

单摆实验

一、实验目的

1. 用单摆测定重力加速度 g ;
2. 学习用最小二乘法作直线拟合;
3. 学习使用计时仪器 (秒表、电子计时器)

二、实验原理

1) 周期与摆角的关系

在忽略空气阻力和浮力的情况下, 由单摆振动时能量守恒, 可以得到质量为 m 的小球在摆角为 θ 处动能和势能之和为常量, 即:

$$\frac{1}{2} mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos \theta) = E_0 \quad (1)$$

式中, L 为单摆摆长, θ 为摆角, g 为重力加速度, t 为时间, E_0 为小球的总机械能。因为小球在摆幅为 θ_m 处释放, 则有:

$$E_0 = mgL(1 - \cos \theta_m)$$

代入 (1) 式, 解方程得到

$$\frac{\sqrt{2}}{4} T = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}} \quad (2)$$

(2) 式中 T 为单摆的振动周期。

令 $k = \sin(\theta_m/2)$, 并作变换 $\sin(\theta/2) = k \sin \varphi$ 有

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

这是椭圆积分, 经近似计算可得到

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right) + \dots \right] \quad (3)$$

在传统的手控计时方法下，单次测量周期的误差可达 0.1-0.2s，而多次测量又面临空气阻尼使摆角衰减的情况，因而 (3) 式只能考虑到一级近似，不得不将 $\frac{1}{4} \sin^2(\frac{\theta_m}{2})$ 项忽略。但是，当单摆振动周期可以精确测量时，必须考虑摆角对周期的影响，即用二级近似公式。在此实验中，测出不同的 θ_m 所对应的二倍周期 $2T$ ，作出 $2T - \sin^2(\frac{\theta_m}{2})$ 图，并对图线外推，从截距 $2T$ 得到周期 T ，进一步可以得到重力加速度 g 。

2) 周期与摆长的关系

如果在一固定点上悬挂一根不能伸长无质量的线，并在线的末端悬一质量为 m 的质点，这就构成一个单摆。当摆角 θ_m 很小时（小于 3° ），单摆的振动周期 T 和摆长 L 有如下近似关系：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ 或 } T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g} \quad (4)$$

当然，这种理想的单摆实际上是不存在的，因为悬线是有质量的，实验中又采用了半径为 r 的金属小球来代替质点。所以，只有当小球质量远大于悬线的质量，而它的半径又远小于悬线长度时，才能将小球作为质点来处理，并可用 (4) 进行计算。但此时必须将悬挂点与球心之间的距离作为摆长，即 $L = L_1 + r$ ，其中 L_1 为线长。如固定摆长 L ，测出相应的振动周期 T ，即可由 (4) 式求 g 。也可逐次改变摆长 L ，测量各相应的周期 T ，再求出

T^2 ，最后在坐标纸上作 T^2 - L 图。如图是一条直线，说明 T^2 与 L 成正比关系。

在直线上选取二点 $P_1 (L_1, T_1^2)$, $P_2 (L_2, T_2^2)$ ，由二点式求得斜率 $k = \frac{T_2^2 - T_1^2}{L_2 - L_1}$ ；

再从 $k = \frac{4\pi^2}{g}$ 求得重力加速度，即

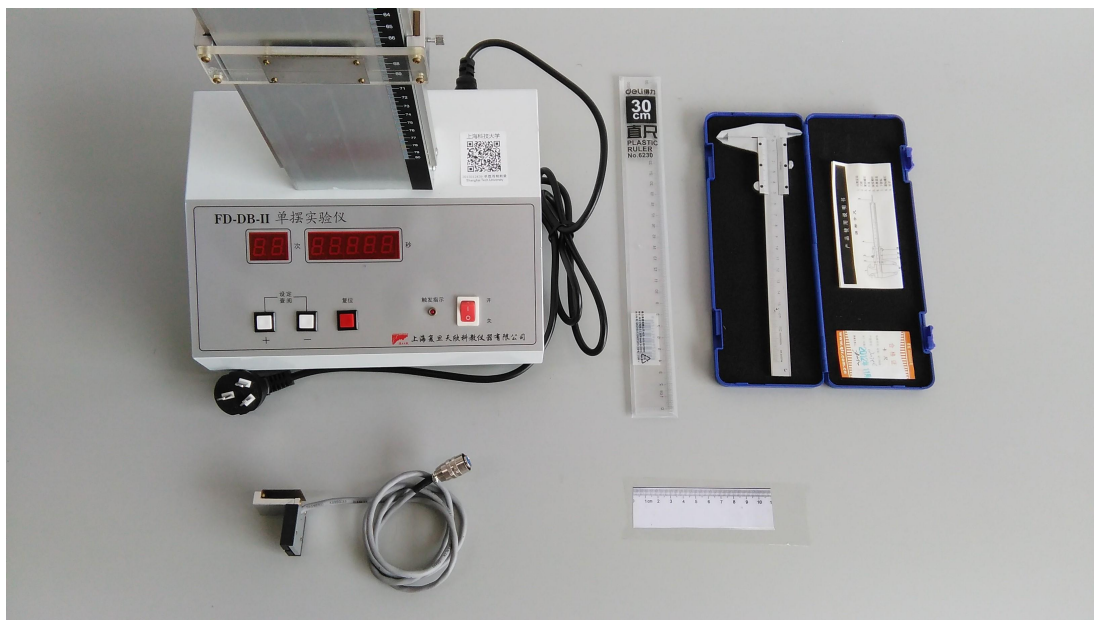
$$g = 4\pi^2 \frac{L_2 - L_1}{T_2^2 - T_1^2}$$

三、实验仪器

单摆实验架	一套	含小钢球、悬线、集成霍尔开关、磁钢、(部分实验含) 量角器
直尺	一把	
游标卡尺	一把	

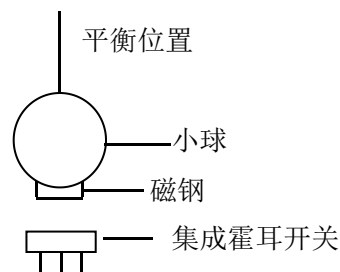


(图 1) 实验仪器



(图 2) 实验仪器顶视图

本试验仪采用 UGN3109 型集成开关霍尔传感器(简称:集成霍尔开关)与 HTM 电子计时器实现自动计时。集成霍尔开关应放置在小球正下方约 1.0cm 处, 1.1cm 为集成霍尔开关的导通(或截至)距离。



(图 3) 自动计时装置示意图

钕铁硼小磁钢放在小球的正下方,当小磁钢随小球从集成霍尔开关上方经过时,由于霍尔效应,会使集成霍尔开关的 V_{out} 端输出一个信号给计时器,计时器便开始计时。当磁钢经半个周期回复至平衡位置时,又产生一信号让计时器停止计时。所以单摆摆动 1 个周期,在计时器上反映 2 个周期。

HTM 电子计时器精度为 0.001s ,采用单片机计时原理,有周期次数预置功能,从 $0\sim 66$ 次,可以任意调节计时次数,以便按实验要求的精度进行周期测量。

四、实验内容

1) 测量摆角与周期之间的关系,作 $2T - \sin^2(\theta/2)$ 关系图,求出重力加速度 g 。

2) 验证摆长与周期之间的关系,求出重力加速度 g 。

(一) 固定摆长,改变摆角求得 g :

(1) 测量摆线长度 L_1 及小球直径 L_2 , 算出总的摆长 $L = L_1 + L_2/2$ 。

(2) 将小球拉开一段距离,从上方量角器上读出相应角度,(如果没有量角器,可通过测量悬线下端点离中心位置的水平距离 x 和摆线

长度求出相应角度值)。

(3) 放开小球，让小球在传感器所在铅垂面内摆动，由计时器测出摆动 2 个周期的时间。

(4) 将小球拉回原位，重复步骤 (3) 共 5 次。

(5) 取 6 个不同的水平距离 (悬线下端点离中心位置)，重复步骤 (3)、(4)。

(6) 处理数据，做 $2T - \sin^2(\theta_m/2)$ 图，求出 g ，并与理论值相比较。

(二) 改变摆长求得 g ：

(1) 测得摆线长度，算出总的摆长。

(2) 取摆角 $\theta < 3^\circ$ ，测量摆动周期 T 。

(3) 重复步骤 (2) 共 5 次。

(4) 取 5 个不同的摆长，重复步骤 (2)、(3)。

(5) 处理数据，作 T^2-L 图，求出 g ，并与理论值相比较。

(6) 作为思考题：测量 L 不远大于小球半径时周期与上述周期公式的偏差。取相同摆角 $\theta < 3^\circ$ ，分别取 $L=5\text{cm}$ ， 10cm ， 30cm ， 50cm 。对于 5cm ， 10cm 周期，采用摆动 20 个周期用秒表计时，重复 3~5 次。详细记录相关误差。尝试更多实验内容，对比周期 T 的实验记录与公式 (4) 理论预测之间的偏差，并找出该偏差与 d/L 的关系。

五、注意事项

- 1) 调节实验装置支架至水平,使得摆线静止落在量角器 90 度,并且正对计时传感器
- 2) 小球必须在与支架平行的平面内摆动,不可做椭圆运动。检验办法是检验低电平触发指示灯在小球经过平衡位置时是否闪亮,可知小球是否在一个平面内摆动。
- 2) 集成霍耳传感器与磁钢之间距离在 1.0cm 左右。
- 3) 若摆球摆动时传感器感应不到信号,将摆球上的磁钢换个面装上。
- 4) 请勿用力拉动霍耳传感器,以免损坏。
- 5) 由于仪器采用微处理器对外部事件进行计数,有可能受到外部干扰信号的影响使微处理器处于非正常状态,如出现此情况按复位键即可。

六、思考题

传统秒表计时测量 30T 而不是直接测 T 是因为什么原因? 本实验中有必要测 30T 吗?