Hoja de Trabajo 3 - Conjuntos Convexos y Funciones Convexas

Eduardo Santizo Olivet (21007361)

1. Dadas las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine si son convexas, cóncavas o ninguna de las dos.

   a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$
   b) $f(x) = 7x - 15$

A. $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

$f' = 6x + 4 \qquad f'' = 6 > 0$

ESTRICTAMENTE CONVEXA

B. $f(x) = 7x - 15$

$f'(x) = 7 \qquad f''(x) = 0$

NI CONVEXA, NI CÓNCAVA

2. Determine si la función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada es convexa, cóncava o bien ninguna de las dos.

   a) $f(x) = x^3$, para $\mathcal{X} = [0, \infty)$.
   b) $f(x) = x^3$, para $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

A. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x$

SI $\mathcal{X} = [0, \infty)$ ENTONCES $f''(x) = 6([0,\infty)) \longrightarrow [0, \infty)$

CONVEXA

B. SI $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ENTONCES $f''(x) = 6(\mathbb{R}) \longrightarrow (-\infty, \infty)$

NI CONVEXA, NI CÓNCAVA

3. Utilizando los ejemplos de funciones convexas dados en clase junto a las operaciones entre funciones que preservan la convexidad de una función, determine si las siguientes funciones son convexas o no. Justifique su respuesta citando el resultado utilizado, *no* debe demostrar nada.

   a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni f(x) = e^{g(x)}$ con $g(x)$ una función convexa.
   b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} a_i^T x + b_i$.
   c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni f(x) = \|Ax - b\|^2$.

A. e^x ES CONVEXA

$g(x)$ ES CONVEXA

$e^{g(x)}$ MANTIENE CONVEXIDAD $\longrightarrow$ SOLO SI $g(x)$ ES NO DECRECIENTE

(COMPOSICIÓN VECTORIAL)

Dado que se desconoce si g(x) es una función no decreciente, entonces no es posible establecer si la composición de funciones es convexa.

B. $A_i^T x + B$ SON CONVEXAS

MAX (X) MANTIENE CONVEXIDAD

La función resultante es convexa

C. $AX - B$ ES CONVEXA (VARIACIÓN DE $A^T X + B$)

$\|X\|^2$ MANTIENE CONVEXIDAD

La función resultante es convexa

4. Aplique la *caracterización de segundo orden* de una función convexa para verificar que la función $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ para $y > 0$ es convexa.

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} \\ -\frac{x^2}{y^2} \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}$$

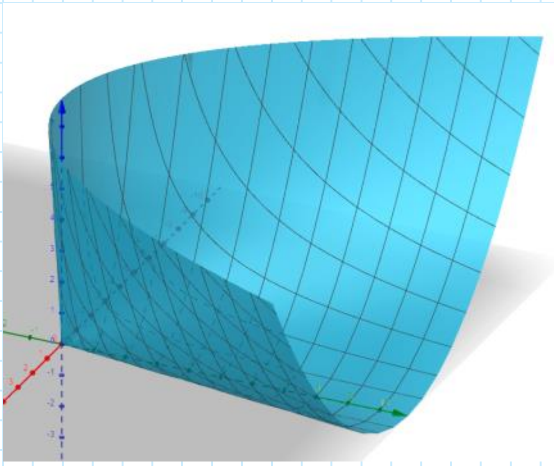
$$x^T A x = x^T \nabla^2 f(x,y)\, x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} - \frac{2x}{y} & -2\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^2}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$\therefore f$ ES POSITIVA SEMIDEFINIDA Y NEGATIVA SEMIDEFINIDA

Por lo tanto, se puede establecer que la función es tanto convexa como cóncava. Al graficar la función, se puede observar que para y < 0 la función es cóncava, mientras que para y > 0, esta es convexa. Dado que solo queremos considerar los valores para y > 0, entonces efectivamente, la función es convexa en esta región.



5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29.$$

a) Determine si el problema de optimización $\min\limits_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)$ es convexo.

b) Con lo que hemos visto hasta la clase 3, ¿qué podemos decir acerca de la *solución global* del problema de optimización dado?

A. $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16x_1 + 3x_2 - 25 \\ 3x_1 + 14x_2 + 31 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow$ EIGENVALORES $\lambda = 15 \pm \sqrt{10} = \begin{matrix} 18.16 \\ 11.83 \end{matrix}$

$\nabla^2 f(x_1, x_2)$ ES PD

$\therefore f$ ES ESTRICTAMENTE CONVEXA

Dado que la función es convexa y la única condición a la que está sometido el problema es que las variables x1 y x2 pertenezcan a R2 (un conjunto convexo), entonces se puede declarar que el problema de optimización también es convexo.

B. Dado que la función es estríctamente convexa, entonces se puede declarar que, si mucho, existe un mínimo local de f en el dominio establecido por las restricciones. Dicho mínimo, en caso de existir, consiste de un mínimo global único.

- *If f is strictly convex, then there exists at most one local minimum of f in X, i.e. if it exists it is the unique global minimum.*

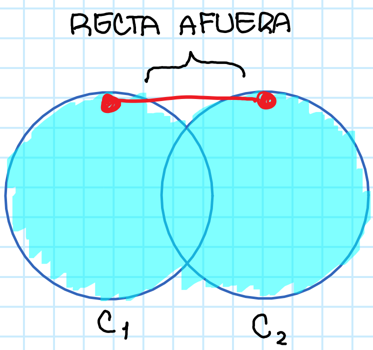
6. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, *en cualquier caso, justifique su respuesta.*

   a) La unión de conjuntos convexos es también un conjunto convexo.

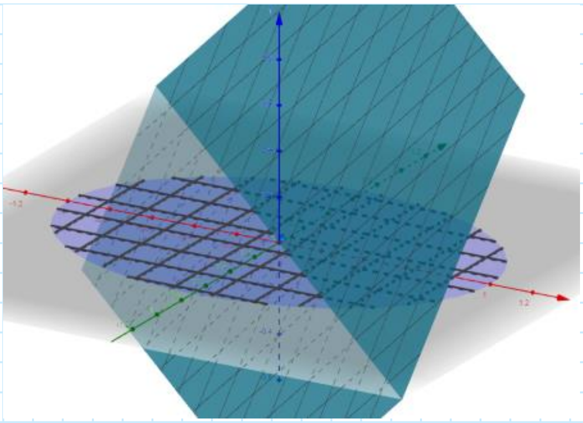
   b) El problema de optimización $\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{X}} x + y$, en donde $\mathcal{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ tiene solución.

   c) El problema de optimización $\min\limits_{x\in[1,2]} 2e^x + 3$ no tiene solución.

a. Falso: La unión de conjuntos no consiste de una operación que mantiene la convexidad. A continuación se puede observar la intuición gráfica sobre porque la unión de dos conjuntos no siempre será convexa.



b. Dado que la función a optimizar consiste de una función lineal en R2, al utilizar una caracterización de segundo orden se obtendrá una matriz Hessiana de ceros y por lo tanto valores propios iguales a cero. Esto convierte a la función en una función tanto cóncava como convexa. No obstante, dada la naturaleza del plano descrito por la función, este problema por sí solo no tendría solución. Al incluir las restricciones de dominio, el problema se torna "solucionable" ya que limita al mínimo a aquellos valores del plano X+Y contenidos dentro de un elipse.



Azul oscuro: Plano X+Y
Azul/morado: Restricciones

c. Falso: Inicialmente este problema puede parecer no tener solución, ya que la función a optimizar (una exponencial escalada y trasladada) es una función convexa pero sin solución (el mínimo de una exponencial no puede alcanzarse porque la función cuenta con una asíntota horizontal, lo que implica que se puede aproximar al mínimo, pero nunca alcanzarlo). No obstante, dado que el dominio está acotado entre 1 y 2, entonces el problema se torna solucionable, ya que dentro de un rango limitado de valores si es posible encontrar el valor más pequeño o el mínimo.