

# Компьютерная обработка результатов измерений

## Лекция 6. Обработка изображений, часть 1

Емельянов Эдуард Владимирович

Специальная астрофизическая обсерватория РАН  
Лаборатория физики оптических транзиентов



- 1 Цифровые изображения
- 2 Математический аппарат
- 3 Пространственные и градационные преобразования
- 4 Частотные преобразования
- 5 Сигнал–шум

# Цифровые изображения

**Изображение** представляет собой двумерную функцию  $f(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  — пространственные координаты, а уровень  $f$  называется **интенсивностью** изображения в данной точке (цветное изображение является совокупностью по крайней мере трех функций  $r(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $b(x, y)$ ). Если величины  $x$ ,  $y$  и  $f$  принимают дискретные значения, говорят о *цифровом изображении*. Элементарная единица цифрового изображения называется **пикселием**.

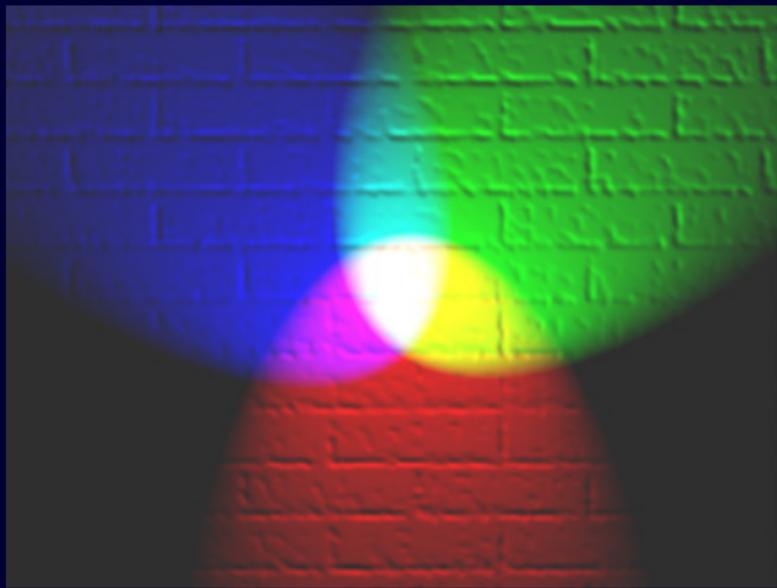
## Дискретизация

Процедуру квантования (**дискретизации**) квазинепрерывного изображения  $I_0(X, Y)$  можно представить в виде:

$$I(x, y) = \text{round} \left( \frac{2^N - 1}{I_{max}} \int\limits_{S_{x,y}} I_0(X, Y) dXdY \right) + \delta_{x,y}.$$

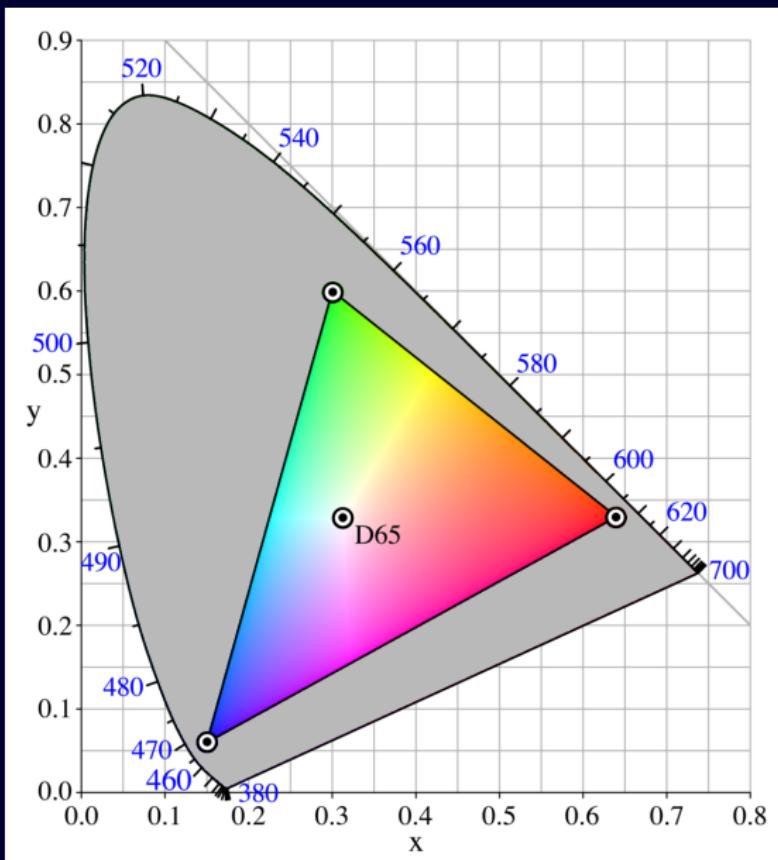


# RGB-модель

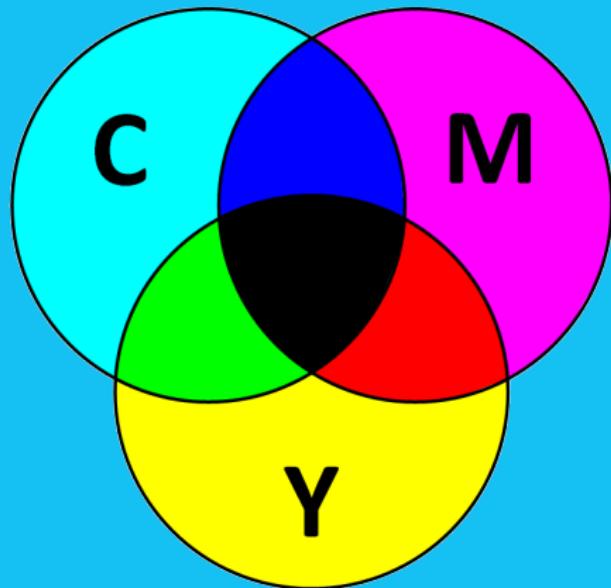


Аддитивная RGB-модель

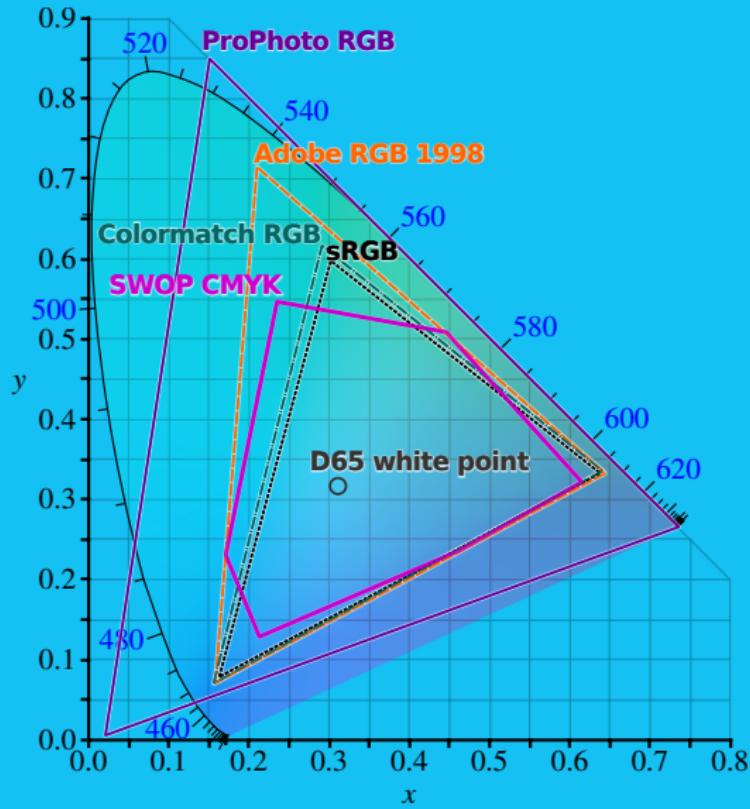
# RGB-модель

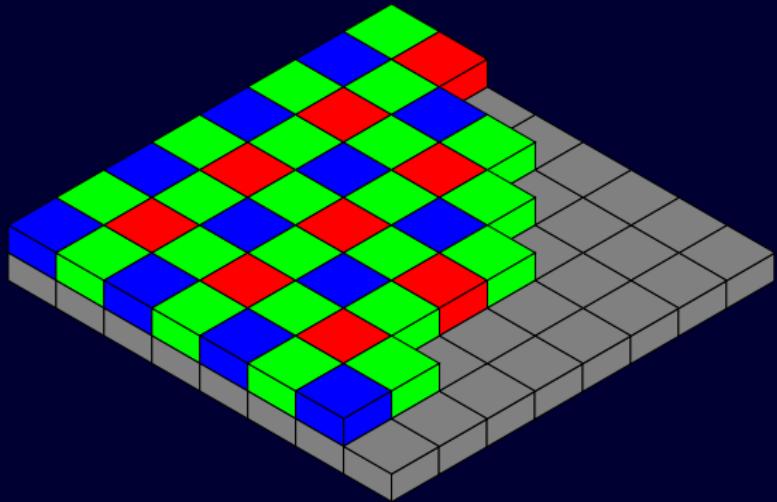


# CMYK-модель



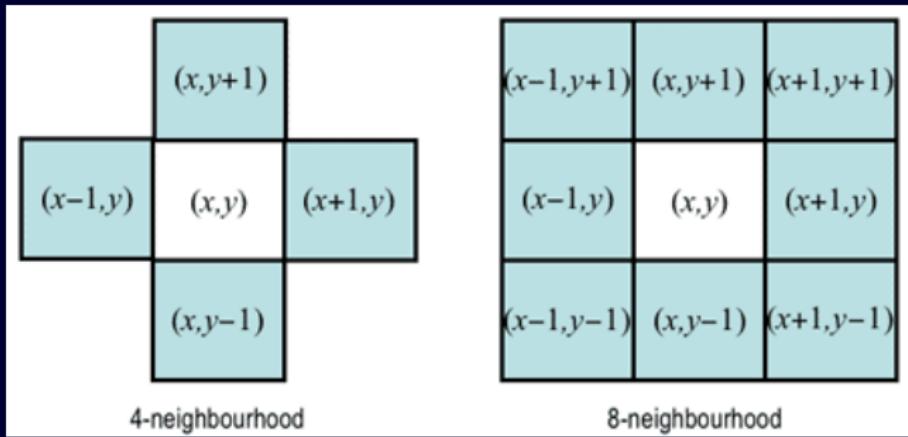
# CMYK-модель





Маска Байера

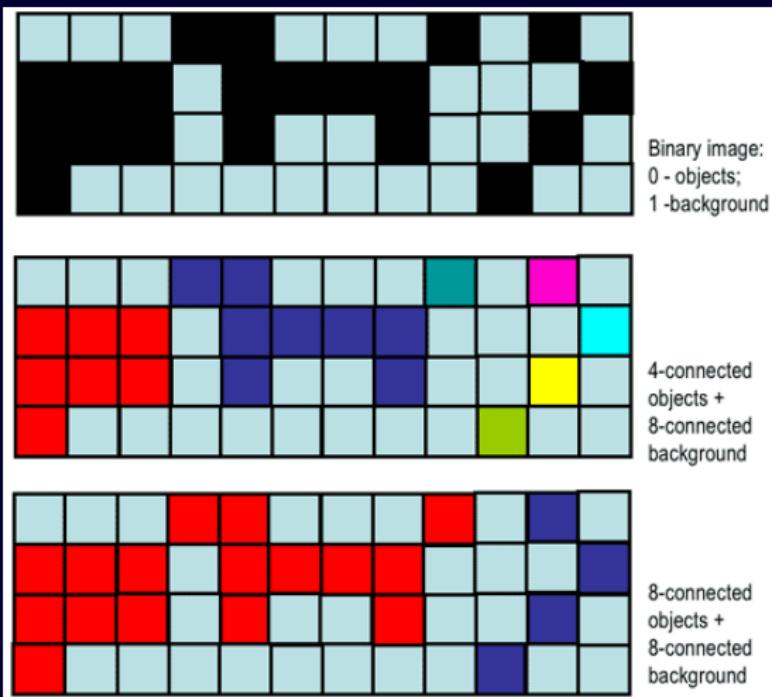
# Математический аппарат



Соседство



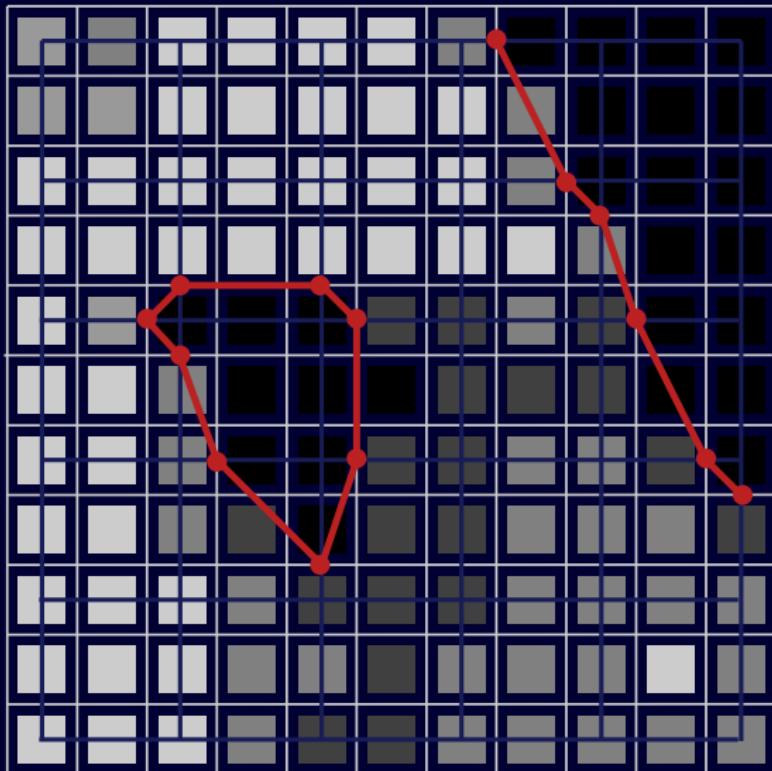
# Математический аппарат



Связность



# Математический аппарат



Границы, контуры



## Расстояние

- Евклидово:  $D_{e(p,q)} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ .
- Метрика  $L_1$ :  $D_4(p, q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$ .
- Метрика  $L_\infty$ :  $D_8(p, q) = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$ .

## Поэлементные и матричные операции

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Поэлементное произведение:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Матричное произведение:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$



## Аффинные преобразования

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Тождество:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Масштаб:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Поворот:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Сдвиг:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Скос  $y$ :  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Скос  $x$ :  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Отражение  $x$ :  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Отражение  $y$ :  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Комбинация преобразований:  $\mathbf{M} = \prod_i \mathbf{T}_i$  (зависит от порядка!).

## Операции над множествами

Множества и дополнения:  $A \cup A^C = \Omega$ ,  $A \cap A^C = \emptyset$ . ( $A^C \equiv \overline{A}$ ).

Множество через операцию:  $A^C = \{a \mid a \notin A\}$ . Подмножества:  $A \subset B$  или  $B \supset A$ .

Операции:  $A - B = A \setminus B = A \cap B^C$ ,  $A + B = A \cup B$ .

Ассоциативность:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

Дистрибутивность:  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

Законы де-Моргана:  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ ,  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ .

## Логические (булевы) операции

$\cup \Rightarrow \vee$  (дизъюнкция, «или»,  $|$ ),  $\cap \Rightarrow \wedge$  (конъюнкция, «и»,  $\&$ ),  $A^C \Rightarrow \overline{A}$  (отрицание).



$\Omega$  $A^c$  $A \cap B$  $A \cup B$  $A$  $A$  $B$  $A - B$  $B$  $A$  $B$  $C$  $A \cap B^c$  $A \cap (B \cup C)$

# Пространственные и градационные преобразования

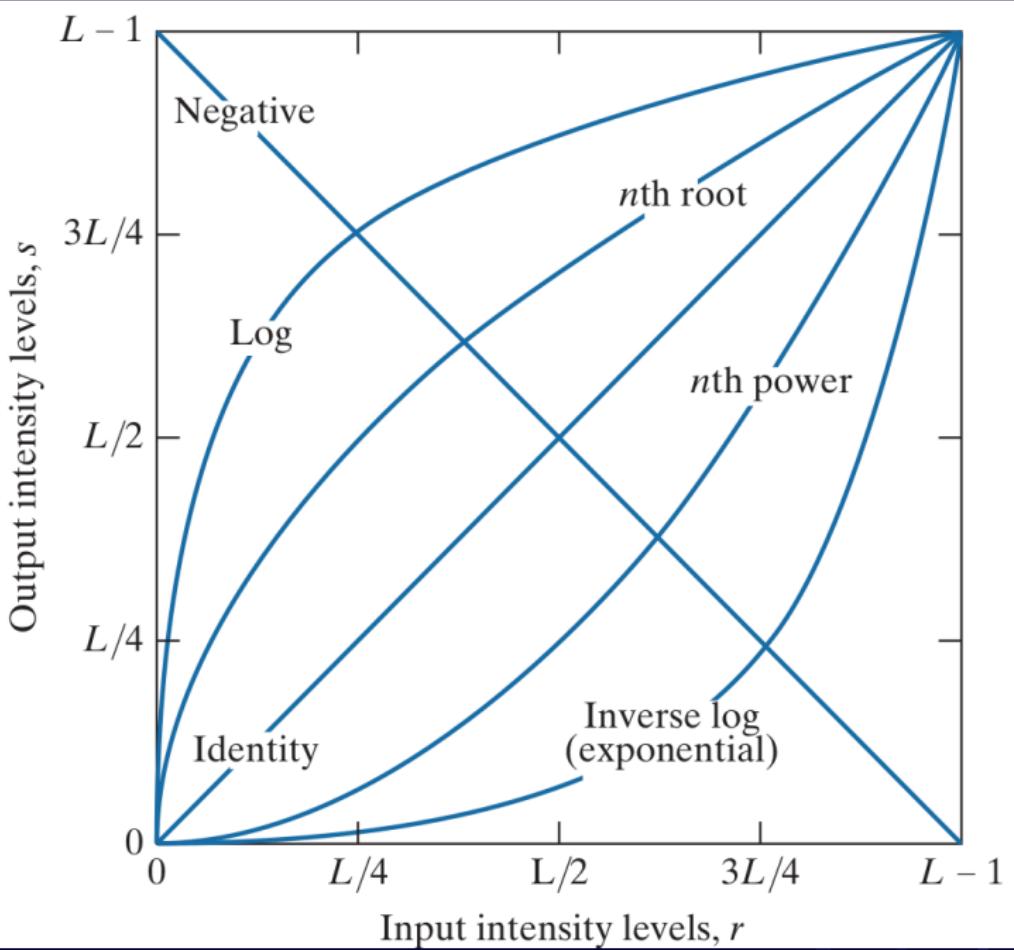
**Преобразования в пространственной области** работают непосредственно с пикселями изображения:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v), \quad \text{где } r \text{ -- ядро преобразования.}$$

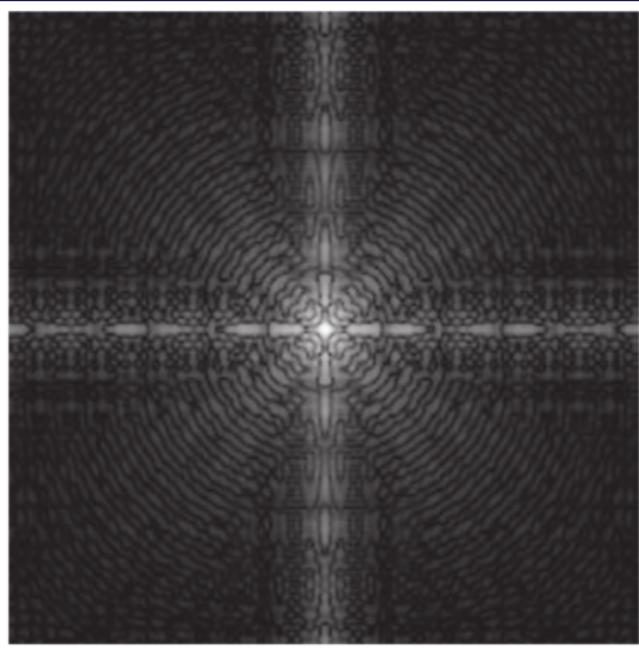
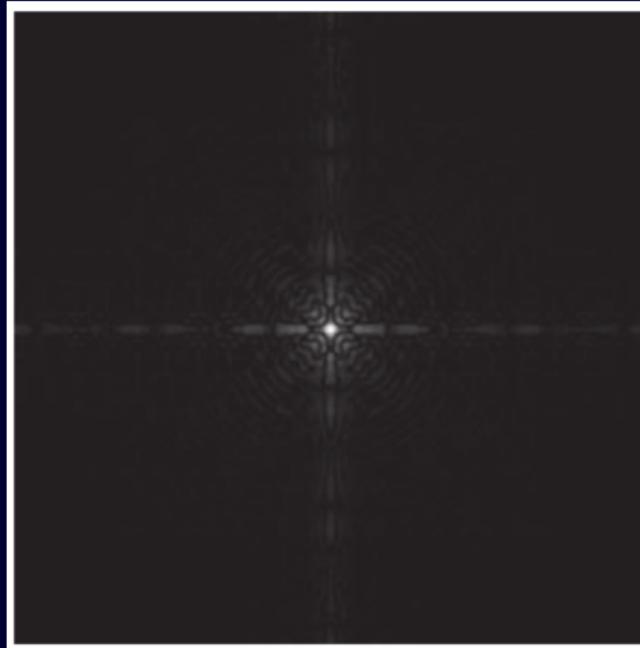
**Градационные преобразования** ( $I \in [0, I_{max}], I' = f(I)$ )

- негатив:  $I' = I_{max} - I$ ;
- логарифмическое:  $I' = C \ln(1 + I)$ ;
- гамма-коррекция:  $I' = CI_{max} \cdot i^\gamma$ ,  $i = \frac{I}{I_{max}}$ ;
- кусочно-линейные преобразования (усиление контраста).

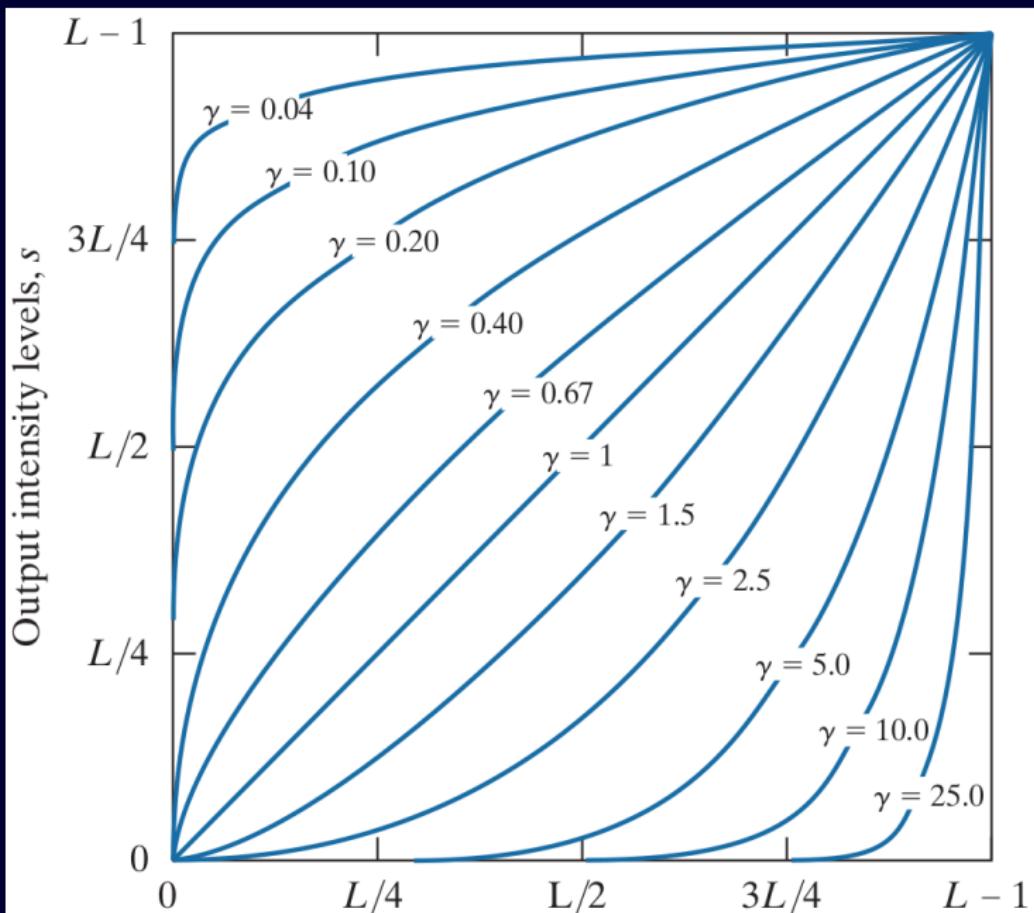


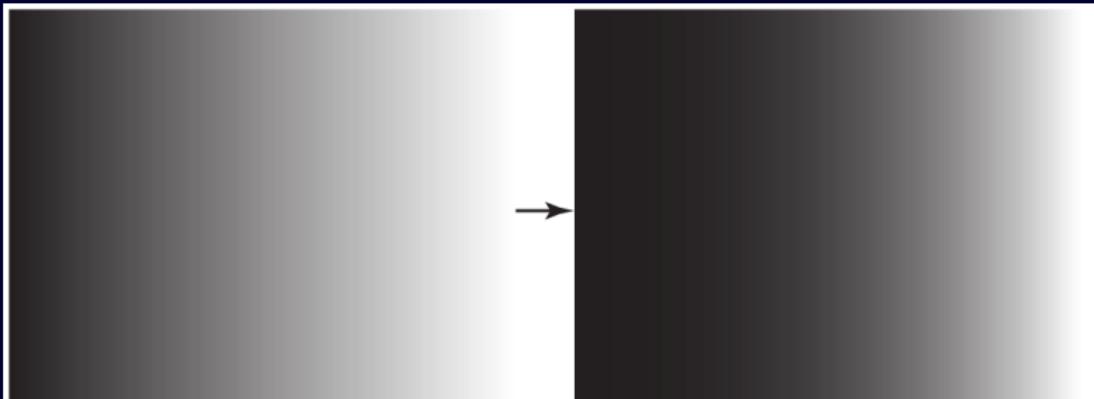


## Логарифмическое преобразование.



## Степенное преобразование (гамма-коррекция).





Original image

↓ **Gamma Correction**



Gamma-corrected image

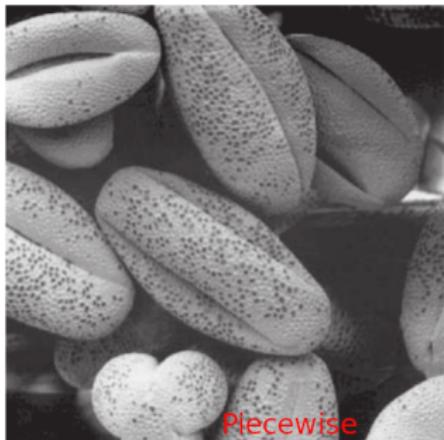
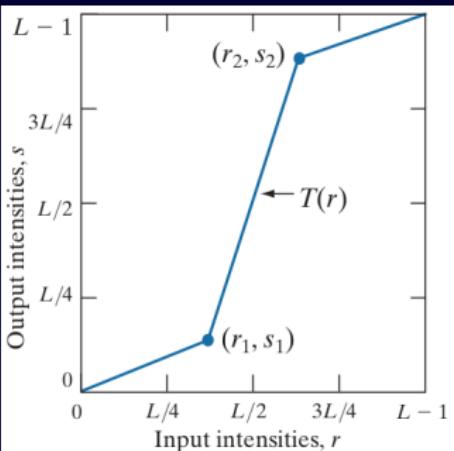
Original image as viewed on a monitor with  
a gamma of 2.5

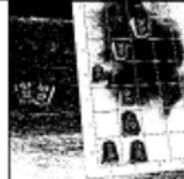
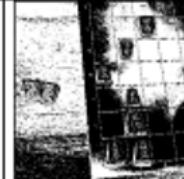
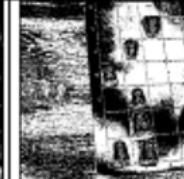


Gamma-corrected image as viewed on the  
same monitor

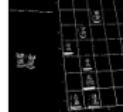


## Кусочно-линейные преобразования.



Исходное изображение	Седьмая (старшая) битовая плоскость	Шестая битовая плоскость	Пятая битовая плоскость	Четвёртая битовая плоскость
	 Третья битовая плоскость	 Вторая битовая плоскость	 Первая битовая плоскость	 Нулевая (младшая) битовая плоскость

## Битовые плоскости

Битовая плоскость	Исходное изображение	Изображение в кодах Грея
Седьмая		
Шестая		
Пятая		
Четвёртая		
Третья		
Вторая		

## Битовые плоскости в кодах Грея

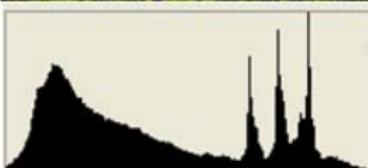


# Гистограмма

## Histogram Basic Tutorial



Underexposed

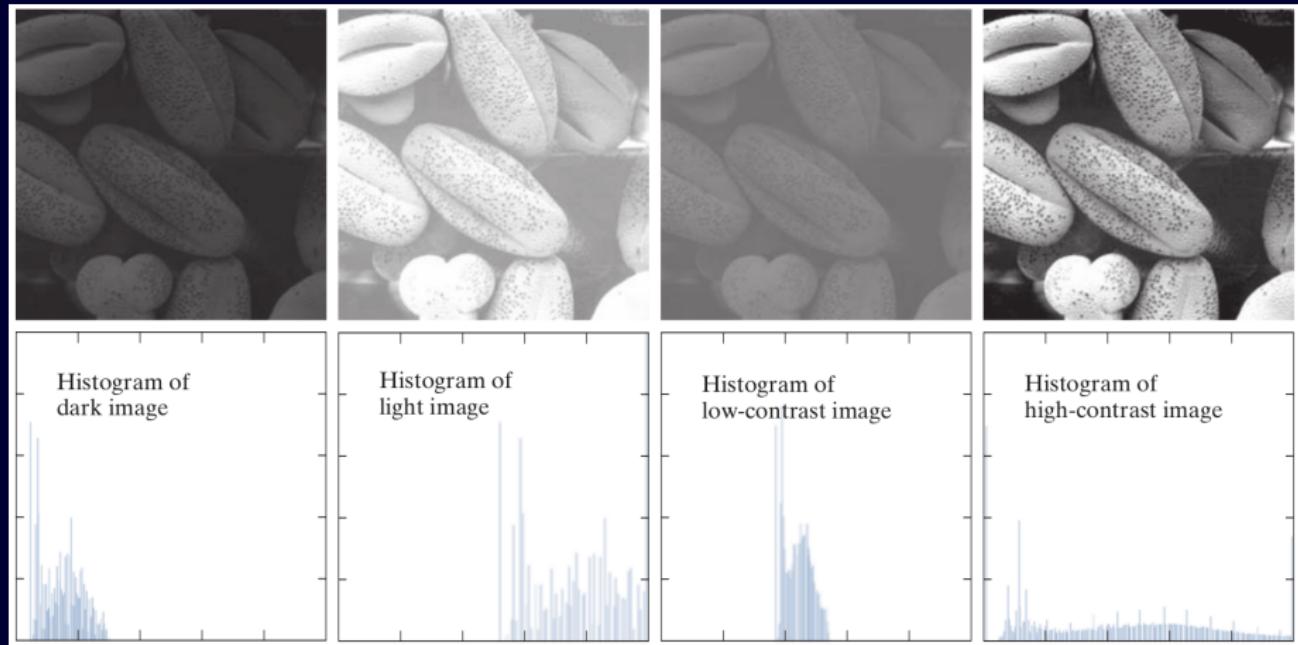


Well Exposed

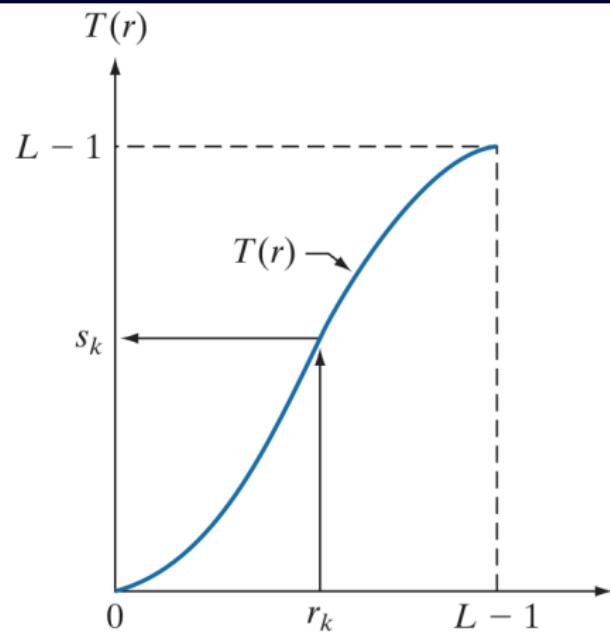
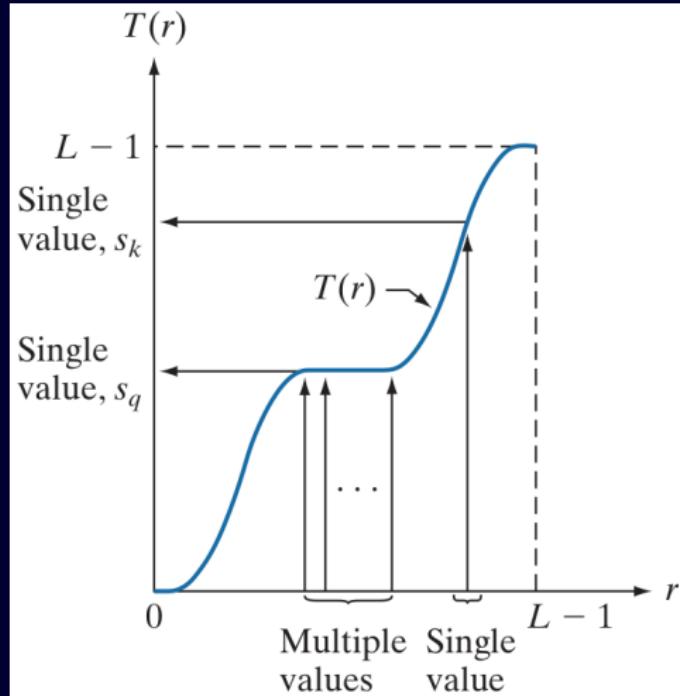


Overexposed

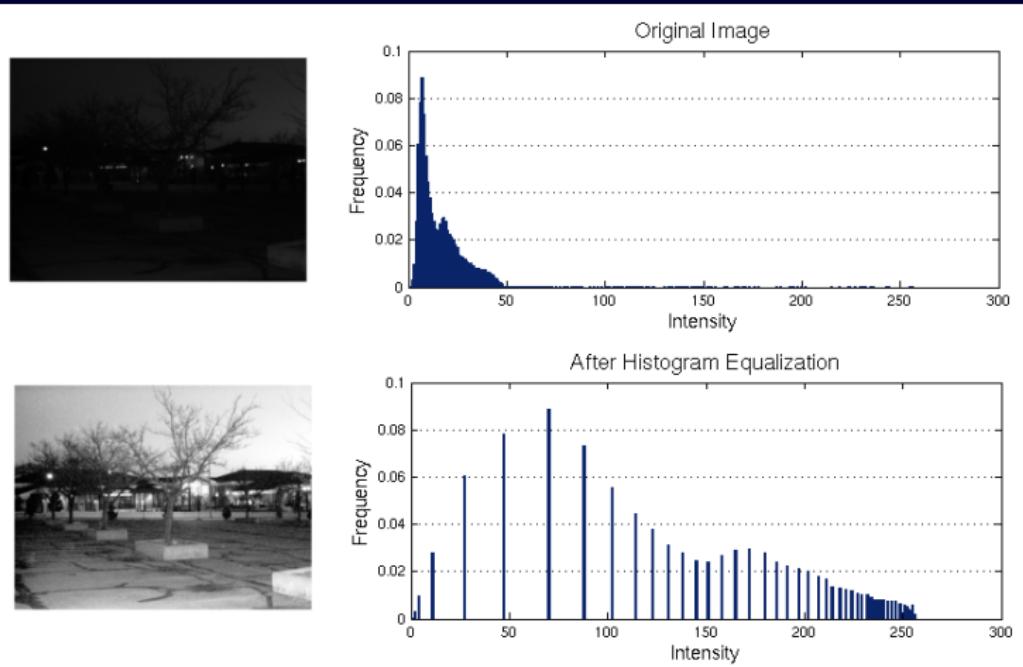
# Гистограмма



Неоднозначное (необратимое) и однозначное (возможно, обратимое) отображения:



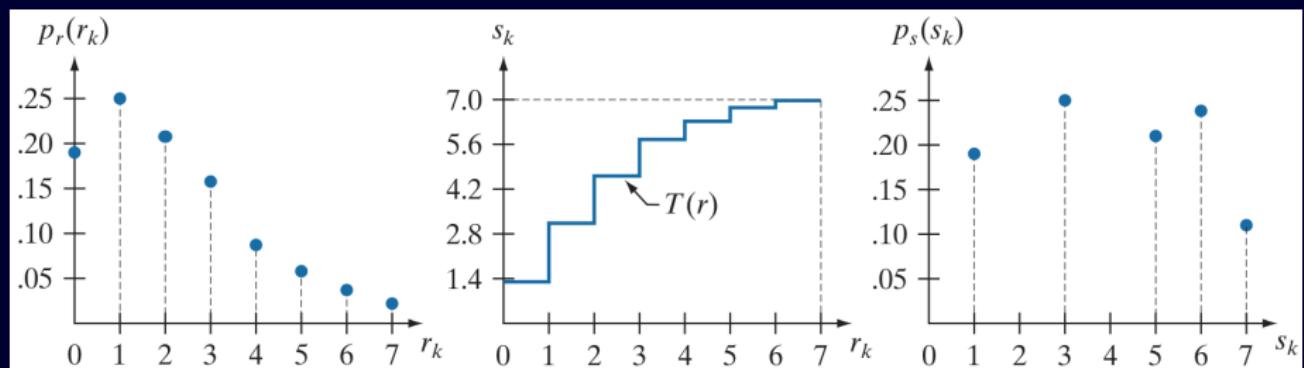
## Эквализация гистограммы



$N_i$  – количество пикселей на  $i$ -м уровне,  $L$  – максимальная интенсивность,  
 $M = \sum_0^L N_i$  общее количество пикселей.

Эквализация:  $i' = \frac{\sum_{j=0}^i N_j}{M} L$ .

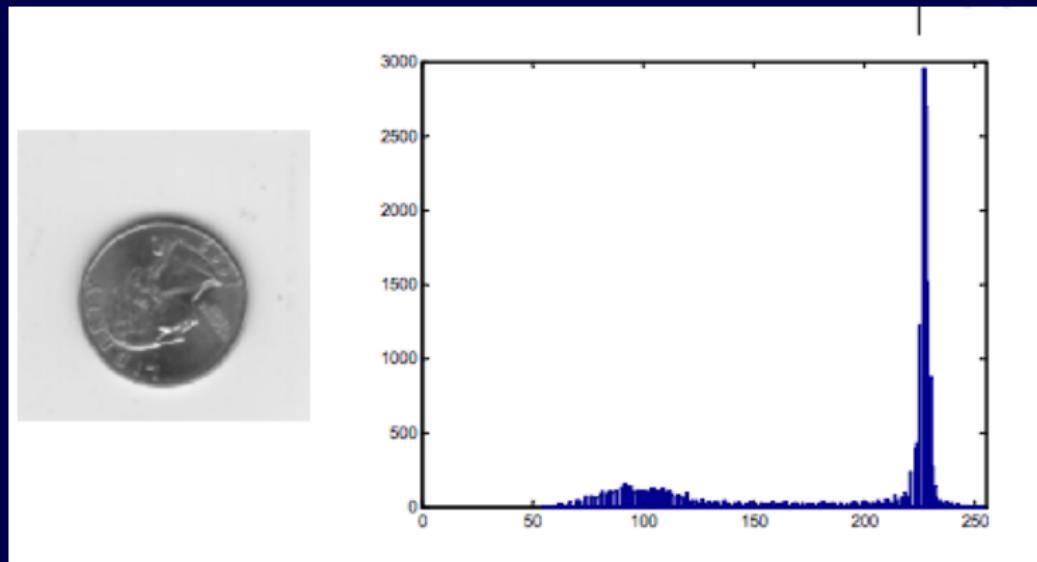
Если  $n_i$  – доля с  $i$ -м уровнем, то:  $i' = L \sum_{j=0}^i n_j$ .



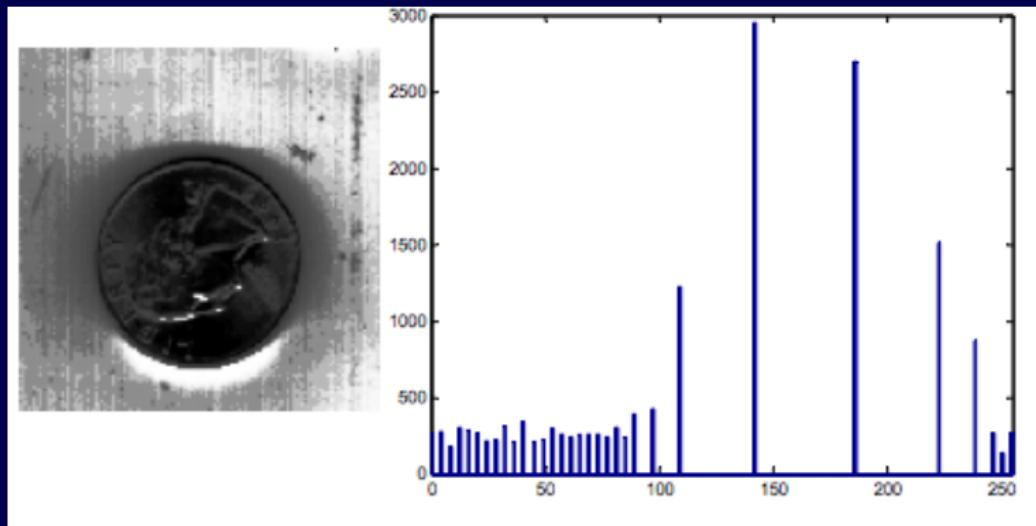
## Приведение гистограммы $p_r \rightarrow p_z$

- 1 Получение эквализированной гистограммы,  $s_k$ .
- 2 Вычисление функции преобразования  $G(z_q) = L \sum_{j=0}^q p_z(z_j)$ .
- 3 Нахождение для каждого  $s_k$  соответствующего значения  $z_q$ , для которого  $G(z_q)$  наиболее близко к  $s_k$ .
- 4 Формирование приведенного изображения.

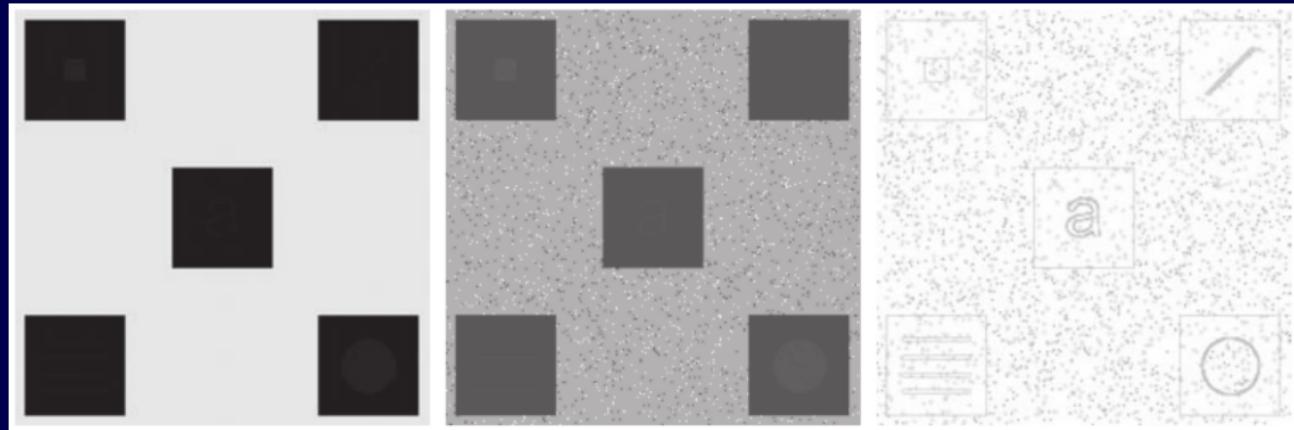
## Локальная гистограммная обработка



## Локальная гистограммная обработка



## Локальная гистограммная обработка



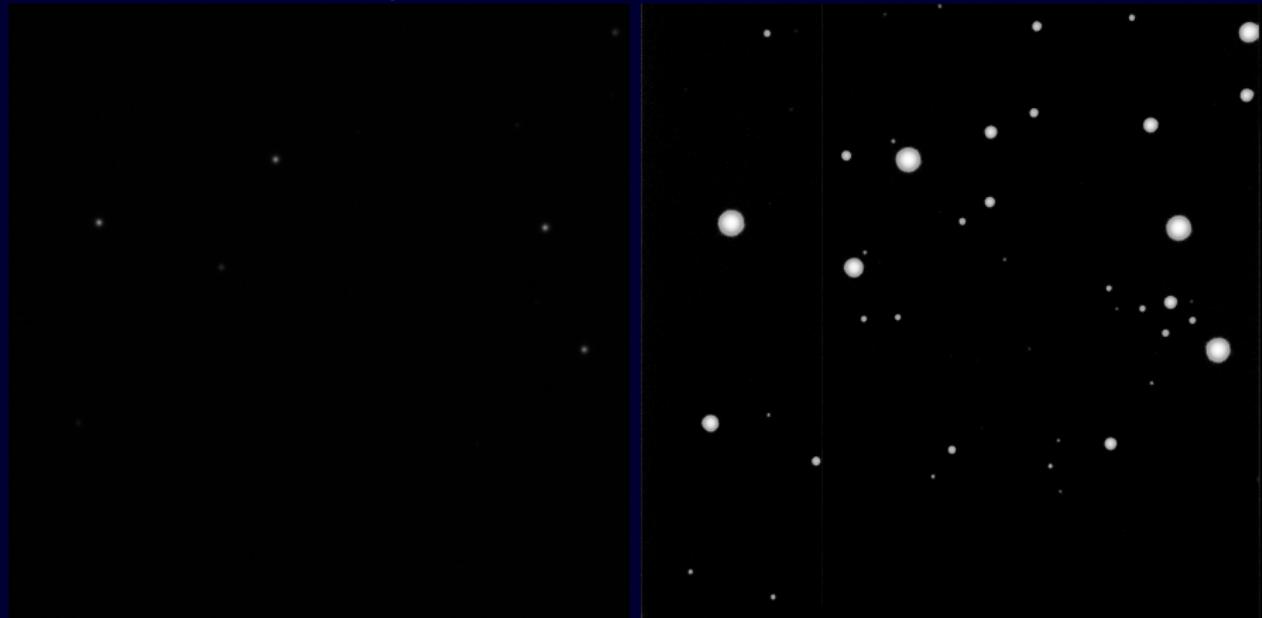
# Эквализация гистограммы

M13: без и с эквализацией:



# Эквализация гистограммы

M29: без и с эквализацией:



# Пространственная фильтрация

$w(s, t)$  – ядро преобразования размера  $m \times n$  ( $m = 2a + 1$ ,  $n = 2b + 1$ ),  
 $f(x, y)$  – исходное изображение,  $g(x, y)$  – результат. Преобразование:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t),$$

что является расширением одномерного преобразования:

$$g(x) = \sum_{s=-a}^a w(s) f(x + s).$$



# Пространственная фильтрация

$$f = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0, \quad w = 1\ 2\ 3\ 4\ 5.$$

**Корреляция,  $v = f * w$**

0 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
      1 2 3 4 5

3 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
      0 0 0 1 2 3 4 5

7 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
      0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4 5

$a$  :      0 0 0 5 4 3 2 1 0 0 0 0

$v$  :      0 5 4 3 2 1 0 0

**Свертка,  $v = f * w$**

0 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
      5 4 3 2 1

3 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
      0 0 0 5 4 3 2 1

7 :      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
      0 0 0 0 0 0 0 5 4 3 2 1

$a$  :      0 0 0 1 2 3 4 5 0 0 0 0

$v$  :      0 1 2 3 4 5 0 0



# Пространственная фильтрация

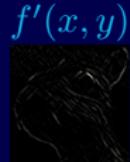
		Padded $f$	
Origin	$f$	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	$w$	0 0 0 1 0 0 0 1 2 3 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 7 8 9 0 0 0 0	
(a)		(b)	
Initial position for $w$		Correlation result	Full correlation result
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0 9 8 7 0 0 6 5 4 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 8 7 0 0 0 0 6 5 4 0 0 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
(c)		(d)	(e)
Rotated $w$		Convolution result	Full convolution result
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 4 5 6 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

# Пространственная фильтрация

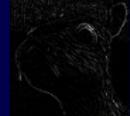
Идентичность



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Лапласиан



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Лапласиан



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Резкость



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Размытие



$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Гаусс



$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

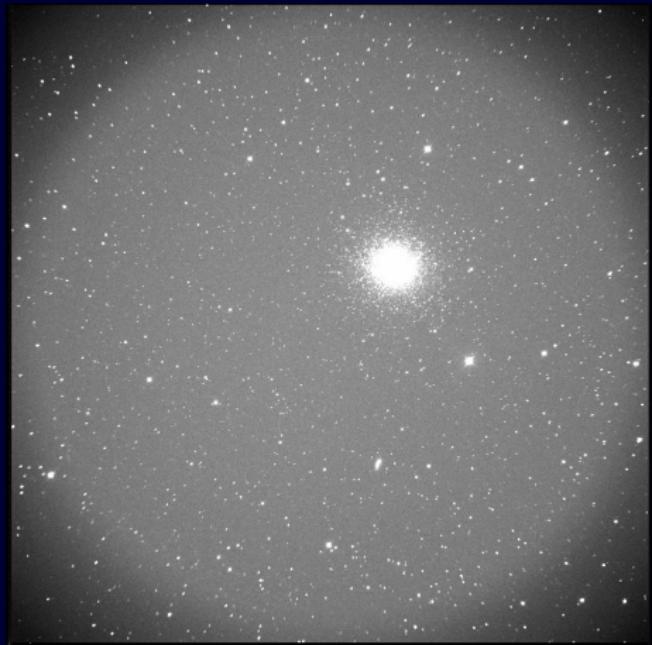
LoG



$$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 11 & 27 & 11 \\ 27 & -202 & 27 \\ 11 & 27 & 11 \end{pmatrix}$$

# Пространственная фильтрация FITS

Оригинал:



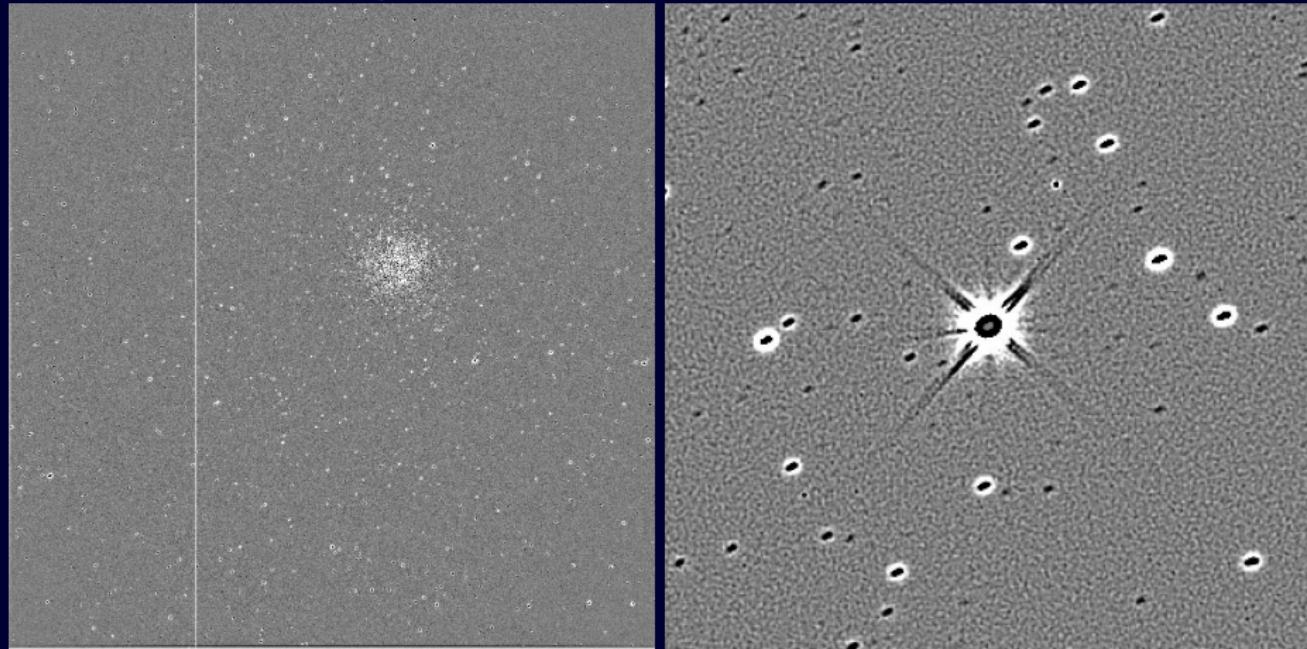
# Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Гаусса  $1 \times 1$  пиксель:



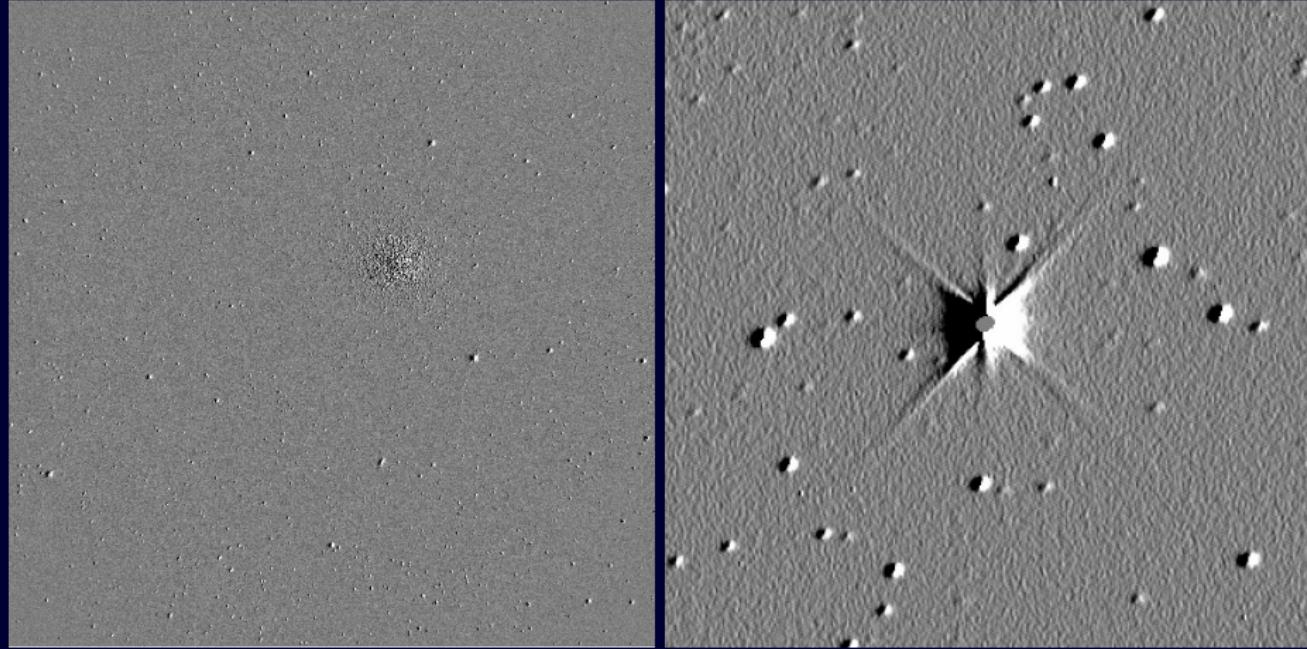
# Пространственная фильтрация FITS

Фильтр лапласиана гауссианы  $1 \times 1$  пиксель:



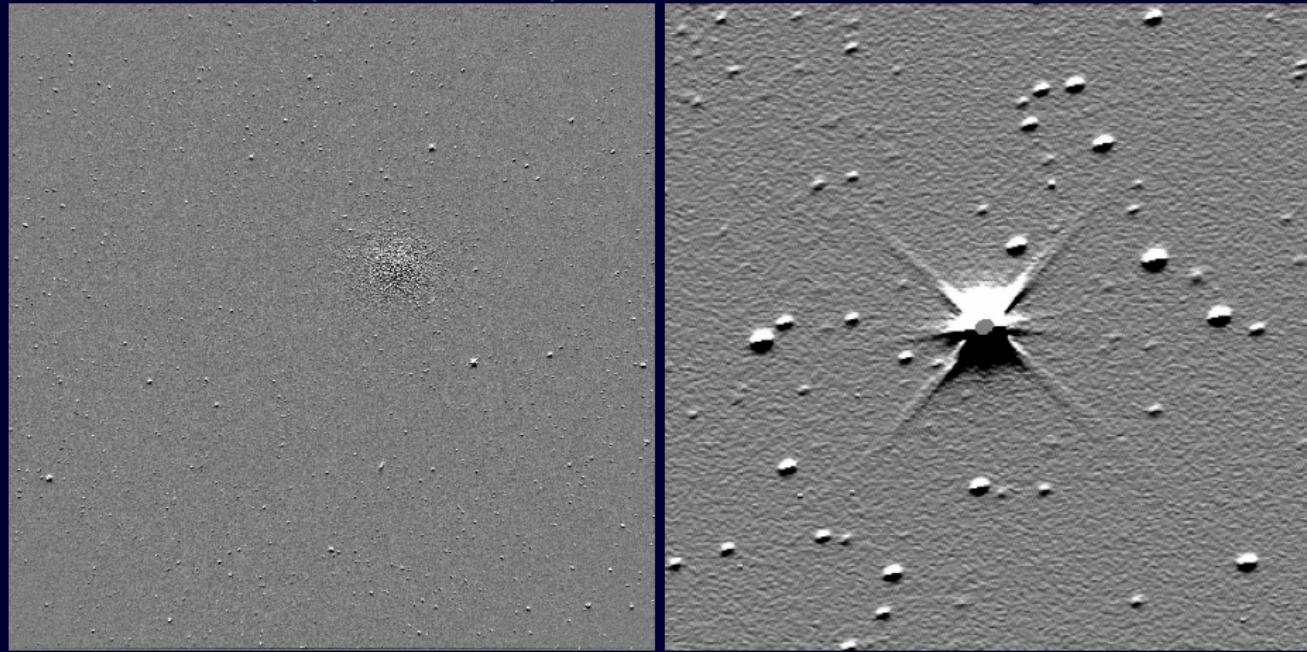
# Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Прюитта (горизонтальный):



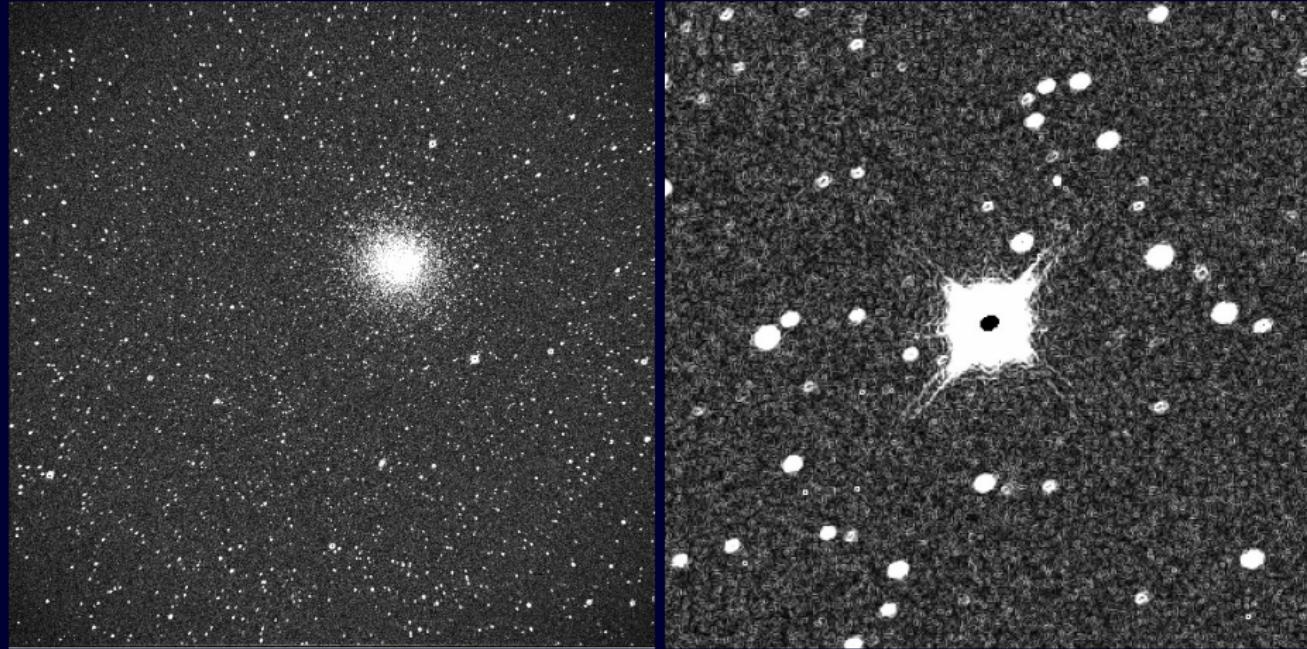
# Пространственная фильтрация FITS

Фильтр Прюитта (вертикальный):



# Пространственная фильтрация FITS

Простой градиент (через фильтры Прюитта):



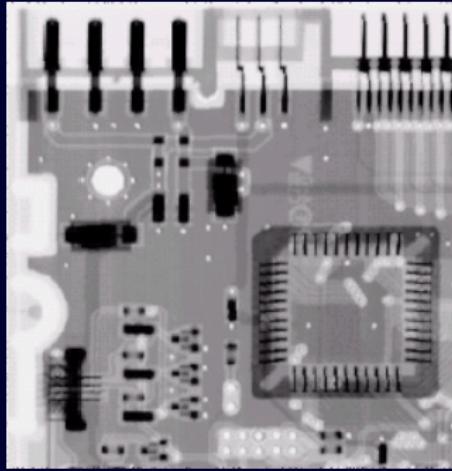
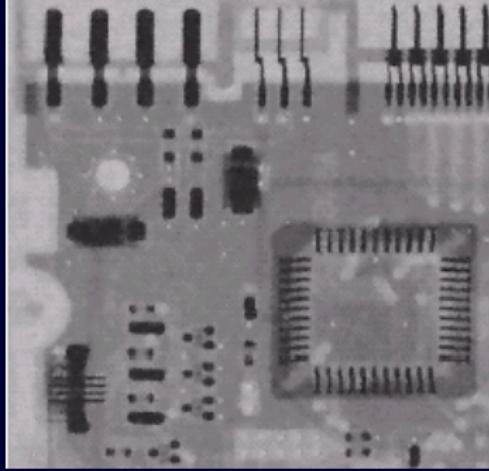
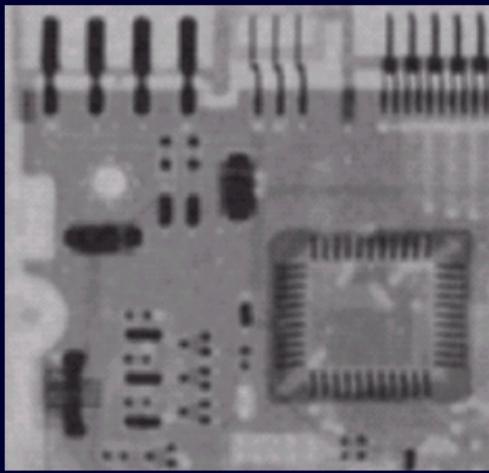
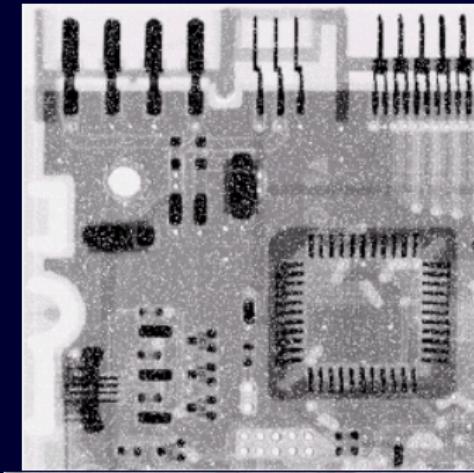
## Медианная фильтрация



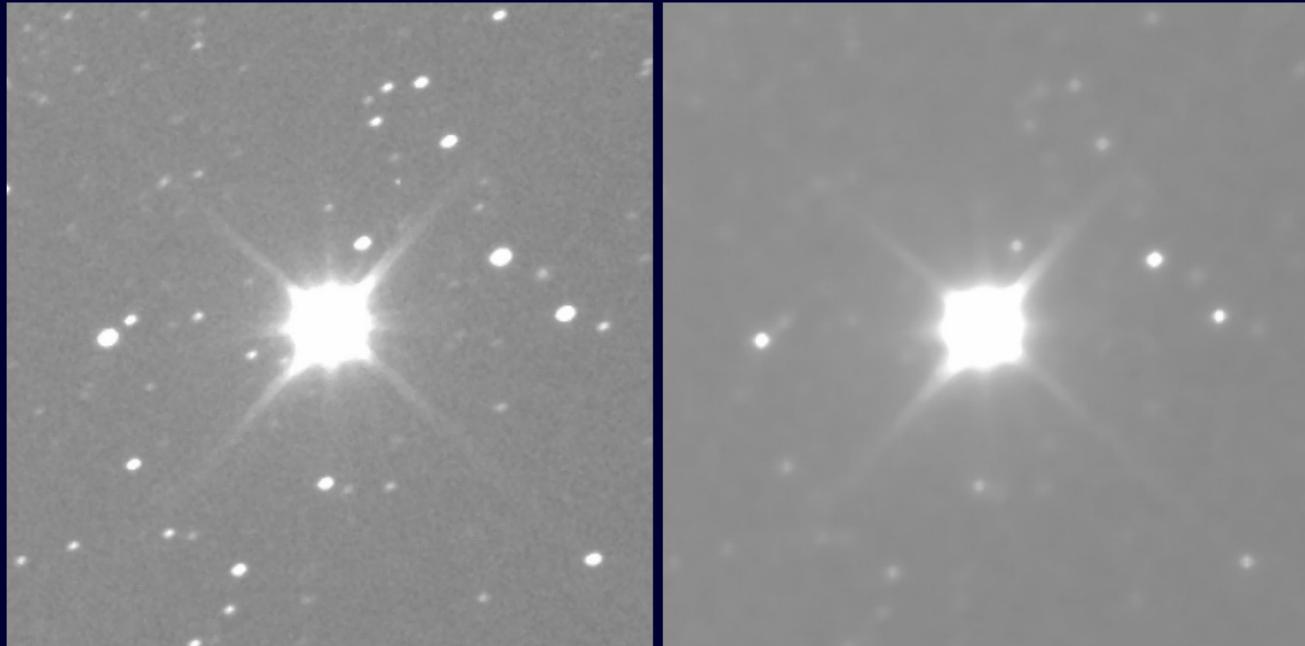
## Адаптивный медианный фильтр

Зона  $K \times K$  пикселей,  $I_{min}$ ,  $I_{max}$ ,  $I_{med}$ ,  $I_{xy}$  (интенсивность в данной точке),  $K_{max}$  – максимальный размер зоны.

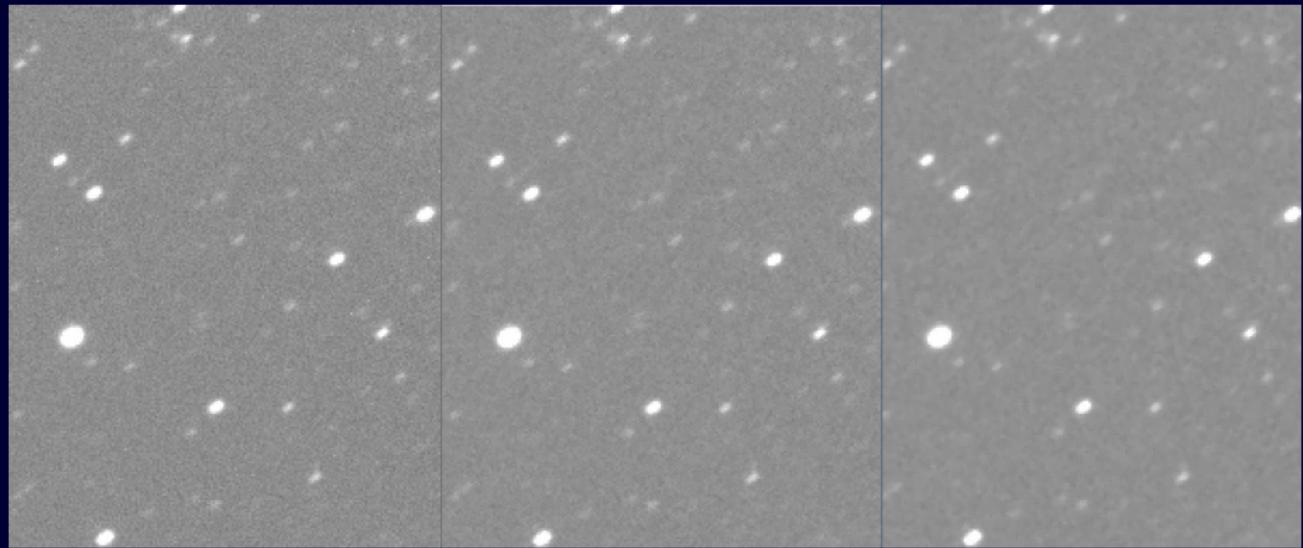
- ①  $A_1 = I_{med} - I_{min}$ ,  $A_2 = I_{med} - I_{max}$ ; если  $A_1 > 0$  и  $A_2 < 0$  переход на 2, иначе  $++K$ ; если  $K < K_{max}$ , повторить, иначе вернуть  $I_{xy}$ .
- ②  $B_1 = I_{xy} - I_{min}$ ,  $B_2 = I_{xy} - I_{max}$ ; если  $B_1 > 0$  и  $B_2 < 0$ , вернуть  $I_{xy}$ , иначе вернуть  $I_{med}$ .



Медианная фильтрация  $r = 1$  пиксель и  $r = 5$  пикселей:



Оригинал, аддитивная медиана ( $r = 1$ ) и медиана ( $r = 1$ ):



# Частотные преобразования

## Двумерное ДПФ

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-2\pi i \left(ux/M + vy/N\right)\right).$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(2\pi i \left(ux/M + vy/N\right)\right).$$

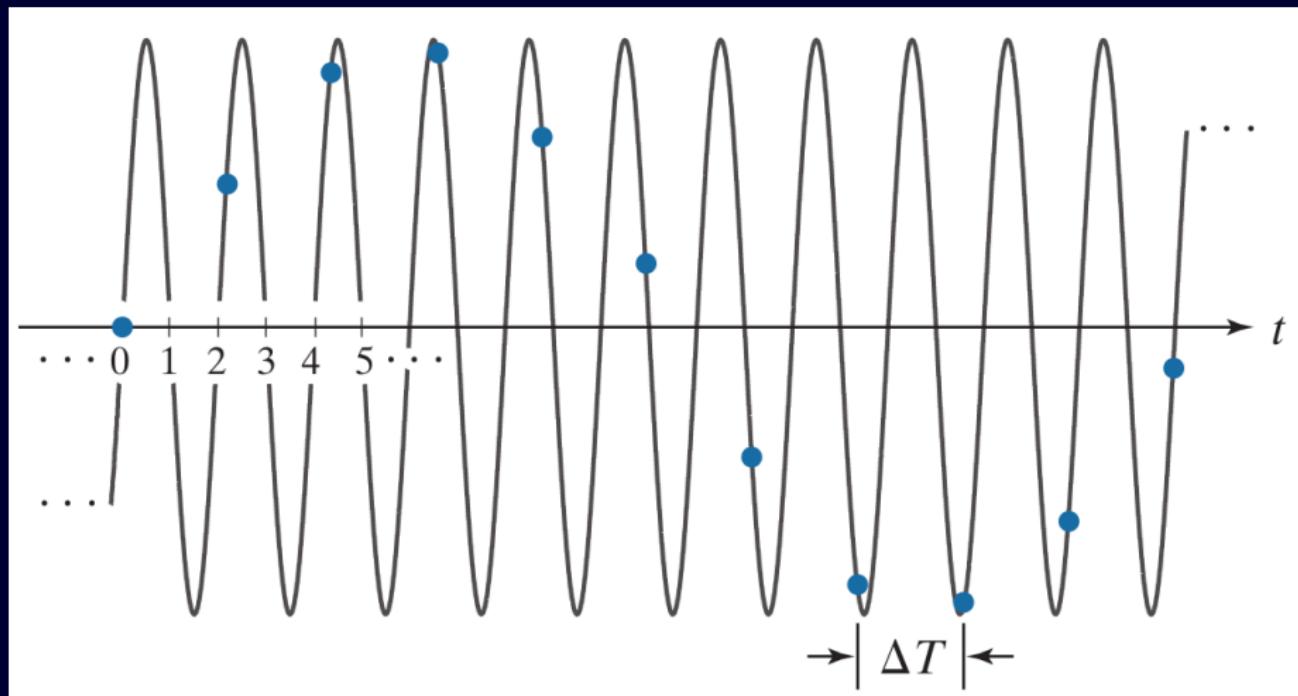
Частотные преобразования:

$$g(x, y) = \Re \left( \mathcal{F}^{-1} (H(u, v) \cdot F(u, v)) \right),$$

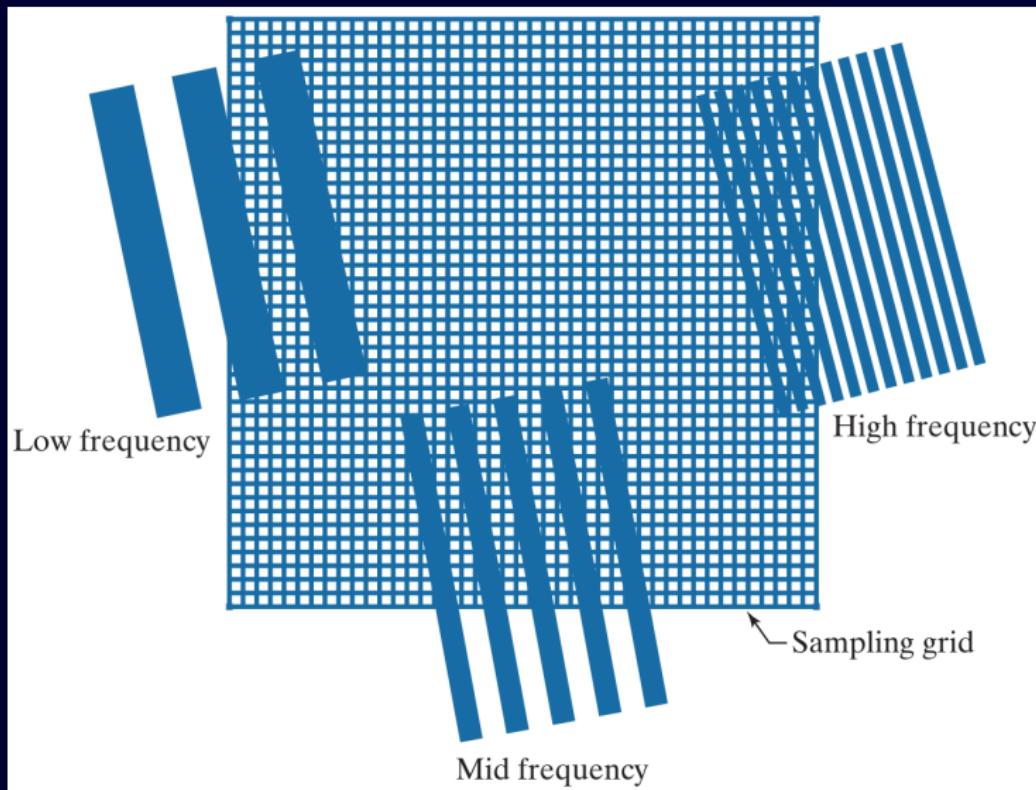
где  $g$  – результат,  $H$  – **передаточная функция фильтра**,  $F$  – Фурье-образ исходного изображения.



## Ложные частоты (aliasing, муар)



## Ложные частоты (aliasing, муар)



## Ложные частоты (aliasing, муар)



## Связь пространственных и частотных преобразований

Пусть  $f(x, y)$  — изображение размера  $M \times N$ , а  $F(u, v) = \mathcal{F}(f)$  — его Фурье-образ. Тогда шаг по  $u$  и  $v$  определяется выражениями:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}.$$

**Смещение** изображения (не оказывает эффекта на модуль БПФ):

$$f(x, y) \exp[2\pi i(u_0x/M + v_0y/N)] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0),$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-2\pi i(x_0u/M + y_0v/N)].$$

В полярных координатах  $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ , т.е. вращение изображения приводит к повороту Фурье-образа на тот же угол.  
Фурье-образ — периодическая функция, возможны краевые эффекты!



## Спектр и фаза

$F(u, v) = \Re(u, v) + \Im(u, v) = |F(u, v)| e^{i\varphi(u, v)}$ , где  $|F(u, v)|$  – **спектр** изображения, а  $\varphi(u, v)$  – его **фаза** (фазовый угол,  $\varphi(u, v) = \arctan \frac{\Im(u, v)}{\Re(u, v)}$ ).

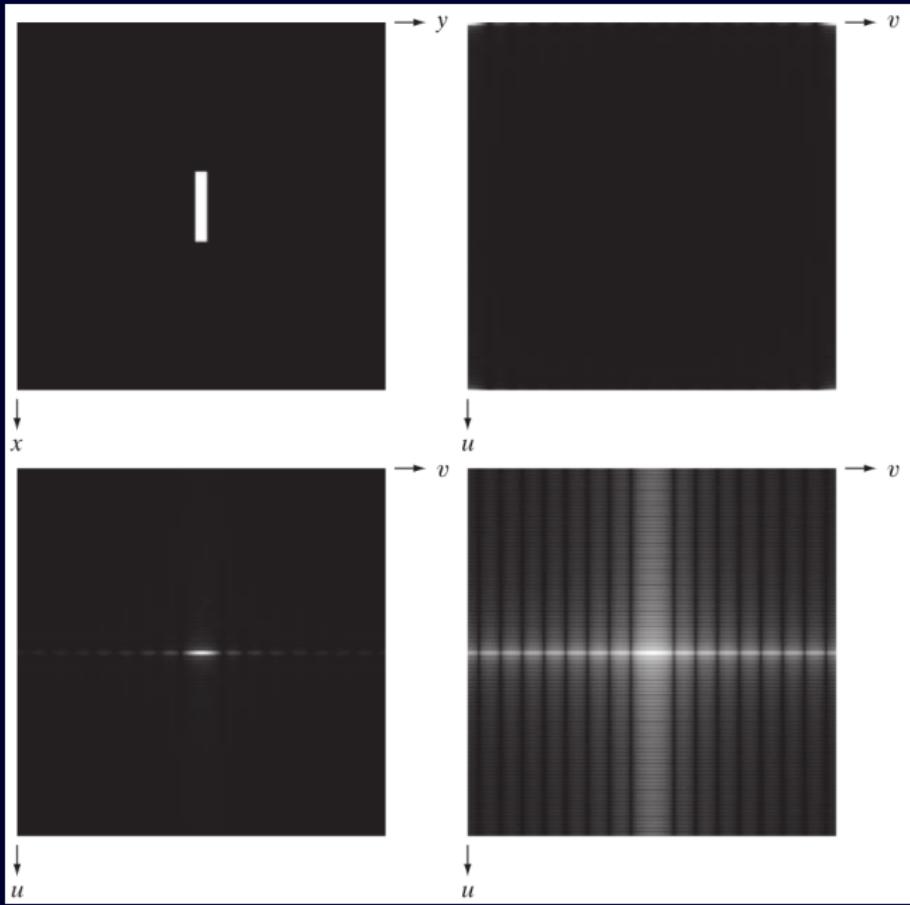
Зная компоненты образа, можно в Octave вычислить угол как `atan2(I, R)`.

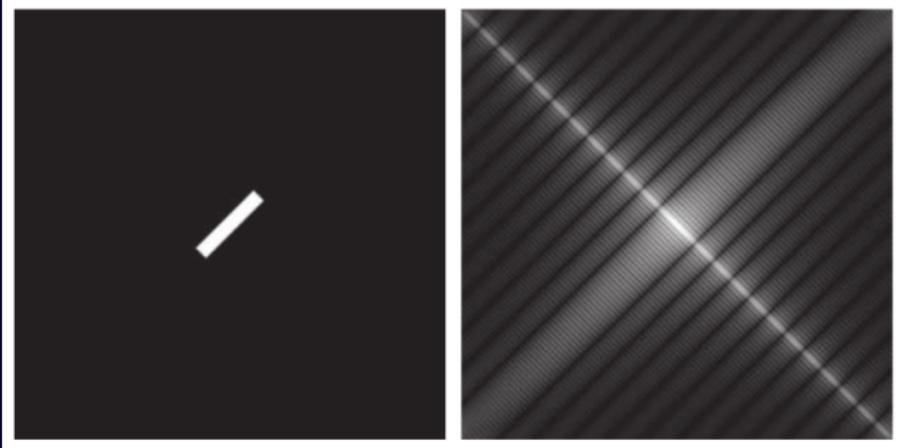
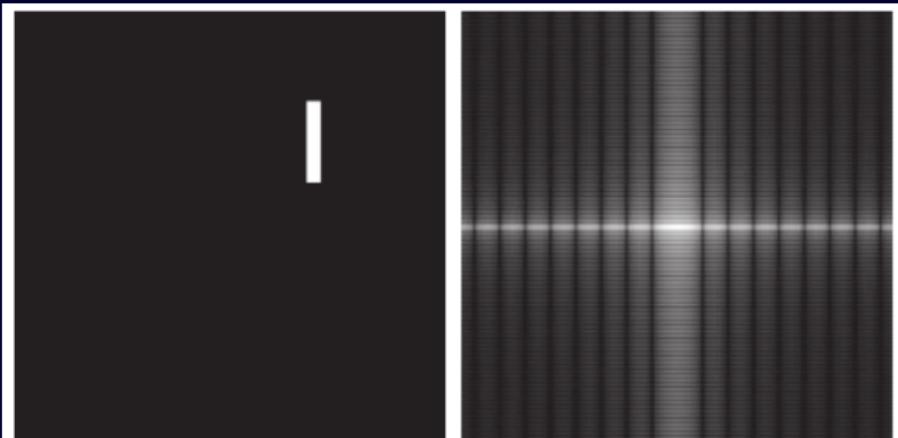
**Спектр мощности**  $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = \Re^2(u, v) + \Im^2(u, v)$ . Спектры и фаза обладают симметрией:  $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$ ,  $R(u, v) = R(-u, -v)$ ,  $\varphi(u, v) = -\varphi(-u, -v)$ .

$F(0, 0) = \sum \sum f(x, y) = MN \left( \frac{1}{MN} \sum \sum f(x, y) \right) = MN \langle f \rangle$  – пропорциональна среднему значению изображения. Удаление  $F(0, 0)/MN$  эквивалентно вычитанию среднего.

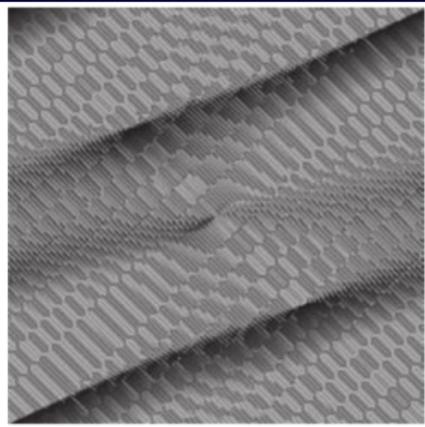
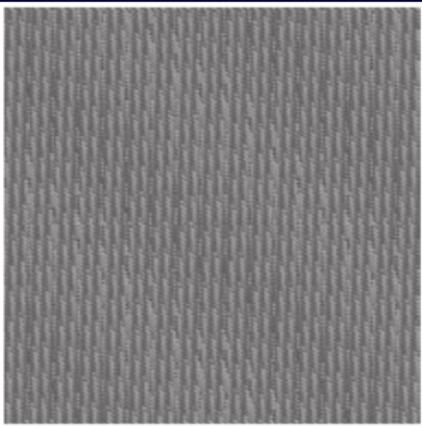
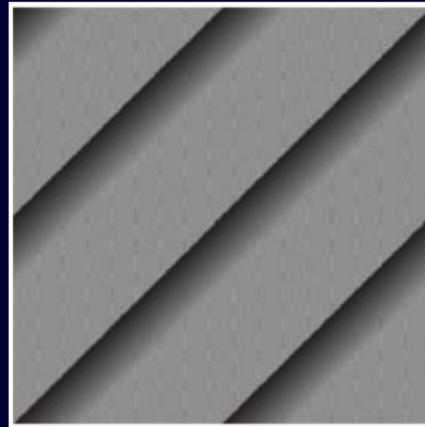


Изображение, спектр,  
центрированный  
спектр (`fftshift`) и  
логарифмическое  
преобразование  
центрированного  
спектра.

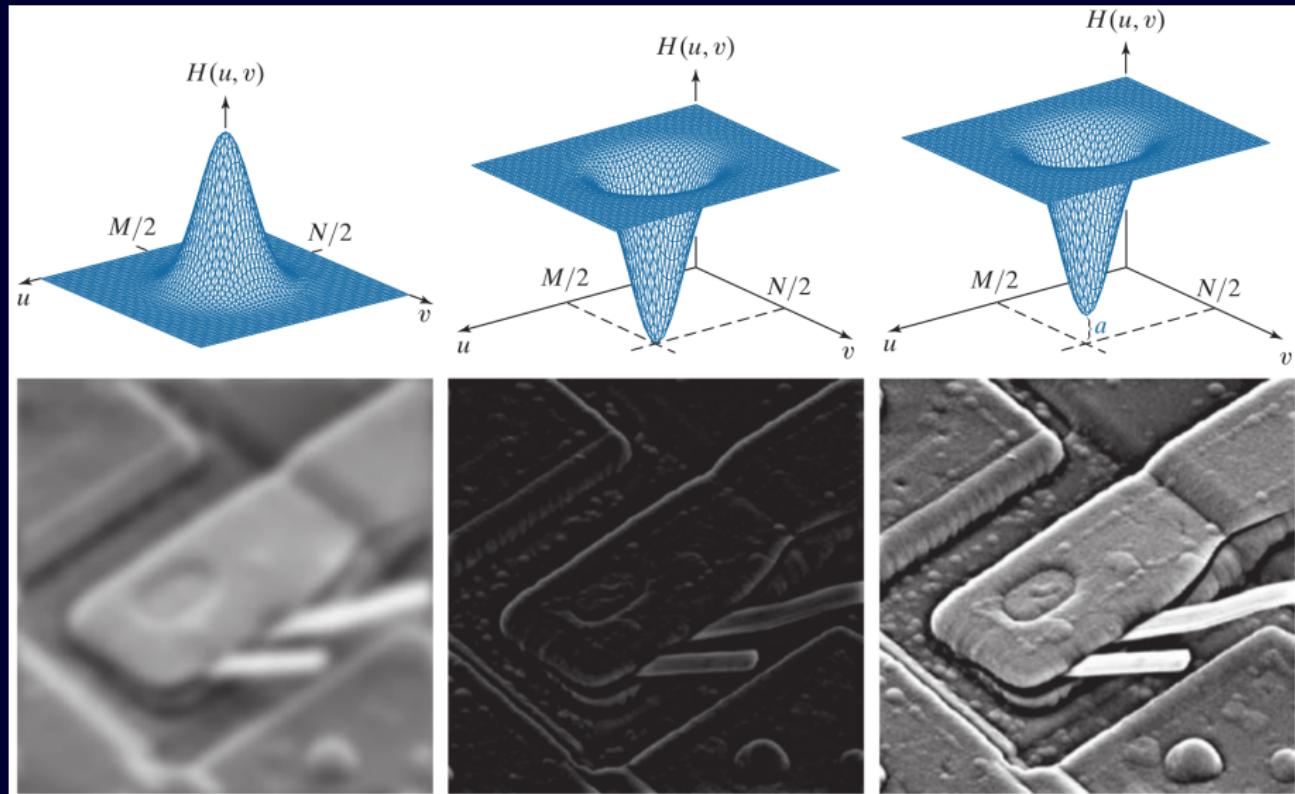




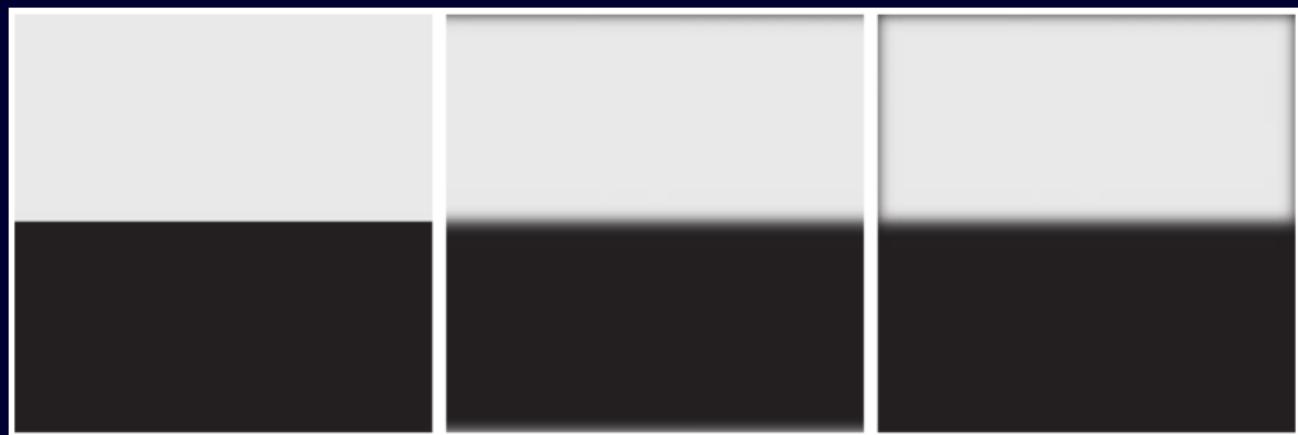
## Фазы центрированного, смещенного и повернутого прямоугольников



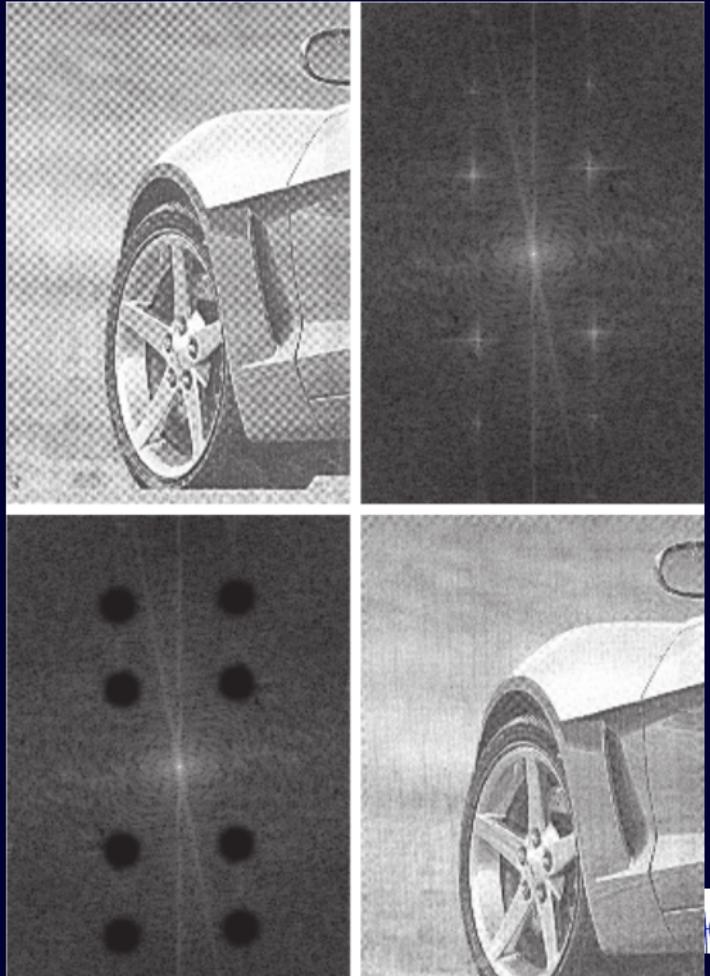
## НЧ-фильтр, ВЧ-фильтр, ВЧ-фильтр со смещением:



Краевые эффекты: изображение, НЧ-фильтр Гаусса без дополнения изображения нулями, НЧ-фильтр Гаусса с дополнением нулями. При расширении изображения симметричным дополнением края не будут так изменяться.



Изображение с муаром (скан  
газетного рисунка),  
его спектр,  
спектр после фильтрации,  
изображение после  
фильтрации.



## SNR

$$\text{SNR} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}, \quad N = N_{star} + N_{sky} \quad \Rightarrow$$

$$\text{SNR} \approx \frac{N_{star}}{\sqrt{N_{star} + 2N_{sky}}}, \quad N = t_{exp} \cdot R \quad \Rightarrow$$

$$\text{SNR} \approx \frac{R_{star} \sqrt{t_{exp}}}{\sqrt{R_{star} + 2R_{sky}}} \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} \propto \sqrt{t_{exp}}$$

$$R = R_0 \cdot S_{mirror} \propto D_{mirror}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} \propto D_{mirror}$$

$N_{meas}$  коротких экспозиций вместо одной:  $\sigma_{mean} = \frac{\sigma_{individ}}{\sqrt{N_{meas}}} \propto \frac{\sqrt{S}}{N_{meas}}$

$$\text{SNR}_{mean} = \frac{S/N_{meas}}{\sigma_{mean}} \propto \sqrt{S} = \text{SNR}_{long} \quad \text{только если } \sigma \approx \sigma_{phot}!!!$$

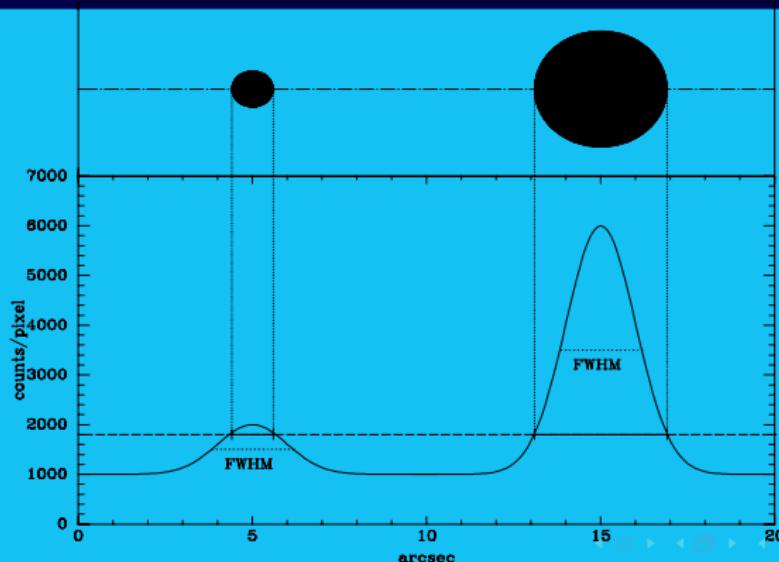


## Коррекция апертуры

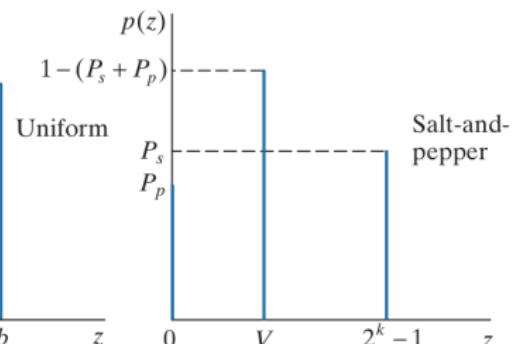
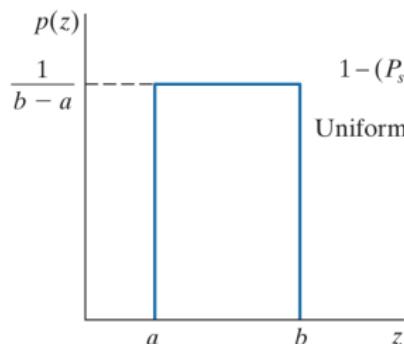
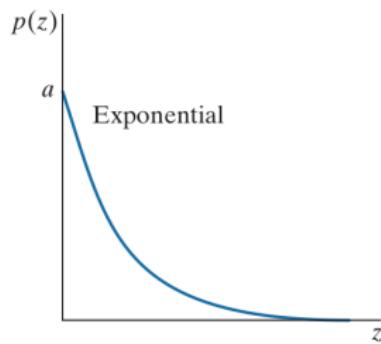
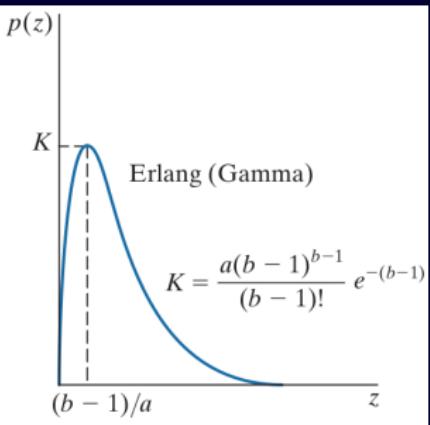
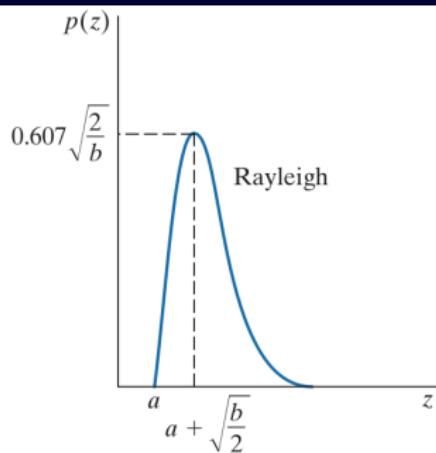
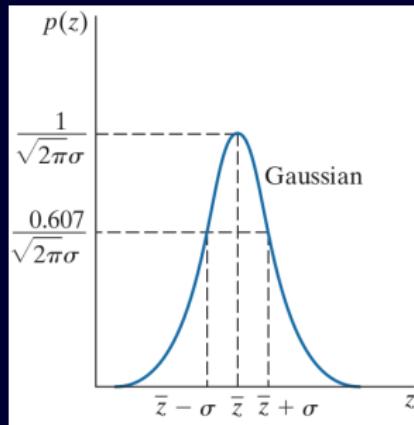
Почему изображение яркой звезды шире: несмотря на совершенно одинаковую PSF у обеих звезд, при сечении одинаковым порогом яркая звезда всегда «больше». Увеличение апертуры  $\Rightarrow$  увеличение шумов, необходимо использовать как можно меньшую апертуру.

$$\Delta_N^{bright} = m(N \cdot \text{FWHM}) - m(1 \cdot \text{FWHM}) \quad \Rightarrow \quad m^{faint} = m(1 \cdot \text{FWHM}) + \Delta_N^{bright}$$

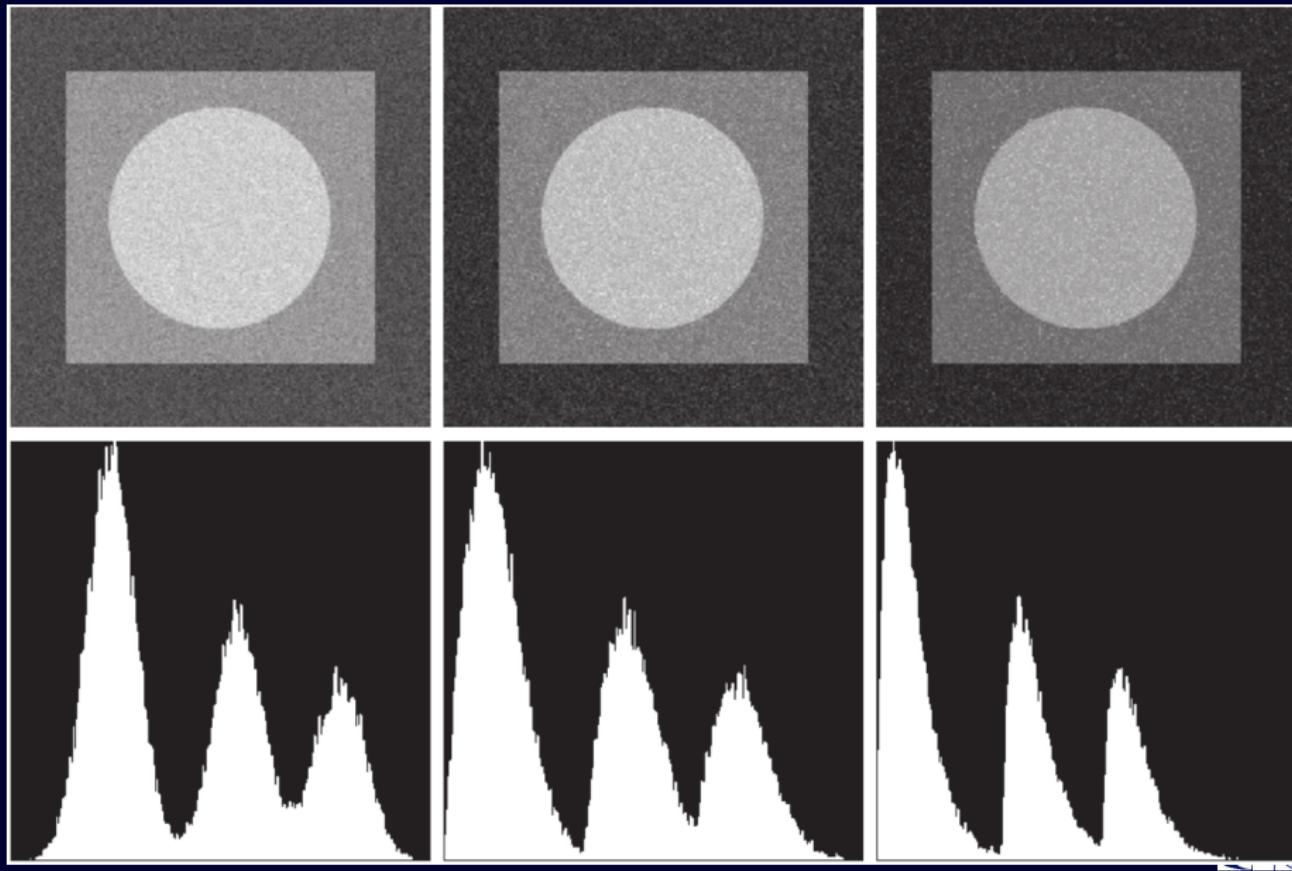
$m(x)$  – звездная величина на апертуре  $x$ .



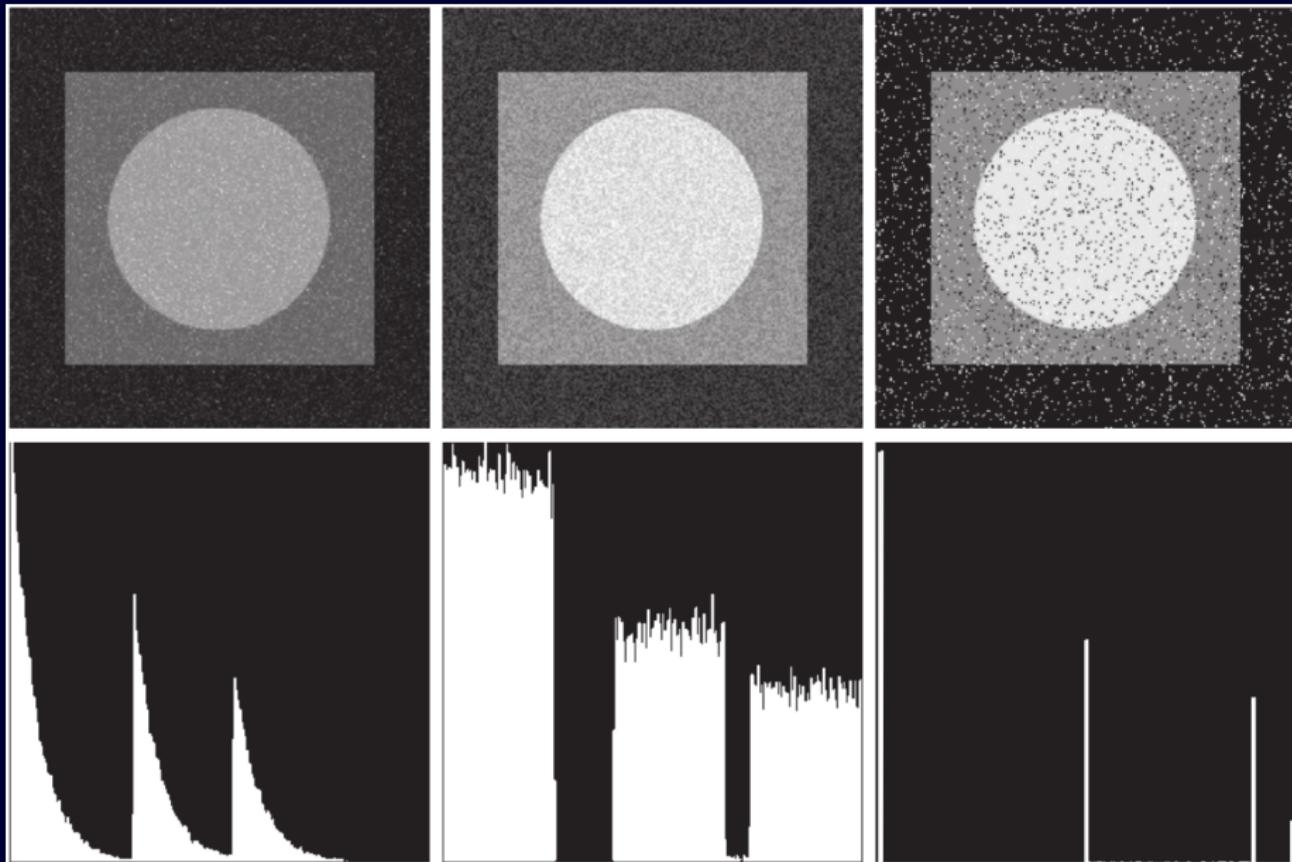
## Функции плотности вероятности разных шумов.



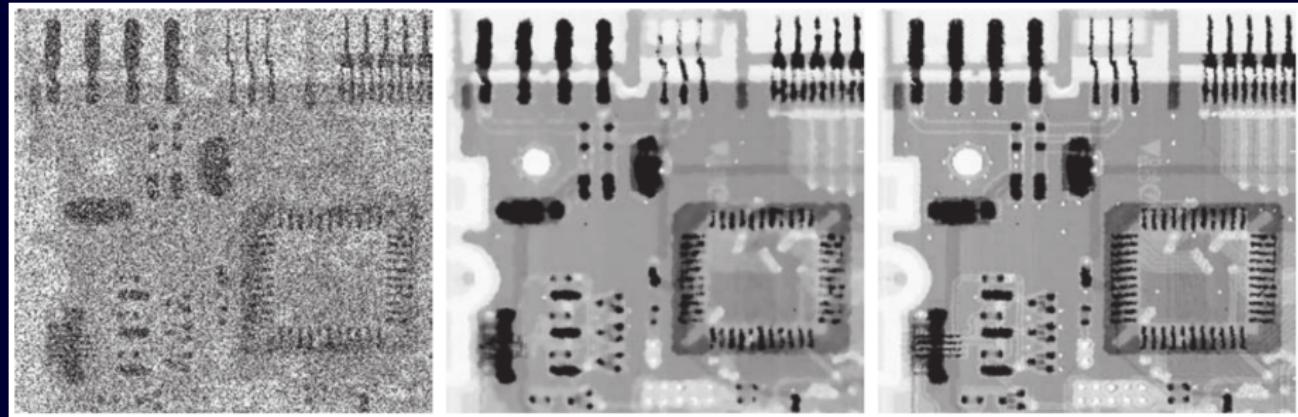
## Гистограммы с шумами: нормальный, Рэлея, гамма:



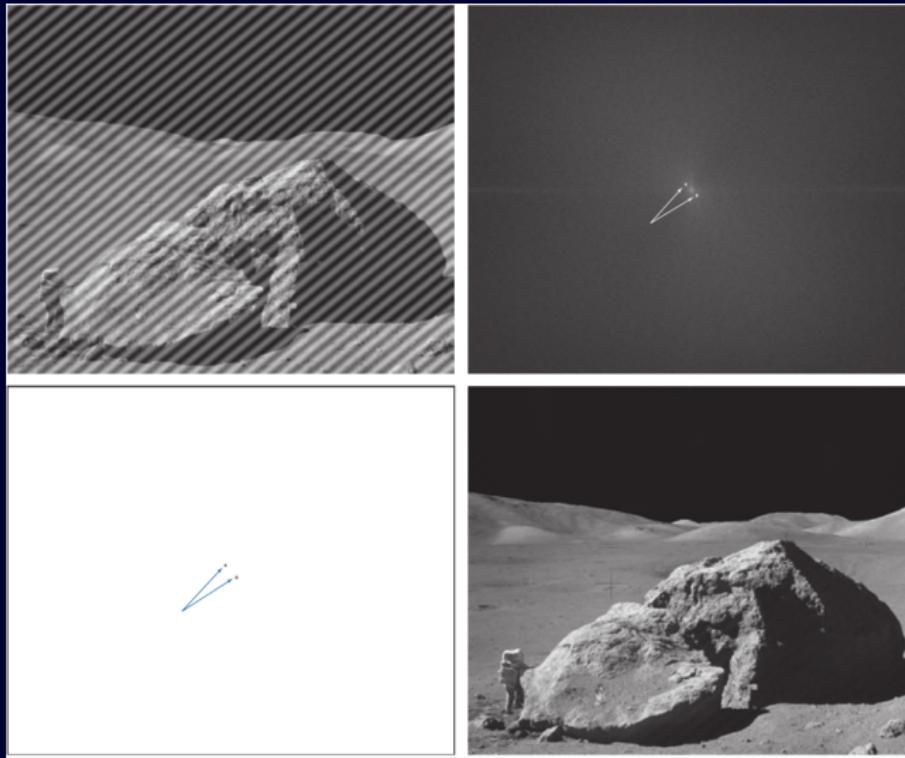
Гистограммы с шумами: экспоненциальным, равномерным, импульсным  
«соль–перец»):



Фильтры: среднее арифметическое, гауссов, минимум по области, максимум по области, медианный, адаптивный медианный и т.п. Пример: медианный и адаптивный медианный фильтры по области  $7 \times 7$  пикселей.



Удаление гармонических шумов частотными фильтрами. Изображение, спектр, маска фильтра, итог.



# Спасибо за внимание!

**mailto**

[eddy@sao.ru](mailto:eddy@sao.ru)

[edward.emelianoff@gmail.com](mailto:edward.emelianoff@gmail.com)