Département de génie électrique - Polytechnique Montréal

Analyse des signaux - ELE2700

TP1 version 3.0: A2025

Numéro d'équipe: #102

Noms, prénoms et matricules:

Machraoui, Simon : 2487824

Beaumier, Édouard : 2087482

TP1 - Exercices

Exercice 2, devoir (12pt/20):

a) [code] Générez le signal suivant:

$$w(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\Lambda}(t-nT) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\Pi}(t-nT),$$

où,

$$\tilde{\Lambda}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha T}t - 1, & \text{si } 0 \leq t < \alpha T \\ \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2}{(1-\alpha)T}t, & \text{si } \alpha T \leq t < T \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$
$$\tilde{\Pi}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha T}, & \text{si } 0 \leq t < \alpha T \\ \frac{-2}{(1-\alpha)T}, & \text{si } \alpha T \leq t < T \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\alpha = \frac{1}{4}$ et T est donnée par $T = \frac{4}{m}$ et m est le numéro de l'équipe au sein du groupe de lab., e.g., pour l'équipe 312: $T_{312} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

(1pt/20)

> **Indice**: La fonction `def` de python et l'opérateur modulo `%` peuvent vous être utile.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alpha = 1/4
```

```
m = 2  # equipe

# Periode
T = 4/m

# fonction lamda_tilde
def lambda_tilde(t, T, alpha):
    t_prime = t % T
    if 0 <= t_prime < alpha * T:
        return (2 / (alpha * T)) * t_prime - 1
    elif alpha * T <= t_prime < T:
        return ((1 + alpha) / (1 - alpha)) - (2 / ((1 - alpha) * T)) * t_prime
    else:
        return 0

# fonction pi_tilde
def pi_tilde(t, T, alpha):
    t_prime = t % T
    if 0 <= t_prime < alpha * T:
        return 2 / (alpha * T)
    elif alpha * T <= t_prime < T:
        return -2 / ((1 - alpha) * T)
    else:
        return 0

# Define the function for w(t)
def w(t, T, alpha):
    return lambda_tilde(t, T, alpha) + pi_tilde(t, T, alpha)

# vecteur temps
f_s = 10000
t_start = 0
t_stop = 3 * T
t_vec = np.arange(start = t_start, stop = t_stop, step = 1/f_s)

# Generer signal w(t)
w_signal = np.array([w(ti, T, alpha) for ti in t_vec])
```

b) [code] Tracez ce signal avec matplotlib. Assurez vous d'avoir une légende et d'ajuster les axes pour bien voir le signal. $\textbf{(1pt/20)}$

> **Indice**: Tracez aussi chaque composante du signal pour mieux concevoir comment obtenir les coefficients de la série de Fourier en (d).

```
# Écrivez votre code ici pour b)

A_signal = np.array([lambda_tilde(ti, T, alpha) for ti in t_vec])
S_signal = np.array([pi_tilde(ti, T, alpha) for ti in t_vec])
```

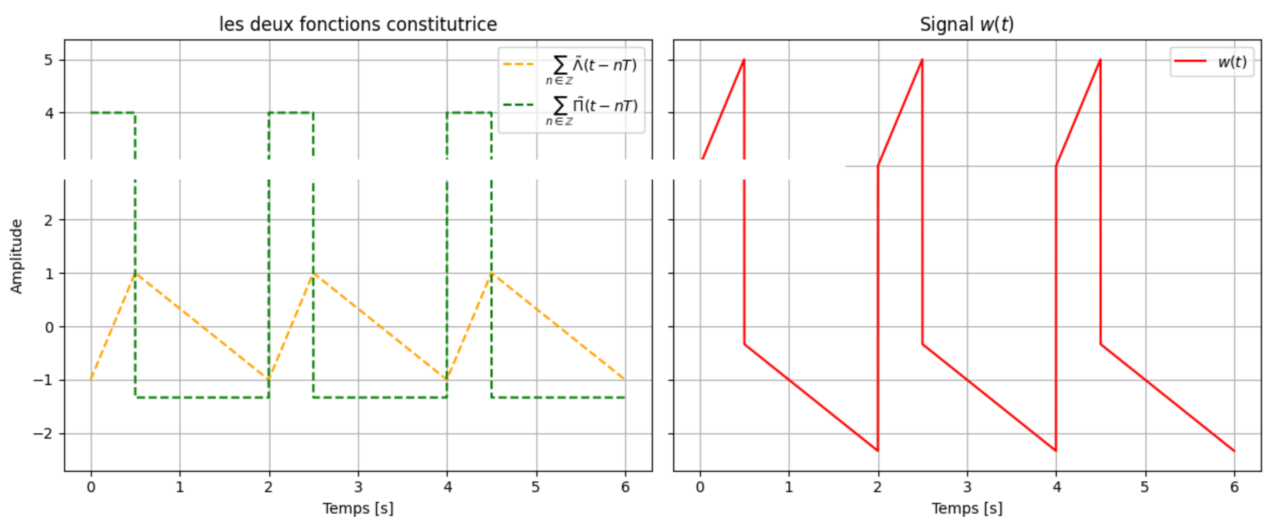
```
import matplotlib.pyplot as plt

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5), sharey=True)

# --- A_signal et S_signal ---
axes[0].plot(t_vec, A_signal, label=r"$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\Lambda}( t-nT)
axes[0].plot(t_vec, S_signal, label=r"$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\Pi}( t-nT)$",
axes[0].grid()
axes[0].set_xlabel("Temps [s]")
axes[0].set_ylabel("Amplitude")
axes[0].set_title("les deux fonctions constitutrice")
axes[0].legend()

# --- w_signal ---
axes[1].plot(t_vec, w_signal, label=r"$w(t)$", color="red", linestyle="solid")
axes[1].grid()
axes[1].set_xlabel("Temps [s]")
axes[1].set_title("Signal $w(t)$")
axes[1].legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```



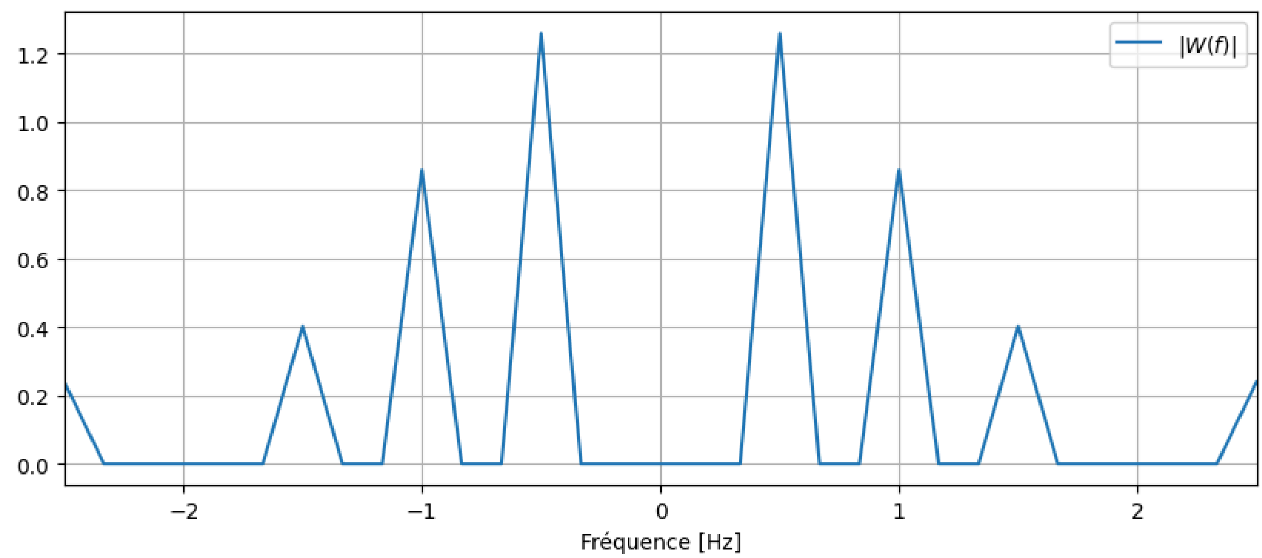
c) [code] Obtenez, avec scipy, la fft du signal. En utilisant fftshift et les mesures appropriées, affichez la fft avec matplotlib. **(2pt/20)**

> **Note**: Combinez les parties réelles et imaginaires de la fft en prenant sa valeur absolue.

```
from scipy.fft import fft, fftshift

N = w_signal.size
W = fftshift(fft(w_signal, n=N))
f_axis = np.arange(-N/2, N/2) * f_s / N

plt.figure(figsize=(10,4))
plt.plot(f_axis, np.abs(W)/N, label=r"$|W(f)|$")
plt.grid(); plt.legend(); plt.xlabel("Fréquence [Hz]")
plt.xlim([-5/T, 5/T])      # centré autour des harmoniques de f0 = 1/T
plt.show()
```



Double-click (or enter) to edit

d) [Photos dans case texte] Obtenez théoriquement les coefficients de la SF de votre signal. Utilisez la forme à base exponentielle et prenez la valeur absolue des coefficients. Donnez votre démarche. **(7pt/20)**

> Indice: Utilisez les propriétés des séries de Fourier pour simplifier votre démarche.

$$= 4\left[-\frac{\frac{1}{2}e^{-j\beta/2}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2}\right] + 3\cdot\left[\frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta} - \frac{1}{-j\beta}\right]$$

$$-\frac{4}{3}\left[-\frac{2e^{-2j\beta}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta 2}}{\beta^2} - \left(\frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\beta}{2}}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2}\right)\right] + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{e^{-j2\beta}}{-j\beta} - \frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta}\right]$$

terme $j\beta$:

$$\frac{1}{j\beta}\left[2e^{-j\beta/2} - 3e^{-j\beta/2} + 3 + \frac{8}{3}e^{-2j\beta} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{3}e^{-j2\beta} + \frac{1}{3}e^{-j\beta/2}\right]$$

$$= \frac{1}{j\beta}\left[\frac{7}{3}e^{-j2\beta} - \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} + 3\right]$$

terme $\frac{1}{\beta^2}$

$$\frac{1}{\beta^2}\left[4e^{-j\beta/2} - 4 - \frac{4}{3}e^{-2j\beta} + \frac{4}{3}e^{-j\beta/2}\right] = \frac{1}{\beta^2}\left[-\frac{4}{3}e^{-j2\beta} + \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} - 4\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\beta}\left(\frac{7}{3}e^{-j2\beta} - \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} + 3\right) + \frac{1}{\beta^2}\left(-\frac{4}{3}e^{-j2\beta} + \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} - 4\right)\right]$$

$$e^{-2j\beta} = e^{-2j\pi n} = 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\beta}\left(\frac{7}{3} - \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} + 3\right) + \frac{1}{\beta^2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{16}{3}e^{-j\beta/2} - 4\right)\right]$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} 3\, e^{-j\beta t}\, dt = 3\left(\frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\right)\Bigg|_0^{1/2}$$

$$\frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\Bigg|_{1/2} = \frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta} \quad \frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\Bigg|_0 = \frac{1}{-j\beta} \quad I_2 = 3\cdot\left[\frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta} - \frac{1}{-j\beta}\right]$$

$$I_3 = \int_{0.5}^{2}\left(-\frac{4}{3}e^{-j\beta t}\right)t\, dt = -\frac{4}{3}\frac{(\beta j t+1)e^{-j\beta t}}{\beta^2}\Bigg|_{0.5}^{2}$$

$$\frac{(\beta j t+1)e^{-j\beta t}}{\beta^2}\Bigg|_2 = -\frac{2e^{-2j\beta}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta 2}}{\beta^2} \quad \frac{(\beta j t+1)e^{-j\beta t}}{\beta^2}\Bigg|_{1/2} = -\frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\beta}{2}}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2}$$

$$I_3 = -\frac{4}{3}\left[-\frac{2e^{-2j\beta}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta 2}}{\beta^2} - \left(\frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\beta}{2}}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2}\right)\right]$$

$$I_4 = \int_{0.5}^{2}\frac{1}{3}\, e^{-j\beta t}\, dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$\frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\Bigg|_2 = \frac{e^{-2j\beta}}{-j\beta} \quad \frac{e^{-j\beta t}}{j\beta}\Bigg|_{1/2} = \frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta} \quad I_4 = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{e^{-j\beta 2}}{-j\beta} - \frac{e^{-j\beta/2}}{-j\beta}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right]$$

factoriser $\frac{16}{3}$ et $(1-e^{j\beta/2})$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}\left(\frac{1-e^{-j\beta/2}}{j\beta} - \frac{1-e^{-j\beta/2}}{\beta^2}\right)\right] = \frac{16}{6}\left(1-e^{-j\beta/2}\right)\left(\frac{1}{j\beta} - \frac{1}{\beta^2}\right)$$

$\beta = n\pi$

$$C_n = \frac{8}{3}\left(1-e^{-jn\pi/2}\right)\left(\frac{1}{j\pi n} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right), \quad n \neq 0$$

$$C_0 = 0$$

$$\omega(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\Lambda}(t-nT) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\Pi}(t-nT) \qquad \alpha = 1/4 \quad T = 2$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{cases} \frac{2}{\alpha T} t - 1 & \text{si } 0<t<\alpha T \\ \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2}{(1-\alpha)T} t & \text{si } \alpha T < t < T \end{cases}$$

$$\tilde{\Pi} \begin{cases} \frac{2}{\alpha T} & \text{si } 0<t<\alpha T \\ \frac{2}{(1-\alpha)T} & \text{si } \alpha T < t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Série fourier base exponentielle : $\boxed{X_n} = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t) e^{-2j\pi n t/T} dt$

Pour $0 \leq t < \alpha T \rightarrow \omega_1(t) = \frac{2}{\alpha T} t - 1 + \frac{2}{\alpha T} = 4t + 3$

$\alpha T \leq t < T \rightarrow \omega_2(t) = -\frac{2}{(1-\alpha)T} t + \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2}{(1-\alpha)T}\right) = -\frac{4}{3} t + \frac{1}{3}$

$$X_n = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\alpha T} \omega_1(t) e^{-2j\pi n t/T} dt + \int_{\alpha T}^{T} \omega_2(t) e^{-2j\pi n t/T} dt\right]$$

posons $\beta = \frac{2\pi n}{T} = n\pi$

$\int e^{-j\beta t} dt = \frac{e^{-j\beta t}}{-j\beta}$, $\int t e^{-j\beta t} dt = \frac{(j\beta t + 1) e^{-j\beta t}}{\beta^2} =$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^{1/2} (4t+3) e^{-j\beta t} dt + \int_{0.5}^{2} \left(-\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}\right) e^{-j\beta t} dt\right]$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} (4t \cdot e^{-j\beta t}) t \, dt = 4\left(\frac{(\beta j t + 1) e^{-j\beta t}}{\beta^2}\right)\Bigg|_0^{1/2}$$

$$\frac{(\beta j t + 1) e^{-j\beta t}}{\beta^2}\Bigg|_{t=1/2} = -\frac{1/2\, e^{-j\beta/2}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2} \qquad \frac{(\beta j t + 1) e^{-j\beta t}}{\beta^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{e^0}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

$$I_1 = 4\left[-\frac{1/2\, e^{-j\beta/2}}{j\beta} + \frac{e^{-j\beta/2}}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2}\right]$$

e) [Texte] Faites-varier le paramètre $\alpha \in (0, 1)$. Que se passe-t-il quand α tends vers 0 ou 1? Comment ce paramètre influence-t-il les harmoniques nulles? $\mathbf{(1pt/20)}$

Quand alpha tend vers 0 ou vers 1 X_0 (composant DC) reste nul et les seules annulations sont celles où n fois alpha est un entier.Plus alpha est proche de 0 ou de 1 plus il faut des indices n élevés pour annulée des termes. Si alpha est irrationnel aucune annulation pour n non nul.