Hoja de Trabajo 2 - Repaso de Cálculo Multivariable

domingo, 1 de agosto de 2021 17:44

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas; en caso de ser falsas, justifique su respuesta.

   a) Dada un función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f'(c) = 0$ entonces f tiene un máximo o mínimo local en $x = c$.

   b) Suponga que la función $T = f(x, y, t)$ modela la temperatura T (en °C) en un lugar del hemisferio norte que depende de la longitud x, latitud y y el tiempo t. La derivada parcial $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ representa la tasa de cambio de T cuando x está fija.

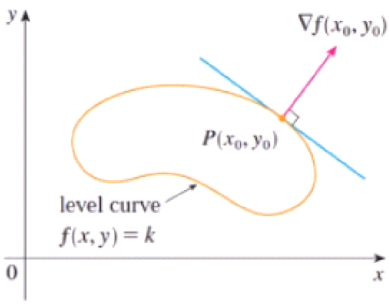
   c) Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}^n$, si $\nabla f(x)^T d > 0$ entonces d es una dirección de descenso (i.e. una dirección en la cual f disminuye).

   d) Dada la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x)$ indica la dirección del incremento más rápido de f.

   e) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es paralelo a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

   f) Una serie de Taylor aproxima una función f para valores cercanos a un número x_0 en el dominio de dicha función.

a. Verdadero
b. Falso, la derivada parcial dada representa la tasa de cambio de T cuando "x" se varía, mientras "y" y "t" permanecen constantes.
c. Falso, si el producto punto del vector gradiente con la dirección es mayor a 0 entonces simplemente se está indicando la cercanía de un punto actual a un máximo o mínimo local. También puede tomarse como una seña de que el vector gradiente no corresponde a un máximo o mínimo local.
d. Verdadero
e. Falso, el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel

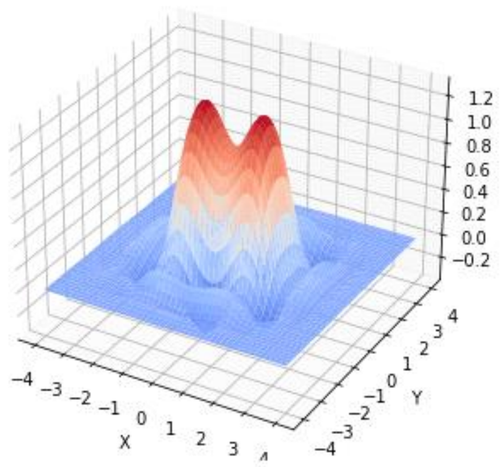


f. Verdadero

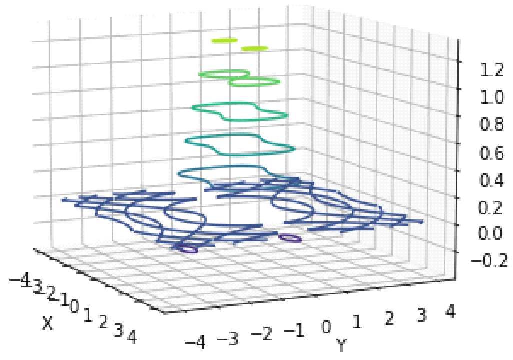
2. Dada la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_\ni \;\; f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{3}} \left(\sin(x^2) + \cos(y^2)\right),$$

utilice cualquier software para graficar dicha función y algunas *curvas de nivel* de la misma.



Gráfica de la función



Gráfica de las curvas de nivel

3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni}$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 + 5x_1x_2^3 + 2x_2^4,$$

calcular:

a) $\nabla f(x_1, x_2)$,
b) $\nabla^2 f(x_1, x_2)$,
c) Indique la *dirección de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.
d) Indique la *tasa de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.
e) Calcule la *derivada direccional* de f en el punto $P(1, -1)$ y en dirección del vector $d = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$.

A. $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ \frac{df}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1^3 - 6x_1^2x_2 - 8x_1x_2^2 + 5x_2^3 \\ -2x_1^3 - 8x_1^2x_2 + 15x_1x_2^2 + 8x_2^3 \end{bmatrix}$

B. $\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36x_1^2 - 12x_1x_2 - 8x_2^2 & -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 \\ -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 & -8x_1^2 + 30x_1x_2 + 24x_2^2 \end{bmatrix}$

C. $-\nabla f(1,-1) = -\begin{bmatrix} 12(1)^3 - 6(1)^2(-1) - 8(1)(-1)^2 + 5(-1)^3 \\ -2(1)^3 - 8(1)^2(-1) + 15(1)(-1)^2 + 8(-1)^3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

D. $\|\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{(-5)^2 + (-13)^2} = \sqrt{194} = 13.93$

E. $\nabla f(x)^T d = \begin{bmatrix} -5 \\ -13 \end{bmatrix}^T \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]^T = [-5 \ \ -13] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{13}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

4. Encontrar una *polinomio de Taylor* de grado 2 para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_\ni$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 + 5x_1x_2^3 + 2x_2^4,$$

en el punto $x_0 = [1, -1]^T$. Evalúe dicho polinomio para $p = [0.1, 0.01]^T$ y compare su resultado con el valor de $f(x_0 + p)$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ \frac{df}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1^3 - 6x_1^2x_2 - 8x_1x_2^2 + 5x_2^3 \\ -2x_1^3 - 8x_1^2x_2 + 15x_1x_2^2 + 8x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(1, -1) = \begin{bmatrix} 12(1)^3 - 6(1)^2(-1) - 8(1)(-1)^2 + 5(-1)^3 \\ -2(1)^3 - 8(1)^2(-1) + 15(1)(-1)^2 + 8(-1)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36x_1^2 - 12x_1x_2 - 8x_2^2 & -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 \\ -6x_1^2 - 16x_1x_2 + 15x_2^2 & -8x_1^2 + 30x_1x_2 + 24x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(1, -1) = \begin{bmatrix} 36(1)^2 - 12(1)(-1) - 8(-1)^2 & -6(1)^2 - 16(1)(-1) + 15(-1)^2 \\ -6(1)^2 - 16(1)(-1) + 15(-1)^2 & -8(1)^2 + 30(1)(-1) + 24(-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 25 \\ 25 & -14 \end{bmatrix}$$

$$f(x_0 + P) \approx f(x_0) + P^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} P^T \nabla^2 f(x_0) P$$

$$f(1.1, -0.99) \approx f(1, -1) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 25 \\ 25 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\approx -2 + 0.63 + \begin{bmatrix} 1.85 & 2.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\approx -2 + 0.63 + 0.2086\,(1/2)$$

$$\approx -1.2657$$

$$\text{ERROR} = |-1.2657 - f(1.1, -0.99)| = |-1.2657 - (-1.1315)| = 0.1342$$