^{m+1}$.

1.4.4 Viðbót

Ef $f^{(m+1)}$ er samfellt á lokaða bilinu með endapunkta a og x, þá er

$$\begin{aligned} R_m(x) &= f(x) - T_m f(x;a) \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt \\ &= (x-a)^{m+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^m}{m!} f^{(m+1)}(a + s(x-a))ds. \end{aligned}$$

1.4.5 Sýnidæmi: Nálgun á fallgildum $x - \sin x$

Vitum að $x \approx \sin x$ ef x er lítið. Tökum $x = 0.1$ og hugsum okkur að við séum að reikna á vél með 8 stafa nákvæmni. Hún gefur

$$\sin 0.1 = 0.099833417$$

Af því leiðir

$$0.1 - \sin 0.1 = 1.66583 \cdot 10^{-4}$$

Við höfum tapað tveimur markverðum stöfum í nákvæmni.

Ef við notum Taylor-nálgunina fyrir $\sin(x)$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

og tökum fyrstu þrjá liðina, þ.e. skoðum 6. stigs Taylor-margliðu fallsins.

$x - \sin(x)$ er þá u.þ.b.

$$x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}.$$

Fallgildið er þá

$$\frac{0.1^3}{3!} - \frac{0.1^5}{5!} = 1.6658334 \cdot 10^{-4}.$$

Skekkjan er gefin með

$$|R_6(0.1)| = \left|\frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!}0.1^7\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{7!}0.1^7\right| \leq \frac{1}{7!}0.1^7 < 0.2 \cdot 10^{-10}.$$

Sem þýðir að allir 8 stafir reiknivélarinnar eru markverðir, þ.e. allir stafir $1.6658334 \cdot 10^{-4}$ eru réttir.

$\sin^{(7)}$ hér að ofan táknar 7. afleiðu $\sin$, sem er $-\cos$.

Ef við tökum $x = 0.01$ er þetta enn greinilegra. Reiknivélin gefur

$$\sin(0.01) = 0.0099998333$$

Þannig að

$$0.01 - \sin 0.01 = 0.1667 \cdot 10^{-7}$$

og við erum bara með 4 markverða stafi.

Hér dugir að taka aðeins þriðja stigs liðinn í Taylor-formúlunni

$$0.01 - \sin(0.01) \approx \frac{0.01^3}{3!} = 0.16666667 \cdot 10^{-7},$$

því skekkjan er

$$R_4(0.01) \leq \frac{0.01^5}{5!} < 10^{-12}$$

1.5 Skekkjur

Við allar úrlausnir á verkefnum í tölulegri greininingu þarf að fást við skekkjur. Þær eru af ýmsum toga:

- Gögn eru oft niðurstöður mælinga og þá fylgja þeim *mæliskekkjur*. Eins getum við þurft að notast við nálganir á föstum sem koma fyrir (t.d. π, Avogadrosar talan, ...).
- Við nálganir á lausnum á stærðfræðilegum verkefnum verða til *aðferðarskekkjur*. Þær verða til þegar reikniritin eru hönnuð og greining á reikniritum snýst fyrst og fremst um mat á aðferðarskekkjum.
- *Reikningsskekkjur* verða til í tölvum á öllum stigum, jafnvel þegar tölur eru lesnar inn í tugakerfi og þeim snúið yfir í tvíundarkerfi. Þær verða líka til vegna þess að tölvur geta einungis unnið með endanlegt mengi af tölum og allar útkomur þarf að nálga innan þess mengis. Þessar skekkjur nefnast oft *afrúningsskekkjur*.
- *Mannlegar villur* eru óumflýjanlegar. Það sem við getum gert er temja okkur vinnubrögð sem lágmarka líkur á þeim og auðvelda okkur að finna villur sem við gerum.

  Real stupidity beats artificial intelligence every time. – Terry Pratchett

1.5.1 Skekkja í nálgun á rauntölu r

Við getum stillt upp jöfnunum svona

$$r \text{ (rétt gildi) } = x \text{ (nálgunargildi)} + e \text{ (skekkja)}$$

þar sem talan x er nálgun á tölunni r, og þá nefnist

$$e = r - x$$

skekkjan (e. error) í nálgun á r með x eða bara *skekkja*.

Algildi skekkju (e. absolute error) er tölugildið $|e| = |r - x|$

Ef vitað er að $r \neq 0$, þá nefnist

$$\frac{|e|}{|r|} = \frac{|r - x|}{|r|}$$

hlutfallsleg skekkja (e. relative error) í nálgun á r með x.

> **Aðvörun:** Auðvitað er talan r sem við leitum að óþekkt (annars þyrftum við ekki að framkvæma alla þessa reikninga), sem þýðir að við getum hvergi notað hana í reikningum.

1.5.2 Fyrirframmat á skekkju

Metið er áður en reikningar hefjast hversu umfangsmikla reikninga þarf að framkvæma til þess að nálgunin náist innan fyrirfram gefinna skekkjumarka.

Ef lausnin er fundin með ítrekunaraðferð er yfirleitt metið hversu margar ítrekarnir þarf til þess að nálgun verði innan skekkjumarka.

1.5.3 Eftirámat á skekkju

Um leið og reikningar eru framkvæmdir er lagt mat á skekkju og reikningum er hætt þegar matið segir að nálgun sé innan skekkjumarka. Það gerist yfirleitt þegar gildið sem við reiknum út breytist orðið lítið í hverju skrefi.

Hér þarf að skipta í tvö tilvik, fyrst skoðum við tilvikið þegar runan er ofurlínulega samleitin og seinna tilvikið er þegar við vitum aðeins að runan er línulega samleitin, en þá er matið aðeins flóknara.

1.5.4 Ofurlínuleg samleitni – Eftirámat á skekkju

Hugsum okkur að við séum að nálga töluna r með gildum rununnar x_n, að við höfum reiknað út $x_0, \dots, x_n$ og viljum fá mat á skekkjunni $e_n = r - x_n$ í n-ta skrefi.

Við reiknum næst út x_{n+1} og skrifum $e_{n+1} = \lambda_n e_n$. Þá er

$$x_{n+1} - x_n = (r - x_n) - (r - x_{n+1}) = e_n - e_{n+1} = (1 - \lambda_n)e_n$$

og við fáum

$$e_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \lambda_n}.$$

Ef við vitum að runan er *ofurlínulega samleitin*, þá stefnir λ_n á 0 og þar með er

$$e_n \approx x_{n+1} - x_n.$$

Við hættum því útreikningi þegar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ þar sem ε er fyrirfram gefin tala, sem lýsir þeirri nákvæmni sem við viljum ná.

1.5.5 Línuleg samleitni – Eftirámat á skekkju

Skoðum nú tilvikið ef einu upplýsingarnar sem við höfum er að runan x_n sé *að minnsta kosti línulega samleitin*, þ.e. $c \in [0, 1)$ og $N \in \mathbb{N}$ þannig að

$$|e_{n+1}| \leq c|e_n|, \qquad \text{fyrir } n \geq N.$$

Þá stefnir $\lambda_n = e_{n+1}/e_n$ á fasta $\lambda \leq c$ og við höfum

$$\lambda_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Nú þurfum við að átta okkur á því hvernig þetta er nýtt í útreikningum.

Hugsum okkur að við höfum reiknað út $x_0, \ldots, x_n$ og viljum fá mat á e_n. Við reiknum þá út x_{n+1} og x_{n+2} og síðan hlutfallið $\kappa_n = (x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ sem við notum sem mat á λ_n. Eftirámatið á skekkjunni í ítrekunarskrefi númer n verður síðan

$$e_n \approx \frac{x_{n+1}-x_n}{1-\kappa_n}.$$

Ef stærðin í hægri hliðinni er komin niður fyrir fyrirfram gefin skekkjumörk ε, þá stöðvum við útreikningana.

1.5.6 Sýnidæmi

Okkur er gefin runa af nálgunum á lausn jöfnunnar

$$f(x) = e^x \sin x - x^2 = 0$$

og eigum að staðfesta hvort nálgunaraðferðin er ferningssamleitin:

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1}-x_n\rvert}{\lvert x_n - x_{n-1}\rvert^2}$
0	3.00000000000000		
1	2.73251570951922	0.10052257507862	1.404
2	2.63199313444060	0.01373904283351	1.359
3	2.61825409160709	0.00024006192208	1.273
4	2.61801402968501	0.00000007236005	1.256
5	2.61801395732496	0.00000000000001	1.272

Við metum $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$ og þar af leiðandi er

$$|e_n|/|e_{n-1}|^2 \approx |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2.$$

Við sjáum að hlutfallið $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|^2$ helst stöðugt og því ályktum við að aðferðin sé ferningssamleitin.

1.5.7 Útreikningur á samleitnistigi

Skoðum lítið dæmi um útreikninga á samleitnistigi.

Eftirfarandi runa stefnir á $\sqrt{3}$.

n	x_n
0	2.000000000000000
1	1.666666666666667
2	1.727272727272727
3	1.732142857142857
4	1.732050680431722
5	1.732050807565499

Er samleitnistigið 1.618?

Ef ekki, hvert er þá samleitnistigið?

Ef miðað er við að runan (x_n) sé ofurlínulega samleitin, þá er eðlilegt að taka $e_n \approx x_{n+1} - x_n$ sem mat á skekkjunni $e_n = \sqrt{3} - x_n$ í n-ta ítrekunarskrefinu.

Við byrjum á því að kanna hvernig tilgátan um að samleitnistigið kemur út á þessum tölum með $e_n = x_{n+1} - x_n$:

n	x_n	$\lvert e_n\rvert$	$\lvert e_n\rvert/\lvert e_{n-1}\rvert^{1.618}$
0	2.000000000000000	$3.3333{\cdot}10^{-1}$	
1	1.666666666666667	$6.0606{\cdot}10^{-2}$	$3.5851{\cdot}10^{-1}$
2	1.727272727272727	$4.8701{\cdot}10^{-3}$	$4.5439{\cdot}10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177{\cdot}10^{-5}$	$5.0837{\cdot}10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713{\cdot}10^{-7}$	$4.3004{\cdot}10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tveimur síðustu tölunum í aftasta dálki ber ekki nógu vel saman, svo það er vafasamt hvort talan 1.618 er rétta samleitnistigið.

Ef (x_n) er samleitin af stigi α, þá gildir $\lim_{n\to\infty} |e_{n+1}|/|e_n|^\alpha = \lambda$, þar sem $\lambda > 0$. Þar með höfum við nálgunarjöfnu ef n er nógu stórt,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \approx \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^\alpha} \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad \frac{|e_{n+1}|}{|e_{n+2}|} \approx \left|\frac{e_n}{e_{n+1}}\right|^\alpha.$$

Ef við lítum á þetta sem jöfnu og leysum út α, þá fáum við

$$\alpha_n = \frac{\ln(|e_{n+1}|/|e_{n+2}|)}{\ln(|e_n|/|e_{n+1}|)}.$$

Við getum reiknað út þrjú gildi á α úr þeim gögnum sem við höfum, $\alpha_0 = 1.479$, $\alpha_1 = 1.573$ og $\alpha_2 = 1.660$.

Ef við endurtökum útreikninga okkar hér að framan með 1.660 í stað 1.618, þá fæst

n	p_n	$\lvert e_n\rvert$	$\lvert e_n\rvert/\lvert e_{n-1}\rvert^{1.660}$
0	2.000000000000000	$3.3333{\cdot}10^{-1}$	
1	1.666666666666667	$6.0606{\cdot}10^{-2}$	$3.7551{\cdot}10^{-1}$
2	1.727272727272727	$4.8701{\cdot}10^{-3}$	$5.1143{\cdot}10^{-1}$
3	1.732142857142857	$9.2177{\cdot}10^{-5}$	$6.3639{\cdot}10^{-1}$
4	1.732050680431722	$1.2713{\cdot}10^{-7}$	$6.3639{\cdot}10^{-1}$
5	1.732050807565499		

Tölunum neðst í aftasta dálki ber saman með fimm réttum stöfum og því ályktum við að 1.660 sé nær því að vera rétta samleitnistigið.

1.6 Meira um skekkjur

1.6.1 Skilgreining: Markverðir stafir

Gerum ráð fyrir að $r \neq 0$, þá segjum við að x sé *nálgun á r með t markverðum stöfum (e. significant digits)* ef

$$\frac{|r-x|}{|r|} \le 10^{-t}.$$

Getum útfært þetta aðeins ítarlegra. Ef

$$10^{-(t+1)} < \frac{|r-x|}{|r|} \le 10^{-t}.$$

þá segjum við að nálgunin á r með x sé rétt með að minnsta kosti t markverðum stöfum og að hámarki með $t+1$ markverðum stöfum.

Athugið að ef e er minnsta heila talan þannig að $|r| < 10^e$, þá gefur seinni ójafnan matið

$$|r - x| = 0.0\ldots 0a_t a_{t+1}\ldots \cdot 10^e,$$

þar sem núllin aftan við punkt eru t talsins.

Einnig er hægt að útfæra þetta fyrir aðrar grunntölur en 10.

1.6.2 Úrlausn annars stigs jöfnu

Þegar núllstöðvar annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ eru reiknaðar út úr formúlunni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

verður til styttingarskekkja ef b^2 er miklu stærra heldur en $4ac$ vegna $|b| \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$. Við komumst hjá þessum vandræðum með því að líta á margliðuna fullþáttaða $a(x-x_1)(x-x_2)$ og notfæra okkur að núllstöðvarnar x_1 og x_2 uppfylla $x_1x_2 = c/a$.

Ef $b > 0$, þá reiknum við x_1 fyrst út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og síðan} \quad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef aftur á móti $b < 0$, þá reiknum við fyrst x_1 út úr formúlunni

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og síðan} \qquad x_2 = \frac{c/a}{x_1}.$$

Ef $b^2 \approx 4ac$ þá lendum við í styttingarskekkjum, en við neyðumst til þess að lifa með þeim.

1.6.3 Áhrif gagnaskekkju

Hugsum okkur að við séum að finna nálgun á núllstöð falls $x \mapsto f(x, \alpha)$. Við viljum finna nálgun x á lausninni $r = r(\alpha)$ sem uppfyllir

$$f(r, \alpha) = 0$$

og við lítum á α sem stika (t.d. náttúrulegur fasti).

Gerum ráð fyrir að α_0 sé nálgun á α og að við þekkjum nálgun á $r(\alpha_0)$ sem er lausn á jöfnunni $f(x, \alpha_0) = 0$.

Við viljum athuga hversu mikil áhrif nálgun á α með α_0 hefur á lausnina okkar, þ.e. við þurfum að meta skekkjuna $r(\alpha) - r(\alpha_0)$.

Ef við gefum okkur að f sé samfellt deildanlegt í grennd um punktinn (x_0, α_0), þar sem $x_0 = r(\alpha_0)$ og $\partial_x f(x_0, \alpha_0) \neq 0$, þá segir setningin um fólgin föll að til sé grennd I um punktinn α_0 í $\mathbb{R}$ og samfellt deildanlegt fall $r : I \to \mathbb{R}$, þannig að $r(\alpha_0) = x_0$ og $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ fyrir öll $\alpha \in I$.

Með öðrum orðum má segja að við getum alltaf leyst jöfnuna $f(x, \alpha) = 0$ með tilliti til x þannig að út komi lausn $x = r(\alpha)$ sem er samfellt diffranlegt fall af α.

Keðjureglan gefur okkur nú gildi afleiðunnar, því af jöfnunni $f(r(\alpha), \alpha) = 0$ leiðir að fallið $I \ni \alpha \mapsto f(r(\alpha), \alpha)$ er fast, þannig að

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha} f(r(\alpha), \alpha) = f'_x(r(\alpha), \alpha) \cdot r'(\alpha) + f'_\alpha(r(\alpha), \alpha).$$

Þetta gefur

$$r'(\alpha) = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha), \alpha)}{f'_x(r(\alpha), \alpha)}.$$

Nú látum við e tákna skekkjuna í nálguninni á α með α_0, $e = \alpha - \alpha_0$. Þá fáum við skekkjumatið

$$r(\alpha) - r(\alpha_0) \approx r'(\alpha_0) \cdot e = \frac{-f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)}{f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)} \cdot e$$

og jafnframt mat á hlutfallslegri skekkju

$$\frac{|r(\alpha) - r(\alpha_0)|}{|r(\alpha)|} \approx \frac{|f'_\alpha(r(\alpha_0), \alpha_0)|}{|r(\alpha_0) f'_x(r(\alpha_0), \alpha_0)|} \cdot |e|.$$

1.6.4 Sýnidæmi

Við skulum nú líta á það verkefni að finna nálgun á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$, þar sem við gerum ráð fyrir því að þurfa að nálga π með 3.14.

Okkur eru gefnar niðurstöður úr nálguninni með einhverri aðferð. Við setjum $f(x, \alpha) = 1 - e^{-x} - \sin(\alpha x)$ og fáum

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert^2}$
0			0.8
1	0.81276894538752	0.00014017936338	0.8597
2	0.81262876602414	0.00000001621651	0.8253
3	0.81262874980763	0.00000000000000	0.8444

Hér er $\alpha = \pi$ og $\alpha_0 = 3.14$ og þar með $|e| < 0.0016$.

Hlutafleiðurnar eru $f'_x(x, \alpha) = e^{-x} - \alpha \cos(\alpha x)$ og $f'_\alpha(x, \alpha) = -x \cos(\alpha x)$.

Við stingum tölunum okkar inn í matið og notum punktinn $(x_3, \alpha_0) = (0.8126, 3.14)$. Það gefur

$$\begin{aligned} r(\pi) - r(3.14) &\approx r'(3.14) \cdot e \\ &\approx \frac{|0.8126 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|}{|e^{-0.8126} - 3.14 \cdot \cos(0.8126 \cdot 3.14)|} \, 0.0016 \\ &\approx 0.4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Þetta mat segir okkur að við eigum að gera ráð fyrir að áhrif gagnaskekkjunnar séu þau að við fáum lausn með þremur réttum stöfum, $r(\pi) \approx 0.813$. Nálgun okkar á minnstu jákvæðu lausn jöfnunnar $\sin(\pi x) = 1 - e^{-x}$ er því 0.813.

1.6.5 O-ritháttur

Látum f og g vera tvö föll sem skilgreind eru á bili $I \subset \mathbb{R}$ og látum c vera tölu á I eða annan hvorn endapunkt I.

Við segjum að $f(t)$ *sé stórt O af* $g(t)$ og skrifum

$$f(t) = O(g(t)), \qquad t \to c,$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|f(t)| \le C|g(t)|$$

gildi fyrir öll t í einhverri grennd um c.

Athugið að grennd um $c = +\infty$ er bil af gerðinni $]\alpha, +\infty[$ og grennd um $c = -\infty$ er bil af gerðinni $]-\infty, \alpha[$.

1.6.6 O-ritháttur og skekkja í Taylor-nálgnum

Oft er O-ritháttur notaður þegar fjallað er um skekkjur í Taylor-nálgunum,

$$\begin{aligned} f(x) - T_n f(x;c) &= f(x) - f(c) - f'(x-c) - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} = O\big((x-c)^{n+1}\big), \quad x \to c \end{aligned}$$

1.6.7 Sýnidæmi

Það eru til haugar af dæmum, sem við þekkjum vel.

Setning Taylors gefur okkur:

$$\begin{aligned} x - \sin x &= O(x^3), \quad x \to 0 \\ x - \frac{x^3}{3!} - \sin x &= O(x^5), \quad x \to 0 \end{aligned}$$

1.6.8 O-ritháttur fyrir runur

Látum nú (a_n) og (b_n) vera tvær talnarunur. Við segjum að a_n *sé stórt O af* b_n og skrifum

$$a_n = O(b_n),$$

ef til er fasti $C > 0$ þannig að ójafnan

$$|a_n| \le C|b_n|$$

gildi fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

1.6.9 Tvö sýnidæmi

- Út frá Taylor-röðinni fyrir $\cos x$ fáum við að

  $$\cos(1/n) - 1 + 1/(2n^2) = O(1/n^4)$$

- Út frá

  $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

  sjáum við að

  $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

1.7 Fleytitalnakerfið

1.7.1 Framsetning á tölum

Ef r er rauntala frábrugðin 0 og β er náttúrleg tala, 2 eða stærri, þá er til einhlýtt ákvörðuð framsetning á r af gerðinni

$$r = \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta \times \beta^e$$

þar sem e er heiltala og d_j eru heiltölur

- $1 \leq d_1 < \beta$,
- $0 \leq d_j < \beta$, $j = 2, 3, 4, \dots$.

Tölvur reikna ýmist í *tvíundarkerfi* með $\beta = 2$ eða í *sextánundarkerfi* með $\beta = 16$, en við mannfólkið með okkar tíu fingur reiknum í *tugakerfi* með $\beta = 10$.

1.7.2 Mantissa

Formerkið og runan

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots)_\beta = \pm \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$$

nefnist *mantissa* tölunnar r.

Við skrifum

$$(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{\beta^j}$$

ef $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ og segjum þá að talan r hafi k-stafa mantissu.

1.7.3 Markverðir β-stafir

Ef rauntalan x er nálgun á r, þá segjum við að x sé nálgun á r með *að minnsta kosti t markverðum β -stöfum* ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

Ef við höfum að auki að

$$\beta^{-t-1} < \frac{|r - x|}{|r|} \leq \beta^{-t}.$$

þá segjum við að x sé nálgun á r með t *markverðum β -stöfum*.

Athugið að ef e er minnsta heila talan þannig að $|r| < \beta^e$, þá gefur seinni ójafnan matið

$$|r - x| = (0.0 \dots 0 a_t a_{t+1} \dots)_\beta \times \beta^e,$$

þar sem núllin aftan við punkt eru t talsins.

1.7.4 Afrúningur talna

Ef r er sett fram á stöðluðu β-fleytitöluformi, þá nefnist talan

$$x = (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

afskurður tölunnar r *við* k *-ta aukastaf* r, en talan

$$x = \begin{cases} \pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e, & d_{k+1} < \beta/2, \\ \pm((0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta + \beta^{-k}) \times \beta^e, & d_{k+1} \geq \beta/2. \end{cases}$$

nefnist *afrúningur tölunnar* r *við* k *-ta aukastaf*.

Við köllum þessar aðgerðir *afskurð* (e. chopping) og *afrúning* (e. rounding).

1.7.5 Fleytitölukerfi

Fleytitölukerfi er endanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem samanstendur af öllum tölum

$$\pm(0.d_1 d_2 \dots d_k)_\beta \times \beta^e$$

þar sem d_j eru heiltölur eins og áður var lýst, k er föst tala og við höfum mörk á veldisvísinum $m \leq e \leq M$.

Allar tölvur vinna með eitthvert fleytitölukerfi, oftast með grunntölu $\beta = 2$ eða $\beta = 16$ eins og áður sagði.

Eftir hverja aðgerð í tölvunni þarf að nálga útkomuna með *afskurði* eða *afrúningu*.

Ef við förum ekki varlega þá getur þetta magnað upp skekkju.

Sjá Úrlausn annars stigs jöfnu.

1.7.6 IEEE staðlar

- Single: $\beta = 2, k = 24, m = -125$ og $M = 128$,
- Double: $\beta = 2, k = 53, m = -1021$ og $M = 1024$.

1.7.7 Útreikningur í tugakerfi

Þegar reiknað er í tugakerfi er tölurnar afrúnaðar við k-ta aukastaf ef skekkjan í nálgun á þeim er minni en $\frac{1}{2} \times 10^{-k}$. Ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} < 10^{-k-1}$$

þá treystum við öllum k stöfum mantissunnar, en ef

$$\frac{|r - x|}{|r|} > 10^{-k+q},$$

þá eru síðustu q stafir mantissunnar marklausir auk þess sem vænta má nokkurs fráviks í d_{k-q}.

KAFLI 2

Núllstöðvar

Build a man a fire, and he'll be warm for a day. Set a man on fire, and he'll be warm for the rest of his life.

- Terry Pratchett, Jingo

2.1 Nálgun á núllstöð

2.1.1 Skilgreining

Munum að talan $p \in I$ sögð vera *núllstöð* fallsins $f : I \to \mathbb{R}$ ef

$$f(p) = 0.$$

2.1.2 Dæmi

Það er auðvelt að finna núllstöðvar (**rót**) annars stigs margliðu $ax^2 + bx + c$, því

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ef

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Svipaðar formúlur eru til fyrir núllstöðvar þriðja og fjórða stigs margliða. Einnig þekkjum við núllstöðvar hornafalla.

2.1.3 Athugasemd

Almennt er hins vegar erfitt að finna núllstöðvar falla. Til dæmis er ekki til almenn formúla fyrir núllstöðvar margliða af stigi 5 og hærra (sjá Abel-Ruffini setningin).

Eins er ekki hægt treysta á það að geta fundið nákvæmlega núllstöðvar almennra falla með því að nota þekkingu okkar á algebru og stærðfræðigreininu. Hverjar (og hversu margar) eru t.d. núllstöðvar

$$e^x + x^3?$$

Aðferðirnar í þessum kafla ganga út á að finna nálgun á núllstöðvum falla og í sumum tilvikum hjálpa þær okkur einnig að sýna fram á tilvist núllstöðva (sem er ekki alltaf sjálfgefin).

2.2 Helmingunaraðferð

Fyrsta aðferðin til að finna núllstöðvar sem við skoðum kallast helmingunaraðferð (e. bisection method).

2.2.1 Milligildissetningin

Ef f er samfellt á $[a,b]$ og y er einhver tala á milli $f(a)$ og $f(b)$, þá er til c þannig að $a<c<b$ og $f(c)=y$.

2.2.2 Afleiðing

Svo ef við höfum a og b þannig að $a<b$ og þannig að $f(a)$ og $f(b)$ hafi ólík formerki, þá hefur f núllstöð p á bilinu $[a,b]$.

Notum okkur þetta til þess að finna rætur.

1. Látum $x=\frac{1}{2}(a+b)$ vera miðpunkt $[a,b]$.
2. Reiknum $f(x)$, þá geta þrjú tilvik komið upp:
   (a) $f(x)=0$ og leitinni að rót er lokið.
   (b) $f(a)$ og $f(x)$ hafa sama formerki, þannig að við leitum að rót á bilinu $[x,b]$.
   (c) $f(x)$ og $f(b)$ hafa sama formerki, þannig að við leitum að rót á bilinu $[a,x]$.

Í tilviki (ii) segir milligildissetningin að f hafi rót á bilinu $[x,b]$, og í tilviki (iii) er rótin á bilinu $[a,x]$. Þá getum við farið aftur í skref 1, nema með helmingi minna bil en áður.

Með því að ítreka þetta ferli n sinnum fáum við minnkandi runu af bilum

$$[a,b]=[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n].$$

Billengdin helmingast í hverju skrefi og milligildissetningin segir okkur að það sé núllstöð á öllum bilunum.

Rununa af bilunum

$$[a,b]=[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

skilgreinum við með ítrun og notum til þess rununa $x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$.

Setjum $a_0=a$, $b_0=b$, og $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$.

Gefið er $x_0,\dots,x_n$. Reiknum $f(x_n)$.

1. Ef $f(x_n)=0$, þá er núllstöð fundin og við hættum.
2. Ef $f(x_n)$ og $f(a_n)$ hafa sama formerki, þá setjum við $a_{n+1}=x_n$, $b_{n+1}=b_n$, og $x_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+b_{n+1})$
3. annars setjum við $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x_n$ og $x_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+b_{n+1})$.

2.2.3 Skekkjumat í helmingunaraðferð

Ef við látum miðpunktinn $p_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ vera nálgunargildi okkar fyrir núllstöð fallsins f í bilinu $[a_n,b_n]$, þá er skekkjan í nálguninni

$$e_n=p-p_n$$

og við höfum skekkjumatið

$$|e_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^n},$$

það er

$$|e_n| < \frac{b - a}{2^n}.$$

2.2.4 Fyrirframmat á skekkju

Nú er auðvelt að meta hversu margar ítrekanir þarf að framkvæma til þess að nálgunin lendi innan gefinna skekkjumarka.

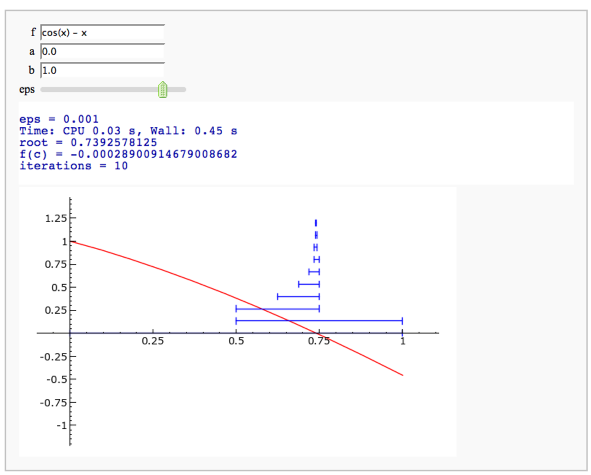
Ef $\varepsilon > 0$ er gefið og við viljum að $|e_n| < \varepsilon$, þá dugir að

$$|e_n| \leq \frac{b - a}{2^n} < \varepsilon.$$

Seinni ójafnan jafngildir því að

$$n > \frac{\ln\big((b - a)/\varepsilon\big)}{\ln 2}.$$

Double Precision Root Finding Using Bisection



2.3 Fastapunktsaðferð

Næsta aðferð sem við skoðum kallast fastapunktsaðferð (e. fixed point method) og er til að finna fastapunkta en ekki núllstöðvar. Það er hins vegar hægt að nota hana til þess að finna núllstöðvar, sjá athugasemd hér að *neðan*.

2.3.1 Skilgreining

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Punktur $r \in [a, b]$ þannig að

$$f(r) = r$$

kallast *fastapunktur* fallsins f.

Athugasemd: Athugum að í fastapunktum skerast graf fallsins $y = f(x)$ og línan $y = x$. Verkefnið að ákvarða fastapunkta fallsins r er því jafngilt því að athuga hvar graf f sker línuna $y = x$.

2.3.2 Tenging við núllstöðvar

Verkefnið að finna fastapunkta fallsins $g(x)$ er jafngilt því að finna núllstöðvar fallsins $f(x) = g(x) - x$.

Þannig að ef við viljum t.d. finna núllstöð $f(x) = e^x + x^3$ þá er nóg að finna fastapunkt fallsins $g(x) = e^x + x^3 + x$.

2.3.3 Reiknirit

Byrjunarskref: Valin er tala $x_0 \in [a, b]$.

Ítrunarskref: Ef $x_0, \ldots, x_n$ hafa verið valin, þá setjum við

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Athugasemd: Til þess að þetta sé vel skilgreind runa, þá verðum við að gera ráð fyrir að $f(x) \in [a, b]$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Þetta skilyrði er einnig skrifað

$$f([a, b]) \subset [a, b].$$

Athugasemd: Ef f er samfellt og runan er samleitin með markgildið r, þá er

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(r).$$

Þetta segir okkur að *ef* við getum séð til þess að runan verði samleitin, þá er markgildið fastapunktur.

2.3.4 Skilgreining: Herping

Fall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er sagt vera *herping* ef til er fasti $\lambda \in [0, 1[$ þannig að

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y| \qquad \text{fyrir öll } x, y \in [a, b].$$

Athugasemd: Sérhver herping er samfellt fall.

2.3.5 Setning

Ef f er deildanlegt fall á $]a, b[$, þá gefur meðalgildissetningin okkur til er ξ milli x og y þannig að

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Ef til er $\lambda \in [0, 1[$ þannig að $|f'(x)| \leq \lambda$ fyrir öll $x \in [a, b]$, þá er greinilegt að f er herping.

2.3.6 Fastapunktssetningin

Látum $f : [a,b] \to [a,b]$ vera herpingu. Þá hefur f nákvæmlega einn fastapunkt r á bilinu $[a,b]$ og runan (x_n) þar sem

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a,b] \quad \text{getur verið hvaða tala sem er og} \\ x_{n+1} &= f(x_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

stefnir á fastapunktinn.

Sönnunina brjótum við upp í nokkur skref.

1. skref, herping hefur í mesta lagi einn fastapunkt

Sönnum þetta með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að r og s séu tveir ólíkir fastapunktar á $[a,b]$. Þá er

$$|r-s| = |f(r)-f(s)| \leq \lambda|r-s| < |r-s|$$

því $\lambda < 1$. Þetta fær ekki staðist, þannig að fjöldi fastapunkta er í mesta lagi einn

2. skref, fallið f hefur fastapunkt:

Látum $g(x) = f(x) - x$, þá eru núllstöðvar g nákvæmlega fastapunktar f.

Þar sem $a \leq f(x) \leq b$ fyrir öll $x \in [a,b]$ er

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

Ef annað hvort $g(a) = 0$ eða $g(b) = 0$ höfum við fundið fastapunkt fallsins f og við getum hætt.

Ef hins vegar $g(a) > 0$ og $g(b) < 0$ þá hefur g ólík formerki í endapunktum bilsins $[a,b]$ og hefur því núllstöð r á bilinu skv. milligildissetningunni. Þá er r jafnframt fastapunktur f.

Skref 1 og 2 sýna því að fallið f hefur nákvæmlega einn fastapunkt á bilinu.

3. skref, runan (x_n) er samleitin

Látum r vera ótvírætt ákvarðaða fastapunktinn á $[a,b]$.

Við notfærum okkur að f er herping og að r er fastapunktur f, þá fæst að fyrir sérhvert $k \in \mathbb{N}$ þá er

$$|r - x_k| = |f(r) - f(x_{k-1})| \leq \lambda|r - x_{k-1}|$$

það er $|r - x_k| \leq \lambda|r - x_{k-1}|$.

Með því að nota þetta n-sinnum þá fæst að

$$\begin{aligned} |r - x_n| &\leq \lambda|r - x_{n-1}| && (k = n) \\ &\leq \lambda^2|r - x_{n-2}| && (k = n-1) \\ &\vdots && \vdots \\ &\leq \lambda^n|r - x_0| && (k = 1). \end{aligned}$$

Þar sem $\lambda < 1$ er því

$$\lim_{n\to+\infty} |r - x_n| \leq \lim_{n\to+\infty} \lambda^n|r - x_0| = 0,$$

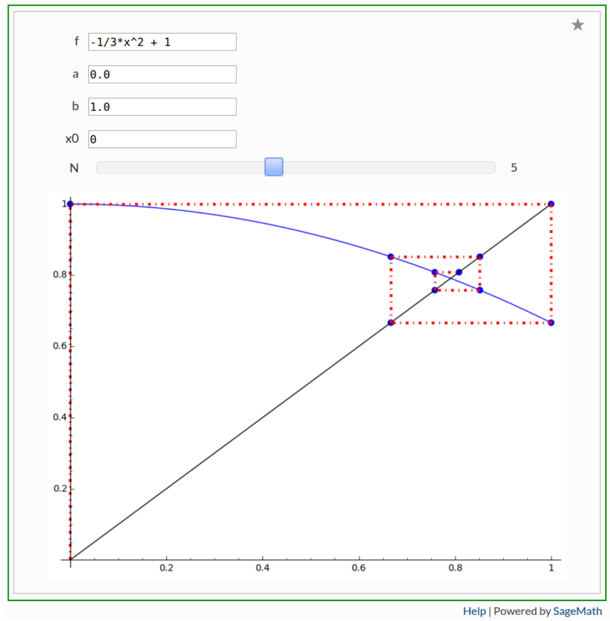
það er runan x_n stefnir á r.

2.3.7 Fastapunktsaðferð er að minnsta kosti línulega samleitin

Af skilgreiningunni á rununni x_n leiðir beint að

$$|e_{n+1}| = |r - x_{n+1}| = |f(r) - f(x_n)| \le \lambda |r - x_n| = \lambda |e_n|$$

sem segir okkur að fastapunktsaðferð sé að minnsta kosti línulega samleitin ef f er herping.



2.4 Sniðilsaðferð

Næst er aðferð til að finna núllstöðvar sem kallast *sniðilsaðferð* (e. secant method)

Gefið er fallið $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Við ætlum að ákvarða núllstöð f, þ.e.a.s. $p \in [a, b]$ þannig að

$$f(p) = 0.$$

Rifjum upp að *sniðill* við graf f gegnum punktana $(\alpha, f(\alpha))$ og $(\beta, f(\beta))$ er gefinn með jöfnunni

$$y = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](x - \alpha)$$

þar sem hallatalan er

$$f[\alpha, \beta] = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

Sniðillinn sker x-ásinn í punkti s þar sem

$$0 = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](s - \alpha) \quad \text{sem jafngildir því að} \quad s = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f[\alpha, \beta]}.$$

2.4.1 Reiknirit

Byrjunarskref: Giskað er á tvö gildi x_0 og x_1.

Ítrunarskref: Fyrir $n > 1$ þá er punkturinn x_{n+1} skilgreindur sem skurðpunktur sniðilsins gegnum $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$ við x-ás, þ.e.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

2.4.2 Samleitin runa stefnir á núllstöð f

Gefum okkur að runan (x_n) sé samleitin að markgildinu r. Meðalgildissetningin segir okkur þá að til sé punktur η_n á milli x_{n-1} og x_n þannig að

$$f[x_n, x_{n-1}] = f'(\eta_n),$$

og greinilegt er að $\eta_n \to r$.

Við fáum því

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\eta_n)}\right) = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

Þessi jafna jafngildir því að $f(r) = 0$.

2.4.3 Skekkjumat í nálgun á $f(x)$ með $p_n(x)$

Sniðilinn sem við notum er graf 1. stigs margliðunnar

$$p_n(x) = f(x_n) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x - x_n) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n)$$

Samkvæmt skilgreiningu er $p_n(x_{n+1}) = 0$ svo x_{n+1} uppfyllir jöfnuna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

Við þurfum að vita hver skekkjan er á því að nálga $f(x)$ með $p_n(x)$.

Niðurstaðan er að fyrir sérhvert $x \in [a, b]$ er til ξ_n sem liggur í minnsta bilinu sem inniheldur x, x_n og x_{n-1} þannig að

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

Ljóst er að matið gildir ef $x = x_{n-1}$ eða $x = x_n$.

Festum því punktinn x og gerum ráð fyrir að $x \neq x_1$ og $x \neq x_n$.

Skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda(t - x_n)(t - x_{n-1})$$

þar sem λ er valið þannig að $g(x) = 0$.

Látum nú $\alpha < \beta < \gamma$ vera uppröðun á punktunum x_{n-1}, x_n og x.

Fallið

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda(t - x_n)(t - x_{n-1})$$

hefur núllstöð í öllum punktunum þremur.

Meðalgildissetningin gefur þá að $g'(t)$ hefur eina núllstöð í punkti á bilinu $]\alpha, \beta[$ og aðra í $]\beta, \gamma[$.

Af því leiðir aftur að $g''(t)$ hefur núllstöð, ξ_n, í $[\alpha, \gamma]$, sem er minnsta bilið sem inniheldur alla punktana x_{n-1}, x_n og x.

Af þessu leiðir

$$0 = g''(\xi_n) = f''(\xi_n) - 2\lambda \quad \text{þþaa} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}f''(\xi_n).$$

Nú var λ upprunalega valið þannig að $g(x) = 0$. Þar með er

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}).$$

2.4.4 Skekkjumat í sniðilsaðferð

Skoðum hvað af þessu leiðir:

Nú er $f(r) = 0$ og því

$$-p_n(r) = \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n \cdot e_{n-1}.$$

Eins er

$$-p_n(r) = -f[x_n, x_{n-1}]e_{n+1} = -f'(\eta_n)e_{n+1},$$

þar sem η_n fæst úr meðalgildissetningunni og liggur á milli x_n og x_{n+1}. Niðurstaðan verður því

$$e_{n+1} = \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f[x_n, x_{n+1}]}e_n e_{n-1} = \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)}e_n e_{n-1}$$

það er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(r)}.$$

2.4.5 Setning

Ef sniðilsaðferð er samleitin, $f \in C^2([a, b])$ (tvisvar diffranlegt) og $f'(r) \neq 0$, þá er sniðilsaðferðin ofurlínuleg.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}e_{n-1}|}{|e_n e_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n-1}\frac{1}{2}f''(r)|}{|f'(r)|} = 0$$

Raunar þá er sniðilsaðferðin samleitin af stigi $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ og með $\lambda = \left(\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right)^{\alpha-1}$.

2.5 Aðferð Newtons

Í sniðilsaðferðinni létum við x_{n+1} vera skurðpunkt sniðils gegnum $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$ við x-ás og fengum við rakningarformúluna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

Aðferð Newtons er nánast eins, nema í stað sniðils tökum við snertil í punktinum $(x_n, f(x_n))$.

Rakningarformúlan er eins, nema hallatalan verður $f'(x_n)$ í stað $f[x_n, x_{n-1}]$

2.5.1 Reiknirit

Byrjunarskref: Giskað er á eitt gildi x_0.

Ítrunarskref: Gefin eru $x_0, \ldots, x_n$. Punkturinn x_{n+1} er skurðpunktur snertils gegnum $(x_n, f(x_n))$ við x-ás,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2.5.2 Upprifjun

Munum að snertill við graf f í punktinum x_n er

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

þessi lína sker x-ásinn ($y = 0$) þegar $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2.5.3 Samleitin runa stefnir á núllstöð f

Gefum okkur að runan (x_n) sé samleitin með markgildið r. Við fáum því

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

Þessi jafna jafngildir því að $f(r) = 0$.

Þannig að ef runan er samleitin þá fáum við núllstöð.

2.5.4 Skekkjumat í nálgun á $f(x)$ með $p_n(x)$

Snertillinn við f í punktinum x_n er 1. stigs margliðan

$$p_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Samkvæmt skilgreiningu er $p_n(x_{n+1}) = 0$ svo x_{n+1} uppfyllir jöfnuna

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Athugum að p_n er fyrsta Taylor nálgunin við fallið f kringum x_n. Setning Taylors gefur að til er ξ_n sem liggur á milli r og x_n þannig að

$$f(r) - p_n(r) = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(r - x_n)^2.$$

2.5.5 Skekkjumat í aðferð Newtons

Nú er $f(r) = 0$ og því

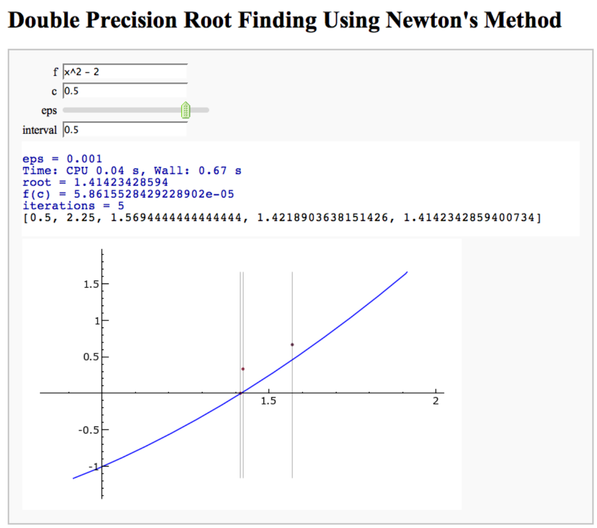
$$-p_n(r) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n^2.$$

Eins er fæst af skilgreiningunni á p_n að

$$-p_n(r) = -f'(x_n) e_{n+1}$$

Niðurstaðan verður því

$$e_{n+1} = \frac{-\frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2$$



2.5.6 Setning

Ef aðferð Newtons fyrir fallið f er samleitin, $f \in C^2([a,b])$ og $f'(r) \neq 0$, þá fáum við:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(r)}$$

Það þýðir að aðferð Newtons er ferningssamleitin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}f''(\xi_n)}{f'(x_n)} = \frac{-\frac{1}{2}f''(r)}{f'(r)}$$

Athugasemd: Athugið að það er ekki sjálfgefið að aðferð Newtons sé samleitin.

Auðvelt er að finna dæmi þar sem vond upphafságiskun x_0 skilar runu sem er ekki samleitin.

2.6 Samanburður á aðferðum

Aðferð	Samleitni	Stig samleitni
Helmingunaraðferð (e. bisection method)	Já, ef $f(a)f(b) < 0$	1, línuleg
Fastapunktsaðferð (e. fixed point iteration)	Ekki alltaf. En saml. ef f er herping	amk 1
Sniðilsaðferð (e. secant method)	Ekki alltaf	$\approx 1,618$, ef $f'(r) \neq 0$
Aðferð Newtons (e. Newtons method)	Ekki alltaf	2, ef $f'(r) \neq 0$

Aðvörun: Þó að aðferð Newtons sé samleitin af stigi 2, en sniðilsaðferðin af stigi u.þ.b. 1,618, þá er í vissum tilfellum hagkvæmara að nota sniðilsaðferðina ef það er erfitt að reikna gildin á afleiðunni f'.

KAFLI 3

Brúun

Over the centuries, mankind has tried many ways of combating the forces of evil... prayer, fasting, good works and so on. Up until Doom, no one seemed to have thought about the double-barrel shotgun. Eat leaden death, demon. – Terry Pratchett

3.1 Inngangur

3.1.1 Markmiðið

Viðfangsefni þessa kafla er að finna ferla sem ganga gegnum fyrirfram gefna *brúunarpunkta* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ í planinu eða liggja nálægt punktunum í einhverjum skilningi.

Fyrst viljum við finna graf margliðu p sem fer gegnum punktana. Þá þurfum við að gefa okkur að $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$.

Við sýnum fram á að það sé alltaf hægt að finna margliðu p af stigi $\leq m$ sem uppfyllir $p(x_i) = y_i$ í öllum punktum og að slík margliða sé ótvírætt ákvörðuð.

Hún nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Við alhæfum þetta verkefni með því að úthluta sérhverjum punkti jákvæðri heiltölu m_i og krefjast þess graf margliðunnar fari í gegnum alla punktana og til viðbótar að allar afleiður $p^{(j)}$ upp að stigi $m_i - 1$ taki einnig fyrirfram gefin gildi $y_i^{(j)}$.

3.1.2 Brúun

Við tilraunir þá fáum við oft aðeins strjálar mælingar, t.d. ef við mælum hljóðhraða við mismunandi hitastig. Hins vegar þá viljum við vita hvert sambandið er fyrir öll möguleg hitastig. Brúunin er margliða og hún skilgreind er fyrir allar rauntölur og ''brúar'' því gildin milli mælipunktanna.

3.1.3 Afhverju margliður?

- Einfalt að meta fallgildin fyrir margliður (Reiknirit Horners).
- Einfalt að diffra og heilda margliður.
- Margliður eru óendanlega oft diffranlegar.
- *Setning Weierstrass:* Látum f vera samfellt fall á bili $[a, b]$. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ þá er til margliða p þannig að

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Athugasemd: Setning Weierstrass segir að margliður nægja til að nálga samfelld föll. Það er sama hvað samfellda fall við skoðum það er alltaf til margliða sem nálgar það eins vel og við viljum á lokuðu bili.

3.1.4 Margliður

Fall p af gerðinni

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

þar sem m er heiltala og $a_0, \ldots, a_m$ eru tvinntölur nefnist margliða.

Stærsta talan j þannig að $a_j \neq 0$ nefnist *stig margliðunnar* p.

Ef allir stuðlarnir eru 0 þá nefnist p *núllmargliðan* og við segjum að stig hennar sé $-\infty$.

Munum að stuðullinn a_j við veldið x^j er gefinn með formúlunni

$$a_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

3.1.5 Mismunandi leiðir á framsetningu

Hægt er að setja sömu margliðuna fram á marga mismunandi vegu, en við nefnum framsetninguna hér að framan *staðalform margliðunnar* p.

Ef við veljum okkur einhvern punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, þá getum við skrifað

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_m(x - x_0)^m$$

og stuðlarnir b_j eru gefnir með

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Þessi formúla er jafngild þeirri staðreynd að ef p er margliða af stigi m. Þá er Taylor-röð p í sérhverjum punkti $x_0 \in \mathbb{R}$ bara margliðan p, og stuðlarnir í Taylor-röðinni eru gefnir með formúlunum fyrir b_j að ofan.

3.1.6 Newton-form margliðu

Ef við veljum okkur m punkta $x_0, \ldots, x_{m-1}$ þá nefnist framsetning af gerðinni

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_m(x - x_0)\cdots(x - x_{m-1})$$

Newton-form margliðunnar p miðað við punktana $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

3.1.7 Reiknirit Horners

Við munum mikið fást við margliður á Newton-formi og því er nauðsynlegt að hafa hraðvirkt reiknirit til þess að reikna út fallgildi p út frá þessari framsetningu.

Eitt slíkt reiknirit er nefnt *reiknirit Horners*. Það byggir á því að nýta sér að þættirnir $(x - x_j)$ eru endurteknir í liðunum

$$(x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \dots$$

Þar sem við sleppum við að hefja í veldi þá komumst við af með fáar reikniaðgerðir hér.

Ef $m = 2$ má skrifa Newton-form p sem

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1) \cdot c_2).$$

Ef $m = 3$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)c_3))$$

og ef $m = 4$ er það

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + c_4(x - x_3)))).$$

Reikniritið vinnur á þessari stæðu með því að margfalda upp úr svigunum frá hægri til vinstri.

Skilgreinum tölur $b_0, b_1, \dots$ á eftirfarandi hátt. Fyrst setjum við

$$b_n = c_n.$$

Fyrir hvert k frá $n - 1$ niður í 0 þá setjum við

$$b_k = c_k + (a - x_k)b_{k+1}.$$

Þá er $b_0 = p(a)$.

$$p(a) = \underbrace{c_0 + (a - x_0)(\underbrace{c_1 + (a - x_1)(\underbrace{c_2 + (a - x_2)(\underbrace{c_3 + (a - x_3)\underbrace{c_4}_{b_4}}_{b_3})}_{b_2})}_{b_1})}_{b_0}.$$

3.2 Margliðubrúun: Lagrange-form

3.2.1 Margliðubrúun

Látum nú $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vera gefna punkta í plani. Við höfum áhuga á að finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Slík margliða nefnist *brúunarmargliða* fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$

eða *brúunarmargliða gegnum punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Augljóslega verðum við að gera ráð fyrir að x-hnitin séu ólík, það er $x_j \neq x_k$ ef $j \neq k$.

Verkefnið að finna margliðuna p nefnist *brúunarverkefni fyrir punktana* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

3.2.2 Setning: Brúunarmargliðan er ótvírætt ákvörðuð

Brúunarmargliðan af stigi $\leq m$ fyrir $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ er ótvírætt ákvörðuð.

Ef $p(x)$ og $q(x)$ eru tvær brúunarmargliður af stigi $\leq m$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ þá er mismunurinn $r(x) = p(x) - q(x)$ margliða af stigi $\leq m$ með núllstöðvar $x_0, \dots, x_m$. Þetta eru $m+1$ ólíkir punktar og því er $r(x)$ núllmargliðan samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar. Þar með er $p(x) - q(x)$ núllmargliðan, þ.e. $p(x) = q(x)$.

3.2.3 Setning: Brúunarmargliðan er til

Til er margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_0) = y_0, \quad \dots \quad p(x_n) = y_n.$$

Við notum þrepun til að sýna fram á tilvistina.

Ef $m = 0$, þá erum við aðeins með eitt brúunarskilyrði, $p(x_0) = y_0$, og fastamargliðan $p(x) = y_0$ er lausn af stigi ≤ 0.

G.r.f. að við getum leyst öll brúunarverkefni þar sem fjöldi punkta er m og sýnum að við getum þá leyst verkefnið fyrir $m+1$ punkt.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x),$$

$p(x)$ er greinilega margliða af stigi $\leq m$. Skoðum nú gildin á p

$$\begin{aligned} p(x_0) &= 1 \cdot q(x_0) + 0 \cdot r(x_0) = y_0, \\ p(x_k) &= \frac{x_k - x_m}{x_0 - x_m} y_k + \frac{x_k - x_0}{x_m - x_0} y_k = y_k, \qquad k = 1, \dots, m-1, \\ p(x_m) &= 0 \cdot q(x_m) + 1 \cdot r(x_m) = y_m. \end{aligned}$$

Þar með er p brúunarmargliðan sem uppfyllir $p(x_j) = y_j$ fyrir $j = 0, \dots, m$ og við höfum leyst brúunarverkefnið fyrir $m+1$ punkt.

3.2.4 Lagrange-form brúunarmargliðunnar

Sönnunin á undan er í raun rakningarformúla til þess að reikna út gildi brúunarmargliðunnar p fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

Hægt er að skrifa lausnina niður beint

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_m \ell_m(x),$$

þar sem $\ell_0, \dots, \ell_m$ er ákveðinn grunnur fyrir rúm allra margliða $\mathcal{P}_m$ af stigi $\leq m$ og nefnast *Lagrange-margliður fyrir punktasafnið* $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$.

3.2.5 Lagrange-margliður, tilfellin $m = 0, 1, 2$

- $m = 0$ Ef $m = 0$ þá er $p(x) = y_0$ fastamargliða eins og við höfum séð.

- $m = 1$ Ef $m = 1$, þá blasir við að lausnin er

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

  sem er margliða af stigi ≤ 1 (þ.e. lína) sem leysir brúunarverkefnið.

- $m = 2$ Á hliðstæðan hátt fáum við fyrir $m = 2$ að

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

  leysir brúunarverkefnið.

3.2.6 Lagrange-margliður almenna tilfellið

Almennt fæst lausnin

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \ldots + y_m\,\ell_m(x)$$

þar sem

$$\ell_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Athugasemd:

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases}$$

Allar margliðurnar ℓ_k eru af stigi m og því er p af stigi $\leq m$. Nú er augljóst útfrá ([p]) og ([l]) að p er lausn brúunarverkefnisins.

3.2.7 Sýnidæmi

Finnið brúunarmargliðuna gegnum punktana $(1, 1)$, $(2, 3)$ og $(3, 6)$ með því að nota Lagrange-margliður.

Reiknum fyrst margliðurnar ℓ_0, ℓ_1 og ℓ_2:

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \\
\ell_1 &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3) \\
\ell_2 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}
\end{aligned}$$

Þá fæst að brúunarmargliðan p er

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3 \cdot (x-1)(x-3) + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Þetta er greinilega annars stigs margliða og auðvelt er að sannfæra sig um að $p(1) = 1$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 6$.

3.3 Margliðubrúun: Newton-form

3.3.1 Formúla fyrir $c_0, \dots, c_m$

Nú ætlum við að leiða út formúlu fyrir stuðlunum $c_0, \dots, c_m$ í Newton-formi brúunarmargliðunnar p miðað við röð brúunarpunktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$.

Athugum að $c_m = a_m$, þar sem a_m er stuðullinn við veldið x^m í staðalframsetningunni á p.

Til þess að reikna út $c_0, \dots, c_m$ þurfum við að reikna út með skipulegum hætti stuðulinn við veldið x^j í brúunarmargliðunni gegnum punktana $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+j}, y_{i+j})$, fyrir öll $i = 0, \dots, m$ og $j = 0, \dots, m-i$. Við táknum þennan stuðul með $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$.

Aðvörun: Verkefnið er háð röð punktanna, þ.e. framsetningin (Newton-formið) á margliðunni breytist eftir röð punktanna. En auðvitað er margliðan og gildin á henni alltaf þau sömu
Dæmi: Skoðum margliðuna $p(x) = 2 - 7x + 5x^2$.
Ef $x_0 = 0$ og $x_1 = 2$ þá er Newton-form hennar

$$p(x) = 3 + 3(x-0) + 5(x-0)(x-2).$$

En ef $x_0 = 2$ og $x_1 = 0$ þá er Newton-form hennar

$$p(x) = 8 + 3(x-2) + 5(x-2)(x-0).$$

3.3.2 Mismunakvótar

Skilgreinum mismunakvóta $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ fyrir punktasafnið $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+j}, y_{i+j})$ á eftirfarandi hátt:

- $j = 0$: $y[x_i] = y_i$.
- $j = 1$: $y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
- $j = 2$: $y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$.
- $j > 2$: $y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$.

Athugasemd: Stærðin $y[x_{n-1}, x_n]$ hefur komið fyrir áður hjá okkur þegar við fjölluðum um *Sniðilsaðferð*, enda er sniðill ekkert annað en brúunarmargliða fyrir tvö punkta í planinu.

3.3.3 Upprifjun á tilvistarsönnuninni

Þrepunarskrefið í tilvistarsönnuninni fyrir brúunarmargliður gefur okkur nú hvernig mismunakvótarnir nýtast okkur.

Látum q vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_0, y_0), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ og r vera brúunarmargliðuna af stigi $\leq m-1$ fyrir punktana $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ og setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x)$$

Gerum nú ráð fyrir að stuðullinn við veldið x^{m-1} í $q(x)$ sé $y[x_0, \dots, x_{m-1}]$ og stuðullinn við veldið x^{m-1} í $r(x)$ sé $y[x_1, \dots, x_m]$.

Við sjáum þá að stuðullinn við veldið x^m í $p(x)$ er

$$\frac{y[x_0,\dots,x_{m-1}]}{x_0-x_m}+\frac{y[x_1,\dots,x_m]}{x_m-x_0}=y[x_0,\dots,x_m]$$

Athugasemd: Fyrir $m=0$ gildir að $p(x)=y_0=y[x_0]$.

3.3.4 Mismunakvótatöflur fyrir $m=0,1,2,3$

Mismunakvótar eru venjulega reiknaðir út í svokölluðum *mismunakvótatöflum*.

Ef $m=0$ er mismunakvótataflan aðeins ein lína

i	x_i	$y[x_i]$
0	x_0	$y[x_0]=y_0$

Ef $m=1$ er taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i,x_{i+1}]$
0	x_0	$y[x_0]=y_0$	$y[x_0,x_1]$
1	x_1	$y[x_1]=y_1$	

og margliðan er

$$p(x)=y[x_0]+y[x_0,x_1](x-x_0).$$

Ef $m=2$ verður taflan

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i,x_{i+1}]$	$y[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	x_0	$y[x_0]=y_0$	$y[x_0,x_1]$	$y[x_0,x_1,x_2]$
1	x_1	$y[x_1]=y_1$	$y[x_1,x_2]$	
2	x_2	$y[x_2]=y_2$		

og margliðan er

$$p(x)=y[x_0]+y[x_0,x_1](x-x_0)+y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Skoðum loks tilfellið $m=3$

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i,x_{i+1}]$	$y[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$y[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	x_0	$y[x_0]=y_0$	$y[x_0,x_1]$	$y[x_0,x_1,x_2]$	$y[x_0,x_1,x_2,x_3]$
1	x_1	$y[x_1]=y_1$	$y[x_1,x_2]$	$y[x_1,x_2,x_3]$	
2	x_2	$y[x_2]=y_2$	$y[x_2,x_3]$		
3	x_3	$y[x_3]=y_3$			

Brúunarmargliðan fæst svo með því að nota stuðlana úr fyrstu línu töflunnar:

$$\begin{aligned}p(x)=&y[x_0]+y[x_0,x_1](x-x_0)+y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&+y[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

3.3.5 Sýnidæmi

Við skulum reikna út aftur brúunarmargliðuna gegnum $(1,1)$, $(2,3)$ og $(3,6)$.

Stillum fyrst upp mismunakvótatöflu

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3		
2	3	6		

Fyllum svo út í hana með að ganga á hvern dálk á fætur öðrum

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\frac{3-1}{2-1} = 2$	$\frac{3-2}{3-1} = 1/2$
1	2	3	$\frac{6-3}{3-2} = 3$	
2	3	6		

Lesum út brúunarmargliðuna p með að ganga á efstu línuna:

$$p(x) = 1 + 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)(x-2).$$

Reiknum út brúunarmargliðuna gegnum $(3, 1)$, $(1, -3)$, $(5, 2)$ og $(6, 4)$. Stillum upp og fyllum út í mismunakvótatöflu:

i	x_i	$y[x_i]$,	$y[x_i, x_{i+1}]$,	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$,	$y[x_i, \dots, x_{i+3}]$
1	3	1	$\frac{-3-1}{1-3} = 2$	$\frac{5/4-2}{5-3} = -3/8$	$\frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40$
2	1	-3	$\frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4$	$\frac{2-5/4}{6-1} = 3/20$	
3	5	2	$\frac{4-2}{6-5} = 2$		
4	6	4			

Nú getum við lesið brúunarmargliðuna okkar úr töflunni með að ganga á efstu línuna, við fáum

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

Verkefnalisti

Umraða

3.3.6 Samantekt

Ef gefnir eru punktar $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ í $\mathbb{R}^2$, þar sem $x_i \neq x_j$ ef $i \neq j$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, m$$

Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0, \dots, x_{m-1}$ er

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_m)$$

þar sem mismunakvótarnir eru reiknaðir með rakningarformúlunum $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - y[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, \qquad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m - i.$$

3.3.7 Samantekt – Newton-form

Venja er að setja mismunakvótana upp í töflu og stuðlarnir í Newton-forminu raða sér í fyrstu línu töflunnar:

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+4}]$	$\ldots$
0	x_0	$y[x_0] = y_0$	$y[x_0, x_1]$	$y[x_0, x_1, x_2]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$y[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$
1	x_1	$y[x_1] = y_1$	$y[x_1, x_2]$	$y[x_1, x_2, x_3]$	$y[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$	
2	x_2	$y[x_2] = y_2$	$y[x_2, x_3]$	$y[x_2, x_3, x_4]$	$\ldots$		
3	x_3	$y[x_3] = y_3$	$y[x_3, x_4]$	$\ldots$			
4	x_4	$y[x_4] = y_4$	$\ldots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					

3.3.8 Samantekt – Lagrange-margliður

Lagrange-form brúunarmargliðunnar er

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \ell_k(x)$$

þar sem ℓ_k eru Lagrange-margliðurnar með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_m$,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_m)}.$$

$$Enruppfylla$$

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = k \\ 0 & \text{ef } i \neq k \end{cases}$$

3.4 Samantekt

3.4.1 Lagrange-margliður

- Auðvelt að finna margliðuna
- Dýrara að reikna fallgildin

3.4.2 Newton-margliður

- Erfiðara að finna margliðuna
- Auðvelt að finna fallgildin (reiknirit Horners)

3.5 Margliðubrúun: Margfaldir punktar

Látum $a_1, \ldots, a_k$ vera ólíka punkta í $\mathbb{R}$, $m_1, \ldots, m_k$ vera jákvæðar heiltölur og hugsum okkur að gefnar séu rauntölur

$$y_i^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Við viljum finna margliðu p af lægsta mögulega stigi þannig að margliðan $p = p^{(0)}$ og afleiður hennar $p^{(j)}$ uppfylli

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Við nefnum verkefnið að finna slíka margliðu p *alhæft brúunarverkefni*, og margliða sem uppfyllir þessi skilyrði nefnist *brúunarmargliða fyrir brúunarverkefnið* sem lýst er með gefnu skilyrðunum.

3.5.1 Margfeldni punktanna

Við segjum að a_i sé *einfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 1$, *tvöfaldur brúunarpunktur* ef $m_i = 2$ o.s.frv.

Við skilgreinum nú töluna

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1.$$

Brúunarmargliðan okkar p á að vera af stigi $\le m$, og fjöldi skilyrða sem við setjum á hana eru $m + 1$.

Athugasemd: Tilfellið $k = m + 1$, $m_j = 1$ er það sem við skoðuðum hér á undan.

3.5.2 Sértilfelli

Tvö sértilfelli þekkjum við nú þegar.

1. *Allir punktar eins:* Ef allir punktarnir eru einfaldir, þá er alhæfða brúunarverkefnið sama verkefni og brúunarverkefnið sem við leystum í Margliðubrúun: Lagrange-form og Margliðubrúun: Newton-form.

$$p^{(0)}(a_i) = p(a_i) = y_i^{(0)},$$

   og lausnin var leidd út með

$$x_0 = a_1, \dots, x_m = a_k \quad \text{og} \quad y_0 = y_1^{(0)}, \dots, y_m = y_k^{(0)}.$$

2. *Einn punktur:* Ef aftur á móti $k = 1$, þá er lausn gefin með Taylor-margliðunni af röð m í punktinum a_1

$$p(x) = y_1^{(0)} + \frac{y'}{1!}(x - a_1) + \frac{y''}{2!}(x - a_1)^2 + \dots + \frac{y_1^{(m)}}{m!}(x - a_1)^m.$$

3.5.3 Upprifjun

Munum að ef p er margliða og $p(a) = 0$ þá er p deilanleg með $(x - a)$. Það er, hægt er að skrifa

$$p(x) = (x - a)q(x),$$

þar sem q er margliða af stigi sem er einu lægra en stig p (sjá Undirstöðusetning algebrunnar).

3.5.4 Ótvíræðni lausnarinnar

Nú ætlum við að sýna fram á að til sé nákvæmlega ein margliða $p(x)$ af stigi $\le m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Byrjum á að sýna að það er í mesta lagi ein margliða sem uppfyllir þetta.

Gerum ráð fyrir að $p(x)$ og $q(x)$ séu tvær margliður af stigi $\le m$ sem uppfylla öll þessi skilyrði.

Þá uppfyllir margliðan $r(x) = p(x) - q(x)$ að

$$r^{(j)}(a_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

Af þessu leiðir að $r(x)$ er deilanlegt með $(x - a_i)^{m_i}$ en samanlagt stig þessara þátta er $m_1 + \ldots + m_k = m + 1$.

Nú er stig $r(x)$ minna eða jafnt m svo þetta getur aðeins gerst ef $r(x)$ er núllmargliðan.

Við höfum því að $p(x) = q(x)$ og ályktum að við höfum nákvæmlega eina lausn á brúunarverkefninu ef við getum sýnt fram á tilvist á lausn.

3.5.5 Tilvist á lausn

Nú beitum við sams konar röksemdafærslu og í byrjum kaflans til þess að sýna fram á tilvist á lausn, þ.e. við notum þrepun.

Smíðum margliðuna:

Ef $m = 0$, þá er lausnin fastamargliðan $p(x) = y_1^{(0)} = y_0$.

Gerum nú ráð fyrir að við getum fundið brúunarmargliðu af stigi $\leq m - 1$ fyrir sérhvert alhæft brúunarverkefni þar sem samanlagður fjöldi skilyrðanna er m.

Lítum nú aftur á upprunalega brúunarverkefnið þar sem fjöldi skilyrðanna er $m + 1$. Skilgreinum tvær runur af punktum

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1 \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$(y_0, y_1, \dots, y_m) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(m_k-1)})$$

Við höfum séð að í því tilfelli að við höfum einn punkt, $k = 1$, $x_0 = x_1 = \ldots = x_m = a_1$ er lausnin gefin með Taylor-margliðu í a_1.

Við megum því gera ráð fyrir punktarnir séu a.m.k. tveir, $k \geq 2$. Það gefur að $x_0 \neq x_m$.

Látum $q(x)$ vera margliðuna af stigi $\leq m - 1$ sem uppfyllir sömu skilyrði og p, nema það síðasta um að $q^{(m_k-1)}(a_k)$ þurfi að vera $y_k^{(m_k-1)}$.

og látum $r(x)$ vera margliðuna sem uppfyllir öll brúunarskilyrðin, nema síðasta skilyrðið í fyrsta punkti um að $r^{(m_1-1)}(a_1)$ sé jafnt $y_1^{(m_1-1)}$.

Setjum síðan

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Sýnum að gefin fallgildi eru tekin

Nú þurfum við að staðfesta að öll skilyrðin séu uppfyllt.

Við byrjum á því að taka $j = 0$ sem svarar til þess að p taki fyrirfram gefin fallgildi,

$$\begin{aligned}
p(a_1) &= \frac{a_1 - a_k}{a_1 - a_k} q(a_1) + \frac{a_1 - a_1}{a_k - a_1} r(a_1) = q(a_1) = y_1^{(0)} \\
p(a_i) &= \frac{a_i - a_k}{a_1 - a_k} q(a_i) + \frac{a_i - a_1}{a_k - a_1} r(a_i) = \left(\frac{a_i - a_k}{a_1 - a_k} + \frac{a_i - a_1}{a_k - a_1} \right) y_i^{(0)} \\
&= y_i^{(0)}, \qquad \text{fyrir } i = 2, \dots, k - 1, \\
p(a_k) &= \frac{a_k - a_k}{a_1 - a_k} q(a_k) + \frac{a_k - a_1}{a_k - a_1} r(a_k) = r(a_k) = y_k^{(0)}.
\end{aligned}$$

Sýnum svo að gildin á afleiðum p séu rétt.

Rifjum upp margliðuna p:

$$p(x) = \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} q(x) + \frac{x - x_0}{x_m - x_0} r(x) = \frac{x - a_k}{a_1 - a_k} q(x) + \frac{x - a_1}{a_k - a_1} r(x)$$

Afleiður hennar eru

$$p^{(j)}(x) = \frac{(x - a_k)}{(a_1 - a_k)} q^{(j)}(x) + \frac{(x - a_1)}{(a_k - a_1)} r^{(j)}(x) + j \frac{\left(q^{(j-1)}(x) - r^{(j-1)}(x)\right)}{a_k - a_1}$$

Ef nú $m_i > 1$ þá er $q^{(j-1)}(a_i) = y^{(j-1)}(a_i) = r^{(j-1)}(a_i)$ fyrir $j = 1, \ldots, m_i - 1$ og því kemur alltaf 0 út úr síðasta liðnum ef við setjum inn $x = a_i$, fyrir öll $i = 1, \ldots, k$.

Af þessu sést að afleiður p uppfylla skilyrðin

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad \text{fyrir } j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

3.5.6 Samantekt

Við höfum því sannað eftirfarandi:

Ef gefnar eru

- rauntölur $a_1, \ldots, a_k$, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$,
- jákvæðar heiltölur $m_1, \ldots, m_k$,
- rauntölur $y_i^{(j)}$, fyrir $j = 0, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$,

og talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = y_i^{(j)}, \qquad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

3.5.7 Brúunarmargliðan fundin

Ef skilgreindar eru runurnar

$$(x_0, \ldots, x_m) = (a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_k)$$

þar sem a_1 kemur fyrir m_1 sinnum, a_2 kemur fyrir m_2 sinnum o.s.frv., og

$$(y_0, \ldots, y_m) = (y_1^{(0)}, \cdot\cdot, y_1^{(m_1-1)}, y_2^{(0)}, \cdot\cdot, y_2^{(m_2-1)}, \cdots, y_k^{(0)}, \cdot\cdot, y_k^{(m_k-1)}),$$

þá er Newton-form margliðunnar p með tilliti til punktanna $x_0, \ldots, x_{m-1}$ gefið með

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, \ldots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $y[x_i, \ldots, x_{i+j}]$ eru reiknaðir með rakningarformúlu þannig að $y[x_i] = y_i$ og

$$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \begin{cases} \dfrac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}, & \text{ef } x_i \neq x_{i+j}, \\ \dfrac{y_i^{(j)}}{j!}, & \text{ef } x_i = x_{i+j}. \end{cases}$$

3.6 Skynsamlegir skiptipunktar og Chebyshev margliður

3.6.1 Um val á brúunarpunktum

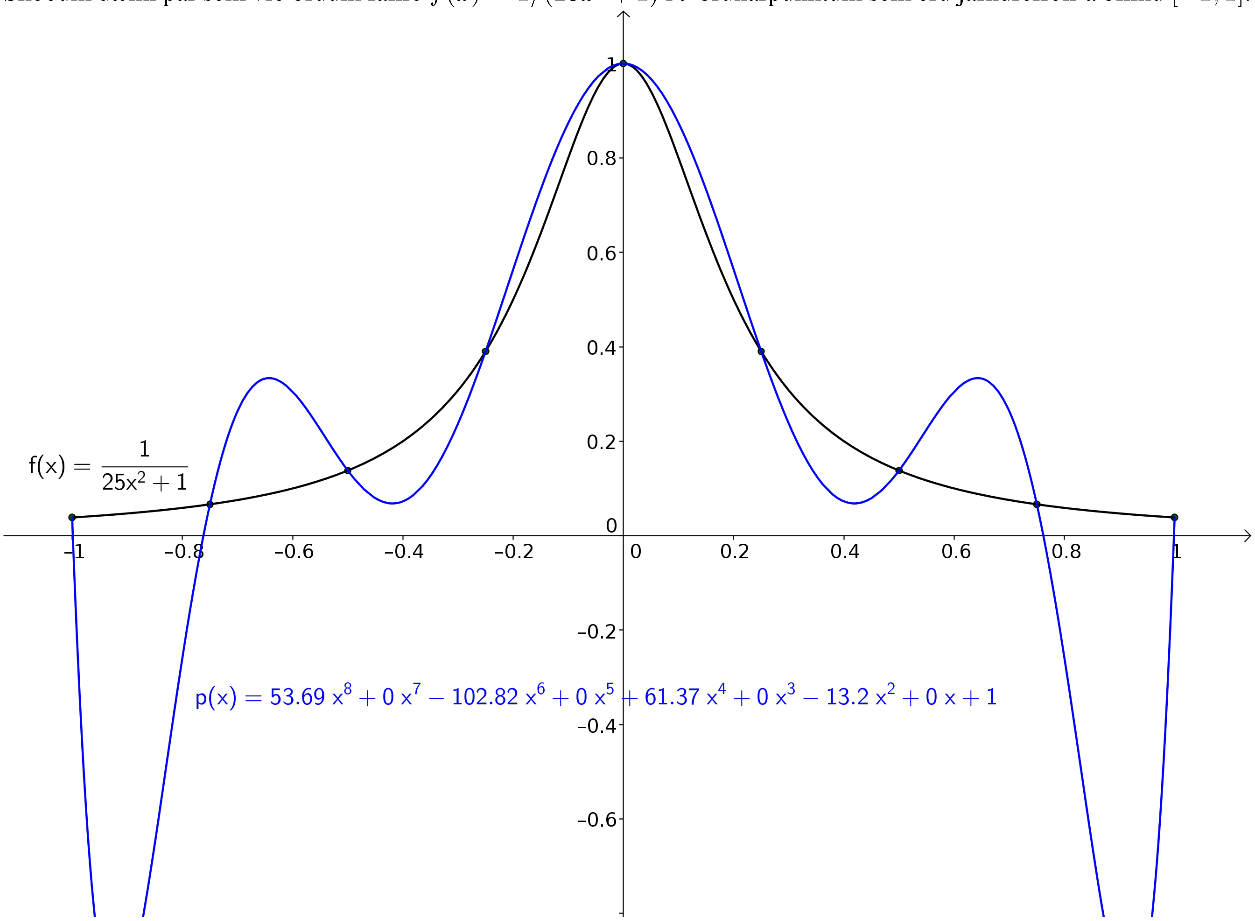
Látum $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f, þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar. Til dæmis getur komið fram óstöðugleiki í útreikningum þannig að örlítil frávik í x geta leitt til mikilla frávika í $p(x)$, og þá hugsanlega í mikilli skekkju á $f(x) - p(x)$.

3.6.2 Dæmi um óheppilega skiptipunkta

Skoðum dæmi þar sem við brúum fallið $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$ í 9 brúnarpunktum sem eru jafndreifðir á bilinu $[-1, 1]$.



Hér sjáum við „þægilegt" fall þar sem brúunarmargliðan gefur afskaplega vonda nálgun.

3.6.3 Val á brúunarpunktum

Það er ekki sjálfgefið að við getum valið í hvaða brúunarpunkta við notum, t.d. ef þeir ákvarðast af mælingum. Ef við hins vegar getum valið þá óhindrað, þá vaknar sú spurning hvernig er best að gera það?

3.6.4 Skilgreining

Fyrst þurfum við að útskýra betur hvað við eigum við með „best”. Við munum bara notast við tvær leiðir hér til að mæla skekkjuna, en það er ℓ_∞ og ℓ_2 staðlarnir, fyrir samfellt fall h á bilinu $[a, b]$ þá eru þeir skilgreindir með

$$\|h\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |h(x)|,$$

og

$$\|h\|_2 = \left(\int_a^b h(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Athugasemd: Það má líta þannig á þetta að ℓ_∞ staðallinn mæli hámarksskekkju og ℓ_2 mæli einhvers konar„meðaltalsskekkju”, þar sem meðaltalið er reiknað með heildi.

3.6.5 Verkefnið

Verkefnið er því eftirfarandi: Fyrir gefið fall $f(x)$ á bili $[a, b]$ og fast n, þá viljum við finna $x_0, \ldots, x_n$ sem lágmarka annað hvort

$$\|f - p\|_\infty \quad \text{eða} \quad \|f - p\|_2.$$

Þar sem p er brúunarmargliðan fyrir brúunarpunktana $(x_i, f(x_i))$.

Byrjum á að skoða ℓ_∞ tilvikið.

3.6.6 Skilgreining: Chebyshev margliður

Fyrir náttúrlega tölu n þá skilgreinum við *Chebyshev margliðuna* T_n á $[-1, 1]$ með

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Með því að setja inn $n = 0$ og $n = 1$ þá fæst að

$$T_0(x) = 1 \quad \text{og} \quad T_1(x) = x,$$

og með hornafallareglunum fæst að

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1.$$

Af jöfnunni hér á undan þá fæst með þrepun að

- $T_n(x)$ er margliða af stigi n.
- Forystustuðull T_n er 2^{n-1}.
- T_n er jafnstæð ef n er slétt og oddstæð ef n er oddatala.

3.6.7 Setning

Chebyshev margliðan T_n hefur n einfaldar núllstöðvar á bilinu $[-1,1]$ og þær eru gefnar með

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right), \qquad j = 0,1,2,3,\dots,n-1.$$

Auk þess eru útgildi T_n á $[-1,1]$ staðsett í

$$z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \qquad j = 0,1,2,\dots,n,$$

og fallgildin þar uppfylla $T_n(z_j) = (-1)^j$

3.6.8 Staðlaðar Chebyshev margliður

Margliða er kölluð *stöðluð* ef forystustuðull hennar er 1.

Stöðluðu Chebyshev margliðurnar $\tilde{T}$ eru skilgreindar á eftirfarandi hátt

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} T_0(x) & \text{ef } n = 0 \\ 2^{1-n}T_n(x) & \text{ef } n \geq 1 \end{cases}$$

Fyrir sérhverja staðlaða margliðu q af stigi n þá er

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} T_n(x) \leq \max_{x\in[-1,1]} |q(x)|.$$

Þ.e. af öllum stöðluðum margliðum þá eru stöðluðu Chebyshev margliðurnar „minnstar" á bilinu $[-1,1]$.

3.6.9 Skynsamlegir skiptipunktar fyrir bilið $[-1,1]$

Við vitum að skekkjan í því að nálga fallið f með brúunarmargliðu p með brúunarpunkta $x_0,\dots,x_n$ er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

þar sem ξ er á minnsta bilinu sem inniheldur x og $x_0,x_1,\dots,x_n$. Ef við skoðum jöfnuna að ofan þá sjáum við að þar sem n og f (og þar með $f^{(n+1)}$) er fast þá er stæðan $(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ það eina sem við höfum einhverja stjórn á.

Með því að nota Chebyshev margliðurnar þá getum við lágmarkað þennan hluta skekkjunnar.

Athugið að $(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ er stöðluð margliða af stigi $n+1$. Þannig að samkvæmt því sem kom fram hér að ofan þá lágmörkum við framlag hennar til skekkjunnar með $(x-x_0)\cdots(x-x_n) = \tilde{T}_{n+1}$, þ.e. með því að velja

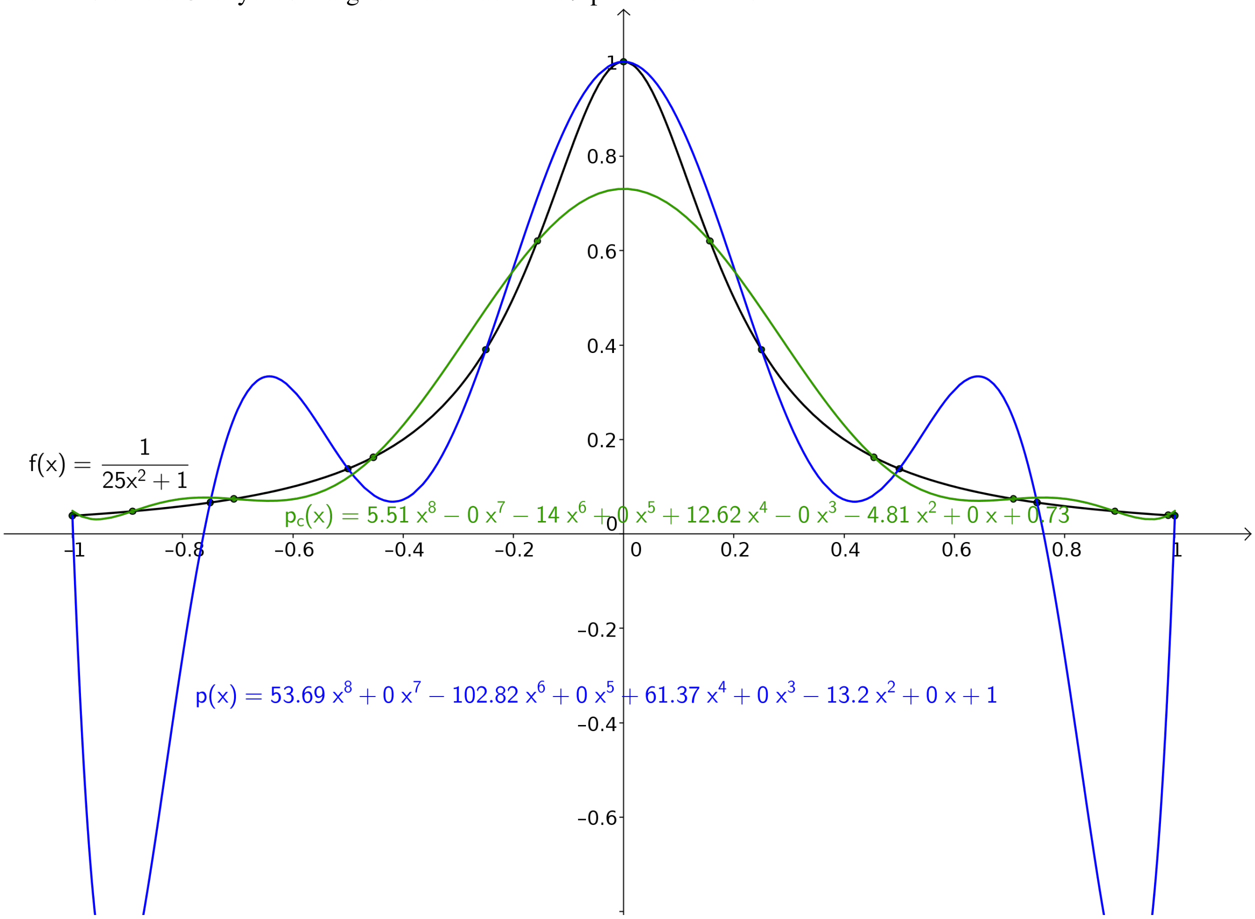
$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad i = 0,1,\dots,n.$$

Hæsta gildi $\tilde{T}_{n+1}$ er $\frac{1}{2^n}$, sem þýðir að við fáum skekkjumatið

$$\|f(x) - p(x)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2^n(n+1)!}.$$

3.6.10 Dæmi um óheppilega skiptipunkta skoðað aftur

Skoðum aftur fallið $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$, en í stað þess að taka 9 jafndreifaða brúunarpunkta á bilinu $[-1, 1]$, þá skulum við nota Chebyshev margliðurnar til að finna 9 punkta á bilinu.



3.6.11 Skynsamlegir skiptipunktar fyrir bil $[a, b]$

Hér á undan miðaðist allt við að finna brúunarmargliðu fyrir fallið f á bilinu $[-1, 1]$. Ef við viljum skoða almennt bil $[a, b]$ þá byrjum við á athuga að fallið $\eta : [-1, 1] \to [a, b]$,

$$\eta(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

skilgreinir línulega vörpun (hliðrun og stríkkun) frá $[-1, 1]$ yfir á $[a, b]$. Athugið að vörpunin sendir -1 í a og 1 í b.

Með því að taka rætur stöðluðu Chebyshev margliðunnar $\tilde{T}_{n+1}$ og varpa þeim með η yfir á bilið $[a, b]$ þá fáum við þá punkta $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ sem lágmarka $(x - x_0) \cdots (x - x_n)$ á bilinu $[a, b]$,

$$x_i = \eta\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)\right) = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right) + \frac{b+a}{2},$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n.$

3.6.12 Lágmörkun á skekkju með tilliti til ℓ_2

Nú skulum við skipta um staðal, þannig að í stað þess að lágmarka $\|f-p\|_\infty$ þá skulum við reyna að lágmarka

$$\|f-p\|_2 = \left(\int_a^b (f-p)^2\,dx\right)^{1/2}$$

Við vitum að skekkjan í því að nálga fallið f með brúunarmargliðu p með brúunarpunkta $x_0,\dots,x_n$ er

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

þar sem ξ er á minnsta bilinu sem inniheldur x og $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Eins og áður þá sjáum við að stæðan $(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ það eina sem við getum stjórnað með því að velja brúunarpunktana x_j.

3.6.13 Skilgreining: Legendre margliðurnar

Fyrir náttúrlega tölu n þá skilgreinum við *Legendre margliðurnar* svona

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_n(x) &= \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Af skilgreiningunni hér á undan þá sjáum við að

- $P_n(x)$ er margliða af stigi n.
- Forystustuðull P_n er $\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{2}\cdot 1$.
- P_n er jafnstæð ef n er slétt og oddstæð ef n er oddatala.

3.6.14 Setning

$$\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ef } j\neq k\\ \frac{2}{2j+1}, & \text{ef } j=k.\end{cases}$$

Einnig gildir að ef q er margliða af stigi minna en n þá er

$$\int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

Þetta segir okkur að Legendre margliðurnar eru hornréttar (með tilliti til innfeldisins sem heildið skilgreinir).

3.6.15 Setning

P_n hefur n ólíkar núllstöðvar sem liggja allar á $[-1,1]$.

3.6.16 Skilgreining: Staðlaðar Legendre margliður

Eins og þegar við fengumst við Chebyshev margliðurnar þá skilgreinum við *stöðluðu Legendre margliðurnar* $\tilde{P}_n$ með því að deila upp í P_n með forrystustuðlunum P_n.

Athugasemd: Setningarnar þrjár hér undan gilda um $\tilde{P}$ alveg eins og P.

3.6.17 Setning: Lágmörkun með Legendre margliðunum

Ef p er stöðluð margliða af stigi $n+1$ þá er $\|p\|_2 \geq \|\tilde{P}_{n+1}\|_2$.

Skilgreinum $q = p - \tilde{P}_{n+1}$, sem þýðir að q er margliða af stigi minna en $n+1$. Nú er

$$\begin{aligned}\|p\|_2^2 &= \|\tilde{P}_{n+1} + q\|_2^2 \\ &= \int_{-1}^{1} (\tilde{P}_{n+1}(x) + q(x))^2 \, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \tilde{P}_{n+1}(x)^2 + 2q(x)\tilde{P}_{n+1}(x) + q(x)^2 \, dx \\ &= \|\tilde{P}_{n+1}\|_2^2 + 2\int_{-1}^{1} q(x)\tilde{P}_{n+1}(x)\, dx + \|q\|_2^2 \\ &= \|\tilde{P}_{n+1}\|_2^2 + \|q\|_2^2 \geq \|\tilde{P}_{n+1}\|_2^2\end{aligned}$$

því $\int_{-1}^{1} q(x)\tilde{P}_{n+1}(x)\, dx = 0$ og $\|q\|_2 \geq 0$.

Af síðustu setningu sjáum við að til þess að lágmarka

$$\|f(x) - p(x)\|_2 = \left\| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right\|_2,$$

þá veljum við $x_1, \ldots, x_n$ þannig að $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \tilde{P}_{n+1}$. Þ.e. x_j þurfa að vera rætur stöðluðu Legendre margliðunnar af stigi $n+1$.

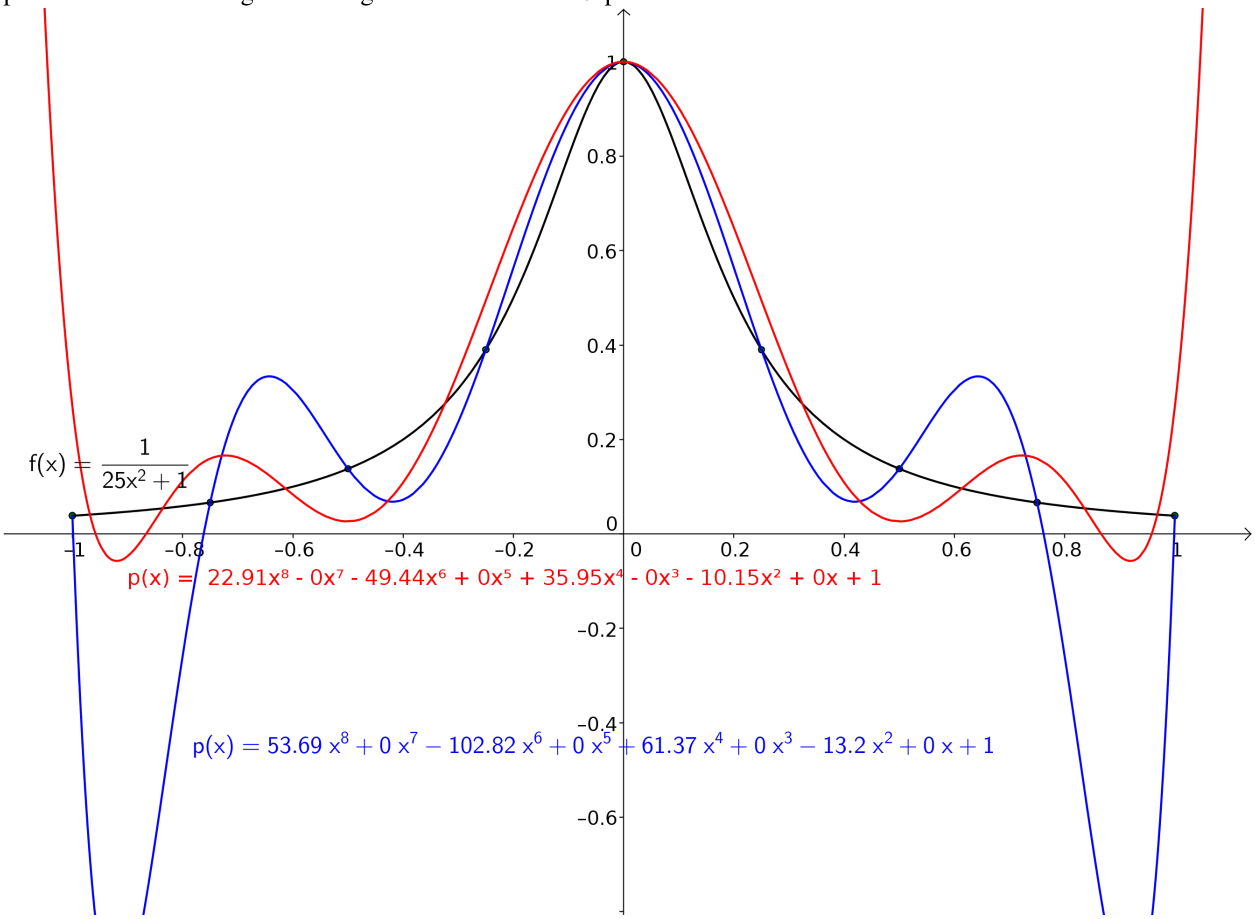
3.6.18 Núllstöðvar P_n, fyrir $n = 1, \ldots, 10$

Ólíkt Chebyshev margliðunum þá er ekki hlaupið að því að finna rætur $\tilde{P}_{n+1}$. Þannig að við þurfum að reikna þær tölulega og geyma í töflu.

k	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}
1	0.0000									
2	−0.5774	0.5774								
3	−0.7746	0.0000	0.7746							
4	−0.8611	−0.3400	0.3400	0.8611						
5	−0.9062	−0.5385	0.0000	0.5385	0.9062					
6	−0.9325	−0.6612	−0.2386	0.2386	0.6612	0.9325				
7	−0.9491	−0.7415	−0.4058	0.0000	0.4058	0.7415	0.9491			
8	−0.9603	−0.7967	−0.5255	−0.1834	0.1834	0.5255	0.7967	0.9603		
9	−0.9682	−0.8360	−0.6134	−0.3243	0.0000	0.3243	0.6134	0.8360	0.9682	
10	−0.9739	−0.8651	−0.6794	−0.4334	−0.1489	0.1489	0.4334	0.6794	0.8651	0.9739

3.6.19 Dæmi um óheppilega skiptipunkta skoðað aftur

Skoðum enn einu sinni fallið $f(x) = 1/(25x^2+1)$, en í stað þess að taka 9 jafndreifaða brúunarpunkta á bilinu $[-1, 1]$, þá skulum við nota Legendre margliðurnar til að finna 9 punkta á bilinu.



3.6.20 Athugasemd um ℓ_∞ og ℓ_2

Athugasemd: Það má líta þannig á þetta að ℓ_∞ staðallinn mæli hámarksskekkju og ℓ_2 mæli einhvers konar„heildarskekkju", þar sem skekkjan er reiknað með heildinu hér á undan og svarar því hér um bil til flatarmálsins á milli fallsins og brúunarmargliðunnar.

- ℓ_∞ staðallinn mælir hámarksskekkju, þannig að með því nota Chebyshev margliðurnar þá erum við að reyna að lágmarka mestu skekkju á bilinu.
- ℓ_2 mæli einhvers konar„heildarskekkju", þar sem skekkjan er reiknað með heildi. Þannig að með því að nota Legendre margliðurnar þá erum við í einhverjum skilningi að lágmarka flatarmál.

3.7 Skekkjumat

3.7.1 Nálgun á föllum með margliðum

Lítum nú aftur á almenna brúunarverkefnið og gefum okkur að tölurnar $y_i^{(j)}$ séu af gerðinni $f^{(j)}(a_i)$ þar sem $f : I \to \mathbb{R}$ er fall á bili I sem inniheldur alla punktana $a_1, \dots, a_k$.

Þá snýst brúunarverkefnið um að finna margliðu af stigi $\leq m$ sem uppfyllir

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \quad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Við vitum að lausn þess er ótvírætt ákvörðuð. Ef við notum Newton form lausnarinnar, þá táknum við mismunakvótana með

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

í stað

$$y[x_i, \dots, x_{i+j}]$$

3.7.2 Nálgun á fallgildum

Runurnar $(x_0, \dots, x_m)$ og $(y_0, \dots, y_m)$ eru skilgreindar með

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1 \text{ sinnum}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ sinnum}}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ sinnum}})$$

og

$$\begin{aligned}(y_0, y_1, \dots, y_m) = (&f^{(0)}(a_1), \dots, f^{(m_1-1)}(a_1), f^{(0)}(a_2), \dots, f^{(m_2-1)}(a_2)\\ &\dots, f^{(0)}(a_k), \dots, f^{(m_k-1)}(a_k))\end{aligned}$$

3.7.3 Skekkjumat

Nú tökum við punkt $x \in I$ og spyrjum um skekkjuna $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Ef x er einn punktana $a_1, \dots, a_k$, þá er $p(x) = f(x)$ og skekkjan þar með 0, svo við skulum gera ráð fyrir að $x \neq a_i$, $i = 1, \dots, k$.

Við bætum nú $(x, f(x))$ sem einföldum brúunarpunkti við alhæfða brúunar verkefnið og fáum sem lausn $q(t)$ á þessu aukna verkefni. Margliðan q er af stigi $\leq m + 1$. Við notum táknið t fyrir breytu, því x er frátekið.

Þá uppfyllir $q(t)$ að $q(x) = f(x)$ auk allra skilyrðanna

$$q^{(j)}(a_i) = p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$$

í verkefninu sem við byrjuðum með.

Við getum þá skrifað (sjá *Newton-margliður* til hliðsjónar)

$$\begin{aligned}q(t) &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - x_0) \cdots (t - x_m)\\ &= p(t) + f[x_0, \dots, x_m, x](t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}.\end{aligned}$$

Þegar við gefum breytunni t gildið x, þá fáum við $q(x) = f(x)$ og því fæst formúla fyrir skekkjunni

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

Nú ætlum við að finna leið til þess að meta skekkjuliðinn. Til þess þurfum við að gefa okkur að f hafi að minnsta kosti $m + 1$ afleiðu.

3.7.4 Tilfellið þegar við höfum aðeins einn punkt

Munum nú að í tilfellinu þegar við erum bara með einn punkt a_1, þá erum við með $m+1$ skilyrði

$$p^{(j)}(a_1) = f^{(j)}(a_1), \qquad j = 0, \dots, m$$

og við fáum að p er Taylor-margliða fallsins f í punktinum a_1. Þá er $x_0 = \cdots = x_m = a_1$ og við fáum

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m+1}$$

Nú segir setning Taylors okkur að til sé punktur ξ milli a_1 og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a_1)^{m+1}$$

Við getum því dregið þá ályktun að í þessu sértilfelli er

$$f[x_0, \dots, x_m, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Það kemur í ljós að þetta er almenn regla sem gildir fyrir *öll* alhæfðu brúunarverkefnin.

Tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

Munum að tilfellið $m = 1$ er meðalgildisreglan

$$f[a_1, x] = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = f'(\xi).$$

3.7.5 Margfeldni núllstöðva

Samfellt fall φ á bili I er sagt hafa núllstöð *af stigi að minnsta kosti* $m > 0$ í punktinum $a \in I$, ef til er samfellt fall ψ á I þannig að

$$\varphi(x) = (x - a)^m \psi(x)$$

Við segjum að φ hafi núllstöð af *margfeldni* m ef $\psi(a) \neq 0$.

Athugið að ef φ er deildanlegt I með samfellda afleiðu, þá er ψ deildanlegt með samfellda afleiðu í $I \setminus \{a\}$ og við höfum

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= m(x - a)^{m-1}\psi(x) + (x - a)^m \psi'(x) \\ &= (x - a)^{m-1}\big(m\psi(x) + (x - a)\psi'(x)\big) \end{aligned}$$

Ef afleiðan ψ' er takmörkuð í grennd um a, þá sjáum við á þessari formúlu að φ' hefur núllstöð af stigi að minnsta kosti $m - 1$ í a.

Hugsum okkur nú að við séum með $a_1, \dots, a_k$ ólíka punkta í bilinu I og að $m_1, \dots, m_k$ séu jákvæðar náttúrlegar tölur.

Ef fallið φ hefur núllstöðvar í öllum punktunum a_j og núllstöðin a_j er af stigi að minnsta kosti m_j. Við segjum að þá hafi φ *að minnsta kosti*

$$n = m_1 + \cdots + m_k$$

núllstöðvar taldar með margfeldni.

Eins þá segjum við að φ hafi n núllstöðvar í $\{a_1, \dots, a_k\}$ *taldar með margfeldni* ef φ hefur núllstöðvar í öllum punktum $a_1, \dots, a_k$ og samanlögð margfeldni þeirra er n

Hugsum okkur nú að fallið φ hafi núllstöð af stigi m_j í punktunum a_j fyrir öll $j = 1, \ldots, k$ og að $n = m_1 + \cdots + m_k$. Til einföldunar gerum við ráð fyrir að

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

Þá gefur meðalgildissetningin að φ' hefur að minnsta kosti eina núllstöð á sérhverju bilanna

$$]a_1, a_2[,\ ]a_2, a_3[,\ \ldots]a_{k-1}, a_k[$$

Þau eru samanlagt $k-1$ talsins. Að auki vitum við að φ' hefur núllstöðvar af stigi að minnsta kosti $m_j - 1$ í punktinum a_j. Ef við leggjum þetta saman, þá fáum við að φ' hefur núllstöðvar af margfeldni að minnsta kosti

$$k - 1 + (m_1 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = n - 1$$

í minnsta lokaða bilinu sem inniheldur alla punktana $a_1, \ldots, a_k$.

3.7.6 Setning: Skekkjumat

Nú ætlum við að sýna fram á að fyrir föll f sem eru $(m + 1)$ sinnum samfellt deildanleg að til sé ξ á minnsta bili sem inniheldur $a_1, \ldots, a_k$ og x þannig að

$$f[x_0, \ldots, x_m, x] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}$$

Við skilgreinum fallið

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k}$$

og talan λ er valin þannig að $g(x) = 0$.

Nú er $p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i)$ fyrir $j = 0, \ldots, m_i - 1$, þá gefur setning Taylors okkur að g hefur núllstöð af stigi m_i í sérhverjum punktanna a_i. Auk þess hefur g núllstöð í x. Samanlagt eru þetta að minnsta kosti $m + 2$ núllstöðvar taldar með margfeldni.

Höfum:

- g hefur að minnsta kosti $m + 2$ núllstöðvar taldar með margfeldni,
- g' hefur að minnsta kosti $m + 1$ núllstöð talda með margfeldni,
- g'' hefur að minnsta kosti m núllstöðvar taldar með margfeldni
- og þannig áfram, þar til við ályktum að
- $g^{(m+1)}$ hefur að minnsta kosti eina núllstöð.

Tökum eina slíka og köllum hana ξ.

Munum að

$$g(t) = f(t) - p(t) - \lambda w(t),$$

þar sem

$$w(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdots (t - a_k)^{m_k} = t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$$

Margliðan p hefur stig $\leq m$ svo $p^{(m+1)}(x) = 0$ fyrir öll x

og margliðan w er af stigi $m+1$ með stuðul 1 við hæsta veldið, svo $w^{(m+1)}(t) = (m+1)!$. Við höfum því

$$0 = g^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - \lambda \cdot (m+1)!$$

sem jafngildir því að

$$\lambda = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

Við setjum nú inn $t = x$ sem gefur

$$0 = g(x) = f(x) - p(x) - \lambda w(x),$$

og við fáum þar með formúlu fyrir skekkjunni á nálgun á $f(x)$ með alhæfðu brúunarmargliðunni $p(x)$,

$$f(x) - p(x) = \lambda w(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}$$

3.7.7 Samantekt

Ef gefið er fall $f : I \to \mathbb{R}$ á bili I, $a_1, \dots, a_k$ í I, með $a_j \neq a_k$ ef $j \neq k$, jákvæðar heiltölur $m_1, \dots, m_k$, talan m er skilgreind með $m = m_1 + \cdots + m_k - 1$, og gert er ráð fyrir að $f \in C^{m+1}(I)$, þá er til nákvæmlega ein margliða p af stigi $\leq m$ þannig að

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \qquad j = 0, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Newton-form margliðunnar p er gefið með

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_m](x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

þar sem mismunakvótarnir $f[x_i, \dots, x_{i+j}]$ eru skilgreindir sem $y[x_i, \dots, x_{i+j}]$ út frá gögnunum $y_i^{(j)}$. Fyrir sérhvert x í I er skekkjan $f(x) - p(x)$ í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$ gefin með

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_m, x](x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

Fyrir sérhvert $i = 1, \dots, k$ og $j = 0, \dots, m - i$ þá gildir að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_i \dots, x_{i+j}$ þannig að

$$f[x_i, \dots, x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!},$$

því gildir sérstaklega að til er tala ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $a_1, \dots, a_k$ og x þannig að

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

3.7.8 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Setjið upp mismunakvótatöflu til þess að reikna út brúunarmargliðu p af stigi ≤ 3 fyrir fallið f, sem hefur tvo tvöfalda brúunarpunkta $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$. Skrifið upp Newton-form margliðunnar p.
2. Reiknið út $p(1.3)$. Notið aðferðarskekkju fyrir margliðubrúun til þess að meta skekkjuna $f(1.3) - p(1.3)$ að ofan og neðan og fáið þannig bil þar sem rétta gildið liggur. Veljið miðpunkt bilsins sem nálgunargildi fyrir $f(1.3)$ og afrúnið gildið miðað við mörk bilsins.

3. Látum nú q vera brúnunarmargliðuna af stigi ≤ 4 sem uppfyllir sömu skilyrði og gefin eru í fyrsta lið að viðbættu því að $a_2 = 2$ á að vera þrefaldur brúunarpunktur. Sýnið hvernig hægt er að ákvarða mismunakvótatöfluna fyrir q með því að stækka töfluna í **a)**. Ákvarðið síðan q og reiknið út $q(1.3)$.

1. og 2. Til þess að spara pláss skulum leysa fyrsta og þriðja lið báða í einu með því að reikna strax út mismunakvótatöfluna fyrir fjórða stigs margliðuna í 3. lið. Punktarnir $x_0, \dots, x_4$ eru þá $1, 1, 2, 2, 2$ og við höfum gefin fallgildin

$$f(1) = f[x_0] = f[x_1] = 0 \qquad \text{og} \qquad f(2) = f[x_2] = f[x_3] = f[x_4].$$

Í 1. lið eru punktarnir tvöfaldir svo við höfum gefin gildi afleiðunnar $f'(x) = 2x \ln x + x$ í punktunum 1 og 2.

$$f'(1) = f[1,1] = f[x_0, x_1] = 1 \text{ og } f'(2) = f[2,2] = f[x_2, x_3] = 4\ln 2 + 2.$$

Í 3. lið er gildið á 2. afleiðu $f''(x) = 2\ln x + 3$ gefið í punktinum 2. Það gefur okkur

$$f''(2)/2! = f[2,2,2] = f[x_2, x_3, x_4] = \ln 2 + \tfrac{3}{2}.$$

Við setjum þessi gildi inn í mismunakvótatöfluna og fyllum hana út með því að taka mismunakvóta milli allra gilda

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0	1	0	1	$4\ln 2 - 1$	$-4\ln 2 + 3$	$5\ln 2 - \frac{7}{2}$
1	1	0	$4\ln 2$	2	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	
2	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$	$\ln 2 + \frac{3}{2}$		
3	2	$4\ln 2$	$4\ln 2 + 2$			
4	2	$4\ln 2$				

Margliðan í 1. lið er því

$$p(x) = (x-1) + (4\ln 2 - 1)(x-1)^2 + (-4\ln 2 + 3)(x-1)^2(x-2).$$

en í 3. lið er hún

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

2. Við stingum gildinu $x = 1.3$ inn í margliðuna og fáum $p(1.3) = 0.445206074$. Skekkjan er

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2$$

þar sem ξ er einhver punktur á bilinu $[1,2]$.

Við þurfum því að meta fjórðu afleiðuna,

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad f'(x) = 2x\ln x + x, \quad f''(x) = 2\ln x + 3,$$
$$f'''(x) = 2/x, \quad f^{(4)}(x) = -2/x^2.$$

Ef $x \in [1,2]$, þá höfum við matið $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$.

Af ójöfnunum $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq -\frac{1}{2}$ leiðir síðan að

$$\alpha = \frac{-2 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} \leq f(1.3) - p(1.3) \leq \frac{-0.5 \cdot (0.3)^2 \cdot (-0.7)^2}{24} = \beta.$$

Við reiknum út úr báðum brotunum

$$\alpha = -0.003675 \qquad \text{og} \qquad \beta = -0.00091875.$$

þar með er $f(1.3)$ á bilinu milli $p(1.3) + \alpha = 0.441531$ og $p(1.3) + \beta = 0.444287$.

Nálgunargildi okkar á að vera miðpunktur þessa bils og algildi skekkjunnar verður þá hálf billengdin. Það færir okkur nálgunina $f(1.3) \approx 0.442909$ og skekkjuna ± 0.0014. Réttur afrúningur er $f(1.3) = 0.44$.

Við eigum aðeins eftir að reikna út gildi margliðunnar q í punktinum 1.3. Út úr mismunakvótatöflunni fáum við

$$q(x) = p(x) + (5\ln 2 - \tfrac{7}{2})(x-1)^2(x-2)^2$$

sem gefur okkur gildið

$$q(1.3) = 0.445206074 - 0.001511046 = 0.4436950278$$

Til samanburðar höfum við rétt gildi

$$f(1.3) = 0.443395606950060\ldots.$$

3.8 Splæsibrúun

Látum $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$ vera punkta í plani og gerum ráð fyrir að $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Við höfum nú lært að ákvarða margliðu p af stigi $\leq n$ sem tekur gildin y_i í punktunum t_i.

Ef punktarnir liggja á grafi fallsins f og nota á margliðuna til þess að nálga fallgildi f, þá getur það verið ýmsum erfiðleikum bundið þegar stig hennar stækkar eins og við sáum í byrjun kaflans Skynsamlegir skiptipunktar og Chebyshev margliður. Lausnin þar var að reyna að velja brúunarpunktana skynsamlega. Ef við hins vegar getum ekki valið brúunarpunktana eftir eigin höfði þá erum við í vandræðum og þurfum við að leita annarra leiða.

3.8.1 Almennt um splæsibrúun

Splæsibrúun er leið út úr þessum vandræðum.

Með henni er fundið samfellt fall S sem brúar gefnu punktana, $S(t_i) = y_i$, og er þannig að einskorðun þess við hlutbilin $[t_i, t_{i+1}]$ er gefið með margliðu af stigi $\leq m$, þar sem m er fyrirfram gefin tala.

Algengast er að nota $m = 3$.

3.8.2 Fyrsta stigs splæsibrúun:

Ef stigið m er 1, þá erum við einfaldlega að draga línustrik milli punktanna og sjáum í hendi okkar að lausnin er

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(x - t_0) + y_0, & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(x - t_1) + y_1, & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(x - t_{n-1}) + y_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Þessi aðferð er ekki mikið notuð því hún er ósannfærandi fyrir deildanleg föll.

3.8.3 Þriðja stigs splæsibrúun

Algengast er að framkvæma splæsibrúun með þriðja stigs margliðum.

Við skulum tákna einskorðun S við hlutbilið $[t_i, t_{i+1}]$ með S_i og skrifa

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-t_i) + c_i(x-t_i)^2 + d_i(x-t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}).$$

Við ætlum að leiða út jöfnur fyrir stuðlunum a_i, b_i, c_i og d_i. Kröfurnar sem við setjum eru:

1. S er tvisvar sinnum samfellt deildanlegt á öllu bilinu $[a, b]$
2. S taki gildin y_i í punktunum t_i

Setjum til einföldunar $h_i = t_{i+1} - t_i$ fyrir $i = 0, \dots, n-1$.

Skilyrðin tvö má því skrifa sem eftirfarandi jöfnuhneppi:

Á hverju hlutbili $[t_i, t_{i+1}]$ höfum við:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-t_i) + c_i(x-t_i)^2 + d_i(x-t_i)^3, \qquad x \in [t_i, t_{i+1}),$$

sem þýðir að skilyrðin tvö má skrifa sem

$$\begin{aligned}
a_i &= S_i(t_i) &= \quad & y_i, & (1)\\
a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3 &= S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1}) &= \quad & a_{i+1}, & (2)\\
b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 &= S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) &= \quad & b_{i+1}, & (3)\\
2c_i + 6d_ih_i &= S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) &= \quad & 2c_{i+1}, & (4)
\end{aligned}$$

Í (1) höfum við $i = 0, \dots, n$ og í (2)-(4) höfum við $i = 0, \dots, n-2$.

Samtals: $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ línulegar jöfnur til þess að ákvarða $4n$ óþekktar stærðir.

Það er því ljóst að okkur vantar tvö skilyrði til þess að geta fengið ótvírætt ákvarðaða lausn.

Fyrstu jöfnurnar gefa strax gildi a_i og (4) gefur að

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Ef við setjum þetta inn í (2) og (3) fæst

$$\begin{aligned}
a_{i+1} &= a_i + b_ih_i + \frac{c_{i+1} + c_i}{3}h_i^2, \quad i = 0, \dots, n-2\\
b_{i+1} &= b_i + (c_{i+1} + c_i)h_i, \quad i = 0, \dots, n-2
\end{aligned}$$

Þegar við leysum fyrri jöfnuna fyrir b_i fæst

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{c_i + c_{i+1}}{3}h_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

og ef við setjum þetta inn í seinni jöfnuna fæst á endanum að

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

3.8.4 Jöfnuhneppið

$$
\begin{bmatrix}
.?. & .?. & & & & & \\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\
 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\
 & & & & .?. & .?.
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}
= 3
\begin{bmatrix}
.?. \\
\frac{a_2-a_1}{h_1} - \frac{a_1-a_0}{h_0} \\
\frac{a_3-a_2}{h_2} - \frac{a_2-a_1}{h_1} \\
\vdots \\
\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h_{n-2}}
\end{bmatrix}
$$

En það vantar í þetta einhver skilyrði á c_0 og c_n.

Þegar þau hafa verið sett inn, þá getum við leyst þetta hneppi, reiknað svo gildi b_i og d_i og þá höfum við fundið splæsifallið okkar.

Það eru til margar leiðir til að ákvarða c_0 og c_n, en fjórar eru algengastar.

3.8.5 Tilfelli 1: Ekki-hnúts endaskilyrði

Ef við höfum engar upplýsingar um fallið f í t_1 og t_{n-1} liggur beint við að krefjast þess að S''' sé samfellt þar, sem þýðir að $d_0 = d_1$ og $d_{n-2} = d_{n-1}$. Með að nota jöfnurnar fyrir d_i má skrifa þetta sem

$$
\begin{aligned}
h_1c_0 - (h_0+h_1)c_1 + h_0c_2 &= 0 \\
h_{n-1}c_{n-2} - (h_{n-2}+h_{n-1})c_{n-1} + h_{n-2}c_n &= 0
\end{aligned}
$$

og þessar jöfnur, ásamt hinum, má leysa til að ákvarða c_i-in.

3.8.6 Tilfelli 2: Þvinguð endaskilyrði

Ef hallatala fallsins f er þekkt í endapunktum bilsins er eðlilegt að nota þær upplýsingar við ákvörðun splæsifallsins. Gerum því ráð fyrir að $f'(t_0) = A$ og $f'(t_n) = B$. Skilyrðið $S'(t_0) = A$ gefur þá að

$$A = \frac{a_1-a_0}{h_0} - \frac{2c_0+c_1}{3}h_0,$$

eða

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\left(\frac{a_1-a_0}{h_0} - A\right)$$

og $S'(t_n) = B$ gefur

$$B = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að nota formúlurnar fyrir b_{n-1} og d_{n-1} fæst

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_nh_{n-1} = 3\left(B - \frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

3.8.7 Tilfelli 3: Náttúrleg endaskilyrði

Einfaldasta lausnin er að setja $c_0 = c_n = 0$, en það jafngildir því að $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$.

3.8.8 Tilfelli 4: Lotubundið endaskilyrði

Hugsum okkur að við viljum framlengja S í tvisvar samfellt deildanlegt $(b-a)$-lotubundið fall á $\mathbb{R}$. Það setur skilyrðin

$$y_0 = S(t_0) = S_(t_n) = y_n, \quad S'(t_0) = S'(t_n), \quad \text{og} \quad S''(t_0) = S''(t_n)$$

Fljótséð er að $S''(t_0) = S''(t_n)$ þýðir að $c_0 = c_n$, eða

$$c_0 - c_n = 0.$$

Þetta er fyrri jafnan sem við þurfum.

Nú gefur $S'(t_0) = S'(t_n)$ að

$$b_0 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

og með að setja inn formúlurnar fyrir b_0, b_{n-1}, d_{n-1} og nota að $c_0 = c_n$ fæst jafnan

$$h_0c_1 + 2h_{n-1}c_{n-1} + (2h_0 + 2h_{n-1})c_n = 3\left(\frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

3.8.9 Teikning á ferlum í planinu

Hægt er að nota brúun til þess að nálga ferla í $\mathbb{R}^n$. Skoðum tilvikið $n = 2$.

Gerum nú ráð fyrir að við höfum gefna punkta $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ og að við viljum finna samfelldan splæsiferil í gegnum þá. Þetta er gert í nokkrum skrefum:

1. Ákveðið er stikabil $[a, b]$ og skiptingu á því

   $$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

   til dæmis $[0, n]$ og skiptinguna

   $$0 = t_0 < t_1 = 1 < \cdots < t_n = n.$$

2. Ákveðið er hvaða endaskilyrði eiga við.
3. Búin eru til tvö splæsiföll $R(t)$ fyrir punktasafnið $x_0, \dots, x_n$ og $S(t)$ fyrir punktasafnið $y_0, \dots, y_n$.
4. Stikaferillinn $[a, b] \ni t \mapsto (R(t), S(t))$ er síðan teiknaður, en hann uppfyllir $(R(t_j), S(t_j)) = (x_j, y_j)$, $j = 0, \dots, n$.

Aðvörun: Athugið að hér er t breytan okkar en x og y eru gildin sem við viljum að ferillinn taki.
Þetta er frábrugðið því þegar við skoðum graf af einni breytu en þá er x venjulega breytan og y gildin sem viljum taka.

3.9 Aðferð minnstu fervika

Látum $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani með $x_j \in [a, b]$ fyrir öll j og látum $f_1, \dots, f_n$ vera raungild föll á $[a, b]$.

Við viljum finna það fall f af gerðinni

$$f(x) = c_1f_1(x) + \cdots + c_nf_n(x)$$

með stuðla $c_1, \dots, c_n$ þannig að punktarnir $(x_j, f(x_j))$ nálgi gefna punktasafnið sem best og þá er átt við að ferningssummuna

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - f(x_i)\big)^2$$

verði eins lítil og mögulegt er.

3.9.1 Jafna bestu línu

Flestir hafa heyrt talað um bestu línu gegnum punktasafn, hún fæst með að taka hér $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$, en lítið mál er að finna einnig besta fleygboga, bestu margliðu af fyrirfram ákveðnu stigi eða einhverja aðra samantekt falla gegnum punktasafnið.

3.9.2 Smávegis línuleg algebra

Til þess að finna þessi gildi á stuðlunum c_i er heppilegt að notfæra sér nokkrar niðurstöður úr línulegri algebru. Fyrir gefin gildi á $c_1, \dots, c_n$ setjum við

$$b_i = f(x_i) = c_1 f(x_i) + \cdots + c_n f_n(x_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

og skilgreinum síðan dálkvigrana

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T, \qquad y = [y_1, \dots, y_m]^T, \quad \text{og} \quad c = [c_1, \dots, c_n]^T,$$

Þá er $Ac = b$, þar sem A er $m \times n$ fylkið

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{bmatrix}.$$

Verkefnið snýst nú um að finna þann vigur $c \in \mathbb{R}^n$ sem lágmarkar

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - b_i\big)^2 = \|y - b\|^2 = \|y - Ac\|^2$$

þar sem $\|\cdot\|$ táknar evklíðska fjarlægðina (staðalinn) á $\mathbb{R}^m$.

Vigrar af gerðinni $b = Ac$ spanna dálkrúm fylkisins A og þá má skrifa sem línulegar samantektir af gerðinni

$$b = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n$$

þar sem A_j er dálkur númer j.

Verkefnið snýst um að finna þann vigur í dálkrúminu sem næstur er y. Vigurinn b er næstur y ef og aðeins ef $y - b$ er hornréttur á alla vigra dálkrúmsins.

Þessi skilyrði má fá með innfeldi

$$A_j \cdot (y - b) = 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

Með fylkjarithætti fæst ein jafna

$$A^T(y - b) = 0.$$

Setjum nú inn $b = Ac$. Þá ákvarðast c af hneppinu

$$A^T(y - Ac) = 0$$

sem jafngildir

$$(A^TA)c = A^Ty$$

Við þurfum því aðeins að leysa þetta jöfnuhneppi

$$(A^TA)c = A^Ty$$

fyrir c til að finna stuðlana okkar. Ef fylkið A^TA hefur andhverfu, þá fæst alltaf ótvírætt ákvörðuð lausn c.

Ef fylkið A^TA hefur ekki andhverfu eða að það hefur ákveðu sem er mjög nálægt 0, þá þurfum við að beita flóknari brögðum. Við komum að því síðar.

3.9.3 Jafna bestu línu

Algengt er að menn vilji finna beina línu sem best fellur að punktasafninu $(x_1, y_1,) \ldots, (x_m, y_m)$. Þá er $n = 2$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$.

Fylkið er þá

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

og þar með

$$A^TA = \begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m x_j \\ \sum_{j=1}^m x_j & \sum_{j=1}^m x_j^2 \end{bmatrix}. \qquad \text{og} \qquad A^Ty = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j \\ \sum_{j=1}^m x_j y_j \end{bmatrix}.$$

Athugasemd: Það er auðvelt að leysa þetta tilvik því við höfum einfalda formúlu fyrir andhverfum 2×2 fylkja (svo lengi sem ákveðan er ekki 0).

Sjá Wikipedia.

3.9.4 Jafna bestu annars stigs margliðu

Ef við viljum finna bestu annars stigs margliðu gegnum punktasafnið, þá er $n = 3$ og við tökum lausnagrunninn $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Þetta val gefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}.$$

Fylkið A^TA er þá 3×3 og vigurinn A^Ty er dálkvigur með 3 hnit.

3.9.5 Sýnidæmi: besta annars stigs margliða

Gefin eru mæligildin

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.7	-0.5	-1.7	-1.9	-1.5	0.2	2.3

Beitið aðferð minnstu fervika til þess að finna þá annars stigs margliðu sem best fellur að þessum gögnum Teiknið upp gögnin og graf marliðunnar.

Við leitum hér að þremur tölum c_1, c_2 og c_3 þannig að annars stigs margliðan $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$ falli sem best að gögnunum. Grunnföllin þrjú eru $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ og $f_3(x) = x^2$.

Í þessu dæmi er fylkið A gefið með

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix},$$

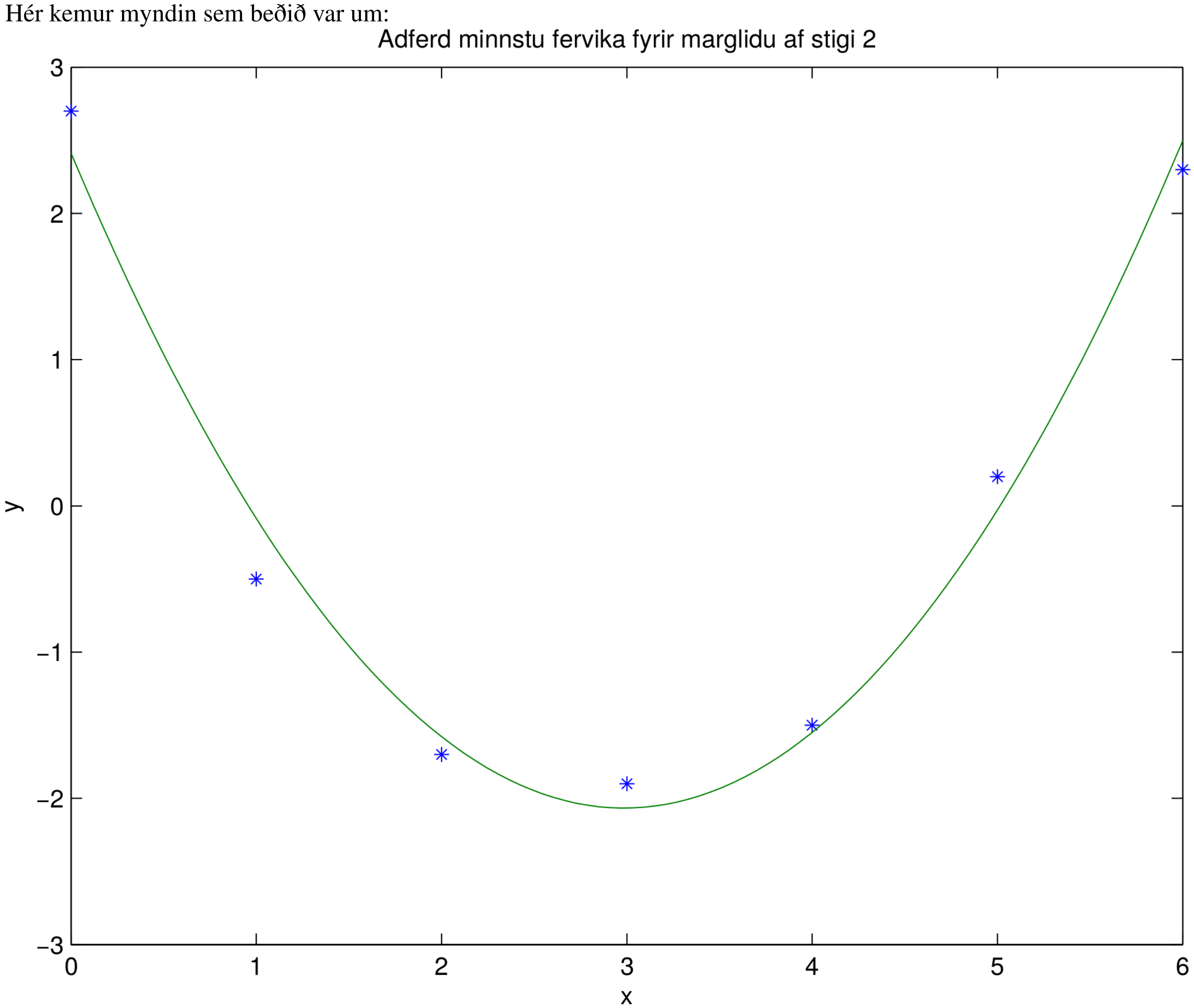
því stak númer (i, j) í A er gefið með $A_{ij} = f_j(x_i)$.

Nú látum við matlab um afganginn

```
%  Matlab forrit sem teiknar upp bestu margliðunálgun á gefnum gögnum
x=[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6]
y=[2.7; -0.5; -1.7; -1.9; -1.5; 0.2; 2.3 ]
m=length(x);

% Við leitum að bestu margliðu af stigi 2 eða lægri
% og því eru  grunnföllin eru 3 talsins.
n=3;

% Stuðlafylkið er A=(a_{ij}), a_{ij}=x_i^{j-1}
A(1:m,1)=ones(m,1);
A(1:m,2)=x;
for j=3:n
    A(1:m,j)=A(1:m,j-1).*x;
end
% Reiknum úr úr normaljöfnuhneppinu A^TAc=A^Ty:
c=(A'*A)\(A'*y);

% Teikning undirbúin
N=100;
X=linspace(min(x),max(x),N);

% Hliðrun í reikniriti horners er 0
%
hlidrun=zeros(n,1);
for j=1:N
    Y(j)=horner(c, hlidrun, X(j));
end
figure
plot(x,y,'*',X,Y)
xlabel('x'), ylabel('y')
```

```
title('Adferd minnstu fervika fyrir marglidu af stigi 2')
print
```

Hér kemur myndin sem beðið var um:



KAFLI 4

Töluleg diffrun

Nanny's philosophy of life was to do what seemed like a good idea at the time, and do it as hard as possible. It had never let her down. – Terry Pratchett, Maskerade

4.1 Inngangur

4.1.1 Töluleg diffrun og heildun

Deildun og heildun eru meginaðgerðir stærðfræðigreiningarinnar.

Þess vegna er nauðsynlegt að geta nálgað

$$f'(a), f''(a), f'''(a), \dots \quad \text{og} \quad \int_a^b f(x)\,dx,$$

þar sem f er fall sem skilgreint er á bili I sem inniheldur a og b.

4.1.2 Meginhugmynd í öllum nálgunaraðferðunum

Látum p vera margliðu sem nálgar f, og látum $r(x) = f(x) - p(x)$ tákna skekkjuna í nálgun á $f(x)$ með $p(x)$. Þá er

$$f'(x) = p'(x) + r'(x), \quad f''(x) = p''(x) + r''(x), \dots$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx.$$

Nú þurfum við að gera tvennt:

1. Finna heppilegar nálgunarmargliður og reikna út

$$p'(a),\ p''(a), \dots, \qquad \int_a^b p(x)\,dx$$

2. Meta skekkjurnar

$$r'(a),\ r''(a), \dots \int_a^b r(x)\,dx$$

Byrjum á að leiða út nokkrar nálgunarformúlur með skekkjumati.

4.2 Aðferðirnar

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall á bili $I \subset \mathbb{R}$ og a vera punkt í I. Afleiða f í punktinum a er skilgreind með

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ef markgildið er til. Við skrifum því oft

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Þessi nálgun er kölluð *frammismunur* því oftast hugsar maður sér að $h > 0$ og þá er $a + h$ lítið skref áfram frá a.

Við þurfum skekkjumat fyrir þessa formúlu ef við eigum að geta notað hana.

4.2.1 Frammismunur

Við fáum mat á skekkjuna í nálguninni með að skoða Taylor-margliðu f í a. Samkvæmt setningu Taylors er til ξ á milli a og $a + h$ þannig að

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

Þá fæst að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f[a, a+h]$$

er

$$e = f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{2}f''(\xi)h$$

Með öðrum orðum

$$\min_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h \le e \le \max_{t\in[0,h]} -\frac{1}{2}f''(t)h.$$

Við sjáum því að $e = O(h)$ þegar $h \to 0$.

4.2.2 Bakmismunur

Við getum sett $a - h$ í stað $a + h$ í skilgreininguna á afleiðu. Þá fæst svokallaður *bakmismunur*

$$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

og ljóst er að sama skekkjumat gengur fyrir þessa nálgun og fyrir nálgun með frammismun.

4.2.3 Miðsettur mismunakvóti

Lítum nú á þriðja stigs Taylor nálgun

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(\alpha)h^3, \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(\beta)h^3, \end{aligned}$$

þar sem α er á milli a og $a+h$ og β er á milli a og $a-h$.

Tökum nú mismuninn og fáum

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a) \cdot 2h + \tfrac{1}{6}\big(f'''(\alpha) + f'''(\beta)\big)h^3$$

Ef f''' er samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\alpha) + f'''(\beta))$

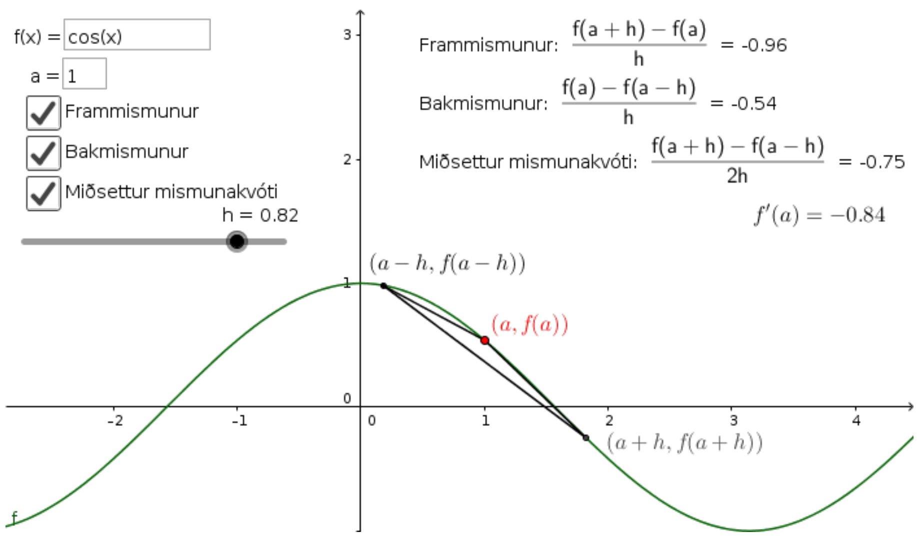
Niðurstaðan verður

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6}f'''(\xi)h^2.$$

Þannig að skekkjan er

$$e = -\frac{1}{6}f'''(\xi)h^2,$$

og jafnframt er $e = O(h^2)$ þegar $h \to 0$.



4.2.4 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Við getum útfært þessa sömu hugmynd til þess að reikna út aðra afleiðu, en þá byrjum við með fjórða stigs Taylor-nálgun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\alpha)h^4,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\beta)h^4,$$

þar sem α er á milli a og $a+h$ og β er á milli a og $a-h$.

Nú leggjum við saman og fáum

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + \tfrac{1}{24}\big(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta)\big)h^4.$$

Nú þurfum við að gefa okkur að $f^{(4)}$ sé samfellt fall, þá gefur milligildissetningin okkur að til er ξ á milli α og β þannig að $f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(\alpha) + f^{(4)}(\beta))$.

Niðurstaðan verður

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

Með Taylor-margliðum má leiða út fleiri nálgunarformúlur fyrir afleiður.

Við ætlum ekki að halda lengra í þessa átt heldur snúa okkur að almennu aðferðinni.

4.3 Skekkjumat

4.3.1 Almennt um nálganir á afleiðum

Ef $x_0, \dots, x_n$ eru punktar í I (hugsanlega með endurtekningum) og p er margliðan sem brúar f í þeim, þá er

$$f(x) = p(x) + r(x),$$

þar sem skekkjuliðurinn $r(x)$ er gefinn með formúlunni

$$r(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ef við tökum $p'(a)$ sem nálgun á $f'(a)$ er skekkjan

$$r'(a) = f'(a) - p'(a).$$

4.3.2 Skekkjumat

Munið að formúlan fyrir afleiðu af margfeldi margra þátta er

$$\begin{gathered}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \cdots \varphi_m)'(a) \\ = \varphi_1'(a)\varphi_2(a)\varphi_3(a) \cdots \varphi_m(a) + \varphi_1(a)\varphi_2'(a)\varphi_3(a) \cdots \varphi_m(a) + \cdots \\ \cdots + \varphi_1(a)\varphi_2(a) \cdots \varphi_{m-1}(a)\varphi_m'(a)\end{gathered}$$

Horfum nú á skekkjuliðinn $r(x)$. Hann er svona margfeldi með $\varphi_1(x) = f[x_0, \dots, x_n, x]$, $\varphi_2(x) = x - x_0$, $\varphi_3(x) = x - x_1$ o.s.frv.

Athugum nú að ef a er einn af gefnu punktunum x_k, þá er $\varphi_{k+2}(x) = (x - x_k)$ sem gefur $\varphi_{k+2}(x_k) = 0$ og $\varphi_{k+2}'(x_k) = 1$.

Þetta segir okkur að ef við tökum $a = x_k$, þá eru allir liðirnir í summunni í hægri hliðinni 0 nema einn, þ.e. við sitjum eftir með þann sem inniheldur φ_{k+2}'.

Niðurstaðan verður því að skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $p'(a)$ er

$$\begin{aligned} f'(a) - p'(a) = r'(a) &= f[x_0, \dots, x_n, x_k] \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (x_k - x_j) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} (a - x_j) \end{aligned}$$

þar sem $a = x_k$.

Hér notuðum við skekkjumatið fyrir Newton aðferðina sem segir að til er ξ á minnsta bilinu sem inniheldur $x_0, \dots, x_n, x_k$ sem uppfyllir

$$f[x_0, \dots, x_n, x_k] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

4.3.3 Frammismunur

Nálgum f með fyrsta stigs brúunarmargliðunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ (þ.e. $x_0 = a$ og $x_1 = a + h$),

$$f(x) = f[a] + f[a, a+h](x-a) + f[a, a+h, x](x-a)(x-a-h)$$

Af þessu leiðir formúlan sem við vorum áður komin með

$$f'(a) = f[a, a+h] + f[a, a+h, a](a-a-h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \tfrac{1}{2}f''(\xi)h$$

Þar sem ξ er á milli a og $a+h$ og uppfyllir að $f[a, a+h, a] = f[a, a, a+h] = \frac{1}{2}f''(\xi)$. Hér erum við að notafæra okkur aftur skekkjumatið sem við sönnuðum í kaflanum um brúunarmargliður.

4.3.4 Miðsettur mismunakvóti

Tökum þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ & + f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ & + f[a-h, a+h, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \end{aligned}$$

Athugum að afleiðan af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er 0 í punktinum a og því er

$$\begin{aligned} f'(a) &= f[a-h, a+h] + f[a-h, a+h, a, a](-h^2) \\ &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \tfrac{1}{6}f'''(\xi)h^2 \end{aligned}$$

Hér nýttum við okkur að til er ξ á milli $a-h$ og $a+h$ þannig að $f[a-h, a+h, a, a] = \frac{1}{6}f'''(\xi)$.

4.3.5 Miðsettur mismunakvóti fyrir aðra afleiðu

Áfram heldur leikurinn. Nú skulum við leiða aftur út formúluna fyrir nálgun á $f''(a)$ með miðsettum mismunakvóta

Þá tökum við þriggja punkta brúunarformúlu með $a-h$, $a+h$ og a með a tvöfaldan. Þá er

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ & + f[a-h, a+h, a](x-a+h)(x-a-h) \\ & + f[a-h, a+h, a, a](x-a+h)(x-a-h)(x-a) \\ & + f[a-h, a+h, a, a, x](x-a+h)(x-a-h)(x-a)^2 \end{aligned}$$

Gætum þess að halda liðnum $(x-a)$. Þá fáum við

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f[a-h] + f[a-h, a+h](x-a+h) \\ & + f[a-h, a+h, a]\big((x-a)^2 - h^2)\big) \\ & + f[a-h, a+h, a, a]\big((x-a)^3 - h^2(x-a))\big) \\ & + f[a-h, a+h, a, a, x]\big((x-a)^4 - h^2(x-a)^2)\big) \end{aligned}$$

Nú þurfum við að reikna aðra afleiðu í punktinum a. Athugum að önnur afleiða af annars stigs þættinum

$$x \mapsto (x-a+h)(x-a-h) = (x-a)^2 - h^2$$

er fastafallið 2, önnur afleiða af þriðja stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^3 - h^2(x-a)$$

er 0 í punktinum a og önnur afleiða af fjórða stigs liðnum

$$x \mapsto (x-a)^4 - h^2(x-a)^2$$

er fastafallið $-2h^2$.

Við höfum því

$$f''(a) = 2f[a-h, a+h, a] + f[a-h, a+h, a, a, a](-2h^2)$$

Nú er til punktur ξ á minnsta bili sem inniheldur $a-h$, $a+h$ og a þannig að $f[a-h, a+h, a, a, a] = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)$.

Við þurfum að reikna út fyrri mismunakvótann

$$\begin{aligned} f[a-h, a+h, a] = f[a-h, a, a+h] &= \frac{f[a, a+h] - f[a-h, a]}{2h} \\ &= \frac{1}{2h}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a-h)}{h}\right) \\ &= \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{2h^2} \end{aligned}$$

Við höfum því leitt aftur út formúluna

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

4.4 Richardson útgiskun

Það ætti að vera ljóst að töluleg deildun er nokkuð óstöðug aðferð því ef skrefastærðin h er lítil eru tölurnar $f(a+h), f(a), f(a-h)$ nálægt hver annarri og við getum lent í styttingarskekkjum.

Því er ekki hægt að búast við að fá alltaf betri nálgun á $f'(a)$ við að minnka skrefalengdina h.

Leiðin er Richardson útgiskun (e. extrapolation), sem er aðferð til að bæta nálganir.

Til eru mjög almennar útgáfur þessarar aðferðar en við munum aðeins skoða þau sértilfelli sem nýtast okkur mest.

4.4.1 Útleiðsla á miðsettum mismunakvóta

Við skulum byrja á að að leiða aftur út formúluna fyrir miðsettann mismunakvóta til að fá betri upplýsingar um skekkjuliðinn. Fyrir fall f sem er nógu oft deildanlegt má beita Taylor til að skrifa

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2}) \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n!)}h^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!)}h^{2n+1} + O(h^{2n+2}) \end{aligned}$$

Ef við drögum seinni jöfnuna frá þeirri fyrri fæst

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + 2\frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \ldots + 2\frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}h^{2n+1} + O(h^{2n+2})$$

svo ef við einangrum $f'(a)$ sjáum við að

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_1(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{og} \quad a_k = -\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}, \quad k = 2, 4, \ldots, 2n.$$

4.4.2 Helmingun á skrefinu

Hér er minnsta veldi í skekkjuliðnum h^2, svo nálgunin $f'(a) \approx R_1(h)$ er $O(h^2)$, eins og við höfum reyndar séð áður. Helmingum nú skrefalengdina h, þá fæst

$$f'(a) = R_1(h/2) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}).$$

Nú berum við saman þessi tvö skref:

$$\begin{aligned} f'(a) &= R_1(h/2) + \tfrac{1}{4}a_2h^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1}), \\ f'(a) &= R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

Margföldum efri jöfnuna með 4 og drögum þá síðari frá. Þá stendur eftir

$$\begin{aligned} 3f'(a) = 4R_1(h/2) - R_1(h) &+ a_4\left(\frac{4}{2^4} - 1\right)h^4 \\ &+ a_6\left(\frac{4}{2^6} - 1\right)h^6 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{4}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

4.4.3 Fjórða stigs nálgun

Nú erum við komin með nýja formúlu:

$$f'(a) = R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \ldots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_2(h) = \frac{4R_1(h/2) - R_1(h)}{3} \quad \text{og} \quad b_k = \frac{a_k}{3}\cdot\left(\frac{4}{2^k} - 1\right), \; k = 4, 6, \ldots, 2n.$$

Ef við berum þetta saman við jöfnuna sem við byrjuðum með

$$f'(a) = R_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \ldots + a_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þá sjáum við að minnsta veldi í skekkjuliðnum er h^4, svo nálgunin $f'(a) \approx R_2(h)$ uppfyllir

$$f'(a) - R_2(h) = O(h^4)$$

og er því betri nálgun en áður.

Þetta ferli heitir *Richardson útgiskun*.

4.4.4 Hægt er að halda áfram útgiskun

Næsta takmark er að eyða liðnum b_4h^4 úr þessari formúlu með því að líta á

$$f'(a) = R_2(h/2) + b_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + b_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} + O(h^{2n+1})$$

Síðan stillum við þessari jöfnu upp með þeirri síðari

$$\begin{aligned} f'(a) &= R_2(h/2) + \tfrac{1}{16}b_4h^4 + \tfrac{1}{64}b_6h^6 + \ldots + \tfrac{1}{2^{2n}}b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1}) \\ f'(a) &= R_2(h) + b_4h^4 + b_6h^6 + \ldots + b_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1}) \end{aligned}$$

Margföldum fyrri jöfnuna með 16 og drögum þá síðari frá

$$\begin{aligned} 15f'(a) = 16R_2(h/2) - R_2(h) &+ b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6 \\ &+ b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}). \end{aligned}$$

4.4.5 Sjötta stigs skekkja

$$\begin{aligned} 15f'(a) = 16R_2(h/2) - R_2(h) &+ b_6\left(\frac{16}{2^6} - 1\right)h^6 \\ &+ b_8\left(\frac{16}{2^8} - 1\right)h^8 + \ldots + b_{2n}\left(\frac{16}{2^{2n}} - 1\right)h^{2n} + O(h^{2n+1}). \end{aligned}$$

Því er

$$f'(a) = R_3(h) + c_6h^6 + c_8h^8 \ldots + c_{2n}h^{2n} + O(h^{2n+1})$$

þar sem

$$R_3(h) = \frac{16R_2(h/2) - R_2(h)}{15}, \quad \text{og} \quad c_k = \frac{b_k}{15}\cdot\left(\frac{16}{2^k} - 1\right), \quad k = 6, 8, \ldots, 2n.$$

Nýja nálgunin uppfyllir

$$f'(a) - R_3(h) = O(h^6)$$

og er því enn betri en áður, en við þurfum líka að reikna út $R_1(h/4)$ til að reikna $R_2(h/2)$.

4.4.6 Almenn rakningarformúla

Richardson-útgiskunin heldur áfram og út kemur

$$R_{i+1}(h) = \frac{4^iR_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1} = R_i(h/2) + \frac{R_i(h/2) - R_i(h)}{4^i - 1}$$

fyrir $(i+1)$-tu Richardson útgiskun og $R_{i+1}(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) - R_{i+1}(h) = O(h^{2i+2}),$$

en á móti kemur að til að reikna út $R_{i+1}(h)$ þurfum við að hafa reiknað út tölurnar

$R_1(h)$, $R_1(h/2)$, ..., $R_1(h/2^i)$ auk
$R_2(h)$, $R_2(h/2)$, $\ldots$, $R_2(h/2^{i-1})$ og svo framvegis að

$\vdots$

$R_i(h)$ og $R_i(h/2)$.

Eins og áður sagði fara styttingarskekkjur á endanum að segja til sín í útreikningum á $R_1(h)$, svo einhver takmörk eru fyrir hversu margar Richardson útgiskanir er hægt að framkvæma.

4.4.7 Reiknirit

Útreikningarnir að ofan eru yfirleitt settir fram í töflu

$$\begin{array}{lllll} D(1,1) & & & & \\ D(2,1) & D(2,2) & & & \\ D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D(n,1) & D(n,2) & D(n,3) & \ldots & D(n,n) \end{array}$$

þar sem $D(i,j) = R_j(h/2^{i-j})$ og þar með

$$D(i,j) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h/2^{i-1}) - f(a-h/2^{i-1})}{2 \cdot h/2^{i-1}}, & j = 1 \\ D(i,j-1) + \dfrac{D(i,j-1) - D(i-1,j-1)}{4^{j-1}-1}, & j > 1 \end{cases}$$

sem gerir okkur auðvelt að forrita Richardson útgiskun.

4.4.8 Skekkjumat

Finnum nú eftirámat fyrir $D(i,j)$ með stærðunum $D(i,j-1)$ og $D(i-1,j-1)$. Hér á eftir er $R_j(h/2)$ í hlutverki $D(i,j-1)$ og $R_i(h)$ í hlutverki $D(i-1,j-1)$ (h er helmingað þegar við förum niður um eina línu).

Munum að $R_i(h)$ uppfyllir að

$$f'(a) = R_j(h) + Kh^{2j} + O(h^{2j+1})$$

fyrir eitthvert K í $\mathbb{R}$ og að

$$f'(a) = R_j(h/2) + K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1})$$

Ef við tökum mismun á hægri og vinstri hliðum þessara jafna, þá fáum við

$$0 = R_j(h) - R_j(h/2) + K\left(1 - \frac{1}{2^{2j}}\right)h^{2j} + O(h^{2j+1})$$

og ef við einangrum K fæst

$$K = -\frac{4^j}{h^{2j}} \cdot \frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}).$$

4.4.9 Útleiðsla á fyrirframmati

Þá er skekkjan í nálgun á $f'(a)$ með $R_j(h/2)$ jöfn

$$\begin{aligned} e_j(h/2) &= f'(a) - R_j(h/2) \\ &= K\left(\frac{h}{2}\right)^{2j} + O(h^{2j+1}) \\ &= -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1} + O(h^{2j+1}) \\ &\approx -\frac{R_j(h) - R_j(h/2)}{4^j - 1}. \end{aligned}$$

Þar sem $R_j(h/2)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2j+1})$, en $R_{j+1}(h)$ er nálgun á $f'(a)$ af stigi $O(h^{2i+3})$ getum við slegið á $e_{j+1}(h)$ með $e_j(h/2)$. Ef við lækkum vísinn $j+1$ um einn gefur það okkur matið

$$e_j(h) \approx \frac{R_{j-1}(h) - R_{j-1}(h/2)}{4^{j-1} - 1} = \frac{D(i, j-1) - D(i-1, j-1)}{4^{j-1} - 1}$$

sem er einmitt liðurinn í rakningarformúlunni fyrir $D(i, j)$.

4.4.10 Sýnidæmi

Látum $f(x) = x/(x^2 + 4)^{2/3}$ og $a = -1$. Byrjum með $h = 1$ og notum svo rakningarformúluna til þess að fylla út útgiskunartöfluna.

h	$D(i,1)$	$D(i,2)$	$D(i,3)$	$D(i,4)$
1 .	0.25000000			
0.5	0.25151838	0.25202451		
0.25	0.25104655	0.25088928	0.25081360	
0.125	0.25086355	0.25080254	0.25079676	0.25079649

Niðustaðan er: $f'(-1) \approx 0.2507964$, með eftirámat á skekkju $-3 \cdot 10^{-7}$.

Rétt gildi er 0.25079647217924889177.

KAFLI 5

Töluleg heildun

Í VINNSLU

KAFLI 6

Upphafsgildisverkefni

Í VINNSLU

KAFLI 7

Jaðargildisverkefni

Í VINNSLU

KAFLI 8

Jöfnuhneppi

Í VINNSLU

KAFLI 9

Eigingildisverkefni

Í VINNSLU

KAFLI 10

Monte Carlo hermanir

Í VINNSLU

KAFLI 11

Viðauki

The trouble with having an open mind, of course, is that people will insist on coming along and trying to put things in it. – Terry Pratchett

- Þessi skrá (pdf) má finna á
  `http://notendur.hi.is/bsm/stae405/stae405.pdf`
- Rafræna útgáfu af þessum nótum má finna á
  `http://notendur.hi.is/bsm/stae405`
- Heimasíða námskeiðsins á Uglu
  `https://ugla.hi.is/kv/index2.php?sid=219&namsknr=09104320160`

11.1 Kennsluáætlun

Why bother with a cunning plan when a simple one will do? – Terry Pratchett, Thud!

Dags.	Efni	Kaflar
08.01.16	1. Inngangur	1.1-1.7
13.01.16	2. Núllstöðvar	2.1-2.3
14.01.16	**Heimadæmi 1**	
15.01.16	2. Núllstöðvar	2.4-2.6
20.01.16	3. Brúun	3.1-3.2
21.01.16	**Heimadæmi 2**	
22.01.16	3. Brúun	3.3
27.01.16	3. Brúun	3.4
28.01.16	**Heimadæmi 3**	
29.01.16	3. Brúun	3.5-3.6
	Verkefni I kynnt	
03.02.16	3. Brúun	3.7
04.02.16	**Heimadæmi 4**	
05.02.16	3. Brúun	3.8-3.9
10.02.16	4. Töluleg diffrun	4.1-4.2
12.02.16	Samantekt	
	Verkefni I skilað	
17.02.16	4. Töluleg diffrun	4.3
18.02.16	**Heimadæmi 5**	
19.02.16	5. Töluleg heildun	
24.02.16	5. Töluleg heildun	
25.02.16	**Heimadæmi 6**	
26.02.16	5. Töluleg heildun	
	Verkefni II kynnt	
02.03.16	6. Upphafsgildisverkefni	
03.03.16	**Heimadæmi 7**	
04.03.16	6. Upphafsgildisverkefni	
09.03.16	6. Upphafsgildisverkefni	
11.03.16	Hagnýtingar	Ítarefni
	Verkefni II skilað	
16.03.16	7. Jaðargildisverkefni	
17.03.16	**Heimadæmi 8**	
18.03.16	7. Jaðargildisverkefni	
23.03.16	*Páskafrí*	
25.03.16	*Páskafrí*	
30.03.16	8. Jöfnuhneppi	
31.03.16	**Heimadæmi 9**	
01.04.16	8. Jöfnuhneppi	
06.04.16	8. Jöfnuhneppi	
07.04.16	**Heimadæmi 10**	
08.04.16	9. Eigingildisverkefni	
13.04.16	10. Monte Carlo hermanir	
15.04.16	Samantekt	
20.04.16	Prófundirbúningur	

11.2 Skipulag námskeiðsins

Always be wary of any helpful item that weighs less than its operating manual. – Terry Pratchett, Jingo

11.2.1 Kennsla

Fyrirlestrar verða á miðvikudögum klukkan 8:20-9:50 í HT-105, Háskólatorgi, og á föstudögum klukkan 10:00-11:30 í HT-105, Háskólatorgi. Kennari er Benedikt Steinar Magnússon <bsm@hi.is>.

Aðstoðarkennarar eru Halla Björg Sigurþórsdóttir, Jón Áskell Þorbjarnarson, Jónas Grétar Jónasson, Páll Ásgeir Björnsson og Pétur Rafn Bryde.

11.2.2 Kennsluefni

Kennslubókin eru þessar nótur, http://notendur.hi.is/bsm/stae405/. sem einnir er hægt að nálgast á pdf-formi. Auk þess set ég forritaskrár og annað ítarefni á Uglu eftir því sem við á.

Þeir sem vilja ítarlegri kennslubækur bendi ég á

- *A Friendly Introduction to Numerical Analysis* eftir Brian Bradie.
- *Numerical Mathematics and Computing* eftir Ward Cheney og David Kincaid
- *Introduction to applied numerical analysis* eftir R. W. Hamming.

> "The purpose of computing is insight, not numbers" -R. W. Hamming

11.2.3 Matlab/Octave

Við munum forrita töluvert í námskeiðinu. Til þess notum við annað hvort *Matlab*, http://www.mathworks.com/products/matlab/ eða *Octave*, http://www.gnu.org/software/octave/.

Á heimasíðu Kristjáns Jónassonar, http://notendur.hi.is/jonasson/matlab/ finnið þið leiðbeiningar um uppsetningu á Matlab. En fyrir þá sem kjósa frjálsan hugbúnað eru leiðbeiningar fyrir Octave hér http://www.gnu.org/software/octave/download.html.

Octave er að mestu leyti sambærilegt við Matlab, bæði ritháttur og svo styður það einnig *m*-skrárnar úr Matlab. Sjá nánar Differences_between_Octave_and_MATLAB.

Þið hafið fullkomið val um það hvort þið notið Matlab eða Octave við að leysa verkefni námskeiðsins.

Ítarefni fyrir Matlab/Octave:

- Inngangur að Matlab/Octave fyrir línulega algebru, https://notendur.hi.is/~bsm/linalg/.
- Kennslubók Kristjáns Jónassonar um Matlab fæst í Bóksölu Stúdenta.
- http://en.wikibooks.org/wiki/Matlab.
- Hjálpin í Matlab og Octave er einnig mjög gagnleg.

11.2.4 Heimadæmi og dæmatímar

Dæmatímarnir í námskeiðunu verða notaðir bæði til að reikna dæmi á töflu og sem stoðtímar fyrir heimadæmin. Alls verða lögð fyrir 10 heimadæmi. Þeim á að skila á fimmtudögum fyrir klukkan 16:00 í hólf viðkomandi dæmatímakennara. Heimadæmin er að finna á vikublöðum sem verða sett viku fyrr í möppuna *Vikublöð* á Uglu.

TIL AÐ ÖÐLAST PRÓFTÖKURÉTT ÞARF AÐ SKILA AÐ MINNSTA KOSTI 7 AF 10 HEIMADÆMUM.

Undanþágur frá þessari reglu fást eingöngu fyrir atbeina Náms- og starfsráðgjafar Háskólans.

Merkt verður við heimadæmin á Uglu undir *Verkefni og hlutapróf* og eru nemendur beðnir um að fylgjast með skráningunni þar og ganga úr skuggu um að allt sé rétt skráð.

11.2.5 Verkefni

Á misserinu verða tvö viðamikil forritunarverkefni. Í kennsluáætlun stendur í hvaða fyrirlestrum þau verða kynnt og hvenær á að skila þeim. Verkefnin eigið þið að leysa í hóp, tvö eða þrjú saman. Allir í hópnum eiga að vera virkir og taka þátt í að leysa alla liði verkefnisins. Forritað er í Matlab eða Octave.

Í vikunum sem skila á verkefunum þá munum við nota dæmatímana sem stoðtíma fyrir verkefnin. Skila á verkefnunum á föstudögum kl. 16:00, fyrra verkefninu 12. febrúar og seinna verkefninu 11. mars.

Matlab/Octave-forritin eiga að vera hluti af úrlausn og skal þeim skilað ásamt skýrslu í gegnum Uglu.

Ef við finnum sömu forritin í fleiri en einni úrlausn, þá lítum við á það sem svindl og lækkum einkunn hjá öllum sem skráðir eru fyrir þeim lausnum og eftir atvikum tilkynnum deildarforseta og setjum í farveg innan sviðsins (sbr. 51. gr. rgl. 569/2009 HÍ).

11.2.6 Lokapróf

Prófið verður 3 tímar og skiptist í fræðilegar krossaspurningar og skrifleg dæmi. Formúlublöð sem fylgja prófinu eru einu skriflegu hjálpargögnin sem leyfð verða. Þið **eigið** að taka með ykkur reiknivélar. Prófað verður bæði úr efni fyrirlestranna og úr dæmareikningi. Nauðsynlegt er að ná prófinu með einkunn 5. Verkefnaeinkunn gildir 30% af lokaeinkunn.

11.2.7 Námsmat

Til þess að standast námskeiðið þarf eftirfarandi:

- Skila að minnsta kosti 7 af 10 heimadæmum.
- Skila báðum verkefnunum.
- Ná lokaprófinu með einkunn 5.
- Lokaeinkunn (lokapróf 70%, verkefnaeinkunn 30%) þarf að vera að minnsta kosti 5.

Þau ykkar sem hafa prófrétt frá síðasta ári haldið verkefnaeinkunn. En þið þurfið að tilkynna mér það með tölvupósti sem fyrst.

11.3 Frágangur heimadæma

Let grammar, punctuation, and spelling into your life! Even the most energetic and wonderful mess has to be turned into sentences. – Terry Pratchett

- Skrifið upp **dæmið** og lausnina snyrtilega
- Vísið í setningar og niðurstöður sem þið notið
- Notið ekki rökfræðitákn eins og $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$
- Textinn á að vera samfelldur og læsilegur (lesið hann sjálf yfir)
- Skýrt svar/niðurstaða

If you trust in yourself. . .and believe in your dreams. . .and follow your star. . . you'll still get beaten by people who spent their time working hard and learning things and weren't so lazy. – Terry Pratchett, The Wee Free Men

11.4 Gagnlegir tenglar

She got on with her education. In her opinion, school kept on trying to interfere with it. – Terry Pratchett, Soul Music

- Orðasafn Íslenska stærðfræðafélagsins http://stæ.is/os
- http://mathworld.wolfram.com/topics/NumericalMethods.html
- http://en.wikipedia.org
- Octave Programming Tutorial
- Octave Quick Reference (pdf)
- Getting Started with Matlab (pdf)
- Matlab Academy
- Matlab Tutorials and Learning Resources
- *genindex*