Zusammenfassung

22. November 2022

Das initiale Problem

In der Herleitung der Ungleichung rechnet Pendry mit Information in *bits*. In der Bachelorarbeit wird aber die von-Neumann Entropie mit dem natürlichen Logarithmus als Definition von Information angeführt, also in Einheiten von *nats*. Die Ungleichung verändert sich aber dadurch durch einen Faktor $\ln^2 2$. Lässt man diesen Faktor aus, wird die Ungleichung schon für das System mit perfektem Zustandstransfer verletzt. Irgendwas stimmt also nicht, entweder in der Numerik oder in der Physik.

Die Erklärung

Die Erklärung für dieses Verhalten findet sich in der Beschreibung des Systems, mit dem Pendry die ursprüngliche Ungleichung hergeleitet hat. In Pendrys Text heißt es (S. 2166 in [1])

> Since energy is conserved the flow into this segment equals the flow out and therefore energy flow is conserved as is the particle flow. However, the entropy flow is not conserved but can only increase monotonically until thermal equilibrium is established.

Eine Interpretation dieser Voraussetzung ist, dass die physikalisch sinnvollere Betrachtung also nicht das Propagieren eines reinen spin-up Zustandes, sondern eines thermischen Zustandes wäre.

In Abbildung 1 ist die Bound für ein System, bei dem das erste Qubit in einem thermischen Zustand startet, abgebildet, wobei der Energiefluss nur mit $\pi/3$ multipliziert wird.

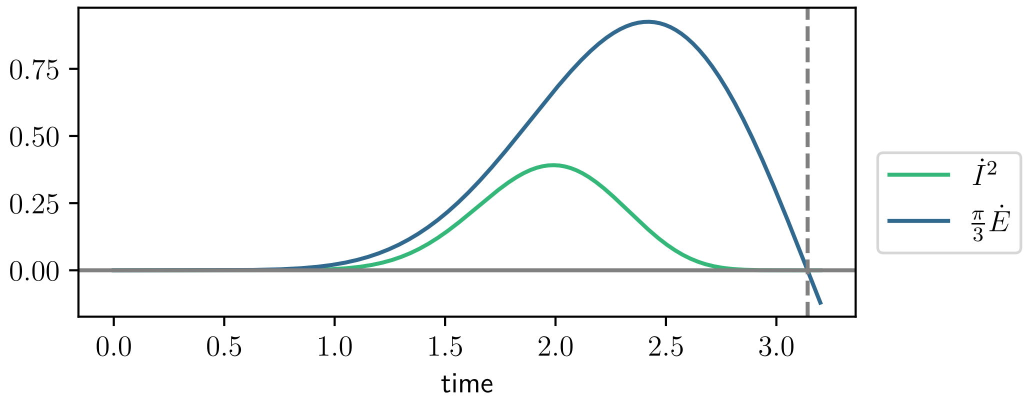

Abbildung 1: Informationsfluss und Energiefluss für eine Spinkette, bei der das erste Qubit in einem gemischten, bzw. thermischen Zustand mit inverser Temperatur $\beta = 1/300$ initialisiert wird. Der Energiefluss wird hier nur mit $\pi/3$ anstatt mit $\pi/(3\ln^2 2)$ multipliziert.

Zum Vergleich ist in Abbildung 2 der Energiefluss mit und ohne den Faktor $\ln^2 2$ abgebildet. Es ist deutlich zu sehen, dass der Faktor notwendig ist, damit die Bound hält.

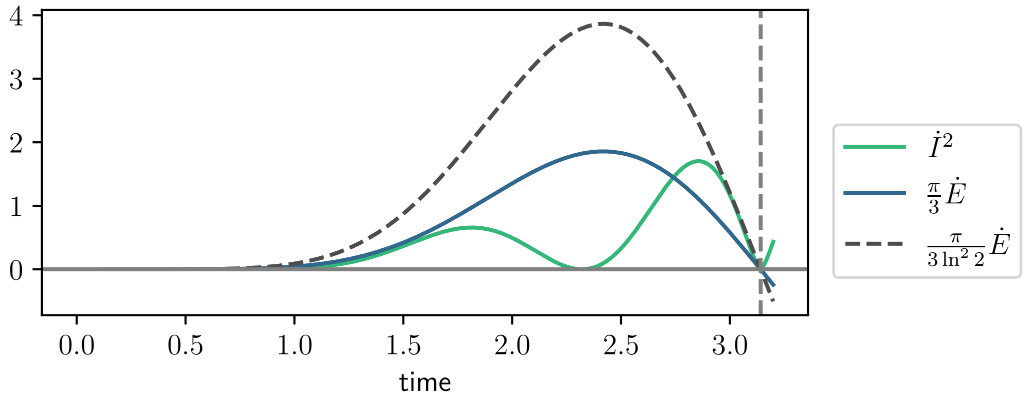

Abbildung 2: Informationsfluss und Energiefluss für eine Spinkette, bei der das erste Qubit in einem Spin-Up Zustand, $\rho = |1\rangle\langle 1|$, initialisiert wird. Der Energiefluss ist einmal mit und einmal ohne den Faktor $\ln^2 2$ aufgetragen, wobei die gestrichelte Kurve genau die Kurve mit dem Faktor darstellt.

Was bedeutet das?

Als erstes bedeutet das, dass Pendry für unser System nur unter bestimmten Voraussetzungen gilt. Für die Verletzung mit den Korrelationen macht das nichts, da die Korrelationen thermische Zustände erfordern. Da nun aber klar ist, dass da ein Faktor zu viel ist, ist das Verhalten minimal anders. Der Vorzeichenwechsel in $\dot{E}$ ist natürlich noch immer gegeben, daher gilt die Verletzung trotzdem.

Eine wesentliche Folgerung ist aber, dass wir für die Systeme ohne korrelierte Qubits schon eine Verletzung mit einem Spin-up Zustand haben. Das sagt uns, dass Pendry nicht nur für Systeme mit Korrelationen nicht gilt, sondern vor allem für Systeme *ohne* Korrelationen, die *nicht* mit einem gemischten Zustand starten, denen man eine Temperatur zuordnen könnte (also ein thermischer Zustand).

Die neuen Fragen

Aus diesen Erkenntnissen lassen sich neue Fragen ableiten, die es (zumindest zum Teil) zu beantworten gilt. Als erstes die Frage nach einer allgemeineren Bound: Wie sieht eine Bound aus, die nicht für Spin-up verletzt wird? Der bereits, irrtümlicherweise, verwendete Faktor $\ln^2 2$ sorgt dafür, dass die Kette mit schnellstem perfekten Zustandstransfer die Bound nicht bricht. Ist das schon die Korrektur, die man braucht, oder kann analytisch noch ein Faktor gefunden werden, bei dem die Bound genau gesättigt wird? Wäre das überhaupt die Interaktion, bei der die Bound gerade nicht bricht, oder gibt es noch weitere Spinketten, die nicht Heisenberg-XY Ketten sind, die schnelleren Zustandstransfer (und damit höheren Informationsfluss) erlauben?

Literatur

[1] J B Pendry. „Quantum limits to the flow of information and entropy“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 16.10 (Juli 1983), S. 2161–2171.