# Hoja de Trabajo 7 - Newton's Method

Eduardo Andrés Santizo Olivet (21007361)

1. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_\ni$,

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4.$$

Calcular la dirección de Newton (*Newton's Direction*) en el punto $x_0 = (0,1)^T$.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(0,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\nabla^2 f(0,0)|^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_k = -|\nabla^2 f(0,0)|^{-1} \nabla f(0,0) = -\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1+1 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_\ni$

$$f(x_1, x_2) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

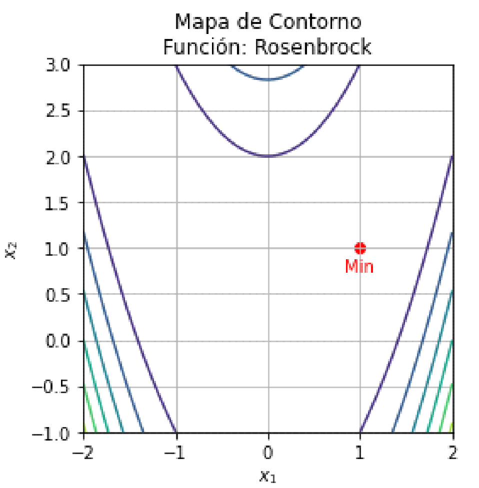
Esta función es conocida como *Rosenbrock's Function* y es utilizada como benchmark en la evaluación de algoritmos.

a) Utilice cualquier *software* para graficar un *mapa de contorno* de $f$. Algunos autores le llaman *banana function* debido a la forma de sus curvas de nivel.

b) Aplique el *método de Newton* con $x_0 = (0,0)^T$ y step-size unitario para resolver el problema de optimización $\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$. Realice *"a mano" todas* las iteraciones necesarias para resolver el problema.

*Ayuda:* recuerde que en la Hoja de Trabajo No. 6 ya trabajó con esta función.

A.




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Se crea un meshgrid con puntos del plano XY
X = np.linspace(-2, 2, num=1000)
Y = np.linspace(-1, 3, num=1000)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)

# Se evalúan las coordenadas anteriores en la función Rosenbrock
Rosenbrock = lambda x1, x2 : 100*(x2 - x1**2)**2 + (1 - x1)**2
Z = Rosenbrock(X, Y)

# Se crea un plot cuadrado
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot()
ax.set_aspect("equal", adjustable="box")

# Se grafican los resultados
plt.contour(X, Y, Z)
plt.scatter(1, 1, c="red")
plt.text(1,0.8, "Min", c="red", verticalalignment="center", horizontalalignment="center")

# Títulos y labels
plt.xlabel("$x_1$")
plt.ylabel("$x_2$")
plt.title("Mapa de Contorno\nFunción: Rosenbrock")
plt.grid(True)
plt.show()
```

B. $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 200(x_2 - x_1^2)(-2x_1) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400(x_1 x_2 - x_1^3) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - 3x_1^2) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

$x_0$: $\quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_k = 1$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\left[\nabla^2 f(x_0)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/200 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1$: $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_k = 1$

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} -400(0 - 1) - 0 \\ 200(0 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -200 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1) = \begin{bmatrix} -400(-3) + 2 & -400(1) \\ -400(1) & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1202 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1)^{-1} = \frac{1}{40200}\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 601 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{40200}\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 601 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 400 \\ -200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El mínimo de la función de Rosenbrock es (1,1), esto implica que el algoritmo de Newton converge al mínimo global de la función, luego de apenas 2 iteraciones. Claramente se puede observar de manera empírica que el método tiene una tasa de convergencia muy alta (cuadrática en este caso).