STÆR3HE05 - Heildun

Náttúrufræðibraut og raungreina- og tæknibraut

Menntaskólinn á Akureyri Haust 2024

1 Stofnföll og heildisreglur

Skilgreining 1.1
Gerum ráð fyrir því að f sé fall skilgreint á $I \subseteq \mathbb{R}$. Ef til er fall F sem er diffranlegt fyrir öll $x \in I$ þannig að $F'(x) = f(x)$ þá segjum við að F sé **stofnfall** fyrir f á I.

Athugasemd

Þegar nöfn falla eru gefin með litlum bókstaf, t.d. f, g, h o.s.frv. þá ef hefð fyrir því að notast við sambærilega stóra stafi fyrir nöfn stofnfalla þeirra, t.d. F, G, H o.s.frv. Þetta er þó ekki nauðsynlegt og notast má við hvern bókstaf eða nafn á stofnfallinu sem hentar hverju sinni.

Athugasemd

Mikilvægt er að þekkja afleiður algengustu fallanna þegar verið er að heilda, en töflu yfir þær má finna í viðauka þessa heftis.

Regla 1.1 Helstu Diffrunarreglur - Upprifjun
Gerum ráð fyrir því að f og g séu diffranleg föll og að a sé fasti. Þá gildir:

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2) $(af(x))' = a\,(f(x))'$

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Margföldunarreglan, Leibnitz reglan)

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (Hlutfallsreglan)

5) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (Keðjureglan)

Athugasemd

Fyrsta reglan hér að ofan felur í sér að sérhvert fall megi diffra lið fyrir lið, jafnvel þótt það samanstandi af fleiri en tveimur liðum.

Æfingardæmi

Diffrið eftirfarandi föll.

a) $F(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$

b) $G(x) = 2x^2 \cos(4x - 1)$

c) $H(x) = \ln(3x^2 + 2)$

Skilgreining 1.2
Gerum ráð fyrir að $I \subseteq \mathbb{R}$. Við segjum að mengið I sé **bil** í $\mathbb{R}$ ef fyrir öll a, b í I með $a < b$ gildir að ef $a < x < b$ þá er $x \in I$.

Athugasemd

Óformlega má segja að mengi $I \subseteq \mathbb{R}$ nefnist bil ef það inniheldur engin "göt".

Athugasemd

Hægt er að sanna að öll bil í $\mathbb{R}$ eru af einhverri af eftirfarandi gerðum:

1) Takmörkuðu bilin í $\mathbb{R}$, þ.e. mengi af gerðinni $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ og $[a, b]$ þar sem a og b eru rauntölur og $a < b$.
2) Hálflínurnar í $\mathbb{R}$, þ.e. mengi af gerðinni $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, \infty[$ og $[a, \infty[$ þar sem a er rauntala.
3) Mengin $\mathbb{R}$ og $\varnothing$.

Athugasemd

Í þessu hefti munum við alltaf gera ráð fyrir því að umrædd bil séu **ekki** $\varnothing$ nema annað sé sérstaklega tekið fram.

Æfingardæmi

Rifjið upp bilritháttinn sem notast var við hér að ofan og skrifið sérhverja bilgerð (að $\mathbb{R}$ og $\varnothing$ undanskildum) með mengjarithætti.

Regla 1.2
Ef f er fall skilgreint á bili $I \subseteq \mathbb{R}$ og F og G eru tvö stofnföll fyrir f á I þá er til tala $k \in \mathbb{R}$ þannig að $F(x) = G(x) + k$ fyrir öll $x \in I$.

Sönnun:
Þar sem F og G eru bæði stofnföll fyrir f þá fæst

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

fyrir öll $x \in I$. Þar með gefur regla úr fyrri áfanga að til sé tala $k \in \mathbb{R}$ þannig að $F(x) - G(x) = k$ fyrir öll $x \in I$ og því $F(x) = G(x) + k$.

■

Athugasemd

Talan k sem kom fram í reglunni hér á undan er yfirleitt kölluð **heildisfastinn** sem fæst úr heilduninni. Hann er ætíð stak í mengi rauntalna, en við munum ekki tilgreina það sérstaklega héðan í frá.

Æfingardæmi

Föllin hér að neðan hafa öll náttúrulega skilgreiningarmengið $\mathbb{R}$. Finnið öll stofnföll þeirra á því mengi.

a) $f(x) = 7 + 3x^2 - 5x^5$

b) $g(x) = 2\cos(3x)$

c) $h(x) = 3e^{5x}$

Skilgreining 1.3
Við notum táknmálið

$$\int f(x)\ dx$$

til þess að tákna öll stofnföll fallsins f og köllum þessa stærð **óeiginlega heildi** fallsins f.

Athugasemd

Óeiginlega heildi fallsins f er iðulega bara kallað heildi þess, en verknaðurinn að finna það er kallaður að heilda.

Regla 1.3 Einfaldir eiginleikar heildunar
Gerum ráð fyrir því að f og g séu föll á bili I og að a sé fasti. Þá gildir:

1) $\displaystyle\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$

2) $\displaystyle\int af(x)\ dx = a\int f(x)\ dx$

Athugasemd

Sönnun reglunnar hér að ofan er mjög einföld afleiðing af diffrunareglunum í upphafi kaflans og er eftirlátin nemendum.

Regla 1.4 (Upprifjun á nokkrum velda- og rótarreglum)
Eftirfarandi velda- og rótarreglur reynast gagnlegar þegar verið er að heilda:

1) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

2) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

3) $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi.

1) $\displaystyle\int 2x^{\frac{3}{5}} - 5\sqrt[7]{x^2}\ dx$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{x^4}\ dx$

Sýnidæmi um heildun þar sem skilgreiningarmengið er ekki bil

Finnum $\displaystyle\int f(x)\ dx$ með $f(x) = \frac{1}{x}$. Athugum sérstaklega að náttúrulegt skilgreiningarmengi f er $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ og því er það **ekki** bil heldur sammengi tveggja bila. Við skulum því finna stofnfall fyrir f á hvoru bili fyrir sig. Byrjum á bilinu $]0, \infty[$.

Nú vitum við að $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, og þar sem náttúrulegt skilgreiningarmengi $\ln$ er $]0, \infty[$ þá höfum við fundið stofnfall fyrir f á því bili.

Athugum nú að fyrir $x \in]-\infty, 0[$ gildir að $-x > 0$ og því er stærðin $\ln(-x)$ skilgreind. Keðjureglan gefur nú að $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ og því er $\ln(-x)$ stofnfall fyrir f á bilinu $]-\infty, 0[$.

Við fáum því að stofnfall fyrir f á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er gefið með

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + k_1 & \text{ef } x > 0 \\ \ln(-x) + k_2 & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

Þar sem k_1, k_2 eru einhverjir fastar. Þetta má svo umrita

$$F(x) = \ln|x| + k(x)$$

þar sem $k(x) = k_1$ ef $x > 0$ en $k(x) = k_2$ ef $x < 0$.

Athugasemd

Í flestum kennslubókum stendur einfaldlega að $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + k$ þar sem $k \in \mathbb{R}$. Við munum leyfa okkur að rita þetta með þessum hætti þegar verið er að heilda föll sem ekki eru skilgreind á bili.

Æfingardæmi

Reiknið heildið $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\ dx$. Finnið svo stofnfall F fyrir fallið $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sem uppfyllir skilyrðin $F(-1) = 2$ og $F(1) = -1$ eða tilgreinið af hverju slíkt stofnfall er ekki til.

Regla 1.5 Hlutheildunarregla
Gerum ráð fyrir því að fallið f sé diffranlegt og að g' sé afleiða g. Þá gildir að

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

Sönnun:
Margföldunarreglan fyrir diffrun gefur að

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

og því fæst að

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

Heildum svo og fáum

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

■

Athugasemd

Notkun reglunnar er með þeim hætti að notandinn velur föllin f og g' eftir hentugleika og notast svo við regluna. Ef föllin voru vel valin þá ætti heildið sem fæst hægra megin jafnaðarmerkisins að vera einfaldara en heildið sem byrjað var með. Einnig kemur það oft fyrir að notast þarf við hlutheildunarregluna oftar en einu sinni í sama dæminu þar til niðurstaða fæst.

Sýnidæmi um hlutheildun Reiknum eftirfarandi heildi með því að notast við hlutheildun.

1) $\int xe^x\ dx$

2) $\int 2x\cos(x)\ dx$

3) $\int x\ln(x)\ dx$

Lausn:

1) Hér veljum við $f(x) = x$ og $g'(x) = e^x$. Við höfum þá að $f'(x) = 1$ og $g(x) = e^x$. Þar með fæst

$$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x + k$$

2) Veljum $f(x) = 2x$ og $g'(x) = \cos(x)$. Við fáum þá að $f'(x) = 2$ og $g(x) = \sin(x)$. Því fáum við

$$\int 2x\cos(x)\ dx = 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\ dx = 2x\sin(x) + 2\cos(x) + k$$

3) Hér er skynsamlegt að velja $f(x) = \ln(x)$ en $g'(x) = x$. Við fáum því $f'(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ og þar með

$$\int x\ln(x)\ dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + k$$

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við hlutheildun.

1) $\int 2x3^x\ dx$

2) $\int x\sin(3x)\ dx$

3) $\int x^2\ln(x)\ dx$

Regla 1.6 Innsetningarregla
Ef F er stofnfall fyrir fallið f og g' er afleiða fallsins g þá gildir að

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x)) + k$$

Sönnun:
Við notumst við keðjuregluna og fáum að

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Heildun gefur því

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int (F(g(x)))'\ dx = F(g(x)) + k$$

■

Athugasemd

Notkun innsetningarreglunnar er með sambærilegum hætti og notkun hlutheildunarreglunnar. Við þurfum að velja föllin f og g með skynsamlegum hætti svo hægt sé að beyta reglunni, og í kjölfarið finna stofnfallið F til þess að komast að lokasvarinu.

Sýnidæmi um innsetningu

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við innsetningu.

1) $\displaystyle\int 2x(x^2+5)^8 \, dx$

2) $\displaystyle\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) \, dx$

3) $\displaystyle\int 5xe^{x^2} \, dx$

Lausn:

1) Ef við veljum $f(x) = x^8$ og $g(x) = x^2 + 5$ þá höfum við að $g'(x) = 2x$ og því $f(g(x))g'(x) = 2x(x^2+5)^8$. Þar sem $F(x) = \frac{1}{9}x^9$ er stofnfall fyrir f þá fæst:

$$\int 2x(x^2+5)^8 \, dx = \frac{1}{9}(x^2+5)^9 + k$$

2) Hér getum við valið $f(x) = \cos(x)$ og $g(x) = x^3$. Þá er $g'(x) = 3x^2$ og því $f(g(x))g'(x) = 3x^2\cos\left(x^3\right)$. Höfum nú $F(x) = \sin(x)$ og fáum því:

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) \, dx = \sin\left(x^3\right) + k$$

3) Í fljóti bragði virðist sem við getum ekki notast við innsetningarregluna hér, en við þurfum aðeins að byrja á smá umritun. Höfum að $\displaystyle\int 5xe^{x^2} \, dx = \frac{5}{2}\int 2xe^{x^2} \, dx$. Finnum nú heildið hægra megin jafnaðarmerkisins með því að notast við innsetningu. Við veljum $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2$. Þá er $g'(x) = 2x$ og því fæst $f(g(x))g'(x) = 2xe^{x^2}$. Við höfum nú $F(x) = e^x$ og fáum því:

$$\int 5xe^{x^2} \, dx = \frac{5}{2}\int 2xe^{x^2} \, dx = \frac{5}{2}e^{x^2} + k$$

Athugasemd

Í síðasta lið dæmisins hér á undan gæti einhverjum þótt eðlilegra að skila svarinu $\frac{5}{2}e^{x^2}+\frac{5}{2}k$, en þar sem fastinn k getur verið hvaða rauntala sem er þá gildir slíkt hið sama um stærðina $\frac{5}{2}k$. Því má allt eins sleppa því að margfalda $\frac{5}{2}$ með heildisfastanum.

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við innsetningu.

1) $\int 10x\left(5x^2-3\right)^7\ dx$

2) $\int 4\sin(2x)\ dx$

3) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Regla 1.7 Innsetningarregla - Gagnlegri útgáfa
Gerum ráð fyrir að g' er afleiða fallsins g og að f sé fall. Ef við setjum $u=g(x)$ þá fæst að

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\ dx=\int f(u)\ du$$

þar sem $du=g'(x)dx$.

Athugasemd

Þegar við höfum reiknað upp úr heildinu $\int f(u)\ du$ þá notumst við við jöfnuna $u=g(x)$ til þess að fá lokasvarið í breytunni x.

Athugasemd

Í reglunni hér að ofan var notast við bókstafinn u í innsetningunni, en að sjálfsögðu má notast við hvaða bókstaf sem er.

Sýnidæmi um innsetningu Reiknið eftirfarandi heildi með því að byrja á því að notast við innsetningarregluna.

1) $\int \frac{4}{4x-3}\,dx$

2) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

3) $\int x^3e^{x^2}\ dx$

Lausn:

1) Setjum $u = 4x - 3$. Við höfum þá að $du = 4x\ dx$ og við fáum því
$$\int \frac{4}{4x-3}\ dx = \frac{1}{u}\ du = \ln|u| + k = \ln|4x-3| + k$$

2) Hér veljum við $u = x - 1$. Þá fæst $du = dx$ en auk þess höfum við $x = u + 1$. Við fáum því
$$\int x\sqrt{x-1}\ dx = \int (u+1)\sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\ du$$
$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

3) Við setjum $u = x^2$, fáum þá að $du = 2x\ dx$ og þar með $\frac{1}{2}du = x\ dx$. Við fáum því
$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int ue^u\ du$$
Við leysum nú þetta heildi með því að notast við hlutheildun, fáum
$$\frac{1}{2}\int ue^u\ du = \frac{1}{2}\left(ue^u - \int e^u\ du\right) = \frac{1}{2}ue^u - \frac{1}{2}e^u + k$$
og þar með
$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + k$$

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við innsetningarregluna.

1) $\displaystyle\int \frac{3}{2-5x}\ dx$

2) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x+2}\ dx$

3) $\displaystyle\int x^3\cos\left(2x^2\right)\ dx$

Regla 1.8 (Upprifjun á hornafallareglum)
Um hornaföllin cos og sin gilda eftirfarandi reglur:

1) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

3) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Athugasemd

Hornafallareglurnar hér að ofan geta oft reynst gagnlegar við heildun.

Sýnidæmi um umritun með hornafallareglum Reiknið eftirfarandi heildi.

1) $\int \cos^2(x)\ dx$

2) $\int 4\sin(2x)\cos(2x)\ dx$

3) $\int \cos^3(x)\ dx$

Lausn:

1) Við höum að

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

og þar með

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

Við fáum því

$$\int \cos^2(x)\ dx = \int \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + k$$

2) Setjum $u = 2x$. Þá er $du = 2x\ dx$ og við fáum því

$$\int 4\sin(2x)\cos(2x)\ dx = \int 2\sin(u)\cos(u)\ du$$

$$= \int \sin(2u)\ du = -\frac{1}{2}\cos(2u) + k = -\frac{1}{4}\cos(2u) + k$$

3) Athugum að við höfum

$$\cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x) = \cos(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)$$

Við setjum því $u = \sin(x)$ svo $du = \cos(x)\ dx$ og því fæst

$$\int \cos^3(x)\ dx = \int \cos(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)\ dx = \int 1 - u^2\ du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + k = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x) + k$$

Sýnidæmi um tvö áhugaverð heildi Reiknið eftirfarandi heildi.

1) $\int \ln(x)\ dx$

2) $\int e^x \sin(x)\ dx$

Lausn: Í báðum þessum dæmum notumst við við sniðug "trikk" sem vert er að muna!

1) Við umritum $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$ og notumst svo við hlutheildun. Veljum $f(x) = \ln(x)$ og $g'(x) = 1$, höfum því $f'(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = x$. Fáum því:

$$\int \ln(x)\ dx = x\ln(x) - \int 1\ dx = x\ln(x) - x + k$$

2) Hér ætlum við að notast við hlutheildun, veljum $f(x) = \sin(x)$ og $g'(x) = e^x$. Höfum því $f'(x) = \cos(x)$ og $g(x) = e^x$. Fáum því:

$$\int e^x \sin(x)\ dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\ dx$$

Reiknum nú síðara heildið einnig með hlutheildun, veljum $f(x) = \cos(x)$ og $g'(x) = e^x$. Fáum því $f'(x) = -\sin(x)$ og $g(x) = e^x$ og þar með

$$\int e^x \cos(x)\ dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\ dx$$

Ef við tökum saman útreikninga okkar þá höfum við þar með fengið

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\ dx &= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\ dx\right) \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\ dx\end{aligned}$$

Við sjáum nú að upprunalega heildið okkar kemur fyrir beggja vegna jafnaðarmerkisins. Við getum því litið á það sem óþekkta stærð og einangrað. Fáum:

$$\int e^x \sin(x)\ dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + k$$

Æfing 1

1. Reiknið eftirfarandi heildi.

(a) $\int 2x^2 - x + 3 \, dx$

(b) $\int -5x^3 + 2x - 1 \, dx$

(c) $\int 3x^2 - \sqrt{x} \, dx$

(d) $\int 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}} \, dx$

(e) $\int 3e^x - 2^x \, dx$

(f) $\int e^{5x} + 3^{2x} \, dx$

(g) $\int \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

(h) $\int e^{-x} + \sqrt[3]{x} \, dx$

(i) $\int \frac{3}{x^2+1} \, dx$

(j) $\int \frac{2}{3x} \, dx$

(k) $\int -\frac{\pi}{x-e} \, dx$

(l) $\int 3\cos(3x) - 4\sin(2x) \, dx$

(m) $\int \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) \, dx$

(n) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(o) $\int 1 + \tan^2(x) \, dx$

(p) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$

2. Reiknið heildið $\int f(x) \, dx$ og finnið síðan stofnfall F fyrir f sem uppfyllir skilyrðin $F(-1) = 1$ og $F(1) = 2$ eða útskýrið af hverju slíkt stofnfall er ekki til.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = 3x^2$

(c) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

(d) $f(x) = \cos(\pi x)$

3. Notist við hlutheildun til þess að reikna eftirfarandi heildi.

(a) $\int xe^{3x} \, dx$

(b) $\int 2x\cos(3x) \, dx$

(c) $\int x\ln(x) \, dx$

(d) $\int xe^{-x} \, dx$

(e) $\int 3x\sin(x) \, dx$

(f) $\int x^3\ln(x) \, dx$

(g) $\int x^2\cos(x) \, dx$

(h) $\int x^2 2^{-x} \, dx$

(i) $\int x\,(\ln(x))^2\ dx$

(j) $\int \sqrt{x}\ln(x)\ dx$

(k) $\int x\log_{10}(x)\ dx$

(l) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$

4. Notist við innsetningu til þess að reikna eftirfarandi heildi.

(a) $\int 2x\left(x^2+1\right)^4\ dx$

(b) $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$

(c) $\int 4x\cos\left(x^2\right)\ dx$

(d) $\int 5x^2e^{x^3}\ dx$

(e) $\int x^3\left(x^4-2\right)^9\ dx$

(f) $\int \frac{1}{\pi}\sin\left(\pi x\right)\ dx$

(g) $\int 3x3^{x^2}\ dx$

(h) $\int 3x\sqrt{8-x^2}\ dx$

(i) $\int \frac{3^{\ln(x)}}{x}\ dx$

(j) $\int x^5\sqrt{x^2+1}\ dx$

(k) $\int (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\ dx$

(l) $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\ dx$

5. Reiknið eftirfarandi heildi.

(a) $\int \sin^2(x)\ dx$

(b) $\int x\cos(2\pi x)\sin(2\pi x)\ dx$

(c) $\int \cos^2(\pi x)\ dx$

(d) $\int \cos^5(x)\ dx$

(e) $\int 2^x\cos(x)\ dx$

(f) $\int \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)\ dx$

(g) $\int \cos(\ln(x))\ dx$

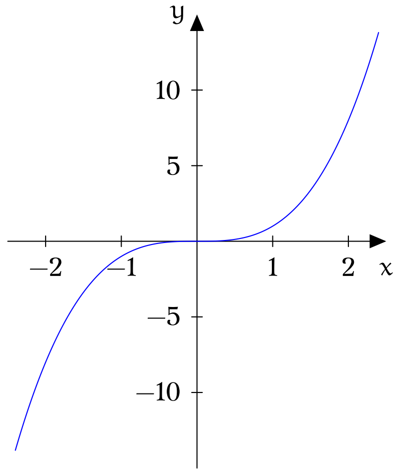
(h) $\int \frac{5^{\ln(x)}}{x^2}\ dx$

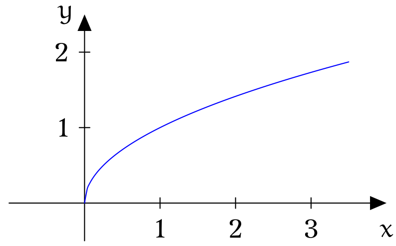
(i) $\int \arctan(x)\ dx$

(j) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\ dx$

Svör við æfingu 1

1. (a) Fastafall og 0. stigs margliða
   (b) Veldisfall og 2. stigs margliða
   (c) Hlutleysufall og 1. stigs margliða
   (d) 1. stigs margliða
   (e) Veldisfall $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$
   (f) Fastafall og margliða sem hefur ekkert stig
   (g) Rætt fall
   (h) 3. stigs margliða

2. (a)


   (b)


3. Svari sleppt.

2 Eiginleg heildi

Skilgreining 2.1
Ef $[a,b]$ er lokað bil í $\mathbb{R}$ og $x_0, x_1, \ldots, x_n$ eru rauntölur þannig að

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

þá kallast mengið $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ **skipting** (eða bútun) á bilinu $[a,b]$.

Bilin $[x_{i-1}, x_i]$ fyrir $i \in \{1, \ldots, n\}$ nefnast **bútar** skiptingarinnar og talan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ nefnist **lengd** i-ta bútarins.

Stærðin $||S|| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ nefnist svo **norm** skiptingarinnar.

Athugasemd

Til upprifjunar þá er stærðin $\max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ stærsta talan sem kemur fyrir í menginu.

Sýnidæmi um skiptingu bils

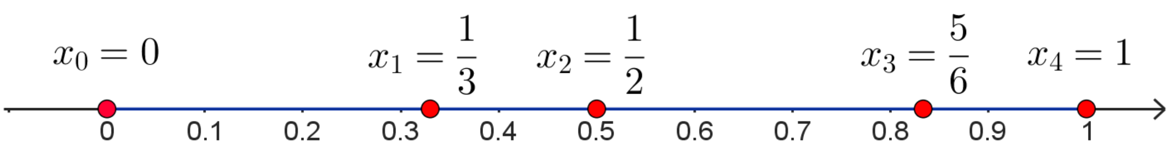
Gefið er mengið $[0,1]$ og skiptingin $S = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right\}$. Tilgreinið alla búta skiptingarinnar, finnið lengd þeirra og tilreinum að lokum hvert norm skiptingarinnar er.

Lausn: Bútar skiptingarinnar eru $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$ og $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$ en lengdir þeirra eru

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ og } \Delta x_4 = x_4 - x_3 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Við sjáum því að norm skiptingarinnar er $||S|| = \frac{1}{3}$.



Mynd 1: *Myndræn framsetning á skiptingunni S á bilinu* $[0,1]$.

Skilgreining 2.2
Ef S er skipting á bilinu $[a,b]$ og lengd allra búta S er $\dfrac{b-a}{n}$ þar sem $n \in \mathbb{N}$ þá segjum við að S sé **jöfn skipting** á bilinu $[a,b]$.

Athugasemd

Ljóst er að jafna skiptingin í skilgreiningunni hér á undan hefur n búta og að hún er ótvírætt ákvörðuð fyrir sérhvert bil $[a, b]$. Við munum hér eftir nota tákmálið I_n til þess að tákna þessa skiptingu.

Sýnidæmi um jafna skiptingu

Skrifum upp jöfnu skiptinguna með 3 búta fyrir bilið $[0, 1]$ og jöfnu skiptinguna með 5 búta fyrir bilið $[0, 2]$. Tilgreinum norm skiptinganna í hvoru tilfelli fyrir sig.

Lausn: Ef við skiptum $[0, 1]$ í 3 búta með jafnri skiptingu þá er bútlengd hvers bútar $\frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$. Skiptingin er því $I_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Ef við skiptum svo bilinu $[0, 2]$ upp í 5 búta með jafnri skiptingu þá er bútlengd hvers bútar $\frac{2-0}{5} = \frac{2}{5}$. Skiptingin er þar með $I_5 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 2\right\}$.

Skilgreining 2.3
Ef S og T eru tvær skiptingar á bilinu $[a, b]$ og $S \subseteq T$ þá er S sögð **grófari** en T. T er einnig sögð vera **fínni** en S.

Athugasemd

Skilgreiningin hér að ofan segir einfaldlega að ef við byjum með einhverja skiptingu S á bilinu $[a, b]$ og bætum svo fleiri skiptipunktum við hana þá fæst skipting sem er fínni en sú sem byrjað var með.

Skilgreining 2.4
Gefið er fall f á $[a, b]$ og skipting $S = \{x_0, \dots, x_n\}$.

1) Ef til eru tölur $k_1, \dots, k_n$ þannig að

$$k_i \leq f(x) \quad \text{fyrir öll} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

þá kallast summan

$$U_S = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta x_i$$

undirsumma fyrir fallið f á bilinu $[a, b]$ með tilliti til skiptingarinnar S.

2) Ef til eru tölur $K_1, \dots, K_n$ þannig að

$$f(x) \le K_i \text{ fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

þá kallast summan

$$Y_S = \sum_{i=1}^{n} K_i \Delta x_i$$

yfirsumma fyrir fallið f á bilinu $[a, b]$ með tilliti til skiptingarinnar S.

3) Ef við veljum tölur $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ fyrir öll $i \in \{1, \dots, n\}$ þá kallast summan

$$\sigma_S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i$$

millisumma (eða Riemann summa) fyrir fallið f á bilinu $[a, b]$ með tilliti til skiptingarinnar S.

Athugasemd

Út frá skilgreiningunni er ljóst að fyrir sérhverja skiptingu S á bili $[a, b]$ og fall f skilgreint á því bili gildir að

$$U_S \le \sigma_S \le Y_S$$

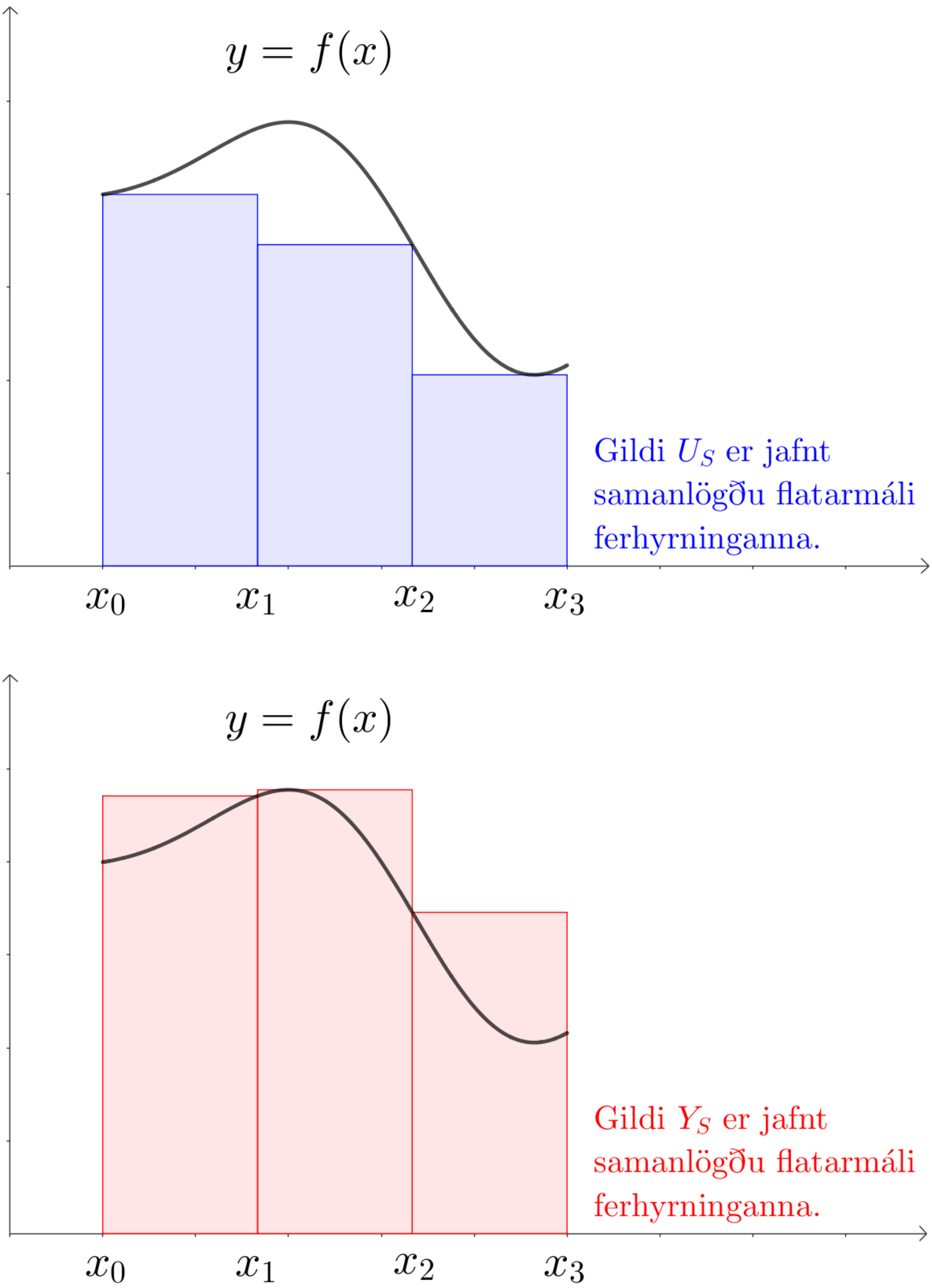
Athugasemd

Í skilgreiningunni hér að ofan var nóg að velja k_i sem einhverja tölu þannig að $k_i \le f(x)$ fyrir öll $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Nema annað sé tekið fram þá munum við alltaf ganga út frá að k_i hafi verið valið sem **lággildi** f á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$. Vert er að nefna að til eru föll sem hafa ekki endilega lággildi á lokuðu bili, en við munum ekki skoða slík föll í þessu hefti. Eins munum við ætíð ganga út frá að K_i hafi verið valið sem **hágildi** fallisin f á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$. Að endingu munum við svo alltaf velja t_i sem miðpunkt bilsins $[x_{i-1}, x_i]$, þ.e.

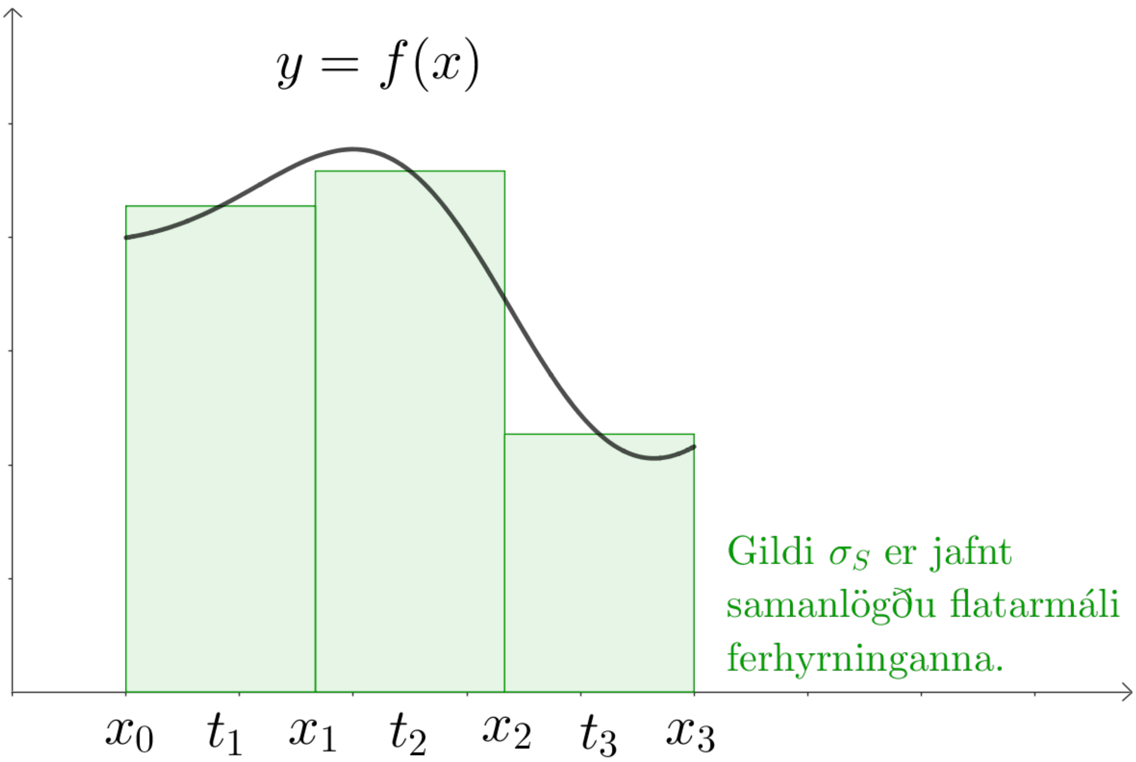
$$t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

Athugasemd

Óformlega er hægt er að líta á sérhvern lið í summunum sem flatarmál ákveðins ferhyrnings. Ferhyrningarnir sem um ræðir í tilfelli undirsummunar eru þeir ferhyrningar sem hafa búta skiptingarinnar sem grunnlínu, en hæð þeirra er síðan lægsta gildi fallsins f á hverjum bút. Fyrir yfir- og millisummuna er um sömu grunnlínur að ræða, en hæðirnar eru hæstu gildi f í tilfelli yfirsummunar, en fallgildi f í miðpunktum bútanna í tilfelli millisummunar.



Mynd 2: *Myndræn framsetning á undir- og yfirsummu falls* f *með skiptinguna* $S = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ *á bilinu* $[a, b]$.



Mynd 3: *Myndræn framsetning á millisummu falls* f *með skiptinguna* $S = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ *á bilinu* $[a, b]$.

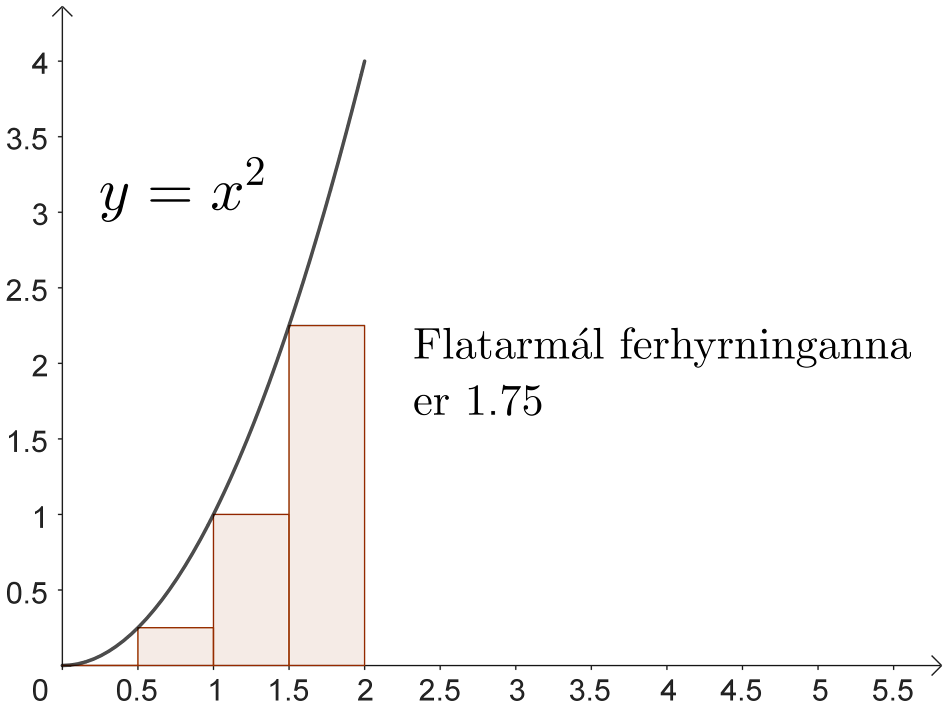
Athugasemd

Ef S er skipting á bili $[a, b]$ og við viljum finna há- og lágildi falls f á öllum bútum skiptingarinnar þá þurfum við að gera formerkjamynd fyrir afleiðu f og finna útgildi fallsins á öllum bútum skiptingarinnar. Það er þó ekki nauðsynlegt í öllum tilfellum, t.d. þegar fallið f er **einhalla**. Þannig fæst að ef f er **vaxandi** á bilinu þá mun það taka lágildi í vinstri endapunkti sérhvers bútar, en hágildi í hægri endapunktinum. Ef f er svo **minnkandi** á bilinu þá mun það taka hágildi í vinstri endapunkti sérhvers bútar, en lágildi í hægri endapunktinum.

Sýnidæmi um undir- yfir- og millisummur Gefið er fallið $f(x) = x^2$ á bilinu $[0, 2]$ og jafna skiptingin $I_4 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$. Reiknið undir-, yfir- og millisummur fallsins f m.t.t. skiptingarinnar.

Lausn Þar sem fallið f er vaxandi á $[0, 2]$ þá tekur það lægstu gildi sýn í vinstri endapunkti sérhvers bútar, en hæstu gildi sýn í hægri endapunkti sérhvers bútar. Athugum einnig að bútlengd sérhvers bútar er $\frac{1}{2}$. Við fáum því að

$$
\begin{aligned}
U_{I_4} &= f(0) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + f(1) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 1.75
\end{aligned}
$$



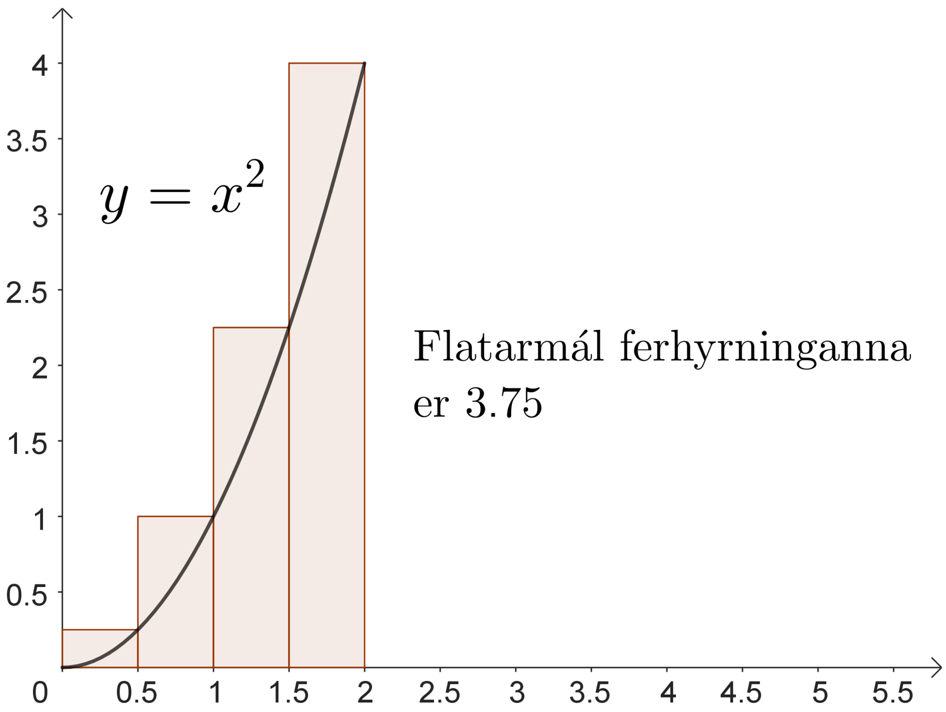
Mynd 4: *Myndræn framsetning á undursummu* f *m.t.t. skiptingarinnar* I_4.

Eins fæst að yfirsumman er

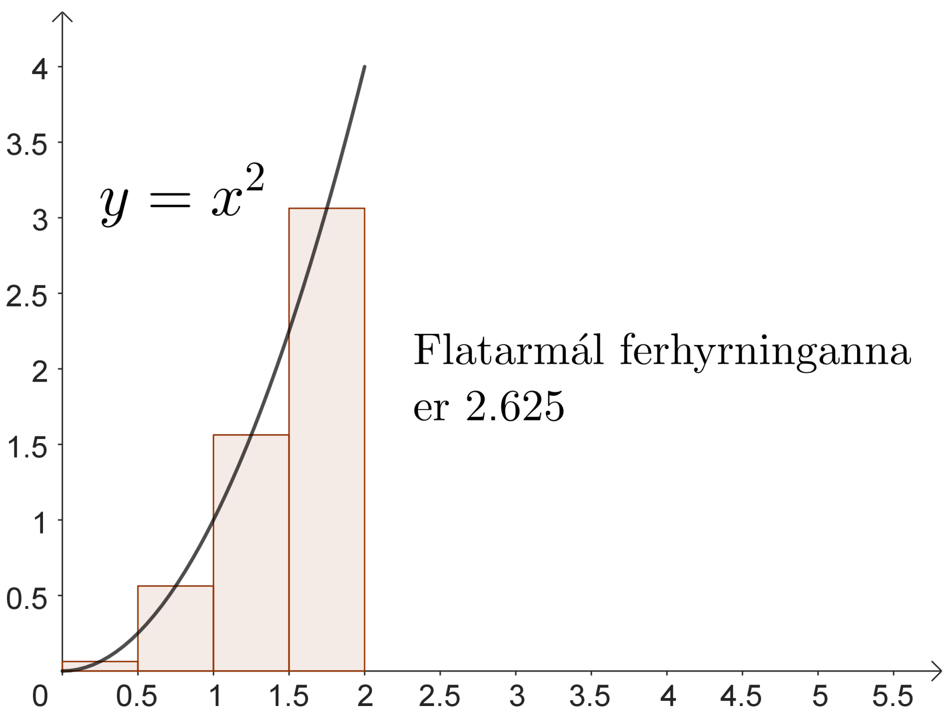
$$\begin{aligned} Y_{I_4} &= f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(2)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2\right) = 3.75 \end{aligned}$$

Við sjáum svo að miðpunktar bútanna eru $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}$, $t_3 = \frac{5}{4}$ og $t_4 = \frac{7}{4}$. Millisumman er því

$$\begin{aligned} \sigma_{I_4} &= f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) = 2.625 \end{aligned}$$



Mynd 5: *Myndræn framsetning á yfirsummu* f *m.t.t. skiptingarinnar* I_4.



Mynd 6: *Myndræn framsetning á millisummu* f *m.t.t. skiptingarinnar* I_4.

$\llcorner$

Sýnidæmi um undir- yfir- og millisummur Gefið er fallið $f(x) = \frac{1}{x}$ á bilinu $[1, 2]$ og skiptingin $S = \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}$. Reiknið undir-, yfir- og millisummur fallsins f m.t.t. skiptingarinnar.

Lausn: Athugum að fallið $f(x) = \frac{1}{x}$ er minnkandi á bilinu $[1, 2]$. Þar með tekur það lággildi í hægri endapunktum sérhvers bútar, en hágildi í þeim vinstri. Við fáum þar með

$$\begin{aligned} U_S &= f\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \Delta x_1 + f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Delta x_2 + f(2) \cdot \Delta x_3 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{18} = 0.611 \end{aligned}$$

og eins

$$\begin{aligned} Y_S &= f(1) \cdot \Delta x_1 + f\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \Delta x_2 + f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Delta x_3 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{24} = 0.792 \end{aligned}$$

Við sjáum svo að miðpunktar bútanna eru $t_1 = \frac{7}{6}$, $t_2 = \frac{17}{12}$ og $t_3 = \frac{7}{4}$. Millisumman er því

$$\begin{aligned} \sigma_S &= f\left(\frac{7}{6}\right) \cdot \Delta x_1 + f\left(\frac{17}{12}\right) \cdot \Delta x_2 + f\left(\frac{7}{4}\right) \cdot \Delta x_3 \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{82}{119} = 0.689 \end{aligned}$$

Sýnidæmi um undir- og yfirsummur Gefið er fallið $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ á bilinu $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Gerið formerkjamynd fyrir afleiðu f og notið hana svo til þess að reikna undir- og yfirsummu fallsins á bilinu m.t.t. skiptingarinnar $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Lausn: Byrjum á að diffra f, fáum $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$. Sjáum því að $f'(x) = 0$ ef $x = 0$ eða $x = \frac{4}{3}$. Prófun gefur svo að $f'(x) < 0$ ef $x \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$ en $f'(x) > 0$ ef $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{4}{3}, 2\right]$.

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 1.33 & & x \\ \hline + & 0 & - & 0 & + & f'(x) \end{array}$$

Við getum nú notast við formerkjamyndina hér að ofan til þess að reikna undir- og yfirsummur f m.t.t S. Byrjum á undirsummunni.

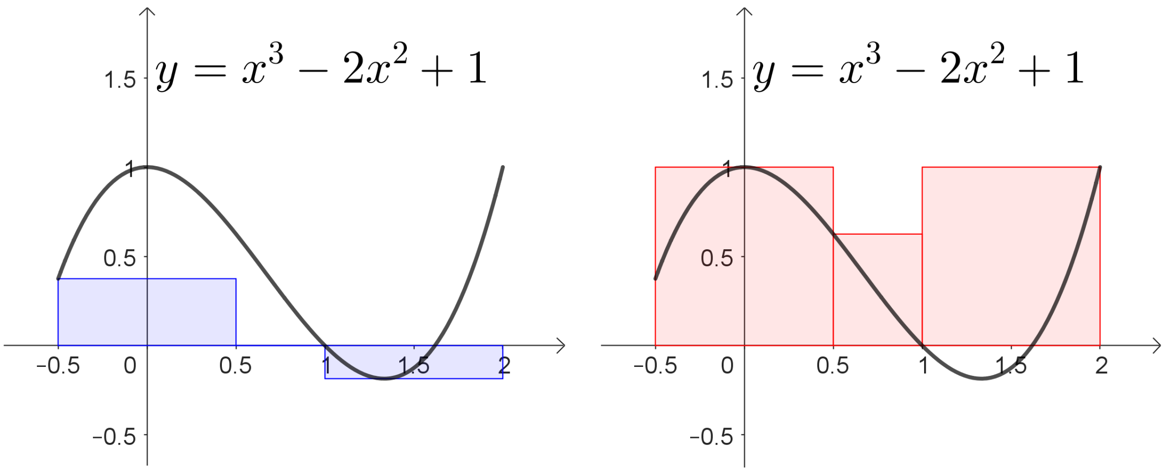
Á bútnum $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tekur f lágildi í öðrum hvorum endapunktinum. Við höfum að $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ en $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ svo f hefur þar með lágildi í vinstri endapunktinum á þessum bút. Á bútnum

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ hefur f lágildi í hægri endapunktinum og á bútnum $[1,2]$ hefur f svo lágildi í $x = \frac{4}{3}$. Við fáum þar með:

$$U_S = f\left(-\frac{1}{2}\right)\Delta x_1 + f(1)\Delta x_2 + f\left(\frac{4}{3}\right)\Delta x_3$$
$$= \frac{3}{8}\cdot 1 + 0\cdot\frac{1}{2} - \frac{5}{27}\cdot 1 = \frac{41}{216} = 0.190$$

Skoðum nú yfirsummuna. Á bútnum $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tekur f hágildi í $x = 0$, á bútnum $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tekur fallið hágildi í vinstri endapunktinum en á bútnum $[1,2]$ tekur f hágildi í öðrum hvorum endapunktinum. Þar sem $f(1) = 0$ en $f(2) = 1$ þá tekur fallið hágildi í hægri endapunkti bútarins. Við fáum þar með:

$$Y_S = f(0)\Delta x_1 + f\left(\frac{1}{2}\right)\Delta x_2 + f(2)\Delta x_3$$
$$= 1\cdot 1 + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1 = \frac{37}{16} = 2.313$$



Mynd 7: *Myndræn framsetning á undir- og yfirsummu fallsins f m.t.t skiptingarinnar S.*

∟

Hjálparregla 2.1
Gerum ráð fyrir því að $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ sé skipting á bilinu $[a,b]$ og að $m \in [a,b]$ sé ekki í menginu S. Þá er $S_m = S \cup \{m\}$ einnig skipting á bilinu og fyrir sérhvert samfellt fall f á $[a,b]$ gildir að

$$U_{S_m} \geq U_S \quad \text{og} \quad Y_S \geq Y_{S_m}$$

Sönnun:
Þar sem talan m er ekki í menginu S en á bilinu $[a,b]$ þá er þar með til tala j þannig að

$x_{j-1} < s < x_j$. Skiptingin I_m er því eins og I nema að bútnum $[x_{j-1}, x_j]$ hefur verið skipt út en bútunum $[x_{j-1}, m]$ og $[m, x_j]$ hefur verið skipt inn.

Táknum nú lægstu gildi f á bútunum $[x_{j-1}, m]$ og $[m, x_j]$ með l_1 og l_2. Þá er ljóst að $k_j \leq l_1$ og $k_j \leq l_2$ þar sem k_j er lægsta gildi f á öllum bútnum $[x_{j-1}, x_j]$. Skoðum nú mismuninn $U_{S_m} - U_S$. Við fáum

$$\begin{aligned} U_{S_m} - U_S &= \sum_{i=1, i\neq j}^{n} k_i \Delta x_i + l_1 (m - x_{j-1}) + l_2 (x_j - m) - \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta x_i \\ &= l_1 (m - x_{j-1}) + l_2 (x_j - m) - k_j \Delta x_j \\ &\geq k_j (m - x_{j-1}) + k_j (x_j - m) - k_j \Delta x_j \\ &= k_j m - k_j x_{j-1} + k_j x_j - k_j m - k_j \Delta x_j \\ &= k_j (x_j - x_{j-1}) - k_j \Delta x_j = k_j \Delta x_j - k_j \Delta x_j = 0 \end{aligned}$$

Þ.e $U_{S_m} - U_S \geq 0$ og því $U_{S_m} \geq U_S$.

Sönnunin á ójöfnunni $Y_S \geq Y_{S_m}$ er sambærileg sönnuninni hér á undan og er eftirlátin nemendum.

■

Regla 2.2
Ef S og T eru bútanir á bilinu $[a, b]$ og T er fínni en S þá gildir fyrir öll samfelld föll á bilinu $[a, b]$ að

$$U_S \leq U_T \quad \text{og} \quad Y_T \leq Y_S$$

Athugasemd

Reglan hér á undan er sönnuð með því að notast ítrekað við hjálparregluna, við eftirlátum nemendum að útfæra sönnunina.

Athugasemd

Á mannamáli segir reglan okkur að því fínni sem við gerum skiptinguna okkar, því hærra verður gildið á undirsummunni en því lægra á yfirsummunni. Því nálgast þessi gildi hvort annað þegar skiptingin er gerð fínni.

Regla 2.3
Ef S og T eru bútanir á bilinu $[a, b]$ þá gildir fyrir öll samfelld föll f á bilinu að

$$U_S \leq Y_T$$

Sönnun:
Athugum að $V = S \cup T$ er skipting á $[a, b]$ sem er fínni en bæði S og T. Við fáum því

$$U_S \leq U_V \leq Y_V \leq Y_T$$

■

Athugasemd

Með öðrum orðum, allar undirsummur hafa lægra gildi en allar yfirsummur.

Skilgreining 2.5
Ef $A \subseteq \mathbb{R}$ og til er tala K þannig að $K \geq x$ fyrir öll $x \in A$ þá er sagt að mengið A sé **takmarkað að ofan**. Eins er sagt að mengið A sé **takmarkað að neðan** ef til er tala k þannig að $k \leq x$ fyrir öll $x \in A$.

Frumsenda um fullkomleika $\mathbb{R}$
Ef mengi A er takmarkað að ofan þá er til minnsta tala $K \in \mathbb{R}$ sem uppfyllir skilyrðið $K \geq x$ fyrir öll $x \in A$. Hún er táknuð með $\sup(A)$ og nefnist **efra mark** mengisins A.

Eins gildir að ef mengið A er takmarkað að neðan þá er til stærsta tala $k \in \mathbb{R}$ sem uppfyllir skilyrðið $k \leq x$ fyrir öll $x \in A$. Hún er táknuð með $\inf(A)$ og nefnist **neðra mark** mengisins A.

Athugasemd

Í þeim tilfellum þar sem mengi A hefur minnsta stak $\min(A)$ þá gildir að $\inf(A) = \min(A)$, og eins gildir að ef A hefur stærsta stak $\max(A)$ þá gildir að $\sup(A) = \max(A)$. Mengi A þarf þó ekki að hafa minnsta og/eða stærsta stak til þess að stærðirnar $\inf(A)$ og $\sup(A)$ séu vel skilgreindar. Ef við setjum t.d. $A =]0, 1[$ þá gildir að $\inf(A) = 0$ og $\sup(A) = 1$, en A hefur hvorki minnsta né stærsta stak.

Skilgreining 2.6
Látum f vera fall á bili $[a, b]$. Efra mark mengis allra undirsumma f á bilinu nefnist þá **neðra heildi** fallsins f yfir bilið og er táknað með $\underline{I}(f)$. Neðra mark mengis allra yfirsumma f á bilinu nefnist svo **efra heildi** fallsins f yfir bilið og er táknað með $\overline{I}(f)$.

Athugasemd

Regla 2.3 tryggir að neðra- og efra heild falls f á bili $[a, b]$ er vel skilgreint og að $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Skilgreining 2.7 Eiginlegt heildi
Ef um fall f á bili $[a, b]$ gildir að $L = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ þá er fallið sagt **heildanlegt** yfir bilið $[a, b]$. Talan L kallast **eiginlega heildi** fallsins f yfir bilið $[a, b]$. Við táknum eiginlega heildið með

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Tölurnar a og b nefnast **heildismörk** heildisins.

Athugasemd

Með öðrum orðum má segja að ef til er **nákvæmlega ein** tala sem er stærri en eða jöfn öllum undirsummum og minni en eða jöfn öllum yfirsummum þá er fallið f heildanlegt yfir bilið $[a, b]$, en talan sem um ræðir er ákveðna heildi fallsins yfir bilið.

Athugasemd

Umfjöllun um eiginleg heildi og flatarmál.

Skilgreining 2.8
Ef f er heildanlegt fall á bilinu $[a, b]$ þá skilgreinum við heildið

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Athugasemd

Við megum með öðrum orðum víxla á heildismörkunum í eiginlegu heildi ef við víxlum einnig formerkinu.

Regla 2.4
Ef f er heildanlegt fall á bilinu $[a, b]$ og $c \in [a, b]$ þá gildir

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

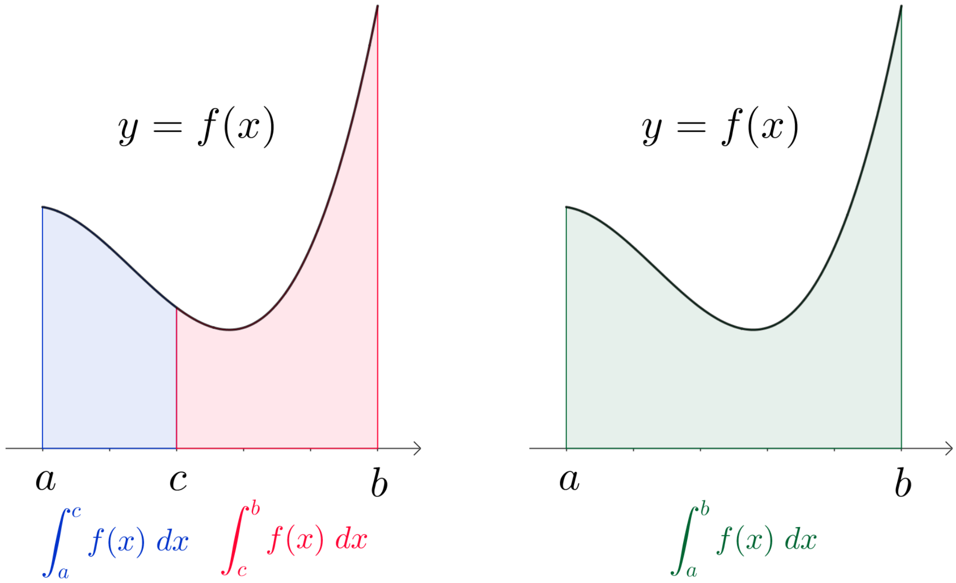
Myndrænt:

■

Regla 2.5
Ef f og g eru heildanleg föll á bili $[a, b]$ og $c \in \mathbb{R}$ þá gildir:

1) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

2) $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$



Mynd 8: *Myndræn framsetning á reglunni hér á undan. Samanlagt flatarmál bláa og rauða svæðisins er jafnt flatarmáli græna svæðisins.*

Regla 2.6
Gerum ráð fyrir því að S_n sé skipting á bilinu $[a, b]$ fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$. Ef f er fall á bilinu þannig að

$$\lim_{n\to\infty} U_{S_n} = \lim_{n\to\infty} Y_{S_n} = L$$

þá er fallið f heildanlegt yfir bilið $[a, b]$ og

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

Sýnidæmi um eiginleg heildi Reiknum eiginlega heildi fallsins $f(x) = x^2$ yfir bilið $[0, 1]$. Notfærum okkur að $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lausn: Byrjum á að reikna $\lim_{n\to\infty} U_{I_n}$. Athugum að billengd sérhvers bútar í skiptingunni I_n er $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ og að fallið f er vaxandi svo lægsta gildi þess er tekið í vinstri endapunkti sérhvers bútar. Við sjáum einnig að $x_k = \frac{k}{n}$ og því fæst:

$$\begin{aligned}
U_{I_n} &= \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 \cdot \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

Þar með fæst að $\lim\limits_{n\to\infty} U_{I_n} = \dfrac{1}{3}$.

Þegar yfirsumman m.t.t. I_n er reiknuð þá notfærum við okkur að hæsta fallgildi f á hverjum bút er tekið í hægri endapunkta bútarins og fáum með sambærilegum hætti og hér að ofan að

$$Y_{I_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x_k = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

og þar með $\lim\limits_{n\to\infty} Y_{I_n} = \dfrac{1}{3}$.

Við fáum því að

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$\llcorner$

Regla 2.7 Meðalgildisreglan fyrir heildi
Ef f er samfellt fall á bili $[a, b]$ þá er til tala $c \in [a, b]$ þannig að

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Sönnun:
Setjum $S = \{a, b\}$. Þá er S skipting á bilinu $[a, b]$ og því gildir að

$$U_S \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq Y_S$$

Ef við látum nú k vera lággildi f á $[a, b]$ en K hágildi þess á bilinu þá höfum við þar með

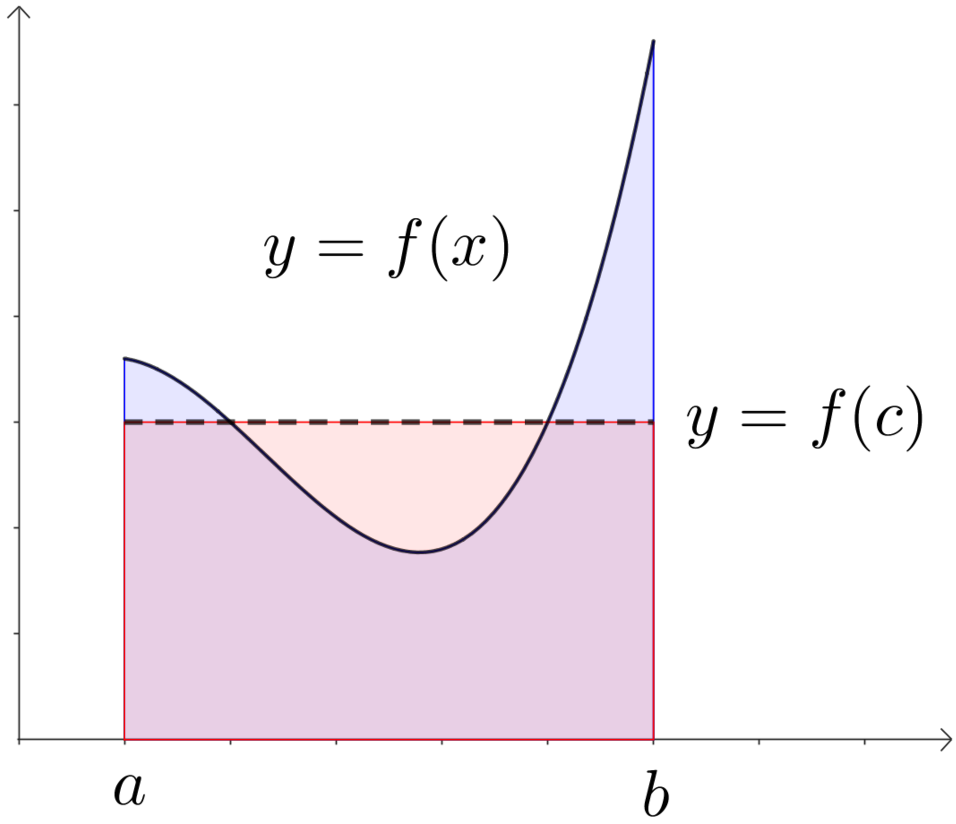
$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq K(b-a)$$

og því

$$k \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq K$$

Milligildisreglan fyrir samfelld föll gefur því að til er $c \in [a, b]$ þannig að

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Mynd 9: *Myndræn framsetning á meðalgildisreglunni fyrir heildi. Flatarmálið undir ferli fallsins* f *á bilinu* $[a, b]$ *er jafnt* $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

■

Regla 2.8 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
Ef f er samfellt fall á $[a, b]$ og við skilgreinum fyrir öll $x \in [a, b]$ fallið

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

þá gildir að $F'(x) = f(x)$.

Sönnun:
Byrjum á að skoða afleiðuna frá hægri, fáum:

$$\begin{aligned}
F'_+(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt
\end{aligned}$$

Athugum nú að lengd bilsins $[x, x + h]$ er h, og því gefur meðalgildisreglan fyrir heildi að fyrir sérhvert $h > 0$ er til tala c_h á bilinu $[x, x + h]$ þannig að

$$f(c_h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

Þegar h stefnir á 0 þá hlítur svo talan c_h að vera að stefna á x þar sem hún er klemmd á milli x og $x + h$. Samfelldni fallsins f gefur því:

$$F'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x)$$

Tilfellið fyrir vinstri afleiðuna er sambærilegt, við þurfum einungis að athuga að í því tilfelli er talan c_h á bilinu $[x + h, x]$ og við þurfum að huga örlítið að formerkjum í útreikningum okkar. Nemendum er eftirlátið að fylla í eyðurnar.

$\blacksquare$

Athugasemd

Í reglunni hér að ofan túlkum við $F'(a)$ sem afleiðu fallsins F frá hægri, en $F'(b)$ sem afleiðu fallsins F frá vinstri.

Regla 2.9 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar - 2. útgáfa
Ef f er samfellt fall á $[a, b]$ og F er stofnfall fyrir f þá gildir

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Sönnun:
Ef við skilgreinum $G(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ þá er G stofnfall fyrir f skv. meginsetningu stærðfræðigreiningarinnar. Ef F er eitthvert annað stofnfall fyrir G þá gildir svo að til er fasti k þannig að

$$F(t) = G(t) + k$$

Þar sem $G(a) = 0$ þá fæst þar með að $F(a) = k$ og því fáum við

$$G(t) = F(t) - k = F(t) - F(a)$$

Setjum $t = b$ og fáum svo

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) = F(b) - F(a)$$

■

<u>Athugasemd</u>

Mjög algengt er að notast við ritháttinn $\Big[F(x)\Big]_a^b$ fyrir $F(b) - F(a)$. Við getum þá skrifað regluna hér á undan sem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sýnidæmi um ákveðin heildi Reiknum eftirfarandi ákveðnu heildi:

1) $\displaystyle\int_1^2 2x^2 - x + 1\, dx$

2) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2}{x-3}\, dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 5\cos(\pi x)\, dx$

Lausn:

1)

$$\int_1^2 3x^2 - x + 1 \, dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2 = 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 - \left(1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1\right) = 6.5$$

2)

$$\int_4^5 \frac{2}{x-3} \, dx = 2 \cdot \left[\ln(x-3)\right]_4^5 = 2 \cdot (\ln(5) - \ln(4)) = 2 \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0.446$$

3)

$$\int_0^1 5\cos(\pi x) \, dx = 5 \cdot \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{5}{\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) = 0$$

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi ákveðnu heildi:

1) $\int_1^3 -x^2 + x + 3 \, dx$

2) $\int_0^1 3^x \, dx$

3) $\int_\pi^{2\pi} 2\sin(x) \, dx$

Regla 2.10 Hlutheildun - Ákveðin heildi
Ef f er heildanlegt fall á bili $[a, b]$ og g diffranlegt á sama bili þá gildir að

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

Sýnidæmi um hlutheildun Reiknum eftirfarandi heildi með því að notast við hlutheildun.

1) $\int_0^1 xe^x \, dx$

2) $\int_0^\pi x\sin(x) \, dx$

3) $\displaystyle\int_1^e 2x^2 \ln(x)\ dx$

Lausn:

1) Við veljum $f(x) = x$ og $g'(x) = e^x$. Þá er $f'(x) = 1$ og $g(x) = e^x$ og við fáum því:

$$\int_0^1 xe^x\ dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \Big[e^x\Big]_0^1$$
$$= e - \left(e^1 - e^0\right) = e^0 = 1$$

2) Veljum $f(x) = x$ og $g'(x) = \sin(x)$. Þá er $f'(x) = 1$ og $g(x) = -\cos(x)$ svo við fáum:

$$\int_0^\pi x\sin(x)\ dx = \Big[-x\cos(x)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\ dx = -\pi\cos(\pi) - (-0 \cdot \cos(0)) + \Big[\sin(x)\Big]_0^\pi$$
$$= \pi + (\sin(\pi) - \sin(0)) = \pi$$

3) Veljum $f(x) = \ln(x)$ og $g'(x) = 2x^2$. Þá er $f'(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = \frac{2}{3}x^3$. Því fæst:

$$\int_1^e 2x^2\ln(x)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^2\ dx = \frac{2}{3}e^3\ln(e) - \frac{2}{3}e^1\ln(1) - \left[\frac{2}{9}x^3\right]_1^e$$
$$= \frac{2}{3}e^3 - \left(\frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\cdot 1^3\right) = \frac{2}{9}\left(2e^3 + 1\right)$$

$\llcorner$

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við hlutheildun.

1) $\displaystyle\int_0^2 x2^x\ dx$

2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(2x)\ dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\ dx$

Regla 2.11 Innsetningarregla - Ákveðin heildi
Tökum föll f og g og bil $[a, b]$ þannig að $f \circ g$ sé heildanlegt á $g([a, b])$ og g diffranlegt. Ef $u = g(x)$ þá er $du = g'(x)\ dx$ og

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

Sýnidæmi um innsetningu Reiknum eftirfarandi heildi með því að notast við innsetningu.

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2 \left(x^3 + 1\right)^5\ dx$

2) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\ dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^2(x)\ dx$

Lausn:

1) Setjum $u = x^3 + 1$. þá er $du = 3x^2\ dx$. Athugum einnig að ef $x = -1$ þá höfum við $u = 0$ og ef $x = 1$ þá fæst $u = 2$. Við fáum því

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \left(x^3 + 1\right)^5\ dx = \int_0^2 u^5\ du = \left[\frac{1}{6}u^6\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

2) Setjum nú $u = \ln(x)$. Þá er $du = \frac{1}{x}\ dx$. Einnig höfum við að ef $x = e$ þá er $u = 1$ og ef $x = e^2$ þá er $u = 2$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\ dx = \int_1^2 \ln(u)\ du &= \Bigg[u\ln(u) - u\Bigg]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - 2 - (1 \cdot \ln(1) - 1) \\ &= \ln(4) - 1 = 0.386\end{aligned}$$

3) Hér setjum við $u = \sin(x)$. Þá höfum við að $du = \cos(x)\ dx$. Einnig höfum við að þegar $x = 0$ þá er $u = 0$ og þegar $x = \frac{\pi}{2}$ þá er $u = 1$. Við fáum því

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^2(x)\ dx = \int_0^1 u^2\ du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

∟

Æfingardæmi

Reiknið eftirfarandi heildi með því að notast við innsetningu.

1) $\displaystyle\int_1^3 4x\sqrt{x^{2+1}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2\ln(x)}{x}\,dx$

Æfing 2

1. Reiknið undir-, yfir- og millisummur eftirfarandi falla.
   (a) $f(x) = 2x$ á bilinu $[0, 2]$ m.t.t. skiptingarinnar $S = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$
   (b) $h(x) = \frac{1}{x^2}$ á bilinu $[0, 3]$ m.t.t. jöfnu skiptingarinnar I_3.
   (c) $g(x) = e^x$ á bilinu $[0, 1]$ m.t.t. skiptingarinnar $S = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right\}$. Skilið svarinu með 3 aukastöfum.
   (d) $f(x) = \cos(x)$ á bilinu $[0, \pi]$ m.t.t. skiptingarinnar $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. Skilið svarinu með 3 aukastöfum.
2. Finnið útgildi fallsins f á bilinu $[a, b]$ og gerið formerkjamynd fyrir afleiðuna. Notið svo niðurstöðurnar til þess að finna undir- og yfirsummu fallsins f m.t.t. skiptingarinnar S.
   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$, $[a, b] = [-1, 2]$ og $S = \left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 2\right\}$.
   (b) $f(x) =$, $[a, b] =$ og $S = \{\}$.
3. Notist við gröf eftirfarandi falla til þess að reikna heildin.
   (a) Eitthvað
4. Reiknið eftirfarandi heildi.

(a) $\int dx$	(i) $\int dx$
(b) $\int dx$	(j) $\int dx$
(c) $\int dx$	(k) $\int dx$
(d) $\int dx$	(l) $\int dx$
(e) $\int dx$	(m) $\int dx$
(f) $\int dx$	(n) $\int dx$
(g) $\int dx$	(o) $\int dx$
(h) $\int dx$	(p) $\int dx$

5. Gefið er fallið $f(x) = x$ á bilinu $[0,1]$. Sýnið að $\lim_{n\to\infty} U_{I_n} = \lim_{n\to\infty} Y_{I_n}$ og notfærið ykkur svo þessa niðurstöðu til þess að ákvarða $\int_0^1 f(x)\ dx$.

6. Gefin eru föll f og g á bilinu $[-a, a]$ með $a > 0$. Einnig er vitað að f er **oddstætt fall** en g er **jafnstætt**. Sýnið að þá gildi eftirfarandi reglur:

   (a) $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

   (b) $\int_{-a}^{a} g(x)\ dx = 2\int_0^a g(x)\ dx$

7. Skilgreinum fallið $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ með því að setja

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$$

   Notist við skilgreininguna til þess að sýna eftirfarandi:

   (a) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

   (b) $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$

   (c) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

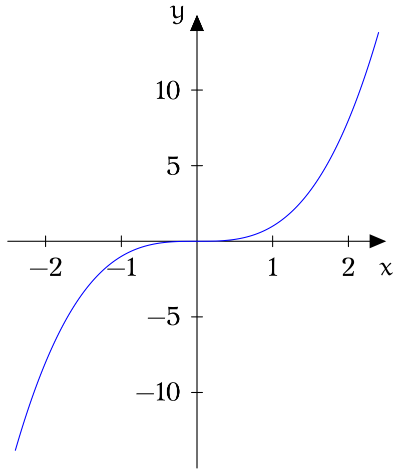
   (d) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

8. Sýna að fallið $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ ef } x \text{ er óræð tala} \\ 0 \text{ ef } x \text{ er ræð tala} \end{cases}$ sé ekki heildanlegt á $[0,1]$. Sýna fyrst að milli sérhverra talna sé til ræð og óræð tala.

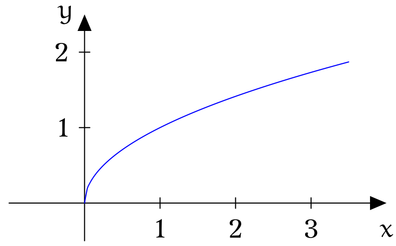
Svör við æfingu 2

1. (a) Fastafall og 0. stigs margliða
   (b) Veldisfall og 2. stigs margliða
   (c) Hlutleysufall og 1. stigs margliða
   (d) 1. stigs margliða
   (e) Veldisfall $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$
   (f) Fastafall og margliða sem hefur ekkert stig
   (g) Rætt fall
   (h) 3. stigs margliða

2. (a)



   (b)



3. Svari sleppt.

3 Heildun og rúmfræði

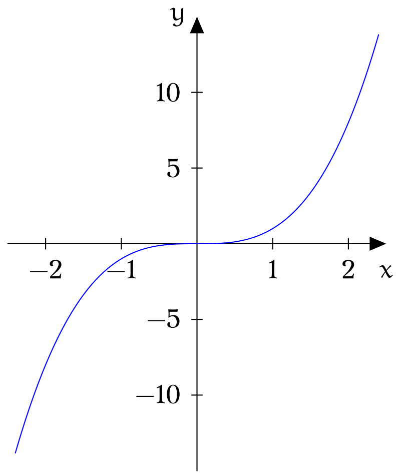
4 Heildunaraðferðir skoðaðar nánar

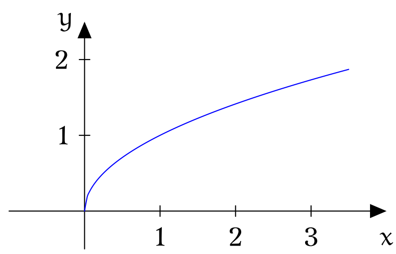
5 Hagnýtingar heildunar

Svör við æfingum

Svör við æfingu 1

1. (a) Fastafall og 0. stigs margliða
   (b) Veldisfall og 2. stigs margliða
   (c) Hlutleysufall og 1. stigs margliða
   (d) 1. stigs margliða
   (e) Veldisfall $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$
   (f) Fastafall og margliða sem hefur ekkert stig
   (g) Rætt fall
   (h) 3. stigs margliða

2. (a)


   (b)


3. Svari sleppt.