計算幾何

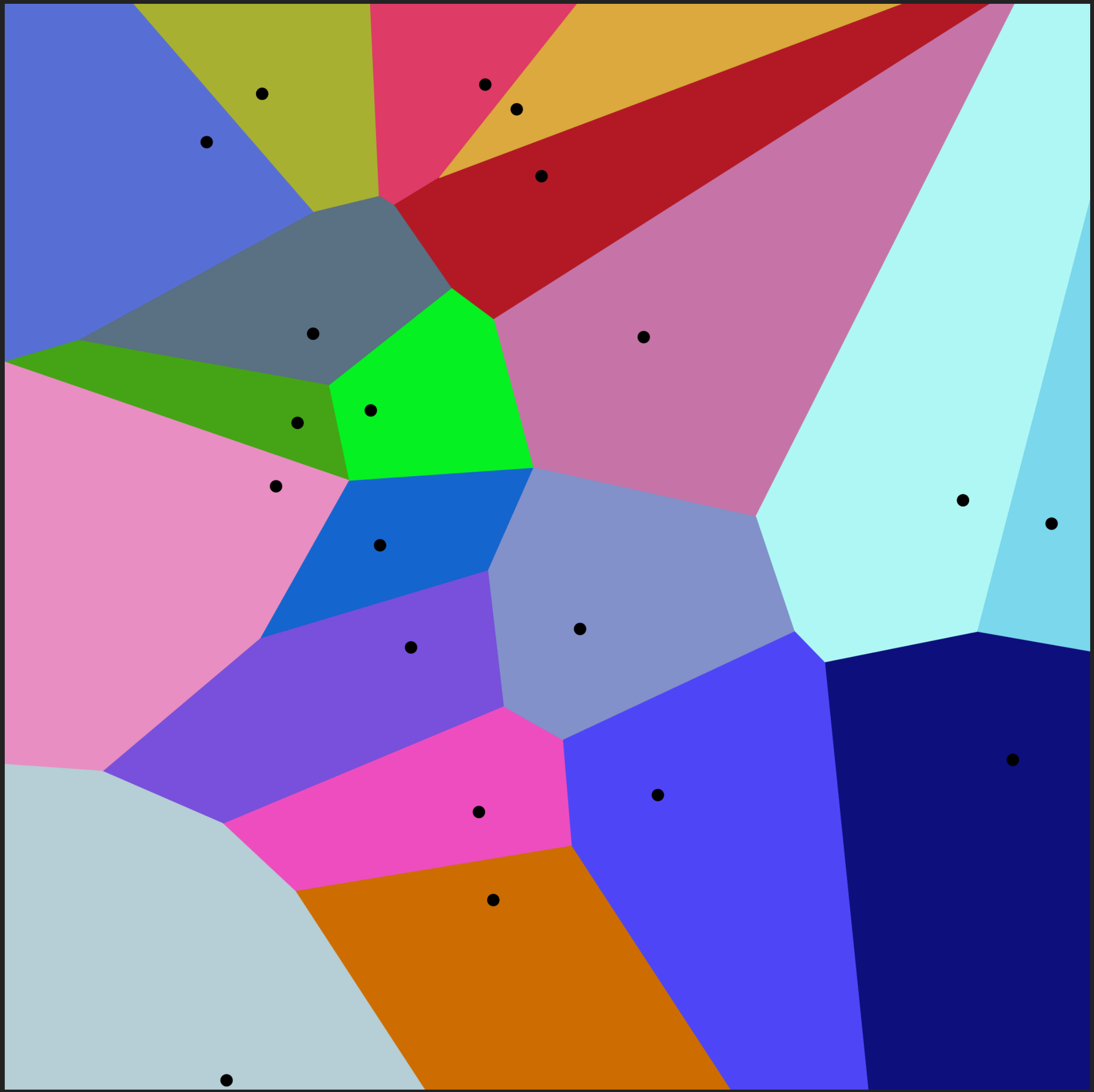
COMPUTATIONAL GEOMETRY

eddy1021

課程大綱

- 座標與向量
- 有向面積
- 線段相交
- 誤差分析

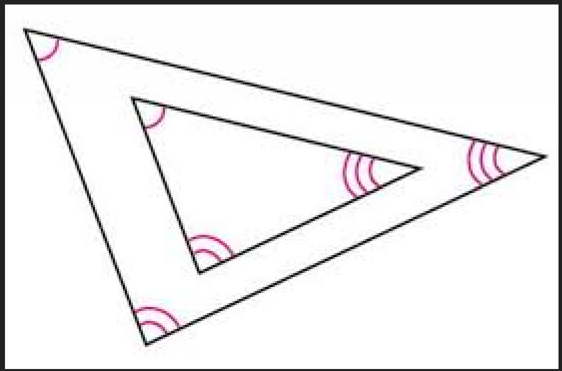
何爲計算幾何



座標與向量

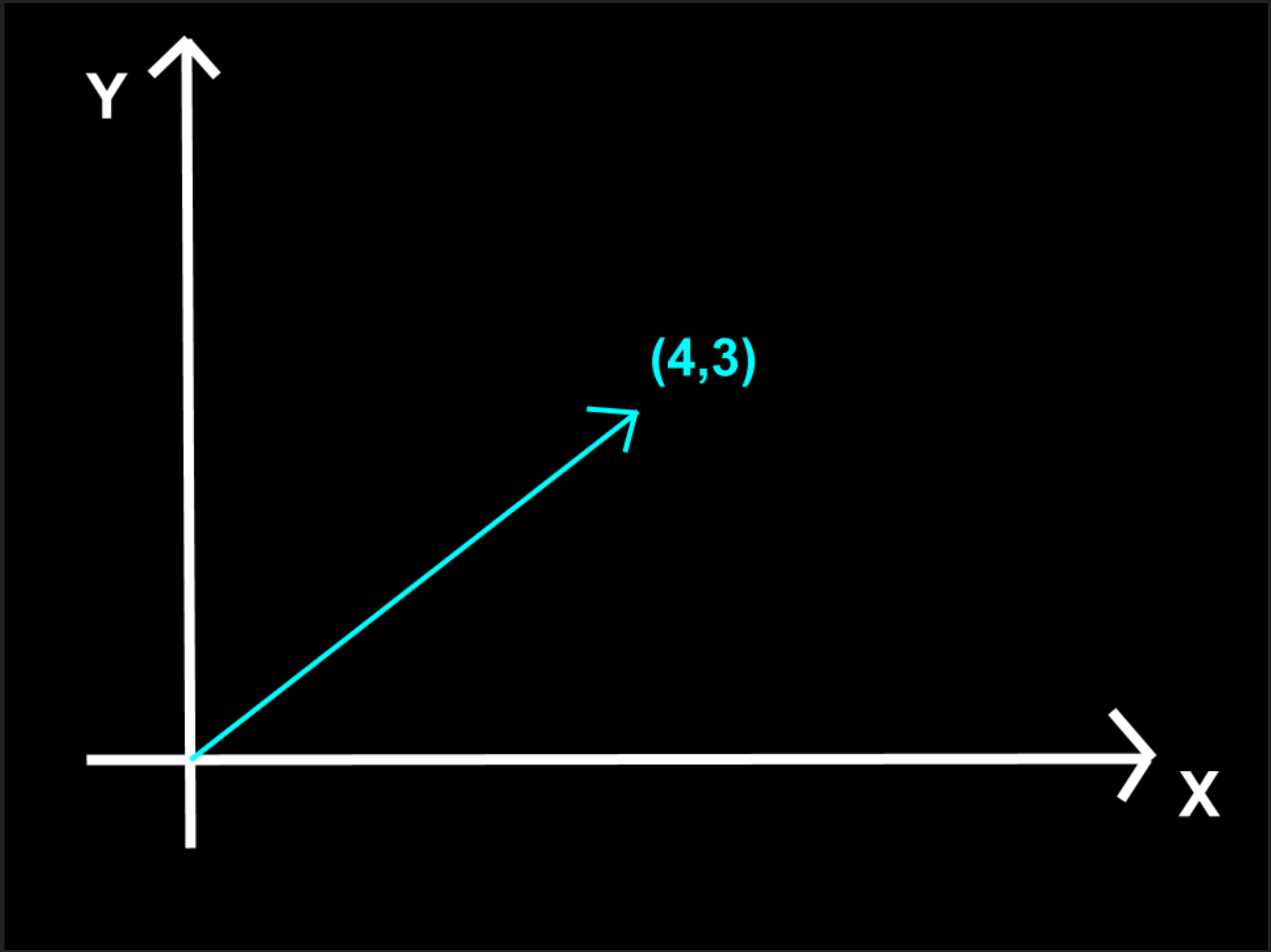
表示平面上的幾何圖形

- 長度
- 角度
- 座標
- 向量



實作上表示平面幾何

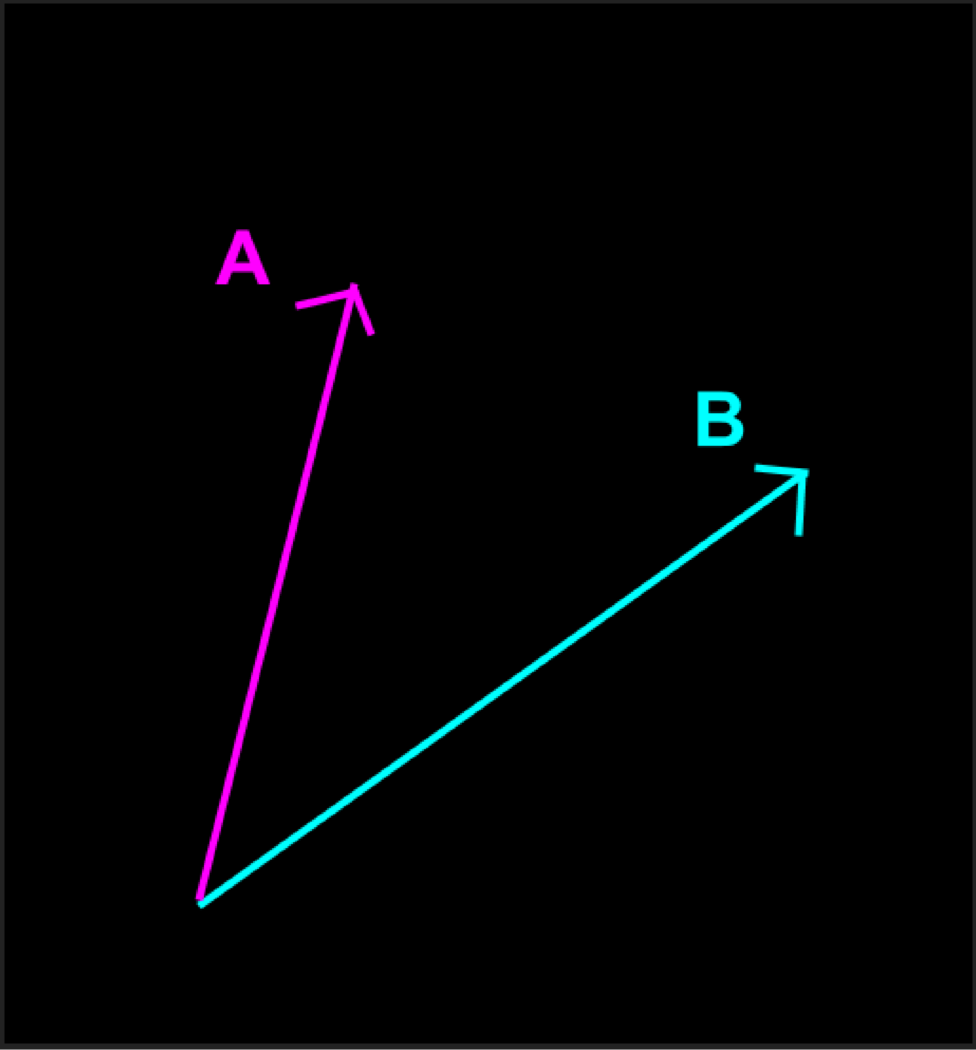
座標、向量



實作上表示平面幾何

```cpp
#include <utility> // include pair
//typedef std::pair<int,int> Pt;
typedef std::pair<double,double> Pt;
#define X first
#define Y second
Pt point( double x , double y ){
  return make_pair( x , y );
}
int main(){
  Pt a = point( 4 , 3 );
  printf( "%d %d\n" , a.X , a.Y );
}
```

向量(數學補充)



內積(Dot):

$$A \cdot B = |A||B|cos$$

$$A \cdot B = A_xB_x + A_y$$

外積(cross):

$$A \times B = |A||B|sin$$

$$A \times B = A_xB_y - A_y$$

向量基本操作

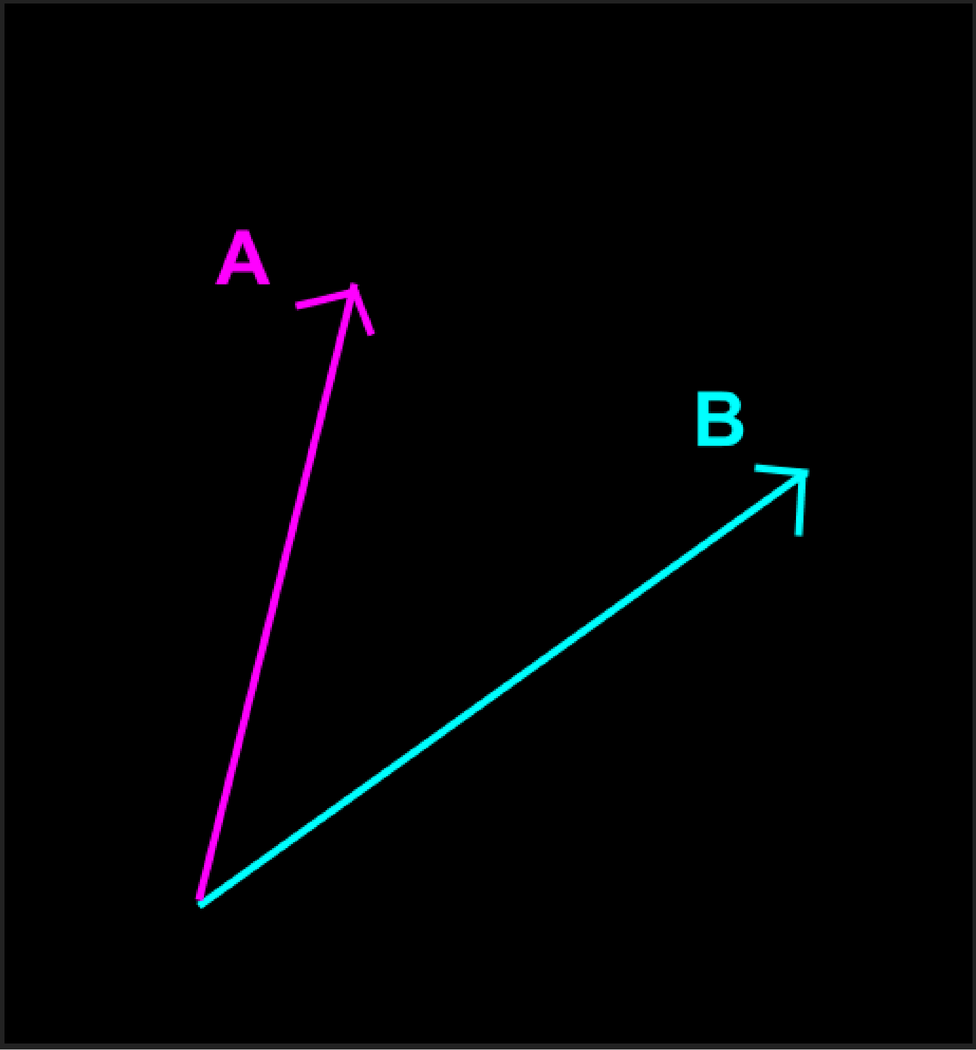
```
typedef std::pair<double,double> Pt;
#define X first
#define Y second
Pt operator+( const Pt& p1 , const Pt& p2 ){
  return Pt( p1.X + p2.X , p1.Y + p2.Y );
}
Pt operator-( const Pt& p1 , const Pt& p2 ){
  return Pt( p1.X - p2.X , p1.Y - p2.Y );
}
double operator*( const Pt& p1 , const Pt& p2 ){
  return p1.X * p2.X + p1.Y * p2.Y;
}
double operator^( const Pt& p1 , const Pt& p2 ){
  return p1.X * p2.Y - p1.Y * p2.X;
}
```

向量基本操作

```
Pt operator*( const Pt& p1 , const double& k ){
  return Pt( p1.X * k , p1.Y * k );
}
Pt operator/( const Pt& p1 , const double& k ){
  return Pt( p1.X / k , p1.Y / k );
}
double abs( const Pt& p1 ){
  return sqrt( p1 * p1 );
}
```

有向面積

兩向量形成三角形

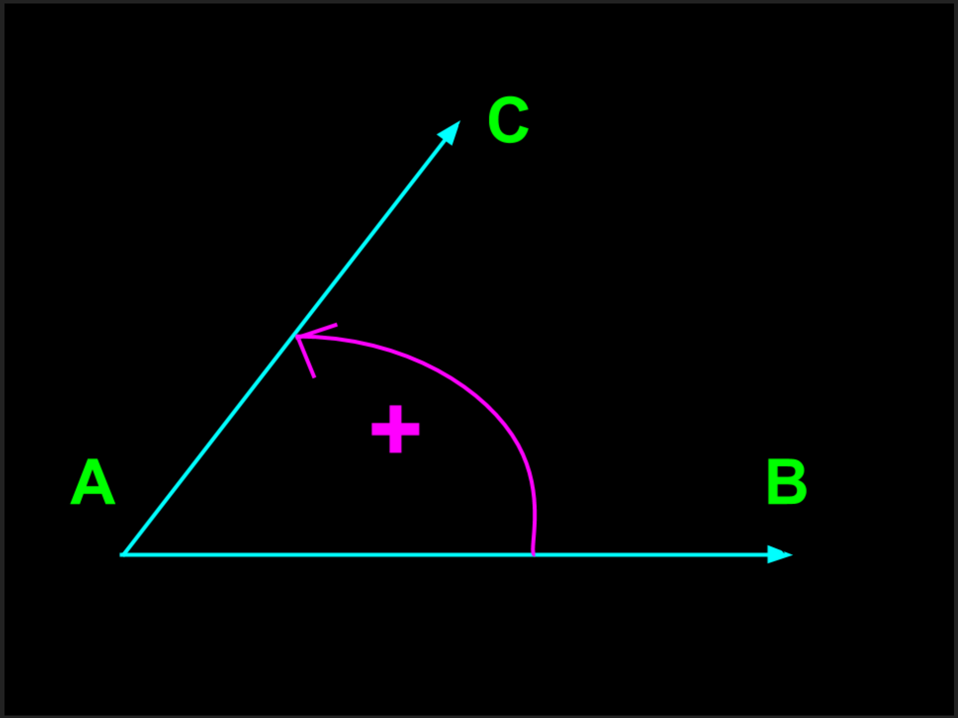


兩向量可夾出三角形
其面積可由外積得出

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}\vec{A} \times \vec{B}$$

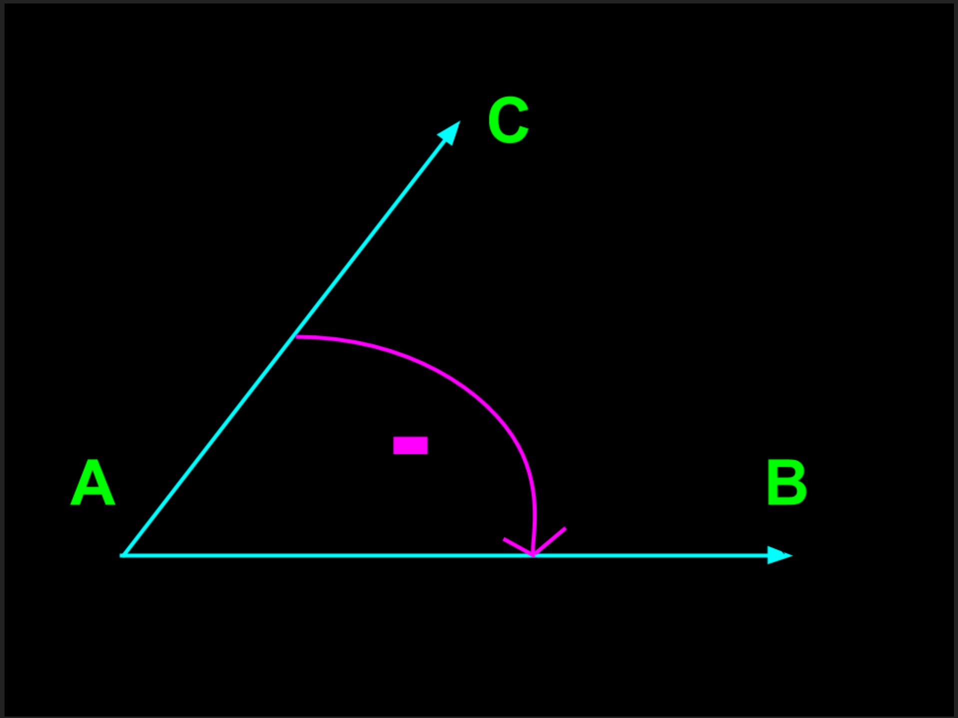
此面積我們稱爲**有向面**
(外積有正有負)

有向面積的方向



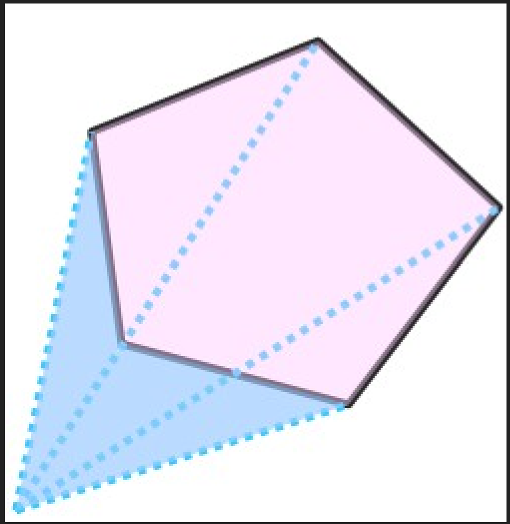
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$
$$= (5,0) \times (3,4)$$
$$= 5 \times 4 - 0 \times 3$$
$$= 20 > 0$$

有向面積的方向



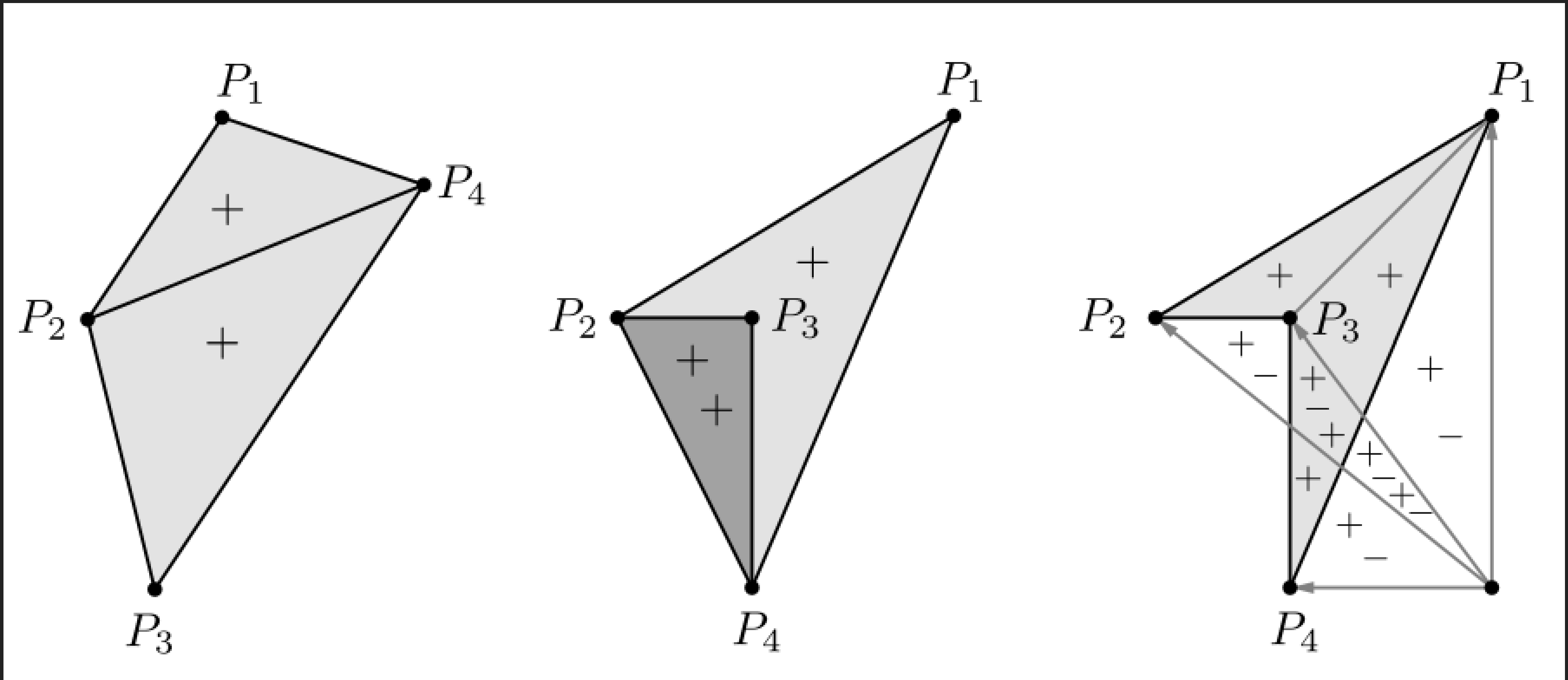
$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \\
&= (3, 4) \times (5, 0) \\
&= 3 \times 0 - 4 \times 5 \\
&= -20 < 0
\end{aligned}
$$

多邊形的有向面積



如同三角形
多邊形的有向面積：
逆時針爲正
順時針爲負

多邊形的有向面積



多邊形的有向面積

任意在平面上選一點 A
將所有點與 A 點連線
相鄰兩點將與 A 點形成三角形
依逆時針(或順時針)序依序加總各三角形有向面積
即爲該多邊形之有向面積

多邊形的有向面積

一般而言，會挑選原點作爲參考點

若一個多邊形的頂點依序爲：

$$P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}, P_N = P_0$$

則多邊形的有向面積公式爲：

$$\mathrm{Area} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \overrightarrow{P_i} \times \overrightarrow{P_{i+1}}$$

線段相交

如何判斷？

直接求出交點，再判斷交點是否在線段內

如何判斷？

直接求出交點，再判斷交點是否在線段內

- 求交點 $\Rightarrow$ 沒有交點？無限多交點？
- 交點不好求 e.g. 垂直線
- 交點位置誤差？

更精準的求線段相交

利用外積定義方向函式：

```
int ori( const Pt& o , const Pt& a , const Pt& b ){
  double cross = ( a - o ) ^ ( b - o );
  if( fabs( cross ) < eps ) return 0;
  return cross > 0 ? 1 : -1;
}
```

更精準的求線段相交

若線段 P_1P_2 與 P_3P_4 相交。
則點 P_3與點P_4 會在線段 P_1P_2 異側。

更精準的求線段相交

若線段 P_1P_2 與 P_3P_4 相交。
則點 P_3與點P_4 會在線段 P_1P_2 異側。
利用方向函式即代表：

$$\texttt{ori}(P_1, P_2, P_3) \times \texttt{ori}(P_1, P_2, P_4) < 0$$

這樣就考慮完了嗎？

兩條平行線也可能相交

兩條平行線也可能相交

共線才有可能相交！

平行：$(P_2 - P_1)\hat{}(P_4 - P_3) = 0$

共線：$\texttt{ori}(P_1, P_2, P_3) = 0$

平行線相交交點位置

點 P_1 在 線段 P_2P_3 上：

$$(P_2 - P_1) \cdot (P_3 - P_1) < 0$$

誤差分析

爲什麼需要誤差分析

- 計算幾何中經常遇到浮點數
- 浮點數以二進位儲存必然會產生誤差
- $\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \pi$

浮點數儲存誤差

```
puts( 0.1 + 0.2 == 0.3 ? "equal" : "not equal" );
```

形態	大小	精度
float	4 B	10^{-7}
double	8 B	10^{-16}
long double	10 B	10^{-19}

誤差容忍值(eps)

將所有數字膨脹 eps 的大小

$$x \Rightarrow (x - \texttt{eps}, x + \texttt{eps})$$

兩數相差 eps 內視爲相等

容忍誤差的比較

```
bool operator==( const double& a , const double& b ){
  return b - eps < a && a < b + eps;
}
bool operator<( const double& a , const double& b ){
  return a < b - eps;
}
bool operator<=( const double& a , const double& b ){
  return a < b + eps;
}
```

如何決定eps的大小

- 不能太小，應相等的數判成不相等
- 不能太大，不應相等的數判成相等

如何決定eps的大小

- 不能太小，應相等的數判成不相等
- 不能太大，不應相等的數判成相等

一般視題目而定，可大到 10^{-2} 或小到 10^{-14}。
多落在 10^{-6} 到 10^{-12} 之間

估算eps的下界

誤差會有疊加的現象！

估算eps的下界

加減法 $\Rightarrow$ 絕對誤差相加

$$(x+\Delta x)\pm(y+\Delta y)=(x\pm y)+(\Delta x\pm\Delta y)$$

估算eps的下界

乘除法 $\Rightarrow$ 相對誤差相加

$$(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) = xy(1 + \frac{\Delta x}{x})(1 + \frac{\Delta y}{y})$$

$$\approx xy(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y})$$

估算`eps`的下界

經過 K 次運算，相對誤差不會超過 $K\epsilon$
因此，數字範圍在 V 內時，eps 至少要是 $VK\epsilon$

估算eps的上界

要能分辨不同的數字！

估算eps的上界

- 保證變動 10^{-7} 不影響答案
- 答案輸出至小數點後第六位
- 答案與正確答案絕對或相對誤差小於 10^{-6} 視爲正確

計算幾何避免誤差大法！

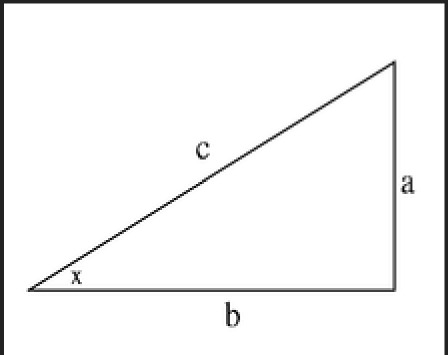
不到最後關頭，絕不用浮點數！

更多數學

徑度

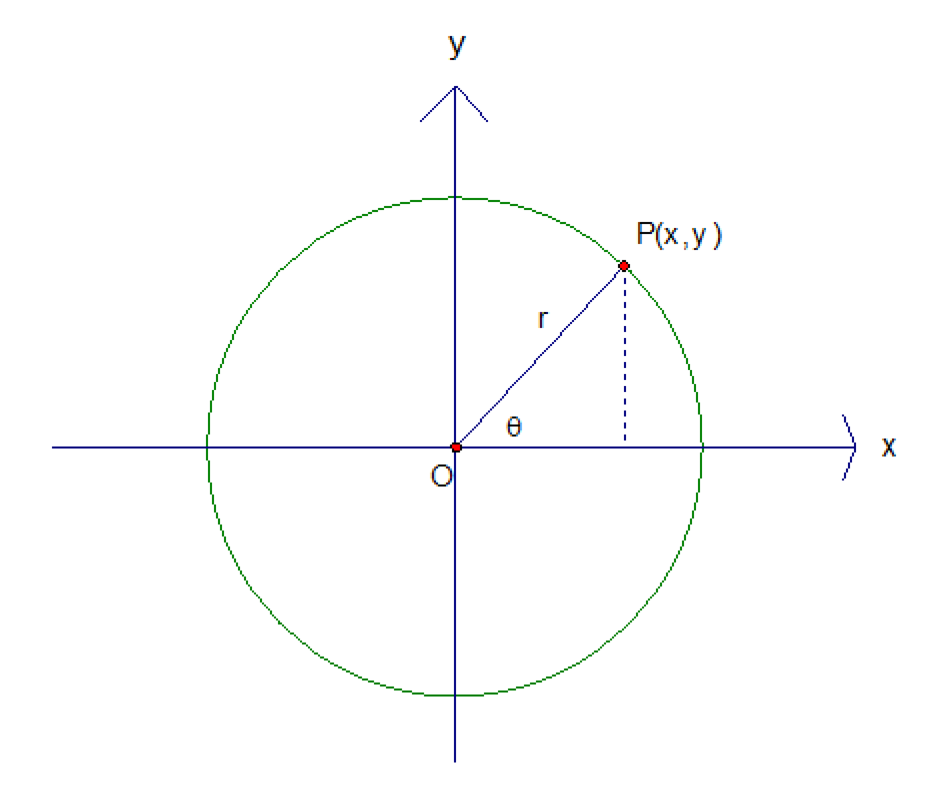
$$\pi = 3.14159265358979... = 180^\circ$$

三角函數



$$cos(x) = \frac{b}{c}$$
$$sin(x) = \frac{a}{c}$$
$$tan(x) = \frac{a}{b}$$

廣義三角函數



$$cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

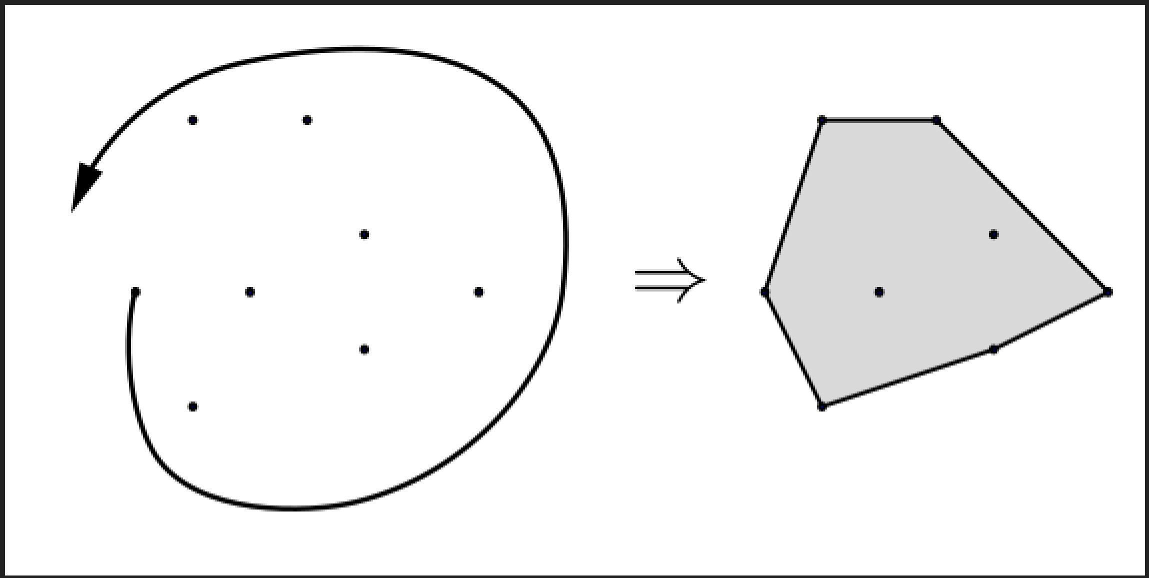
$$sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

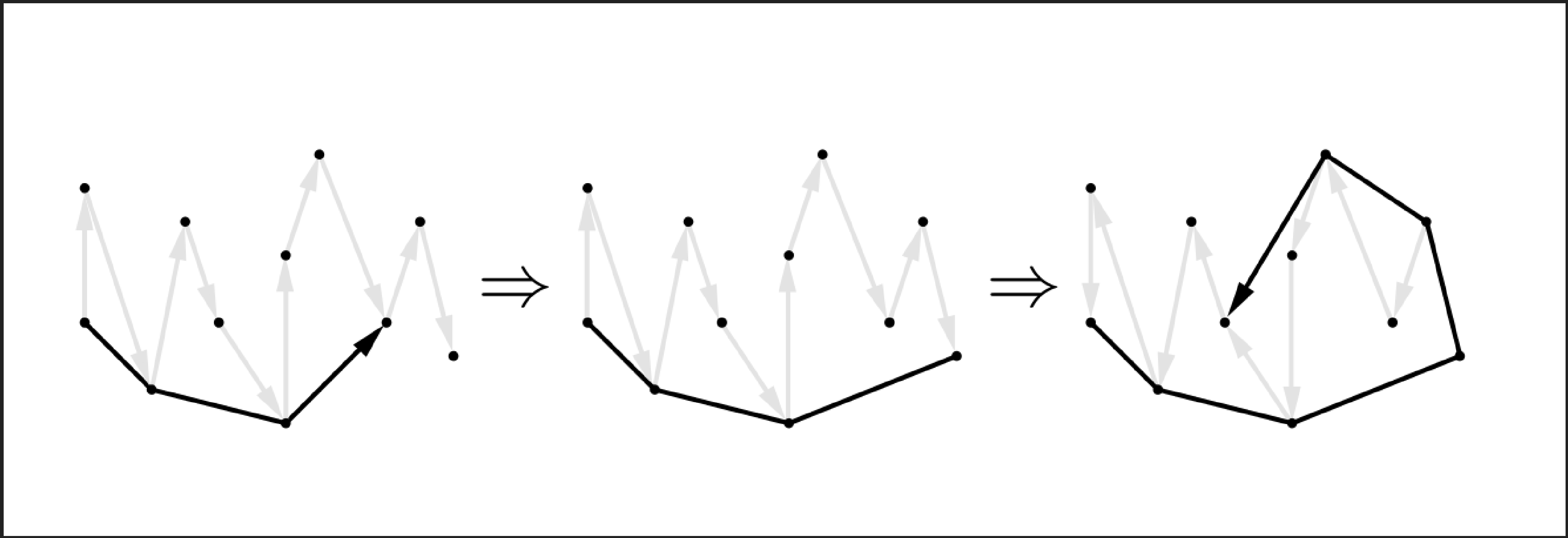
$$atan2(y, x) = \theta$$

凸包

凸包

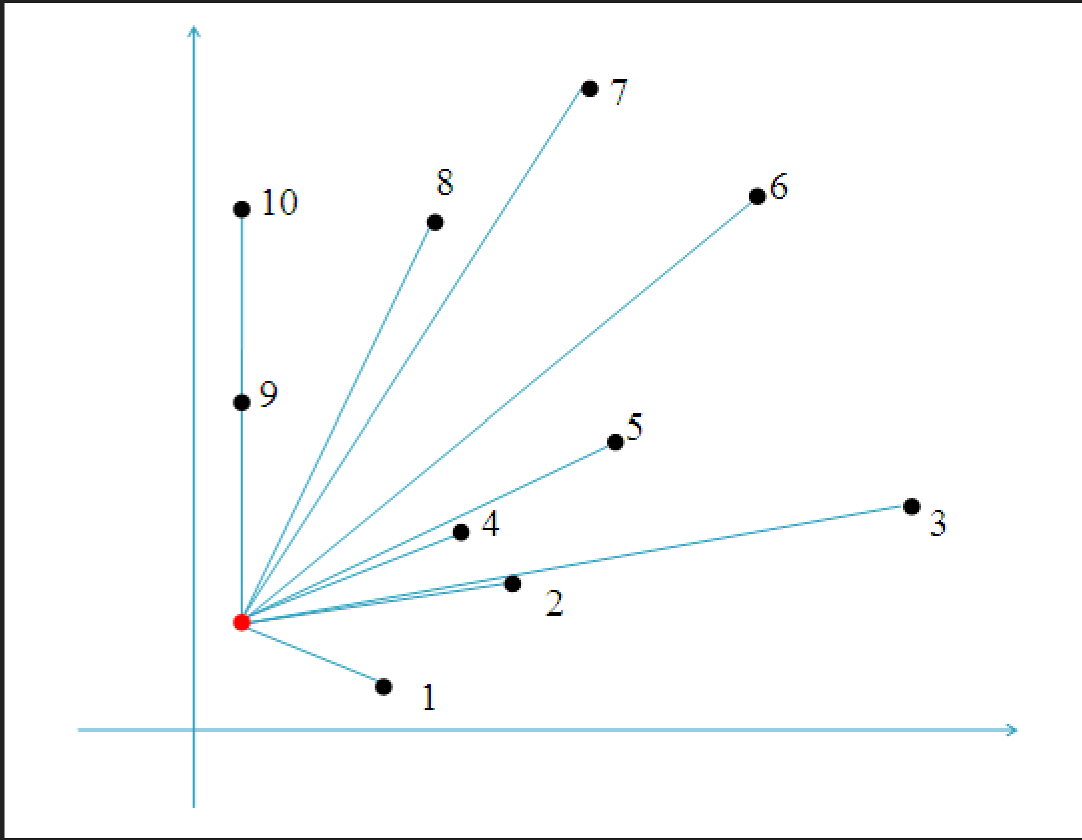


MONOTONE CHAIN



極角排序

極角排序



SORT BY ANGLE

```
Pt o;
D angle( const Pt& x ){
  return atan2( x.Y , x.X );
}
bool cmp( Pt a , Pt b ){
  return angle( a - o ) < angle( b - o );
}
```

SORT BY CROSS

```
Pt o;
bool cmp( Pt a , Pt b ){
  return ( a - o ) ^ ( b - o ) > 0;
}
```

平面上 N 個點，問一條直線最多通過幾個點

$$O(N^3) \Rightarrow O(N^2 \lg N)$$