Hoja de Trabajo 4 - Fundamentos de Optimización no Restringida

Eduardo Andrés Santizo Olivet (21007361)

1. Considere el problema de optimización no restringida:

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2).$$

Muestre que las FONC y SONC se satisfacen en el punto $(0,0)^T$.

$$f(x_1,x_2) = x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - x_1^2 x_2 + 2x_1^4$$
$$= x_2^2 - 3x_1^2 x_2 + 2x_1^4$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -6x_1x_2 + 8x_1^3 \\ 2x_2 - 3x_1^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^* = [0, 0]^T$ ES UN PUNTO ESTACIONARIO

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -6x_2 + 24x_1^2 & -6x_1 \\ -6x_1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 0$

ES POSITIVA SEMIDEFINIDA

Dado que se demostró que [0, 0] es un punto estacionario y la matriz hessiana consiste de una matriz positiva semi-definida, entonces se puede establecer que el punto estacionario consiste de un minimizador local y se satisfacen las FONC y SONC.

2. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 15x - 3.$$

a) Encontrar todos los *puntos estacionarios* (stationary points) de la función f y determine si estos son *mínimos locales*, *máximos locales* o *ninguno de los anteriores*. Justifique su respuesta citando el teorema utilizado.

b) Utilice cualquier software para "resolver" los siguientes problemas de optimización sin restricciones:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \quad y \quad \max_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

¿Tiene la función f un *mínimo global* y un *máximo global*? justifique su respuesta.

A. $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 16x - 3$

$f'(x) = 9x^2 + 14x - 15$

$f''(x) = 18x + 14$

PUNTOS ESTACIONARIOS:

$9x^2 + 14x - 15 = 0$

$x_1 = -\frac{7}{9} + \frac{2\sqrt{46}}{9} = 0.729$

$x_2 = -\frac{7}{9} - \frac{2\sqrt{46}}{9} = -2.285$

MIN O MAX:

MIN O MAX:

$18(x^*)+14$

$18(0.729)+14 = 27.13 \qquad > 0 \ (PD)$

x_1 ES UN MÍNIMO LOCAL ESTRICTO

$18(-2.285)+14 = -27.13 \quad < 0 \ (ND)$

x_2 ES UN MÁXIMO LOCAL ESTRICTO

Theorem 3.1 (SOSC for Unconstrained Problems)

Consider the unconstrained minimization problem (1) with f twice continuously differentiable, if

(i) $\nabla f(x^*) = 0$, *and*

(ii) $\nabla^2 f(x^*)$ *is positive definite,*

then x^* is a strict local minimizer of (1).

B.

```python
# Se importa el módulo de optimización de scipy
from scipy import optimize

# Se minimiza la función en cuestión
Solution1 = optimize.minimize(lambda x: 3*x**3 + 7*x**2 - 15*x -3, 0, method = "Powell")
Solution2 = optimize.minimize(lambda x: -(3*x**3 + 7*x**2 - 15*x -3), 0, method = "Powell")

# Se imprimen los mínimos y máximos de la función
print("Solucion 1 (Min):", Solution1.x)
print("Solucion 2 (Max):", Solution2.x)
```

✓ 0.6s

```
Solucion 1 (Min): [0.72941995]
Solucion 2 (Max): [-2.28496432]
```

Dado que la segunda derivada de la función es estrictamente mayor a 0 en el punto estacionario x = 0.729, entonces se puede declarar que el mínimo local encontrado (0.729), consiste de un mínimo global. Lo mismo ocurre con el máximo local encontrado, pero en este caso este consiste de un punto estacionario (x = -2.285) estrictamente menor a 0 y por lo tanto, que consiste de un máximo global. A continuación se presenta el teorema empleado para establecer esto.

Theorem 4.1

If f is differentiable, then any stationary point x^* is a global minimizer of the unconstrained problem (1).

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29.$$

a) Encontrar todos los *puntos estacionarios* (stationary points) de la función f y determine si estos son *mínimos locales*, *máximos locales* o *ninguno de los anteriores*. Justifique su respuesta citando el teorema utilizado.

b) Determine si la función f es *convexa* (*Ayuda:* utilice la caracterización de segundo orden para una función convexa).

c) ¿Qué puede decir acerca de la *solución global* del problema de optimización $\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$? ¿existe? ¿es única?

d) Verifique su trabajo utilizando cualquier software para resolver el problema de optimización: $\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$.

A. $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16x_1 + 3x_2 - 25 \\ 3x_1 + 14x_2 + 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 16x_1 + 3x_2 - 25 &= 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 31 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 443/215 \\ -571/215 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.06 \\ -2.655 \end{bmatrix}$$

PUNTO ESTACIONARIO

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 15 + \sqrt{10} = 18.16 \\ \lambda_2 &= 15 - \sqrt{10} = 11.84 \end{aligned}\right\} \text{ POSITIVA DEFINIDA}$$

Dado que la matriz Hessiana es positiva definida, esto implica que el punto estacionario encontrado consiste de un minimizador local estricto (Cumple con SOSC).

Theorem 3.1 (SOSC for Unconstrained Problems)

Consider the unconstrained minimization problem (1) with f twice continuously differentiable, if

(i) $\nabla f(x^*) = 0$, *and*

(ii) $\nabla^2 f(x^*)$ *is positive definite,*

then x^* is a strict local minimizer of (1).

B. La matriz Hessiana es constante y positiva definida, por lo que la función puede ser considerada como convexa para todo punto en el dominio.

C. Dado que se encontró un minimizador local estricto y el problema es convexo (porque tanto las restricciones como la función es convexa), se puede llegar a establecer que dicho minimizador consiste del minimizador global del problema. Por lo tanto, la solución no solo existe, sino que también es única.

D.

```python
# Se declara la función
f = lambda x: 8*x[0]**2 + 3*x[0]*x[1] + 7*x[1]**2 - 25*x[0] + 31*x[1] - 29

# Se minimiza la función
Solution = optimize.minimize(f, [0, 0], method = "Powell")

# Se imprimen los puntos mínimos
print("Solucion (Min):", Solution.x)
```

✓ 0.1s

```
Solucion (Min): [ 2.06046512 -2.65581395]
```

Luego de optimizar la función utilizando un método computarizado, se llegó al mismo minimizador global.