第二章作业

计算机 54
胡景博
2150500125

1　题目 2-7

将 d 个形如 $x-n_i$ 的一次多项式看作一棵二叉树的叶结点，两两相乘得到父结点，最终的根结点就是要求的多项式。假设 $2^{n-1} < d \leq 2^n$，仅考虑个数为 2 的次方时，有

$$T(2^{k+1}) = \begin{cases} 2T(x^k) + O(2^k \cdot k) & k > 0 \\ O(1) & k = 0 \end{cases} \tag{1}$$

可得 $T(2^k) = O(2^k \cdot k^2)$ 所以

$$T(2^{n-1}) < T(d) \leq T(2^n) \tag{2}$$

$$\Rightarrow T(d) = O(d(\log d)^2) \tag{3}$$

2　题目 2-8

对于任意的区间 $[l,h]$，取 $m = \lceil \frac{l+h}{2} \rceil$ 知：

- 若 $T(m) = m$，则 m 就是要求的下标 i
- 若 $T(m) < m$，则要求的下标 $i \in [m+1, h]$。[1]
- 若 $T(m) > m$，同理。

综上可知，最坏情况下，每次区间长度减半，最终得到长度为 1 的区间（存在这样的 i）或长度为 0 的区间（不存在这样的 i）。时间复杂度为 $O(\log n)$。

[1] 用反证法。若 $i \in [l, m-1]$，设 $T(m) = m - \epsilon < m, \epsilon \in \mathbb{N}$，因为数组中的元素有序且不同的整数，所以 $T(i) \leq T(m) - (m-i) = i - \epsilon$，产生矛盾。

3 题目 2-28

对于区间 $X[l_1, h_1]$, $Y[l_2, h_2]$，设 $m_1 = \lceil \frac{l_1+h_1}{2} \rceil$, $m_2 = \lceil \frac{l_2+h_2}{2} \rceil$，则：

- 若 $X[m_1] = Y[m_2]$，则恰好求出 $X[l_1, h_1], Y[l_2, h_2]$ 这两个数组的中位数
- 若 $X[m_1] > Y[m_2]$,则 $X[l_1, h_1], Y[l_2, h_2]$ 这两个数组的中位数应在 $X[l_1, m_1 - 1] \cup Y[m_2 + 1, h_2]$
- 若 $X[m_1] < Y[m_2]$，同理。

综上所述，最坏情况下，每次区间长度减半，时间复杂度为 $O(\log n)$。