Open in Colab

Département de génie électrique - Polytechnique Montréal

Analyse des signaux - ELE2700

TP2 version 4.0: A2025

Numéro d'équipe: #102

Noms, prénoms et matricules:

Machraoui, Simon : 2487824

Beaumier, Édouard : 2087482

In [ ]:

```

```

TP2 - Série de Fourier et électroniqu

In [1]:

```python
# Import libraries
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fft import fft, fftshift
```

Contexte 1: Étude du redresseur à double alternance

Les redresseurs à double alternance sont des équipements électroniques utilisés afin de convertir les parties négatives d'une source de tension en entrée en parties positives. Leur application concerne notamment dans la conception de convertisseurs AC-DC de tension ou de courant.

Exercice 1, évalué en classe (8pt/20):

Soit l'expression de la tension sinusoïdale au bornes de la source d'alimentation en entrée : $v_\mathrm{e}\left(t\right) = E \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$.

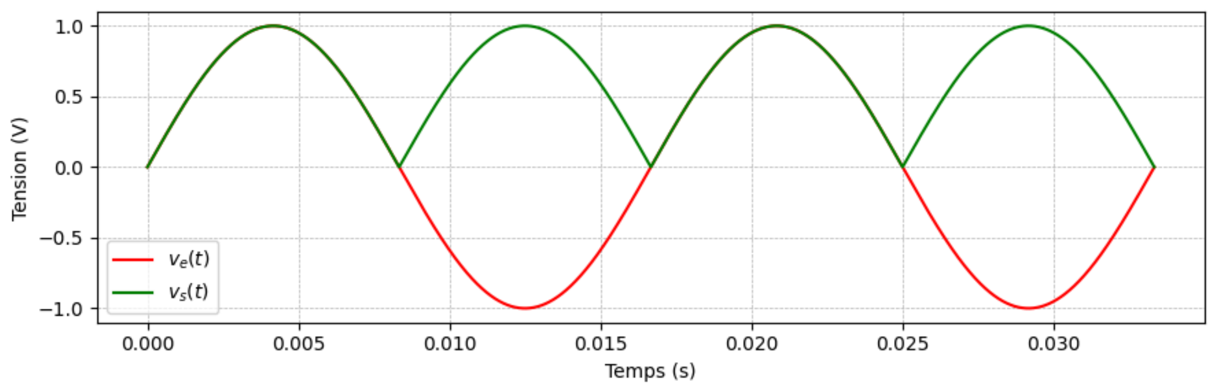
Soit l'expression mathématique de la tension en sortie : $v_\mathrm{s}\left(t\right) = |v_\mathrm{e}(t)|$.

Partie 1: Formes temporelles des signaux $v_\mathrm{e}(t)$ et $v_\mathrm{s}(t)$

Question 1a) [code]

En considérant **100 périodes** de signaux pour le recueil des données, une fenêtre d'observation de $[0, 2T]$ avec $T = \frac{1}{60}\mathrm{s}$ et **une période d'échantillonage** de $T_\mathrm{e} = 1\ \mu\mathrm{s}$, tracer **les réponses temporelles** des signaux $v_\mathrm{e}(t)$ et $v_\mathrm{s}(t)$ $\mathbf{(2pt/20)}$

In [2]:
```
# Question 1a
T = 1 / 60
Te = 1e-6
nb_periods = 100
E = 1

t = np.arange(0, nb_periods * T, Te)
ve = E * np.sin(2 * np.pi * t / T)
vs = np.abs(ve)

mask = t <= 2 * T
plt.figure(figsize=(9, 3))
plt.plot(t[mask], ve[mask], color="red", label=r"$v_e(t)$")
plt.plot(t[mask], vs[mask], color="green", label=r"$v_s(t)$")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Tension (V)")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", linewidth=0.5)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Partie 2: Série de Fourier du signal $v_\mathrm{s}(t)$ et calcul de la THD

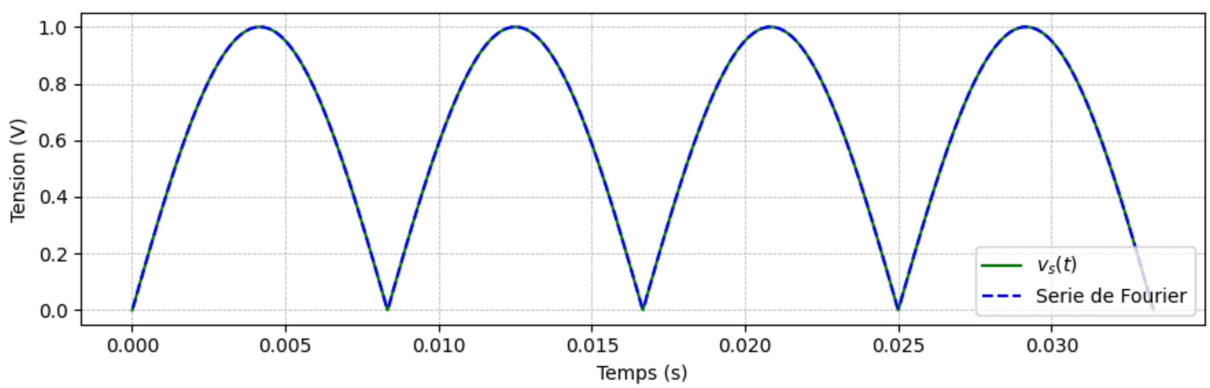
Question 2a) [Code]

Il est possible de démontrer que les coefficients du développement en série de Fourier du signal $v_\mathrm{s}(t)$ vérifient les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2E}{\pi} \\
A_{n\neq 1} &= \frac{2E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \\
A_1 &= 0 \\
B_n &= 0
\end{aligned}
$$

Reconstruire le signal $v_s(t)$ à partir d'au moins ses 40 premières harmoniques **non nulles** de sa décomposition en série de Fourier et le comparer au signal de la question précédente. $\mathbf{(2pt/20)}$

In [3]:
```
# Question 2a

harmonics = np.arange(2, 2 * 40 + 2, 2)
# print(harmonics)
A0 = 2 * E / np.pi
An = (2 * E / np.pi) * (2 / (1 - harmonics**2))

vs_fourier = np.full_like(t, A0)
for n, an in zip(harmonics, An):
    vs_fourier += an * np.cos(2 * np.pi * n * t / T)

mask = t <= 2 * T
plt.figure(figsize=(9, 3))
plt.plot(t[mask], vs[mask], color="green", label=r"$v_s(t)$")
plt.plot(t[mask], vs_fourier[mask], color="blue", linestyle="--", label="Serie de F
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Tension (V)")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", linewidth=0.5)
plt.tight_layout()
plt.show()

print(len(harmonics))
```




```
40
```

Question 2b) [Code]

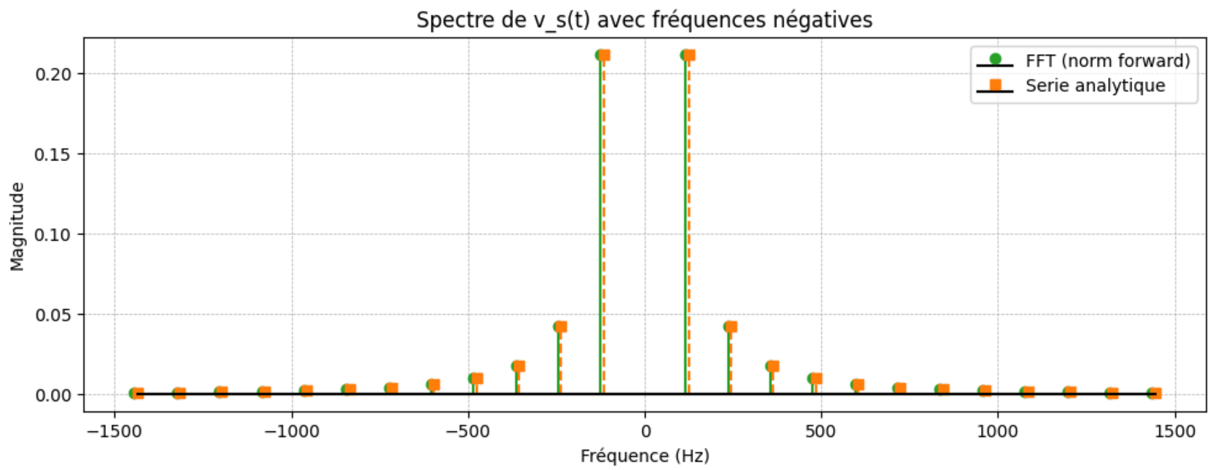
Superposer un tracé théorique et celui obtenu grâce aux outils numériques du spectre du signal $v_s(t)$ en allant jusqu'à l'harmonique de dégré 12. $\mathbf{(2pt/20)}$

> **Quelques recommandations** :
>
> - Pour le tracé théorique, pour chacune des fréquences du spectre, la magnitude de la fréquence caractérisée par n se calcule tel que suit : $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ où n représente le multiple de la fréquence fondamentale

> - Vous devrez préciser l'attribut `norm='forward'` afin de normaliser les spectres de Fourier obtenus via `scipy` dans la fonction `scipy.fft` ;
> - Pour assurer une cohérence entre les magntitudes de la série de Fourier obtenues analytiquement et celles obtenues via l'outil numérique, vous devrez multiplier vos normes analytiques par un facteur $\frac{1}{2}$ (hormis celle de la composante de fréquence nulle du signal, ceci découle des différentes définition du DSF);
> - Le tracé dans les axes des fréquences négatives se fait par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées du spectre tracé dans les fréquences positives.

In [4]:
```python
# Question 2b
f0 = 1 / T

# FFT normalisée
Vs = fft(vs, norm="forward")
freqs = np.fft.fftfreq(t.size, Te)

# Extraction des indices pour les harmoniques
indices = []
n_values = np.arange(2, 2 * 12 + 2, 2)
for n in n_values:
    freq_target = n * f0
    indices.append(np.argmin(np.abs(freqs - freq_target)))

# Magnitudes FFT pour les harmoniques
magn_fft = np.abs(Vs[indices])

# Fonction pour les coefficients analytiques
def fourier_A(n):
    if n == 0:
        return 2 * E / np.pi
    if n == 1:
        return 0.0
    return (2 * E / np.pi) * (1 + (-1)**n) / (1 - n**2)

# Magnitudes théoriques
magn_theo = []
for n in n_values:
    value = fourier_A(n)
    if n == 0:
        magn_theo.append(np.abs(value))
    else:
        magn_theo.append(np.abs(value) / 2)

# Créer les valeurs négatives en miroir
freqs_pos = n_values * f0
freqs_neg = -freqs_pos
magn_fft_mirror = np.concatenate([magn_fft[::-1], magn_fft])
magn_theo_mirror = np.concatenate([magn_theo[::-1], magn_theo])
freqs_mirror = np.concatenate([freqs_neg[::-1], freqs_pos])
```

```python
# Décalage léger pour visualiser FFT et analytique côte à côte
delta = 4

plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.stem(freqs_mirror - delta, magn_fft_mirror, linefmt="C2-", markerfmt="C2o", bas
plt.stem(freqs_mirror + delta, magn_theo_mirror, linefmt="C1--", markerfmt="C1s", b
plt.xlabel("Fréquence (Hz)")
plt.ylabel("Magnitude")
plt.title("Spectre de v_s(t) avec fréquences négatives")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", linewidth=0.5)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Question 2c) [Démarche manuscrite ou $\LaTeX$]

En se basant sur vos résultats, quelle est la fréquence fondamentale du signal $v_s(t)$? Comment compare-t-elle à la fréquence du signal $v_e(t)$? Reformuler les coefficients de la série de Fourier donnés à la question 2a) en utilisant la plus petite période possible. **(2pt/20)**

Insérez votre démarche ici.

Exercice 2, évalué en devoir (12pt/20):

Contexte 2: Étude du convertisseur AC-DC

Le redresseur à double alternance est une composante importante pour la conception d'un convertisseur AC-DC. Cependant, le signal à sa sortie comprends encore des fortes oscillations, le système est alors incomplet.

Partie 3: Série de Fourier du signal v_s

Question 3a) [Démarche manuscrite ou LaTeX] Démontrer comment obtenir les coefficients du développement en série de Fourier présentés à la question Q2a pour le redresseur à double alternance. **(4pt/20)**

Q3a

$$v_e(t) = E\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$v_s(t) = |v_e(t)|$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_T v_s(t)\,dt = \overline{v_s(t)}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_T v_s(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_T v_s(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt$$

on a $T = \frac{1}{60}$ s) → info de la partie 2

$$A_0 = \frac{1}{1/60}\int_0^{1/60} E\left|\sin\left(\frac{2\pi t}{1/60}\right)\right|dt$$

$$= 60\,E\int_0^{1/60}|\sin(120\pi t)|\,dt$$

on pose $x = 120\pi t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 120\pi \Rightarrow dt = \frac{dx}{120\pi}$

$$A_0 = \frac{60\,E}{120\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(x)|\,dx$$

$$= \frac{E}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} + \left[\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)\right)$$

$$= \frac{E}{2\pi}(1+1+1+1)$$

$$\boxed{A_0 = \frac{2E}{\pi}}$$

$$A_n = 120\int_0^{1/60} E\, |\sin(120\pi t)| \cos(120\pi n t)\, dt$$

$$= 120\, E\int_0^{1/60} |\sin(120\pi t)| \cos(120\pi n t)\, dt$$

on pose $x = 120\pi t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 120\pi \Rightarrow dt = \frac{dx}{120\pi}$

$$A_n = \frac{\cancel{120}\, E}{\cancel{120}\, \pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)| \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{E}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)| \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{E}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x) \cos(nx)\, dx \right)$$

or par des identité trigonométrique :

$$\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin((1-n)x) + \sin((1+n)x) \right)$$

integrale Sans les bornes :

$$\int \sin(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int \sin((1-n)x) + \sin((1+n)x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((1-n)x)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)x)}{1+n} \right]$$

Calcule Séparé des integrale :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((1-n)x)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)x)}{1+n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)\pi)}{1+n} + \frac{\cos(0)}{1-n} + \frac{\cos(0)}{1+n} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n} + \frac{1+(-1)^n}{1+n} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+n)(1+(-1)^n) + (1-n)(1+(-1)^n)}{1-n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+n+1-n)(1+(-1)^n)}{1-n^2} \right)$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx$$

on pose $y = x - \pi \implies x = y + \pi \implies \frac{dx}{dy} = 1$

$$\int_0^{\pi} \sin(y+\pi)\cos(n(y+\pi))\,dy$$

$$\int_0^{\pi} -\sin(y)(-1)^n\cos(ny)\,dy$$

$\cos(ny + n\pi)$

$= \cos(ny)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \cancel{\sin(ny)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}}$

$= (-1)^n\cos(ny)$

$$(-1)^{n+1}\int_0^\pi \sin(y)\cos(ny)\,dy = (-1)^{n+1}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

$$= -\frac{(-1)^n+(-1)^{2n}}{1-n^2}$$

$$= -\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}$$

$$\underset{n\neq 1}{A_n} = \frac{E}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx - \int_\pi^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} + \frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\right)$$

$$\boxed{\underset{n\neq 1}{A_n} = \frac{2E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}}$$

$$A_1 = \frac{E}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx - \int_\pi^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx\right)$$

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(x-x)+\sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(2\pi) + \cos(0)\right)$$

$$= 0$$

On pose : $y = x - \pi \Rightarrow x = y + \pi \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(y+\pi)\cos(y+\pi)\,dy$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin(y)\cos(y)\,dy$$

$$= 0$$

$$\boxed{A_1 = \frac{E}{\pi}(0+0) = 0}$$

$$B_n = 120\,E \int_0^{1/60} |\sin(120\pi t)| \sin(120\pi n t)\,dt$$

on pose $x = 120\pi t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 120\pi \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{120\pi}$

$$B_n = \frac{\cancel{120}\,E}{\cancel{120}\,\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)| \sin(xn)\,dx$$

$$B_n = \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx \right)$$

<u>utilisation de formules trigonométrique :</u>

$$\sin(x)\sin(xn) = \frac{1}{2}\left(\cos((1-n)x) - \cos((1+n)x) \right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((1-n)x) - \cos((1+n)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((1-n)x)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)x)}{1+n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)\pi)}{1+n} - \cancel{\frac{\sin(0)}{1-n}} + \frac{\sin(0)}{1+n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+0+0+0\right)$$

$$= 0$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \cos((1-n)x) - \cos((1+n)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((1-n)x)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)x)}{1+n}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((1-n)2\pi)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)2\pi)}{1+n} - \frac{\sin((1-n)\pi)}{1-n} + \frac{\sin((1+n)\pi)}{1+n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+0+0+0\right)$$

$$= 0$$

$$B_{n_{n\neq 1}} = \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\sin(xn)\,dx\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\left(0 - 0\right)$$

$$\boxed{B_{n_{n\neq 1}} = 0}$$

$$B_1 = \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x+\pi)\,dx\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx\right)$$

$$\boxed{B_1 = 0}$$

<u>on a donc au final :</u>

$$A_0 = \frac{2E}{\pi}$$

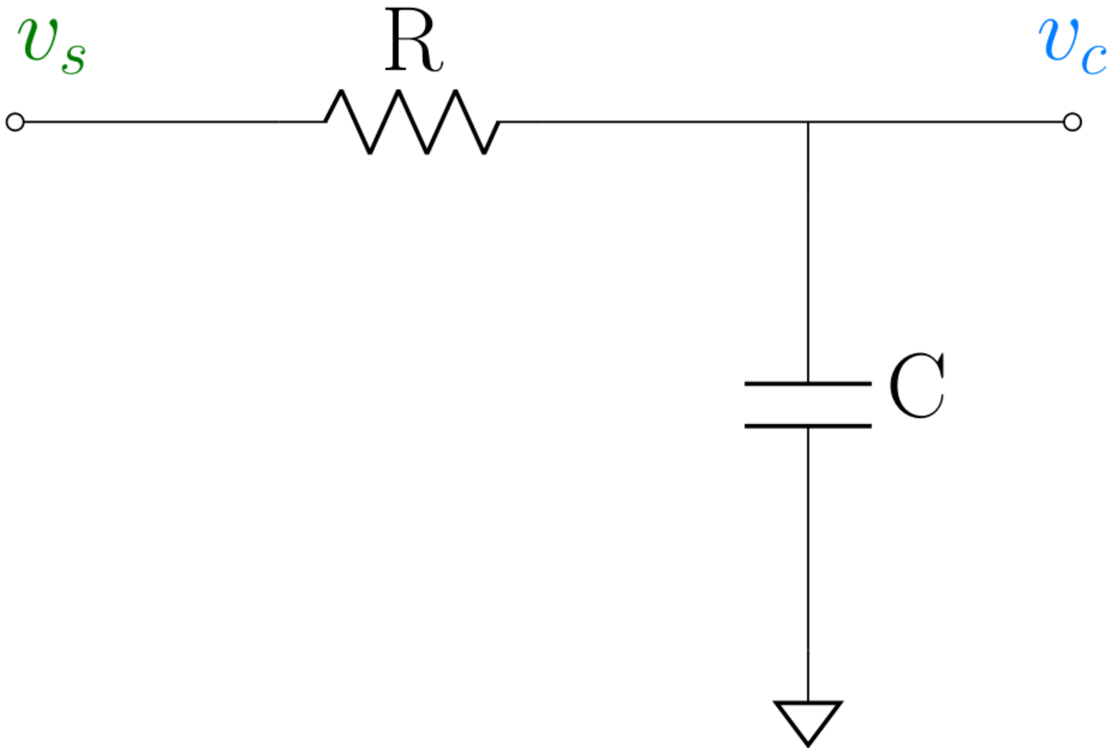
$$A_{n_{n\neq 1}} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

$$A_1 = 0$$

$$B_n = 0$$

Partie 4: Conception du filtre

Il est possible d'obtenir une tension continue à partir du signal $v_s(t)$ en utilisant un filtre. Le filtre suivant sera utilisé à cet effet:



La réponse en fréquence ce filtre peut être écrite de la façon suivante:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Question 4a) [Réponse écrite] Quel est le type de ce filtre? En observant le spectre du signal $v_s(t)$, quelle fréquence(s) faut-il conserver pour obtenir une tension constante? $\mathbf{(1pt/20)}$

Écrire votre code ici pour (Q4a)

C'est un filtre passe-bas.

$$\lim_{f\to 0} H(f) = \lim_{f\to 0} \frac{1}{1 + j\,2\pi fRC} = 1.$$
$$\lim_{f\to \infty} H(f) = \lim_{f\to \infty} \frac{1}{1 + j\,2\pi fRC} = 0.$$

Pour obtenir une tension constante, il faut conserver uniquement la composante à $f = 0$ (la composante continue). Toutes les autres composantes (120 Hz, 240 Hz, ...) doivent être atténuées par le filtre.

Question 4b) [Démarche manuscrite ou $\LaTeX$] Reformuler les coefficients du développement en série de Fourier présentés à la question Q2a) pour inclure l'impact de ce filtre. Utiliser la forme exponentielle et simplifiez votre réponse. $\mathbf{(2pt/20)}$

Insérez votre démarche ici.

Q4b

Conversion de notre forme trigo. de la question 2a en forme exponentiel :

$$X_0 = A_0 = \frac{2E}{\pi}$$

$$X_{n_{n\neq1}} = \frac{A_{n_{n\neq1}} - jB_{n_{n\neq1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} - j0\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

$$X_{-n_{n\neq1}} = \frac{A_{n_{n\neq1}} + jB_{n_{n\neq1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} + j0\right)$$

$$= \frac{E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

$$X_1 = \frac{A_1 - jB_1}{2} = \frac{0 - j0}{2} = 0$$

$$X_{-1} = \frac{A_1 + jB_1}{2} = \frac{0 + j0}{2} = 0$$

en Somme, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0 = \dfrac{2E}{\pi} \\ X_1 = X_{-1} = 0 \\ X_{n_{n\neq1}} = X_{-n_{n\neq1}} = \dfrac{E}{\pi}\,\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2} \end{array}}$$

on a donc :

$$v_s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{2j\pi n \frac{t}{T}}$$

$$T = \frac{1}{60}$$

$$v_s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{120 j\pi n t}$$

application du filtre

$$\tilde{x}_n = x_n \cdot H(n\,60) = \frac{x_n}{1 + j2\pi n\,60\,RC}$$

$$= \frac{x_n}{1 + 120 j\pi n RC}$$

la composante continue $(n=0)$:

$$\tilde{x}_0 = \frac{x_0}{1 + 120 j\pi RC \times 0} = \frac{x_0}{1+0} = x_0 = \frac{2E}{\pi}$$

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_{-1} = 0$$

$$\tilde{X}_{-n_{n\neq 1}} = \tilde{X}_{n_{n\neq 1}} = \frac{E}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\,\frac{1}{1+120j\pi nRC}$$

$$v_S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}' \tilde{X}_n e^{120j\pi nt}$$

$$v_S(t) = \tilde{X}_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}{}' \tilde{X}_n e^{120j\pi nt} + \tilde{X}_{-n} e^{-120j\pi nt}$$

$$= \tilde{X}_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}{}' \tilde{X}_n \left(e^{120j\pi nt} + e^{-120j\pi nt}\right)$$

$$= \frac{2E}{\pi} + \sum_{n=2}^{+\infty} \tilde{X}_n \left(e^{120j\pi nt} + e^{-120j\pi nt}\right)$$

Question 4c) [Démarche manuscrite ou $\LaTeX$] Vous décidez de reproduire ce circuit en laboratoire pour valider vos calculs. Vous décidez d'utiliser un condensateur de 47 μF. Quelle est la valeur de la resistance nécessaire pour que l'amplitude de la première harmonique non-nulle soit 50 fois plus petite que la composante constante? Utiliser la base exponentielle. **(2pt/20)**

Insérez votre démarche ici.

Q4C

$C = 47 \mu F$

On cherche la valeur de R tel que $\frac{|\hat{X}_0|}{50} = |\hat{X}_2|$

$\hat{X}_0 = \frac{2E}{\pi}$ et $\hat{X}_2 = \frac{E}{\pi} \frac{1+(-1)^2}{1-2^2} \frac{1}{1+120j\pi 2RC}$

$$\hat{X}_2 = \frac{-2E}{3\pi} \frac{1}{1+240j\pi RC}$$

$$\frac{|\hat{X}_0|}{50} = |\hat{X}_2|$$

$$\frac{2E}{50\pi} = \left|\frac{-2E}{3\pi}\right| \frac{1}{\sqrt{1+(240\pi RC)^2}}$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{E}}{50\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{\cancel{E}}{\cancel{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+(240\pi RC)^2}}$$

$$\sqrt{1+(240\pi RC)^2} = \frac{50}{3}$$

$$1+(240\pi CR)^2 = \frac{50^2}{3^2}$$

$$240\pi CR = \sqrt{\frac{50^2}{3^2} - 1}$$

$$R = \frac{1}{240\pi C}\sqrt{\frac{50^2}{3^2} - 1}$$

$$R = \frac{1}{240\pi\, 47.10^{-6}}\sqrt{\frac{50^2}{3^2} - 1}$$

$$R \simeq 469\ \Omega$$

Question 4d) [code]

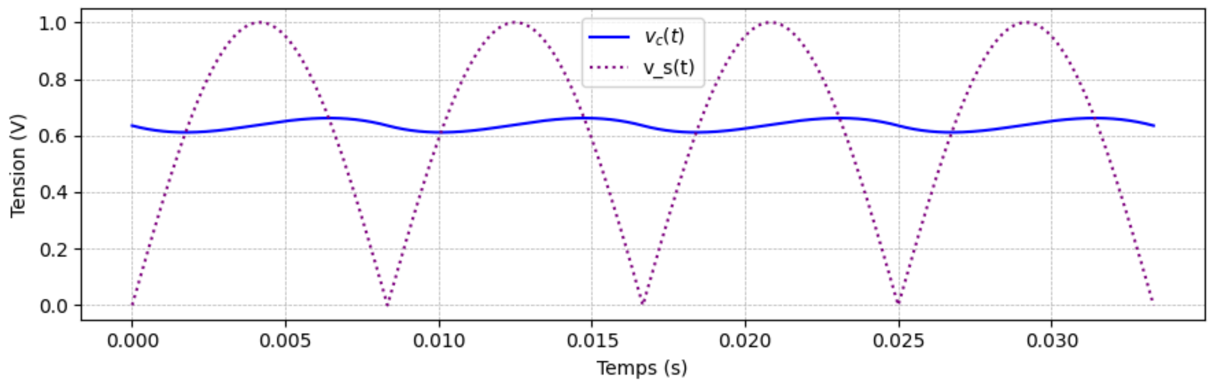
Reconstruire le signal $v_c(t)$ à partir d'au moins ses 40 premières harmoniques **non nulles** de sa décomposition en série de Fourier. Afficher sur la même figure le signal $v_s(t)$ et comparer. Afficher un tracé théorique du spectre en allant jusqu'à l'harmonique de degré 12.

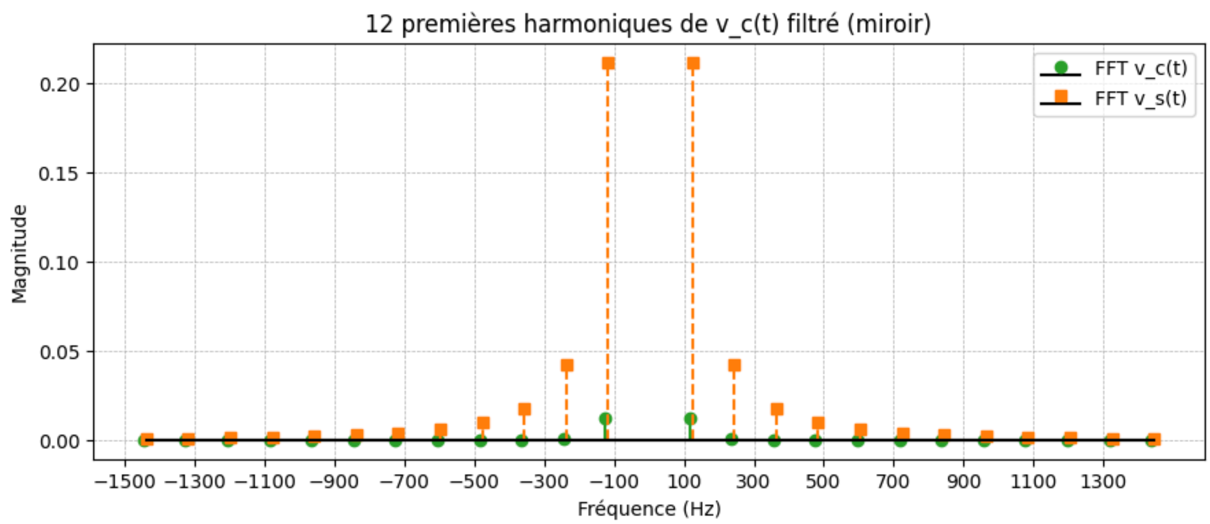
(2pt/20)

In [5]:

```python
# Écrire votre code ici pour (Q4d)
T = 1 / 60
Te = 1e-6
nb_periods = 100
E = 1
R = 469
C = 47e-6
f0 = 1/T


t = np.arange(0, nb_periods * T, Te)

ve = E * np.sin(2 * np.pi * t / T)
vs = np.abs(ve)


harmonics = np.arange(2, 2 * 40 + 2, 2)
# print(harmonics.size)
X0 = 2 * E / np.pi
Xn = (E / np.pi) * (2/(1 - harmonics**2)) * (1/(1+2j*np.pi*harmonics*f0*R*C))

vc_fourier = np.full_like(t, X0)
for n, xn in zip(harmonics, Xn):
    vc_fourier += 2 * np.real(xn * np.exp(2j*np.pi*n*t/T))

mask = t <= 2 * T
plt.figure(figsize=(9, 3))
plt.plot(t[mask], vc_fourier[mask], color="blue", label=r"$v_c(t)$")
plt.plot(t[mask], vs[mask], color="purple", linestyle=":", label="v_s(t)")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Tension (V)")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", linewidth=0.5)
plt.tight_layout()
plt.show()

#print(f"Harmoniques non nulles utilisees : {len(harmonics)}")




# ----- FFT de v_c(t) -----
Vc = fft(vc_fourier, norm="forward")
freqs = np.fft.fftfreq(t.size, Te)

# On ne garde que les 12 premières harmoniques non nulles
n_values = np.arange(2, 2*12 + 2, 2)
indices = [np.argmin(np.abs(freqs - n*f0)) for n in n_values]
magn_fft = np.abs(Vc[indices])

# Fréquences positives et négatives en miroir
freqs_pos = n_values * f0
freqs_neg = -freqs_pos
magn_fft_mirror = np.concatenate([magn_fft[::-1], magn_fft])
freqs_mirror = np.concatenate([freqs_neg[::-1], freqs_pos])
```

```python
# Affichage
plt.figure(figsize=(9, 4))
plt.stem(freqs_mirror - delta, magn_fft_mirror, linefmt="C2-", markerfmt="C2o", bas
plt.stem(freqs_mirror + delta, magn_theo_mirror, linefmt="C1--", markerfmt="C1s", b
plt.xlabel("Fréquence (Hz)")
plt.ylabel("Magnitude")
plt.title("12 premières harmoniques de v_c(t) filtré (miroir)")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", linewidth=0.5)
plt.xticks(np.arange(-1500, 1500, 200))
plt.tight_layout()
plt.show()
```





Question 4e) [Réponse écrite] Commentez sur la forme du signal $v_c(t)$ et sur son spectre. Comment pouvez-vous améliorer la qualité du signal? **(1pt/20)**

Écrire votre réponse ici pour (Q4e)

Le signal $v_c(t)$ est nettement plus lissé que $v_s(t)$: la composante continue est préservée tandis que les hautes harmoniques sont fortement atténuées. Il subsiste toutefois une petit ondulation causé par les basses harmoniques non totalement rejetées — pour l'atténuer davantage il faut augmenter RC, utiliser un filtre d'ordre supérieur ou ajouter une régulation après le filtre.

Précisions pour la remise:

- Pour chaque exercice, répondre en ajoutant des cases de code ou de texte en dessous de la question.
- Remettre sur moodle un fichier `.ipynb` contenant tous les exercises de ce TP avec toutes les librairies et importations nécessaires pour que le code roule sans erreurs. Remettre également un fichier `.pdf` du notebook. (Voir Notes additionnelles du TP-1)
- Indiquer vos noms, vos matricules et votre numéro d'équipe au début dans l'entête du `notebook`.