Hoja de Trabajo No. 3

Conjuntos Convexos y Funciones Convexas

1. Dadas las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine si son convexas, cóncavas o ninguna de las dos.

   a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$
   b) $f(x) = 7x - 15$

2. Determine si la función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada es convexa, cóncava o bien ninguna de las dos.

   a) $f(x) = x^3, \quad \text{para} \quad \mathcal{X} = [0, \infty).$
   b) $f(x) = x^3, \quad \text{para} \quad \mathcal{X} = \mathbb{R}.$

3. Utilizando los ejemplos de funciones convexas dados en clase junto a las operaciones entre funciones que preservan la convexidad de una función, determine si las siguientes funciones son convexas o no. Justifique su respuesta citando el resultado utilizado, *no* debe demostrar nada.

   a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ni} \;\; f(x) = e^{g(x)}$ con $g(x)$ una función convexa.
   b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ni} \;\; f(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \; a_i^T x + b_i$.
   c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ni} \;\; f(x) = \|Ax - b\|^2$.

4. Aplique la *caracterización de segundo orden* de una función convexa para verificar que la función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ para $y > 0$ es convexa.

5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29.$$

   a) Determine si el problema de optimización $\min\limits_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$ es convexo.
   b) Con lo que hemos visto hasta la clase 3, ¿qué podemos decir acerca de la *solución global* del problema de optimización dado?

6. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, *en cualquier caso, justifique su respuesta.*

   a) La unión de conjuntos convexos es también un conjunto convexo.
   b) El problema de optimización $\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{X}} x + y$, en donde $\mathcal{X} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\right\}$ tiene solución.
   c) El problema de optimización $\min\limits_{x\in[1,2]} 2e^x + 3$ no tiene solución.