

**Ingenieur-Wissenschaftliches Zentrum**  
der FH-Köln

Fakultät für  
**Informations-, Medien- und Elektrotechnik**

Skript zur Vorlesung

**Regelungstechnik**

von

*Prof. Dr.-Ing. Jens Onno Krah*

(Jens\_Onno.Krah@fh-koeln.de)

<http://www.f07.fh-koeln.de/fakultaet/personen/professoren/jens.krah/>

25. Februar 2013

Vorwort .....	4
Grundlagen der Regelungstechnik .....	5
1. Einleitung .....	5
1.1 Beispiele .....	5
1.2 Begriffe und Benennungen nach DIN 19 226 und DIN 1304.....	7
1.3 Steuerung.....	8
1.4 Regelung .....	9
2. Regelkreis.....	11
2.1 Wirkungsplan des Regelkreises .....	11
2.2 Stationäres Verhalten des Regelkreises .....	12
2.2.1 Kennlinienfeld der Strecke .....	12
2.2.2 Kennlinie des Proportional-Reglers .....	16
2.2.3 Gleichungen des Regelkreises.....	18
2.2.4 Arbeitspunktbestimmung des Regelkreises .....	20
3. Zeitverhalten.....	23
3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen .....	23
3.2 Testfunktionen.....	27
3.2.1 Sprungfunktion – Sprungantwort .....	27
3.2.2 Anstiegsfunktion – Anstiegsantwort .....	29
3.2.3 Impulsfunktion – Impulsantwort.....	30
3.3 Einfache Übertragungsglieder.....	31
3.3.1 Proportionalglied ohne Verzögerung (P-Glied) .....	32
3.3.2 Proportionalglied mit Verzögerung (PT <sub>1</sub> -Glied).....	32
3.3.3 Integrales Übertragungsglied (I-Glied) .....	34
3.3.4 Differenzierendes Übertragungsglied (D-Glied).....	36
3.3.5 Differenzierendes Übertragungsglied mit Verzögerung (DT <sub>1</sub> -Glied) .....	37
3.3.6 Proportional-Differentialglied mit Verzögerung 1. Ordnung (PDT <sub>1</sub> -Glied).....	38
3.3.7 Übertragungssystem 2. Ordnung (PT <sub>2</sub> -Glied).....	39
3.3.8 Totzeitglied (T <sub>1</sub> -Glied) .....	42
3.3.9 Zusammenfassung einfacher Übertragungsglieder .....	43
4 Beschreibung im Bildbereich .....	45
4.1 Frequenzgang und Ortskurve .....	45
4.2 Laplace-Transformation .....	46
4.3 Die Übertragungsfunktion (transfer function) .....	48
4.4 Bode-Diagramm .....	49
4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder .....	50
4.5.1 Übertragungsfunktion des PT <sub>1</sub> -Gliedes.....	50
4.5.2 Übertragungsfunktion des PT <sub>2</sub> -Gliedes.....	51
4.6 Kombination von Übertragungsgliedern.....	54
4.7 Übertragungsfunktion der Strecke .....	56
4.7.1 Parameterschätzung für eine PT <sub>1</sub> -Streckennäherung .....	57
4.7.2 Näherung eines Totzeitgliedes durch ein PT <sub>n</sub> -Glied.....	58
4.7.3 Parameterschätzung für eine PT <sub>n</sub> -T <sub>1</sub> -Streckennäherung.....	59
4.7.3 Parameterschätzung für eine IT <sub>n</sub> -Streckennäherung .....	60
4.8 Grenzwertbetrachtungen .....	61
5 Dynamisches Verhalten der Regeleinrichtungen .....	63
5.1 Proportional-Regler (P-Regler) .....	63
5.2 Proportional-Differential-Regler (PD-Regler) .....	64
5.3 Integral-Regler (I-Regler) .....	66
5.4 Proportional-Integral-Regler (PI-Regler).....	67
5.5 Proportional-Integral-Differential-Regler (PID-Regler) .....	68

5.6	Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises .....	71
6.	Gerätetechnische Realisierung eines Reglers .....	75
6.1	Realisierung eines Reglers in analoger Schaltungstechnik .....	75
6.2	Realisierung digitaler Regeleinrichtungen (Abtastregelung) .....	77
6.3	Modellierung und Simulation von Regelkreisen .....	78
7.	Stabilität von Regelkreisen .....	80
7.1	Hurwitz-Kriterium .....	80
7.2	Nyquist-Kriterium .....	82
7.3	Bode-Diagramm .....	86
7.4	Wurzelortskurve .....	91
8.	Reglerparametrierung – Anpassung des Reglers an die Strecke .....	93
8.1	Einstellung nach Ziegler-Nichols .....	96
8.2	Reglerentwurf mit Schätzformeln .....	97
8.2.1	Schätzformeln für Strecken mit Ausgleich .....	97
8.2.2	Schätzformeln für Strecken ohne Ausgleich – Sym. Optimum .....	100
8.3	Reglerparametrierung bei bekannter Streckenübertragungsfunktion .....	103
8.3.1	Reglerparametrierung bei reinen Totzeitstrecken .....	103
8.3.2	Dynamische Kompensation .....	103
8.3.3	Reglerentwurf nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung .....	105
8.3.4	Vergleichende Betrachtung der Entwurfsverfahren .....	112
9.	Besondere Regelkreisschaltungen .....	114
9.1	Split-Range-Regelung .....	114
9.2	Störgrößenaufschaltung .....	114
9.3	Kaskaden-Regelung .....	116
9.4	Vorsteuerung .....	120
9.5	Verhältnisregelung .....	120
9.6	Mehrgrößenregelung .....	121
10.	Unstetige Regelung .....	123
10.1	Zweipunktregler .....	123
11.	Literaturhinweise .....	131
12.	Formelzeichen .....	132
13.	Index .....	135

## **Vorwort**

Das vorliegende Skript ist nicht zum Selbststudium vorgesehen. Es soll vielmehr vorlesungsbegleitend dem Hörer das Abzeichnen bzw. Abschreiben der Inhalte ersparen. Falls eine Vorlesungsstunde versäumt wurde, kann der Hörer anhand des Skriptes ersehen, welcher Stoff z.B. mit einem Buch nachgeholt werden sollte.

Für das Verständnis der Regelungstechnik sind Grundkenntnisse der Analyse von dynamischen Systemen erforderlich. Das Aufstellen von Differentialgleichungen und Wirkungsplänen wird deshalb genauso wie die Laplace Transformation nur kurz repetiert.

Insbesondere die ersten Kapitel basieren in der Grundstruktur auf der „Hartmann & Braun“ Firmenschrift „Regelungstechnik, Grundlagen und Geräte“ von Klaus Fieger, die leider nicht mehr verfügbar ist. Zu allen Kapiteln sind weiterführende Literaturhinweise angeführt.

Der in Kapitel 5 vorgestellte Reglerentwurf nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung ist unter der Leitung von Prof. H. M. Schaedel an der FH-Köln erarbeitet worden.

In den ersten Kapiteln sollen die Begriffe der Regelungstechnik und die allen Aufgabenstellungen gemeinsame Problematik zunächst an Hand einfacher Beispiele näher erläutert werden. Anschließend wird eine Einführung in die Theorie selbsttätiger Regelungen gegeben, wobei auf mathematische Ableitungen weitestgehend verzichtet wird. Bei allen Betrachtungen steht eine anschauliche Darstellung im Vordergrund. Es soll versucht werden, dem Leser Hinweise zu geben, die ihm bei der Lösung der anstehenden Probleme nützlich sind.

# Grundlagen der Regelungstechnik

## 1. Einleitung

Technische Anlagen haben heute in der Industrie eine Komplexität angenommen, die eine Steuerung dieser Anlagen von Hand unmöglich macht. Man verwendet deshalb Einrichtungen, die eine automatische Überwachung, *Steuerung* und *Regelung* der Anlagen gestatten.

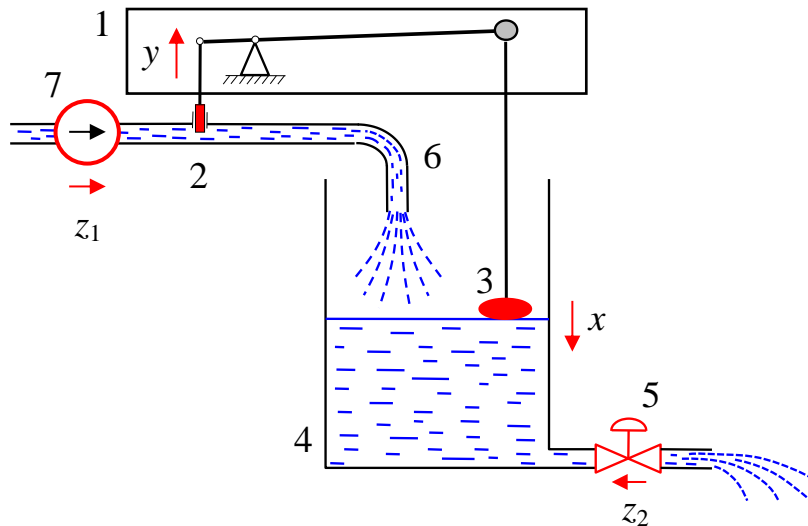
Die Funktionen des Steuerns und des Regelns werden allgemein unter dem Begriff *Automatisierung* zusammengefasst. Ohne diese Funktionen wäre der effiziente Betrieb von verfahrens- und fertigungstechnischen Produktionsprozessen, Energiesystemen, Transportanlagen und dergleichen nicht möglich. Viele bedeutsame technische Errungenschaften wie die Raumfahrt, das Ausnutzen der Atomenergie, das Beherrschen exothermer chemischer Prozesse etc. wären ohne Regelungen und Steuerungen nicht möglich gewesen. Regelungs- und Steuerungstechnik haben es gemeinsam, dass die Vorgänge eines technischen Prozesses mit Hilfe der entsprechenden Informationsverarbeitung beeinflusst werden und der Mensch seine Wünsche an das Betriebsergebnis in Form von Sollwerten vorgibt. Das Betriebsergebnis ist dann z.B. ein Satz von interessierenden Prozessgrößen und / oder Produkteigenschaften. Bei diesen letztendlich wichtigen Größen spricht man auch von *Aufgabengrößen*.

### 1.1 Beispiele

Die Temperatur in einem Raum ist eine wesentliche physikalische Größe für die Menschen, die sich darin aufhalten. Sie soll daher unabhängig von der Außentemperatur auf einem konstanten vorgegebenen Wert gehalten werden. Man könnte daran denken, zu diesem Zweck die Warmwasserzufuhr im Heizkörper oder die Heizwassertemperatur (*Stellgröße*) in Abhängigkeit von der Außentemperatur zu verändern, um so die gewünschten Verhältnisse zu erreichen. Diese *Steuerung* der Innentemperatur durch die Außentemperatur hätte jedoch nur Erfolg, solange nicht zusätzliche *Störgrößen*, wie z.B. Öffnen der Fenster und Türen, die Raumtemperatur in unerwünschter Weise beeinflussen. Eine bessere Lösung des Problems besteht darin, die Innentemperatur (*Istwert* der *Regelgröße*) zu messen, sie mit einer vorgegebenen *Führungsgröße* (*Sollwert*) zu vergleichen und eine eventuell vorhandene Differenz dazu zu benutzen, die Heizleistung in dem Sinne zu verstellen, dass die Differenz verschwindet. Man spricht in diesem Fall von einer *Regelung*.

Ein anderes Beispiel zeigt Bild 1.1. Hier soll der Flüssigkeitsstand in einem Behälter auf einem konstanten Wert gehalten werden. Die Anordnung besteht aus dem Behälter, dem Abflussrohr mit dem Absperrventil, dem Zuflussrohr mit der Förderpumpe und dem Schieber. Das Niveau der Flüssigkeit bleibt unverändert, solange die zufließende Menge gleich der abfließenden ist. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass eine einmalige Justierung des Zuflusses auf die Dauer nicht die gewünschte Wirkung erzielen kann, da jede Änderung im Ab- oder Zufluss auf-

grund irgendwelcher Störungen (Pumpendrehzahl  $z_1$  oder Ventilstellung  $z_2$ ) ein ständiges Steigen oder Fallen des Flüssigkeitsspiegels zur Folge hätte. Der Behälter könnte leer laufen bzw. überlaufen. Auch hier ist eine **Regelung** der **Steuerung** vorzuziehen.



**Bild 1.1:** Flüssigkeitsstand-Regelung

1 Regler	5 Absperrventil	$x$ Regelgröße
2 Schieber	6 Zulauf	$y$ Stellgröße
3 Schwimmer	7 Pumpe	$z_1, z_2$ Störgrößen
4 Behälter		

Mit einem Schwimmer wird der Flüssigkeitsstand (Istwert der **Regelgröße**) gemessen und als Rückführgröße im Regler, der im Beispiel aus einem einfachen Hebel besteht, mit der Führungsgröße verglichen. Ergibt sich eine Differenz, so wird der Hub des Schiebers (Stellglied), das heißt die **Stellgröße**, entsprechend geändert. Erhöht sich z.B. die Pumpendrehzahl, vergrößert sich dadurch der Zufluss, so wird zunächst der Flüssigkeitsstand steigen. Der Regler schließt nun den Schieber und sorgt so dafür, dass die Regelgröße nicht weiter steigen kann. Wird umgekehrt das Abflussventil weiter geöffnet, so wird durch den Regler die Stellgröße erhöht, damit der geänderte Abfluss wieder ausgeglichen wird.

Man könnte diesen Beispielen eine ganze Reihe weiterer hinzufügen, die sich zwar in der technischen Zielsetzung und Realisierung von den genannten wesentlich unterscheiden, denen aber das gleiche gedankliche Prinzip zugrunde liegt. Dieses allen Anwendungen Gemeinsame soll deshalb noch genauer herausgestellt werden. Um einen Überblick über die Regelungstechnik und ihre Methoden zu gewinnen, ist es notwendig und zweckmäßig, sich zunächst von der gerätetechnischen Realisierung frei zu machen. Wenn man die auf diese Weise gewonnenen Erkenntnisse dann anwenden möchte, ist es unerlässlich, sich mit den speziellen Eigenschaften der zu regelnden **Strecke** und der zweckmäßigsten technischen Verwirklichung von **Stellglied** und **Regler** eingehend zu beschäftigen.

## 1.2 Begriffe und Benennungen nach DIN 19 226 und DIN 1304

Bevor auf die Thematik näher eingegangen wird, ist es notwendig, einige für die Regelungstechnik besonders wichtige Begriffe und Benennungen einzuführen, damit eine gemeinsame Sprache vorliegt und nicht schon durch Begriffsschwierigkeiten Unklarheiten entstehen.

Diese Einführung ist hier sehr knapp gehalten, da die Einzelheiten in der DIN Norm nachgelesen werden können.

Der schon benutzte Begriff **System** bedeutet eine abgegrenzte Anordnung von aufeinander einwirkenden Gebilden. Diese Anordnung kann man sich durch eine Hüllfläche von ihrer Umgebung abgegrenzt denken. Durch die Hüllfläche werden Verbindungen des Systems mit seiner Umgebung geschnitten. Die mit diesen Verbindungen übertragenen Eigenschaften und Zustände sind die **Größen**, deren Beziehungen untereinander das Verhalten des Systems beschreiben.

Im Beispiel der Niveau-Regelung wäre z.B. der Behälter das System, die Verbindungen mit der Umgebung der Zu- und Abfluss. Der Zusammenhang zwischen dem Zufluss, dem Abfluss und dem Flüssigkeitsstand beschreibt das Systemverhalten.

Man erkennt, dass die Wahl der gedachten Hüllfläche im Prinzip willkürlich ist. Es wäre auch denkbar gewesen, die Unterteilung so zu wählen, dass die Größen, welche die Hüllkurve durchstoßen, im Beispiel der Pumpendrehzahl und der Stellung des Abflussventils entsprechen. Das so entstehende System würde das vorher genannte als Teilsystem enthalten. Durch zweckmäßiges Zusammenfügen und Unterteilen können also größere und kleinere Systeme entstehen.

Die Darstellung von Informationen geschieht durch **Signale**. Das entspricht dem Wert oder dem Werteverlauf einer physikalischen Größe. Der **Signalparameter** ist diejenige Kenngröße des Signals, welche die Information trägt.

Wird bei der Niveauregelung die Pumpendrehzahl beispielsweise durch eine Spannung dargestellt, so ist diese das Signal, ihre Amplitude der Signalparameter.

In Systemen ist stets ein **Wirkungsweg** und eine **Wirkungsrichtung** vorhanden. Der Wirkungsweg ist dabei der Weg, längs dessen die einzelnen Wirkungen (Regeln oder Steuern) übertragen werden. Die Wirkungsrichtung ist die Richtung der Übertragung dieser Wirkungen. Es ist dabei nicht notwendig, dass Wirkungsweg und Wirkungsrichtung mit Weg und Richtung zugehöriger Massenströme (z.B. Wasser oder Luft) übereinstimmen. So ist z.B. die Wirkungsrichtung der Störgröße  $z_1$  (Stellung des Abflussventils) bei der Niveauregelung der Strömungsrichtung der Flüssigkeit entgegen gerichtet.

Es gibt zwei verschiedene Arten, ein System zu beschreiben. Bei der **geräte-technischen Betrachtung** einer Steuerung oder Regelung werden die Geräte, Baugruppen, Einrichtungen und Anlagen dadurch beschrieben, dass man als Merkmale deren physikalische und technische Eigenschaften sowie ihren Ort

und ihre Verwendung als Bauglieder im Wirkungsweg heranzieht. Diese Betrachtung führt zu der in Bild 1.1 gewählten Darstellung, die noch einen gewissen Aufschluss über die gerätetechnische Realisierung eines Systems ergibt.

Bei der **wirkungsmäßigen Betrachtung** beschreibt man allein den Zusammenhang der Größen und ihrer Werte, die im System miteinander in Beziehung treten. Diese Form der Beschreibung ist für die Darstellung der theoretischen Zusammenhänge besonders geeignet, da sie unabhängig von der speziellen Anordnung und Gerätetechnik das Wesentliche hervorhebt.

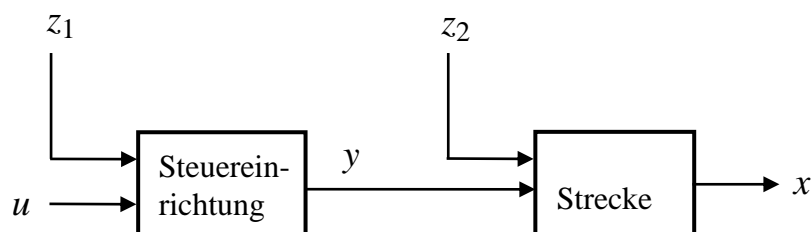
Man kann die Beziehungen zwischen den Systemgrößen entweder in Form von mathematischen Gleichungen oder in einem **Wirkungsplan** (Signalflussplan - Signal Flow Graph) darstellen, das heißt die wirkungsmäßigen Zusammenhänge zwischen den Signalen eines Systems oder einer Anzahl aufeinander einwirkender Systeme durch Blöcke versinnbildlichen, die miteinander verbunden sind. Die **Wirkungsrichtung** wird dabei durch Pfeile an den Verbindungslinien gekennzeichnet. Diese Darstellung wird in den folgenden Kapiteln bevorzugt angewendet, so dass im Augenblick diese kurze Erläuterung genügen soll.

Weitere Begriffsdefinitionen können im Normblatt **DIN 19 226** (Teil 2) und in **DIN 1304** (Teil 10) bzw. in Kapitel 12 nachgelesen werden; soweit erforderlich, werden sie im Weiteren anhand konkreter Beispiele noch eingeführt.

### 1.3 Steuerung

Das Steuern oder die Steuerung ist der Vorgang in einem System, bei dem eine oder mehrere Größen als **Eingangsgrößen** andere Größen als **Ausgangsgrößen** aufgrund der dem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeit beeinflussen. Kennzeichen der Steuerung ist der **offene** Wirkungsweg über das einzelne **Übertragungsglied** oder die **Steuerkette** [DIN 19 226].

Bei der als Beispiel genannten Steuerung der Raumtemperatur  $x$  beeinflusst die Außentemperatur  $u$  über einen Messfühler und ein geeignetes Stellglied zunächst die Heizwassertemperatur  $y$ , die dann die Raumtemperatur  $x$  ändert. Außerdem wirken noch Störgrößen  $z_1$  und  $z_2$  ein. Bild 1.2 zeigt diesen Sachverhalt in der Darstellung als Wirkungsplan Signalflussplan (Signal Flow Graph).



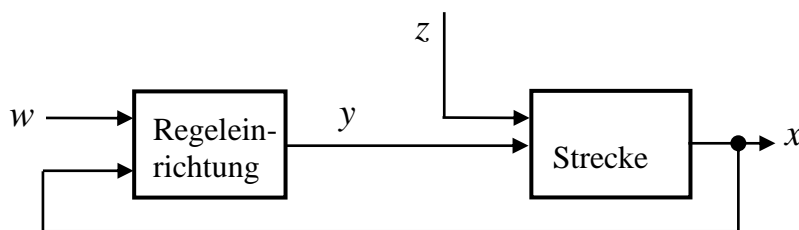
**Bild 1.2:** Wirkungsplan einer Steuerung  
(offener Wirkungsweg – Steuer-Kette)



Man erkennt sehr deutlich die offene, rückwirkungsfrei angenommene Steuerkette. Dabei bedeutet **rückwirkungsfrei**, dass die Eingangsgröße  $u$  die Stellgröße  $y$ ,  $y$  aber nicht  $u$  beeinflusst. Sind keine Störungen vorhanden, so ist  $x$  eindeutig nur von  $u$  abhängig. Dies kommt in der Praxis jedoch nicht oft vor, so dass  $x$ , wie schon im Beispiel erläutert, stets mehreren Einflussgrößen ( $u, z_1, z_2$ ) unterliegt.

## 1.4 Regelung

Um die Ausgangsgröße  $x$  unabhängig von Störungen gleich einem vorgegebenen Wert zu machen, muss man zu einer Regelung greifen: Das Regeln oder die Regelung ist ein Vorgang, bei dem fortlaufend eine Größe, die **Regelgröße  $x$**  (die zu regelnde Größe) als **Rückführgröße** erfasst, mit einer anderen Größe, der **Führungsgröße  $w$** , verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst [DIN 19 226].



**Bild 1.3:** Wirkungsplan einer Regelung  
(geschlossener Wirkungsablauf  $\rightarrow$  Regelkreis)

Bild 1.3 zeigt den Wirkungsplan einer Regelung. Der sich dabei ergebene Wirkungsweg im geschlossenen Kreis, dem **Regelkreis**, ist deutlich zu erkennen. Darin besteht der wesentliche Unterschied zu einer Steuerung.

Durch die Regelung soll der Wert einer Größe, der Regelgröße  $x$ , unabhängig von unvermeidlichen Störgrößen, deren Zeitverläufe gewöhnlich nicht bekannt sind und die oft nicht direkt messbar sind, einen vorbestimmten Verlauf annehmen. Die Regelgröße  $x$  soll zu allen Zeitpunkten möglichst gleich der Führungsgröße  $w$  sein.

Zu diesem Zweck bildet man die

**Regeldifferenz** = Führungsgröße – Regelgröße ( $e = w - x$ ); (error = reference signal – controlled variable)

Diese bewirkt über den Regler eine **Stellgröße  $y$**  (actuating signal  $u$ ), die im Sinne der **Regelstrecke** (plant, controlled system) so einwirkt, dass die Regelgröße der Führungsgröße nachgeführt wird, eine etwa vorhandene Regeldifferenz also verschwindet. Es ist dabei sehr wichtig, dass der Regelsinn richtig gewählt wird.

Bei der technischen Realisierung von Steuerungen und Regelungen gibt es keine scharfe Trennung zwischen diesen beiden Disziplinen. Es ist kaum möglich, Regelungen ohne begleitende Steuerungen zu betreiben. Im angelsächsischen Sprachraum spricht man meist durchweg von **control**. Nur selten wird präzise zwischen Regelung (*feedback control, closed loop control*) und Steuerung (*feed forward control*) unterschieden. Geräte – Steuereinrichtungen und Regler – werden mit dem identischen Begriff *Controller* bezeichnet.

**Im Kapitel 1 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:**

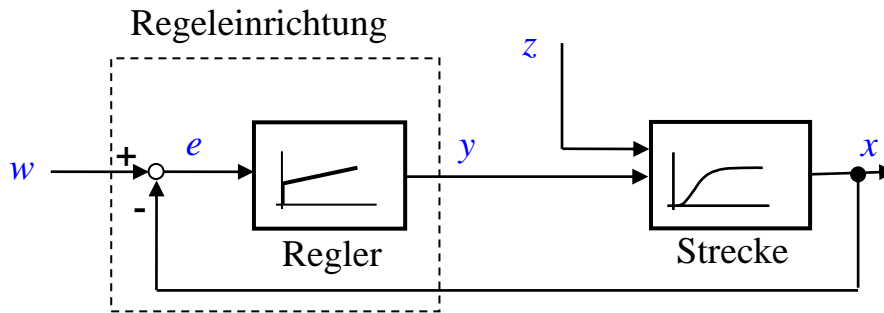
PFK 4: Erkennen und Verstehen technischer Zusammenhänge  
Insbesondere Ursache-Wirkungsprinzipien.

- Lesen und Erstellen von Signalflussplänen
- Unterscheidung zwischen Steuerung und Regelung
- Regelungstechnische Begriffe nach DIN (insbesondere: Regelgröße  $x$ , Stellgröße  $y$ , Störgröße  $z$ , Führungsgröße  $w$ , Regeldifferenz  $e$ )

## 2. Regelkreis

### 2.1 Wirkungsplan des Regelkreises

Bisher wurde das Prinzip einer Regelung anhand von Beispielen in Worten erläutert. Bild 1.3 enthielt bereits einen **Wirkungsplan** (Signalflussplan), der in Bild 2.1 um ein Detail (Vergleichsstelle) erweitert noch einmal dargestellt ist.



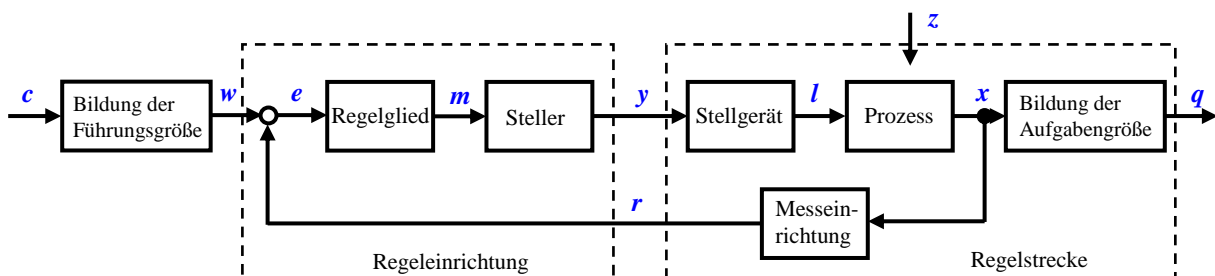
**Bild 2.1:** Prinzip einer Regelung

$w$  Führungsgröße     $y$  Stellgröße     $e$  Regeldifferenz  
 $x$  Regelgröße     $z$  Störgröße

Man kann daraus sofort die Beziehung

$$e = w - x \quad (2.1)$$

für die **Regeldifferenz**  $e$  (error signal) ablesen. Aufgabe der Regelung ist es, diese Regelabweichung zu eliminieren.



**Bild 2.2:** Vollständiger einschleifiger Regelkreis nach DIN

$c$  Zielgröße     $w$  Führungsgröße     $e$  Regeldifferenz  
 $r$  Rückführgröße     $m$  Reglerausgangsgröße  
 $y$  Stellgröße     $l$  Stellgliederausgangsgröße  
 $x$  Regelgröße     $q$  Aufgabengröße     $z$  Störgröße

Es muss noch erwähnt werden, dass die Regelgröße  $x$  nicht immer identisch mit der Aufgabengröße  $q$  ist. In einem Dampfkessel kann man z.B. den Druck regeln ( $w$ ,  $x$ ), um indirekt die Temperatur ( $c$ ,  $q$ ) zu regeln. Ein Messumformer formt die Regelgröße  $x$  in ein verarbeitbares Signal, den Rückführwert  $r$ , um. Der Messumformer ist in Bild 2.2 mit in der Regelstrecke enthalten. Da man an  $x$  und nicht an  $r$  interessiert ist, ist dieser Messung besondere Sorgfalt zu widmen, da Fehler, die durch die Messeinrichtung entstehen, nicht ausgeglichen werden können.

Man unterscheidet nun noch zwischen einer **Festwertregelung** ( $w = \text{konst.}$ ) und einer **Folgeregelung** ( $w = w(t)$ ), je nachdem, ob die Führungsgröße konstant oder zeitlich veränderlich ist. Das Prinzip der Regelung ist jedoch in beiden Fällen gleich.

## 2.2 Stationäres Verhalten des Regelkreises

Bisher wurde die Wirkungsweise einer Regelung beschrieben, die erforderlichen Begriffe wurden definiert und das Regelschema in Form eines Geräteschaltbildes oder Wirkungsplanes dargestellt. Es wurde zwar bereits gesagt, dass aus der Regelabweichung mit Hilfe des Reglers eine Stellgröße gebildet wird und diese über die Regelstrecke die Regelgröße beeinflusst, der funktionelle Zusammenhang zwischen  $w$  und  $x$ , das heißt  $e$  und  $y$  bzw.  $y$  und  $x$ , ist jedoch noch nicht bekannt. Es wurden lediglich rückwirkungsfreie **Übertragungsglieder** angenommen, deren **Übertragungsverhalten** noch bestimmt werden muss. Man versteht darunter den Zusammenhang zwischen der Eingangs- und Ausgangsgröße eines Systems, beispielsweise der Ventilstellung eines Heizkörpers und der Raumtemperatur, der Pumpendrehzahl und dem Zufluss usw.

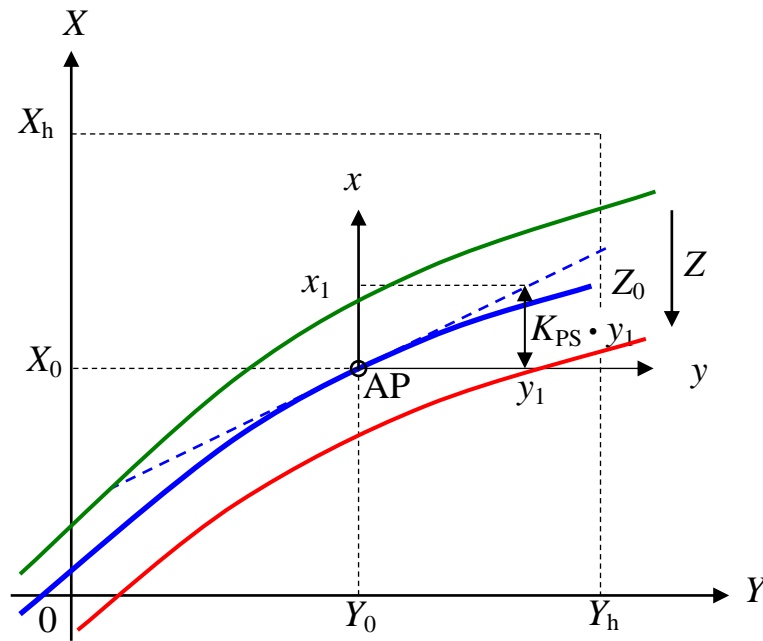
### 2.2.1 Kennlinienfeld der Strecke

Der Zusammenhang zwischen den Systemgrößen  $Y$ ,  $Z$  und  $X$ , das heißt zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen der Strecke, wird im allgemeinen Fall durch eine **nichtlineare Differentialgleichung**

$$X = f(Y, Z, t) \quad (2.2)$$

beschrieben. Dabei kommen auch die entsprechenden Ableitungen der Größen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  nach der Zeit vor. Die hier benutzten großen Buchstaben kennzeichnen nicht den Frequenzbereich (Laplace), sondern den Großsignalbereich mit absoluten Größen.

Die Differentialgleichung (2.2) wird gewöhnlich zur einfachen Behandlung in der Nähe eines stationären Arbeitspunktes (AP) im Kleinsignalbereich linearisiert; dies wird später behandelt. Zunächst soll nur die stationäre Lösung betrachtet werden, das heißt diejenigen Werte  $X$ , die sich bei konstantem  $Y$  und konstantem  $Z$  einstellen (stationärer Zustand). Dabei wird vorausgesetzt, dass zu einem konstanten  $Y$  auch ein konstanter Wert  $X$  existiert – **Regelstrecken mit Ausgleich** (ohne integrierendes Verhalten) – was nicht immer der Fall ist. Denkt man an die in Bild 1.1 dargestellte Niveauregelung, so gehört zu einer konstanten Schieberstellung  $Y$  keineswegs ein konstantes Niveau  $X$ . Ist z.B. das Abflussventil geschlossen ( $Z_1 = 0$ ), so wird bei konstantem  $Y \neq 0$  der Flüssigkeitsstand mit konstanter Geschwindigkeit ( $\dot{X} = \text{konst.}$ ,  $X = \text{konst.} \cdot t$ ) wachsen (integrierendes Verhalten). Man spricht dann von **Regelstrecken ohne Ausgleich**, von denen hier zunächst nicht die Rede sein soll.



**Bild 2.3:** Kennlinienfeld einer Strecke im Groß- und Kleinsignalbereich

$X$  Regelgröße  $Y$  Stellgröße  $Z$  Störgröße  
 $X_0, Y_0, Z_0$  Bezugswerte im Arbeitspunkt  
 ( $x, y$  und  $z$  entsprechend im Kleinsignalbereich)  
 $X_h$  Regelbereich  $Y_h$  Stellbereich  
 $K_{PS}$  Übertragungsbeiwert der Strecke

Bestimmt man bei einer **Strecke mit Ausgleich** die zusammengehörigen Wertepaare  $X$  und  $Y$ , indem z.B.  $Y$  von Hand auf verschiedene Werte  $Y_1, Y_2, \dots Y_n$  eingestellt wird und die sich nach einer gewissen Zeit einstellenden Werte  $X_1, X_2, \dots X_n$  gemessen werden, so erhält man die in Bild 2.3 dargestellten Kurven. Dabei ist angenommen, dass die Störgröße  $Z$  während einer Messreihe unverändert bleibt.

Dieses Kennlinienfeld entspricht z.B. einer Temperatur-Regelstrecke.  $Y$  ist die Heizwassertemperatur,  $X$  die Raumtemperatur und  $Z$  die Außentemperatur.

Bild 2.3 ist zu entnehmen, dass die Kennlinien  $X = f(Y)|_{Z=\text{konst}}$  gekrümmt sind, der Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  ist **nichtlinear**. Eine Verdoppelung der Stellgröße hat damit nicht zwangsläufig eine Verdoppelung der Regelgröße zur Folge.

Außerdem ist im Kennlinienfeld der maximal mögliche **Stellbereich**  $Y_h$  und der von der Rückführung verarbeitbare **Regelbereich**  $X_h$  gekennzeichnet. Diese Begrenzungen stören bei der mathematischen Betrachtung nicht, da sich ein Regelkreis, der seinen Zweck erfüllt, immer innerhalb dieser Grenzen bewegt und diese daher nicht wirksam werden. Eine wesentlich größere Schwierigkeit bedeutet die Nichtlinearität. Nimmt man aber an, dass sich der Regelkreis immer in der Nähe des **stationären Arbeitspunktes AP** in Bild 2.3 befindet, so kann man die Kennlinie in diesem Arbeitspunkt als linear annehmen, das heißt, sie durch eine Tangente (Gerade) durch den Arbeitspunkt ersetzen. So lange keine sehr großen

Änderungen der Führungsgröße  $W$  oder der Störgröße  $Z$  und damit auch der Stellgröße  $Y$  auftreten, wird die gewählte Näherung die tatsächlichen Verhältnisse mit ausreichender Genauigkeit beschreiben. Ob diese Linearisierung zulässig ist, muss von Fall zu Fall überprüft werden; bei den meisten in der Praxis eingesetzten Regelkreisen wird sie jedoch zumindest gute Anhaltswerte liefern. Linearisierung ist ein wichtiges Werkzeug der Regelungstechnik, denn nur die entstehenden linearen Gleichungen lassen sich mit vertretbarem mathematischen Aufwand analysieren.

Lautet die stationäre Lösung der Differentialgleichung im Großsignalbereich (2.2)

$$X = f(Y, Z), \quad (2.3)$$

so erhält man für die Abweichungen vom Arbeitspunkt die **Kleinsignale**

$$x = \Delta X = X - X_0, \quad ,$$

$$y = \Delta Y = Y - Y_0 \quad \text{bzw.}$$

$$z = \Delta Z = Z - Z_0$$

um den Arbeitspunkt eine Gleichung des linearisierten Kennlinienfeldes im Koordinatensystem  $x, y$  mit dem Koordinatenursprung im Arbeitspunkt über die Beziehung

$$x = \left. \frac{\partial}{\partial Y} f(Y, Z) \right|_{\text{AP}} \cdot y + \left. \frac{\partial}{\partial Z} f(Y, Z) \right|_{\text{AP}} \cdot z. \quad (2.4)$$

Die partiellen Ableitungen sind dabei im Arbeitspunkt AP zu bestimmen. Die Kurve durch AP im Bild 2.3 ist für  $Z_0 = \text{konstant}$ , das heißt für  $z = 0$  aufgenommen.

Die Gleichung (2.4) lautet in diesem Fall

$$x = \left. \frac{\partial}{\partial Y} f(Y, Z) \right|_{\text{AP}} \cdot y \quad \text{mit} \quad z = 0 \quad (2.5)$$

und ist nichts anderes als die mathematische Beschreibung für die Tatsache, dass im Arbeitspunkt eine Tangente an die Kurve  $X = f(Y, Z_0)$  gelegt wird.

Der Ausdruck

$$\left. \frac{\partial}{\partial Y} f(Y, Z) \right|_{\text{AP}} = \left. \frac{\partial X}{\partial Y} \right|_{\text{AP}} \approx \left. \frac{\Delta X}{\Delta Y} \right|_{\text{AP}} = \left. \frac{x}{y} \right|_{\text{AP}} = K_{\text{PS}} \quad (2.6)$$

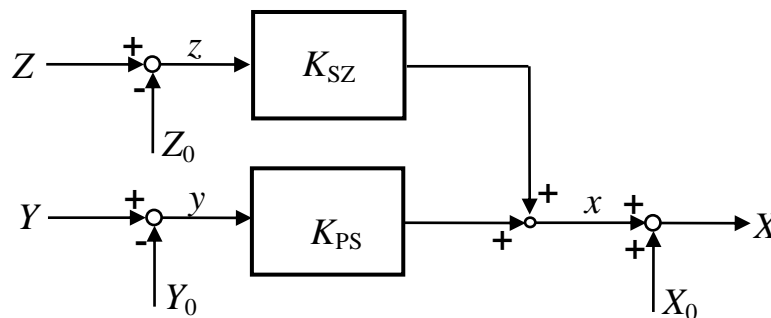
wird **Übertragungsbeiwert** der Strecke genannt. Ist der formelmäßige Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  bekannt, kann  $K_{\text{PS}}$  mit Hilfe der Gleichung (2.6) bestimmt werden. In den meisten Fällen wird man diesen Zusammenhang jedoch nur experimentell ermitteln können. Man legt dann die Tangente im Arbeits-

punkt an die gemessene Kurve  $X = f(Y, Z_0)$  und bestimmt  $K_{PS}$  gemäß Bild 2.3 als Quotient der Kleinsignale  $\left. \frac{x}{y} \right|_{AP}$ .

Entsprechend kann man auch den Einfluss der Störgröße erfassen. Bei konstanter Stellgröße  $Y = Y_0$  ermittelt man

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z} f(Y, Z) \right|_{AP} = \left. \frac{\partial X}{\partial Z} \right|_{AP} \approx \left. \frac{\Delta X}{\Delta Z} \right|_{AP} = \left. \frac{x}{z} \right|_{AP} = K_{SZ} \quad , \quad (2.7)$$

wobei  $x = X - X_0$  und  $z = Z - Z_0$  ist.



**Bild 2.4:** Darstellung einer linearisierten Strecke um einen Arbeitspunkt  
 $K_{PS}$  Übertragungsbeiwert der Strecke  
 $K_{SZ}$  Übertragungsbeiwert der Störstrecke  
 $X_0, Y_0, Z_0$  Bezugswerte im Arbeitspunkt

Die Bestimmung des **Störübertragungsbeiwertes**  $K_{SZ}$  kann unter Umständen Schwierigkeiten bereiten, wenn die Störgröße  $z$  nicht genau erfassbar ist. Wichtig ist jedoch vor allen Dingen der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$ , da er für die Stabilität der Regelung von Bedeutung ist.

Mit den Gleichungen (2.6) und (2.7) ist das linearisierte Kleinsignalübertragungsverhalten der Regelstrecke im stationären Zustand bekannt. Für die Abweichungen kann man jetzt

$$x = K_{PS} y + K_{SZ} z \quad (2.8)$$

schreiben, Bild 2.4. Die Übertragungsbeiwerte  $K_{PS}$  und  $K_{SZ}$  geben an, wie stark die Stellgröße und die Störgröße auf die Regelgröße einwirken. Die Beziehung (2.8) lässt sich noch umschreiben,

$$x = K_{PS} \left( y + \frac{K_{SZ}}{K_{PS}} z \right) \quad .$$

Betrachtet man den Ausdruck  $\frac{K_{SZ}}{K_{PS}} z$  als Störgröße, so bedeutet das, dass man sich die so umgeformte wirkliche Störung  $z$  dann an der gleichen Stelle wie die



Stellgröße  $y$  angreifend denken kann. In realen Systemen wird der Angriffsort von  $y$  bzw.  $z$  meistens verschieden sein, das heißt  $K_{PS} \neq K_{SZ}$ .

### 2.2.2 Kennlinie des Proportional-Reglers

Der einfachste Regler besteht aus einem proportionalen Übertragungsglied, das die Regeldifferenz  $e$  ohne dynamische Verformung einfach um einen Faktor  $K_P$  verstärkt oder abschwächt, je nachdem ob  $K_P > 1$  oder  $K_P < 1$  ist, Bild 1.1.

Die Stellgröße  $y$  wird also gemäß der Beziehung

$$Y = Y_0 + K_P \cdot E = Y_0 + K_P \cdot (W - X) \quad (2.9)$$

gebildet.  $Y_0$  ist dabei der Wert der Stellgröße für  $E = 0$ , der natürlich auch Null sein kann.

Führt man auch hier wieder die Abweichungen vom stationären Zustand ein, so ergibt sich mit  $X = X_0 + x$ ,  $W = W_0 + w$

$$Y - Y_0 = y = K_P(W_0 - X_0) + K_P(w - x). \quad (2.10)$$

Man kann nun  $Y_0$  so wählen, dass  $X_0 = W_0$  wird. Damit vereinfacht sich die Gleichung (2.10) zu

$$\begin{aligned} y &= K_P \cdot (w - x) = K_P \cdot e \\ Y &= Y_0 + y \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Proportionalverstärkung  $K_P$  ist eine **Kenngröße** der Regeleinrichtung.

Es ist auch üblich, statt der Kenngröße  $K_P$  den **bezogenen Proportionalbereich**  $x_p$  zur Kennzeichnung des Reglers heranzuziehen. Das ist der Bereich, um den sich die Regeldifferenz (oder die Regelgröße bei festem Wert der Führungsgröße) bezogen auf den Regelbereich ändern muss, um die Stellgröße über den Stellbereich  $Y_h$  zu ändern. Dabei wird Linearität angenommen. Aus der Gleichung (2.11) folgt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} x_p \cdot X_h \cdot K_P &= Y_h \\ x_p &= \frac{1}{K_P} \cdot \frac{Y_h}{X_h} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Er besagt, um wie viel Prozent vom Regelbereich bzw. Messbereich  $X_h$  des Reglers sich die Regeldifferenz ändern muss, um den vollen Stellbereich  $Y_h$  zu durchfahren. Der bezogene Proportionalbereich ist eine dimensionslose Größe und wird üblicherweise in Prozent angegeben. Der Proportionalbereich in Prozent ergibt sich durch Multiplikation mit 100%.

Bezieht man die Regeldifferenz auf den Messbereich und die Stellgröße auf den Stellhub, so kann man die Beziehungen



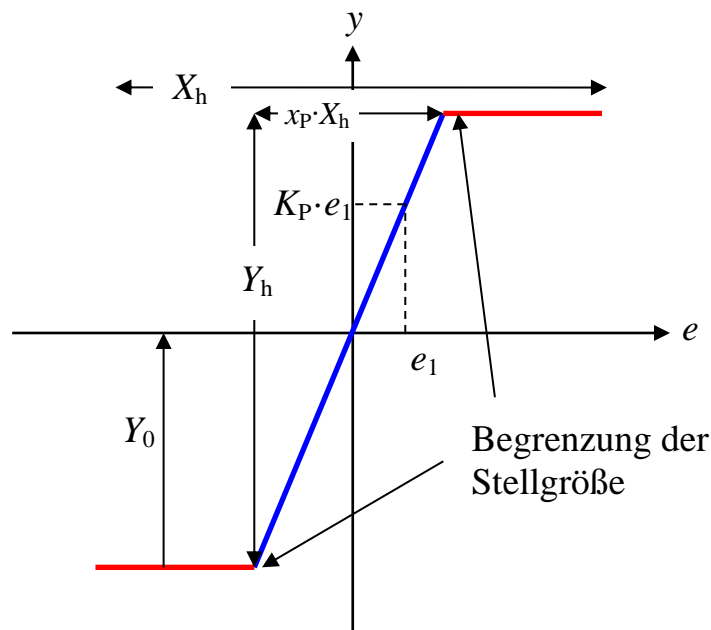
$$\tilde{y} = \tilde{K}_p \cdot \tilde{e} \quad \text{und} \quad \tilde{K}_p = \frac{1}{x_p} \quad (2.13)$$

angeben.

$\tilde{e} = \frac{e}{X_h}$  ,  $\tilde{y} = \frac{y}{Y_h}$  sind dimensionslose bezogene Größen, deren Betrag bei geeigneter Wahl der Bezugsgrößen immer zwischen Null und Eins bzw. zwischen minus Eins und Eins liegt. Die besondere Kennzeichnung ( $\sim$ ) dient hier zur Unterscheidung zwischen bezogenen und nicht bezogenen Größen.

Es ist oft von Vorteil, wenn man eine solche Normierung nicht nur beim Regler, sondern auch bei der Strecke bzw. bei allen Übertragungsgliedern durchführt. Man wird damit frei von den oft verwickelten Dimensionsbeziehungen. Universell einsetzbare Regler verarbeiten bezogene Signale und verwenden deshalb dimensionslose Verstärkungen.

Bei allen im Folgenden noch benutzten Beziehungen ist es im Grunde offen, ob die Größen selbst oder bezogene Größen vorliegen, da sich kein prinzipieller Unterschied in der Form der Gleichungen ergibt. Meist werden bezogene Größen verwendet, die aber oft nicht besonders gekennzeichnet sind.



*Bild 2.5: Kennlinie eines Proportional-Reglers mit  $x_p = 30\%$*   
 *$e$  Regeldifferenz*  
 *$K_p$  Proportionalverstärkung des P-Reglers*  
 *$X_p$  Proportionalbereich des P-Reglers*

Bild 2.5 zeigt die Kennlinie des P-Reglers. Man erkennt daraus, dass  $K_p$  bzw.  $x_p$  ein Maß für die Steilheit der Kennlinie ist. Ein großes  $K_p$  entspricht einem kleinen  $x_p$  und bedeutet eine steile Kennlinie.

### Zahlenbeispiel 1

Ein Temperaturregelkreis ist mit einem Proportionalregler ausgeführt, der bei einer Temperaturabweichung von  $\Delta X = 15^\circ\text{C}$  eine Stellhubvergrößerung von  $\Delta Y = 3\text{ mm}$  hervorruft. Dann beträgt

$$K_P = \Delta Y / \Delta X = y / x = 0,2\text{ mm}/^\circ\text{C} \quad .$$

Ist der gesamte Stellbereich  $Y_h = 40\text{ mm}$ , dann wird der P-Bereich

$$X_P = Y_h / K_P = 40\text{ mm} / 0,2\text{mm}/^\circ\text{C} = 200^\circ\text{C} \quad .$$

Für einen Messbereich  $X_h = 250^\circ\text{C}$  ergibt sich damit ein bezogener Proportionalbereich von

$$x_p = 200^\circ\text{C} / 250^\circ\text{C} = 0,8 \quad \text{bzw. } 80\% \quad .$$

### 2.2.3 Gleichungen des Regelkreises

Nachdem nun die linearen Beziehungen zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen für Regler und Strecke im **stationären Betrieb** bekannt sind, kann man das Verhalten des geschlossenen Regelkreises gemäß Bild 2.3 im stationären Zustand berechnen. Man zieht dazu die Gleichungen (2.8) und (2.11) heran.

Da in allen folgenden Kapiteln nur lineare bzw. linearisierte Systeme behandelt werden, ist die besondere Kennzeichnung der Großsignale durch große Buchstaben nicht notwendig und erschwert nur die Betrachtungen.

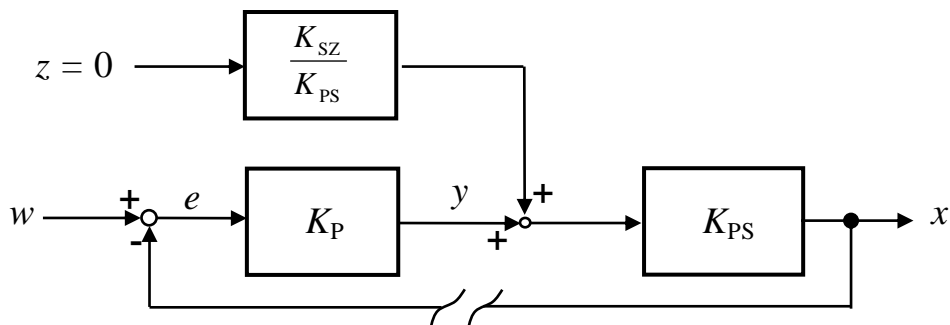
Falls ein System linear ist, sind die Beziehungen (2.8) und (2.11) exakt. Ist das System nur linearisiert, wird vorausgesetzt, dass unter  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nur die Abweichungen von einem Arbeitspunkt verstanden werden. Wie schon erwähnt, kann man sich unter  $w$ ,  $x$ ,  $y$  und  $z$  auch bezogene Größen vorstellen, dann sind die Übertragungsbeiwerte  $K_P$  und  $K_{PS}$  ebenfalls dimensionslos.

Eliminiert man aus den Gleichungen (2.8) und (2.11) die Stellgröße  $y$ , so erhält man eine Beziehung zwischen  $x$ ,  $w$  und  $z$ , die das Verhalten des **geschlossenen Regelkreises** im stationären Betrieb beschreibt,

$$x = \frac{K_{PS} \cdot K_P}{1 + K_{PS} \cdot K_P} \cdot w + \frac{K_{SZ}}{1 + K_{PS} \cdot K_P} \cdot z \quad . \quad (2.14)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass ein stationärer Zustand überhaupt existiert, das heißt, dass der Regelkreis stabil arbeitet, wenn er geschlossen wird. Dieses Problem wird in den folgenden Kapiteln noch eingehend untersucht, da es von besonderer Bedeutung für alle Regelungen ist.

Zunächst sei jedoch angenommen, dass Stabilität vorliegt. Der stationäre Zustand des geschlossenen Kreises stellt sich dann gemäß Gleichung (2.8) und (2.11) ein.



**Bild 2.6:** Aufgeschnittener Regelkreis (Rückführung unterbrochen)

$K_{PS}$  Übertragungsbeiwert der Strecke

$K_P$  Proportionalverstärkung des Reglers

$K_{SZ}$  Übertragungsbeiwert der Störstrecke

$V_0$  Kreisverstärkung

$$V_0 = \frac{x}{w} \bigg|_{z=\text{konst.}} = \frac{x}{e} \bigg|_{z=\text{konst.}} = K_P \cdot K_{PS}$$

Das Produkt

$$V_0 = K_P \cdot K_{PS} \quad (2.15)$$

wird Kreisverstärkung genannt.  $V_0$  ist immer eine dimensionslose Größe, auch wenn  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  nicht bezogen sind, die Übertragungsbeiwerte  $K_P$  und  $K_{PS}$  also dimensionsbehaftet sind.

Man kann  $V_0$  messen, wenn man den Regelkreis, wie in Bild 2.6 angedeutet, auftrennt und die Abweichung vom Arbeitspunkt  $x$  bei einer Aufschaltung von  $e_0$  bestimmt.

Der statische **Regelfaktor**

$$R = \frac{1}{1 + V_0} = \frac{x(z) \text{ mit Regelung}}{x(z) \text{ ohne Regelung}} \quad (2.16)$$

gibt an, um welchen Faktor der Einfluss einer Störgröße durch die Regelung gegenüber einer Steuerung reduziert wird. Je kleiner  $R$  ist, desto weniger wirkt sich die Störgröße  $z$  auf die Regelgröße  $x$  aus. Es ist also anzustreben, die Kreisverstärkung  $V_0 = K_P \cdot K_{PS}$  und damit den Übertragungsbeiwert  $K_P$  der Regelung möglichst groß zu machen.

Im Grenzfall  $K_P \rightarrow \infty$  vereinfacht sich die Gleichung (2.14) zu

$$x = w \quad ,$$

da

$$\lim_{K_P \rightarrow \infty} \frac{K_{PS} \cdot K_P}{1 + K_{PS} \cdot K_P} = 1$$

und

$$\lim_{K_P \rightarrow \infty} \frac{K_{SZ}}{1 + K_{PS} \cdot K_P} = 0$$

wird.

Die Regelgröße ist dann unabhängig von der Störgröße immer gleich der Führungsgröße; die Regeldifferenz verschwindet. Der Regelkreis würde damit für  $K_P \rightarrow \infty$  seinen Zweck ideal erfüllen. Es ist jedoch aus Stabilitätsgründen nicht möglich, die Proportionalverstärkung  $K_P$  der Regeleinrichtung beliebig groß zu wählen. Es wird deshalb bei Verwendung eines Proportionalreglers immer eine **bleibende Regeldifferenz**

$$e = w - x = \frac{1}{1 + K_{PS} \cdot K_P} \cdot w - \frac{K_{SZ}}{1 + K_{PS} \cdot K_P} \cdot z \quad (2.17)$$

entstehen.

Um die stationäre Genauigkeit von Regelkreisen zu verbessern, werden in der Praxis meist Regler mit integrierendem Verhalten verwendet. Davon wird in den weiteren Kapiteln noch die Rede sein.

#### 2.2.4 Arbeitspunktbestimmung des Regelkreises

Man kann den durch die Gleichungen (2.14) und (2.15) gegebenen Zusammenhang wieder grafisch darstellen.

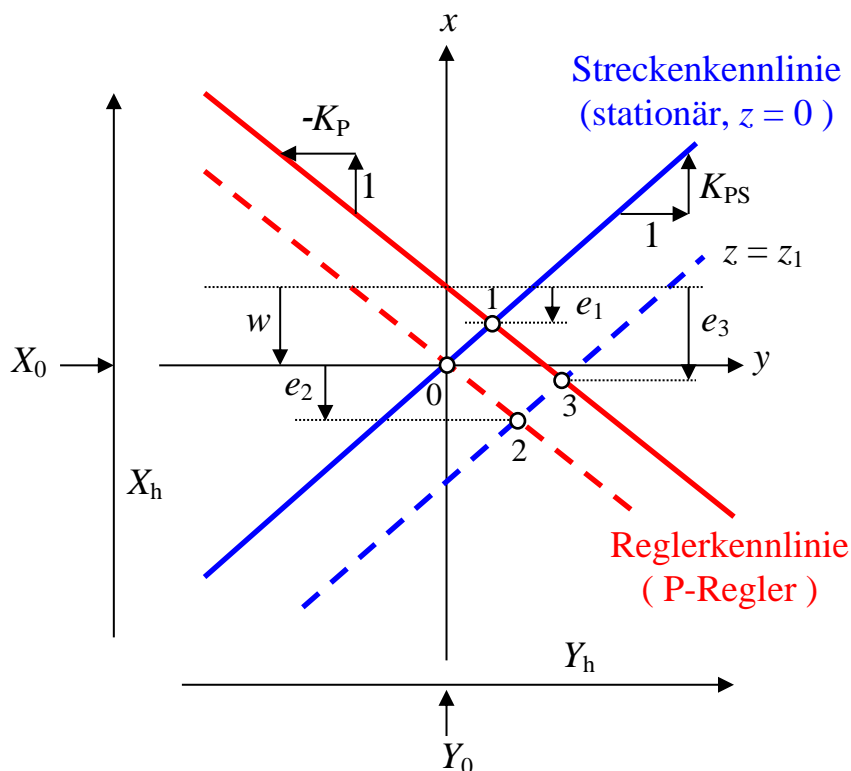


Bild 2.7: Arbeitspunktbestimmung des Regelkreises

Bild 2.7 zeigt die Kennlinien von Regler und Strecke zusammen in einem Koordinatensystem aufgetragen. Der Schnittpunkt  $P_1$  der beiden Kennlinien liefert den Arbeitspunkt des Regelkreises. Man erkennt, dass die bleibende Regeldifferenz umso geringer wird, je größer  $K_P$  wird.

Für  $w = 0$  und  $z = 0$  wird  $e$  unabhängig vom Übertragungsbeiwert des Reglers  $K_P$  ebenfalls Null (Punkt  $P_0$  in Bild 2.7). Man kann diesen Sachverhalt auf zwei verschiedene Arten interpretieren:

- Sind  $x$ ,  $w$ ,  $z$  die tatsächlichen Größen, so verschwindet die Regeldifferenz  $e$ , wenn sämtliche dieser Größen Null werden.
- Handelt es sich jedoch um die Abweichung vom stationären Zustand, so bedeutet  $w = 0$  und  $z = 0$ , dass die Stellgröße  $Y_0$  gerade so gewählt ist, dass bei der Störgröße  $z_0$  die Regelgröße den gewünschten Wert annimmt. Dies gilt dann aber nur für diesen speziellen Arbeitspunkt. Sobald eine Störgrößen- oder Führungsgrößenänderung auftritt, ergibt sich eine Regeldifferenz gemäß Gleichung (2.17).

Bei einer **Festwertregelung** ist  $w = 0$ . Die Regeldifferenz wird dann nur durch die Störgröße bestimmt: Arbeitspunkt  $P_2$  in Bild 2.7, Regeldifferenz  $e_2$ . Bei einer **Folgeregelung** ist  $w \neq 0$ . Für  $z = 0$  ergibt sich der Arbeitspunkt  $P_1$  und die Regeldifferenz  $e_1$ . Bei einer Folgeregelung mit  $z \neq 0$  erhält man durch Überlagerung beider Wirkungen den Punkt  $P_3$  und die Regeldifferenz  $e_3$  in Bild 2.7.

### Im Kapitel 2 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:

PFK 1: Finden sinnvoller Systemgrenzen

Denken in Systemen. Abgrenzung der zu betrachtenden Aspekte einer Aufgabe von äußeren Aspekten, die nicht unmittelbar beeinflussbar sind.

PFK 2: Abstrahieren

Verallgemeinern, verkürzen, formalisieren und vereinfachen, um die wesentlichen Aspekte eines fachlichen Problems oder einer beliebigen Aufgabe herauszuarbeiten, und beurteilen von Modellen.

- Charakterisierung von Regelstrecken (mit/ohne Ausgleich)
- Linearisierung einer nichtlinearen Strecke um einen Arbeitspunkt AP
- Kennwerte von Regelstrecken:  $K_{PS}$ ,  $K_{SZ}$
- Proportional-Regler: Regelbereich  $X_h$ , Stellbereich  $Y_h$ , Regelfaktor  $R$ , Kennwerte (Proportionalverstärkung  $K_P$ )

## Zahlenbeispiel 2

Zur Verdeutlichung soll das bisher Besprochene durch ein Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Dabei werden wieder die schon im ersten Beispiel angenommenen Verhältnisse zugrunde gelegt. Als Störgröße wirke eine Heizwertänderung des Heizgases von  $\Delta Z = 800 \text{ kJ/m}^3$ , die bei konstanter Ventilstellung eine Änderung der Regelgröße um  $\Delta X = 30^\circ\text{C}$  zur Folge hat. Damit wird

$$K_{sz} = \frac{30^\circ\text{C}}{800 \text{ kJ/m}^3} = 0,0375 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kJ/m}^3}.$$

Eine Änderung des Ventilhubes um  $\Delta Y = 10 \text{ mm}$  bewirke bei konstanter Störgröße eine Temperaturänderung von  $\Delta X = 80^\circ\text{C}$ . Der Übertragungsbeiwert der Strecke ist also

$$K_{ps} = \frac{80^\circ\text{C}}{10 \text{ mm}} = 8 \text{ }^\circ\text{C/mm},$$

so dass sich mit  $K_p = 0,2 \text{ mm/}^\circ\text{C}$  die dimensionslose Kreisverstärkung

$$V_o = K_p \cdot K_{ps} = 1,6 \text{ ergibt.}$$

Liegt eine Festwertregelung mit  $w = 0$  vor, so ergibt sich bei einer Störgröße von  $z = 600 \text{ kJ/m}^3$  die bleibende Regeldifferenz

$$e = \frac{K_{sz}}{1 + V_o} \cdot z = \frac{0,0375 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kJ/m}^3}}{1 + 1,6} \cdot 600 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 8,67^\circ\text{C},$$

gegenüber  $22,5^\circ\text{C}$  ( $K_{sz} \cdot 600 \text{ kJ/m}^3$ ), die sich bei einer Steuerung einstellen würden.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Regelung zwar eine Verbesserung gegenüber der Steuerung darstellt, das Regelergebnis aber noch unbefriedigend ist, da die bleibende Regeldifferenz relativ groß ist. Abhilfe wäre nur durch die Vergrößerung von  $K_p$  oder durch Verwendung eines anderen Reglertyps zu erreichen.

### 3. Zeitverhalten

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde außer Acht gelassen, dass bei allen realen Systemen eine gewisse Zeit vergeht, bis nach einer Änderung der Eingangsgröße (z.B. die Stellgröße  $y$ ) die Ausgangsgröße (z.B. die Regelgröße  $x$ ) ihren neuen stationären Zustand erreicht. Es ist auch möglich, dass ein solcher stationärer Zustand gar nicht existiert, sondern dass sich bei konstanter Eingangsgröße  $y$  die Ausgangsgröße  $x$  mit konstanter Geschwindigkeit oder konstanter Beschleunigung ändert (Systeme ohne Ausgleich). Dieses **Zeitverhalten** der Übertragungssysteme ist von besonderer Bedeutung für alle regelungstechnischen Untersuchungen.

Die Beschreibung des stationären Verhaltens von Regelkreisen diene der Einführung der notwendigen Begriffe und der Veranschaulichung der vorliegenden Problematik. Die Aufgabe der Regelungstechnik besteht in der Festlegung eines geeigneten Zeitverhaltens von Regelkreisen. Dazu muss die Frage untersucht werden, welcher zeitliche Verlauf der Regelgröße sich bei einer Änderung der Führungsgröße  $w$  bzw. der Störgröße  $z$  ergibt.

Es ist selbstverständlich erstrebenswert, den Regelkreis so auszulegen, dass die Regelgröße der Führungsgröße möglichst unverzögert folgt und Störungen vollständig ausgeglichen werden. Betrachtet man nur das stationäre Verhalten (2.14), so würde sich die Möglichkeit  $K_p \rightarrow \infty$  anbieten. Warum diese Lösung nicht möglich ist, wird bei der Betrachtung des Zeitverhaltens deutlich.

#### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

In Abschnitt 2.2.1 wurde bereits angedeutet, dass der Zusammenhang zwischen der Eingangs- und der Ausgangsgröße eines Übertragungssystems im allgemeinen Fall durch die nichtlineare Differentialgleichung (2.2) beschrieben wird, deren Lösung jedoch gewöhnlich mit großen Schwierigkeiten verbunden ist. Man beschränkt sich deshalb, wie bei der Beschreibung des stationären Zustandes, auf die Betrachtung der Abweichungen, so dass man Gleichung (2.2) linearisieren kann. Es ergibt sich dann eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y \quad (3.1)$$

$x^{(\nu)} = \frac{d^\nu}{(dt)^\nu} x$  ist eine abgekürzte Schreibweise für die  $\nu$ -te Ableitung der Ausgangsgröße  $x$  nach der Zeit. Entsprechendes gilt für die Stell- bzw. Streckeneingangsgröße  $y$ .

Bei realen Systemen ist fast immer  $m \leq n$ , das heißt, dass eine endliche Eingangsgröße, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf das System einwirkt, auch nur eine endliche Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $t = 0$  hervorrufen kann. Ist  $m < n$ , so ist  $x$

bei endlichem  $y$  im ersten Augenblick Null, d.h. technische Systeme haben verzögerndes Verhalten.

$n$  wird die Ordnung der Differentialgleichung oder die Ordnung des betrachteten Systems genannt. Sie hängt von der Zahl der unabhängigen Energiespeicher (= Integratoren) ab. Beispiele in Abschnitt 4 werden diesen Zusammenhang näher erläutern.

Sind der zeitliche Verlauf der Eingangsgröße  $y$  und die Anfangsbedingungen  $x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$  bekannt, kann die Gleichung (3.1) geschlossen gelöst werden, das heißt man kann den zugehörigen zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße  $x(t)$  angeben. Da die Differentialgleichung (3.1) linear ist, kann die Gesamtlösung durch Überlagerung von Teillösungen (Superpositionsprinzip) gefunden werden.

Man geht dazu so vor, dass man zunächst die **homogene Gleichung**

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = 0 \quad (3.2)$$

durch den Ansatz

$$x_h = C \cdot e^{s \cdot t} \quad (3.3)$$

löst. Durch Einsetzen von (3.3) in (3.2) folgt die Beziehung

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0 \quad , \quad (3.4)$$

die **charakteristische Gleichung** der Differentialgleichung genannt wird. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass (3.4)  $n$  Lösungen (Wurzeln oder Eigenwerte)  $s_1, \dots, s_n$  haben muss, das heißt man kann auch

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (3.5)$$

schreiben.

Da die Koeffizienten der homogenen Differentialgleichung  $a_i$  reell sind, sind die **Wurzeln**  $s_1, \dots, s_n$  entweder reell oder es treten konjugiert komplexe Paare auf. Es werden insgesamt drei Fälle unterschieden:

- Die Wurzeln sind reell und voneinander verschieden:

Mit (3.3) folgt dann die **homogene Lösung**

$$x_h = C_1 \cdot e^{s_1 t} + \dots + C_n \cdot e^{s_n t} = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{s_k t} \quad (3.6)$$

mit aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten  $C_i$ .

- Neben reellen Wurzeln treten konjugiert komplexe auf:

$$s_1 = \sigma + j\omega \quad , \quad s_2 = \sigma - j\omega \quad \text{und}$$

$s_3 \dots s_n$  sind reell.



$$x_h = C_1 \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \sum_{k=3}^n C_k \cdot e^{s_k t}$$

Hier wird der Lösungsanteil  $C_{c1} \cdot e^{s_1 t} + C_{c2} \cdot e^{s_2 t}$  zu einer reellen Zeitfunktion  $C_1 \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  zusammengefasst.

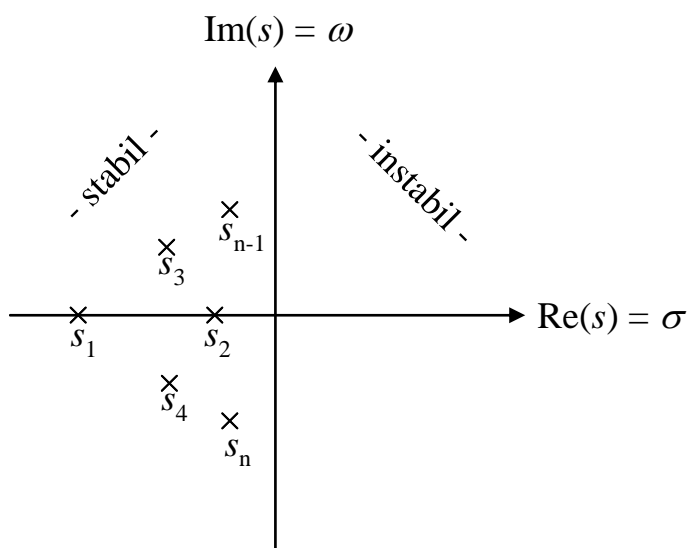
- Es treten zusätzlich mehrfache Wurzeln auf:

$s_1$  sei eine m-fache Wurzel ( $s_1 = s_2 = \dots = s_m$ )

$$x_h = e^{\sigma_1 t} \cdot \left( \sum_{i=1}^m C_i \cdot t^{i-1} \right) + \sum_{k=m+1}^n C_k \cdot e^{s_k t}$$

Es ist leicht einzusehen, dass  $x_h$  nur dann einem endlichen Grenzwert zustrebt, wenn die Wurzeln  $s_k$  der charakteristischen Gleichung negativ reell bzw. bei konjugiert komplexen  $s_k$  der Realteil  $\sigma_k$  negativ ist. Anderenfalls würden sich ja aufklingende, das heißt mit der Zeit wachsende Exponentialfunktionen oder exponentiell wachsende Schwingungen ergeben.

Denkt man sich die Lösungen  $s_1, \dots, s_n$  in einer Gauß'schen Zahlenebene aufgetragen, wie es in Bild 3.1 dargestellt ist, so ist das System nur stabil, wenn die Realteile aller Wurzeln  $\sigma_\lambda$  in der linken Halbebene liegen.



*Bild 3.1: Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $s_1 \dots s_n$  für ein stabiles System befinden sich in der linken Halbebene*

Zusätzlich zu der homogenen Lösung (berechnet aus den Koeffizienten  $a_i$ ), die die Eigendynamik des Systems beschreibt, kann mit den Koeffizienten  $b_i$ , dem vorgegebenen Zeitverlauf einer „Störfunktion“  $y(t)$  und einem geeigneten Ansatz die partikuläre Lösung  $x_p$  bestimmt werden.

Die Gesamtlösung der Gleichung (3.1) ergibt sich nun aus der Überlagerung der homogenen Lösung  $x_h$  und der so genannten partikulären Lösung  $x_p$ ,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad , \quad (3.7)$$

wobei  $x_p$  den speziellen Verlauf der Eingangsgröße  $y(t)$  berücksichtigt, der ja in  $x_h$  noch nicht enthalten war. Die so genannten Integrationskonstanten  $C_\lambda$  werden über die Anfangsbedingungen bestimmt. Es gibt Verfahren, um einen Ansatz für die partikuläre Lösung  $x_p$  zu finden, jedoch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Wichtig sind vor allem folgende Tatsachen:

1. Der Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße eines Systems ist durch die Differentialgleichung (3.1) gegeben.
2. Ihre Lösung kann durch Überlagerung der Teillösungen  $x_h$  und  $x_p$  gewonnen werden.
3. Das System ist nur dann stabil, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung (3.4) bzw. (3.5) in der linken ***s-Halbebene*** liegen (Bild 3.1).

Ist die dritte Bedingung erfüllt, so strebt das System, das durch die Gleichung (3.1) beschrieben wird, für  $y = \text{konst.} = y_0$  einem stationären Zustand  $x_0$  zu. Da in diesem stationären Zustand keine Änderungen der Systemgrößen mehr vorliegen, erhält man aus (3.1) sofort die ***stationäre Lösung***.

$$x_0 = \frac{b_0}{a_0} \cdot y_0 \quad . \quad (3.8)$$

Ist  $y_0 \equiv y$  und  $x_0 \equiv x$ , so ist der Ausdruck  $b_0/a_0$  nichts anderes als der ***Übertragungsbeiwert*** der Strecke

$$K_{PS} = \frac{b_0}{a_0} \quad . \quad (3.9)$$

Wie bereits gesagt, bereitet es keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die Ausgangsgröße  $x(t)$  bei beliebigem, aber bekanntem zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Systemkonstanten  $a_v$ ,  $b_\mu$  bekannt sind. Um jedoch eine gute Vergleichsmöglichkeit zwischen verschiedenen Systemen zu bekommen, ist es zweckmäßig, die Lösung von (3.1) für bestimmte Eingangsfunktionen, so genannte ***Testfunktionen***, zu bestimmen. Das Auffinden der Lösung kann dabei rechnerisch auf dem angedeuteten Weg oder aber experimentell vorgenommen werden, indem man die Testfunktion zum Zeitpunkt  $t = 0$  dem in Ruhe befindlichen System als Eingangsgröße aufschaltet und dann die Reaktion der Ausgangsgröße beobachtet. Die Ausgangsgröße kann z.B. mit einem digitalen Speicheroszilloskop aufgezeichnet werden. Man hat dann das dynamische und stationäre Verhalten des Systems bestimmt.

## 3.2 Testfunktionen

### 3.2.1 Sprungfunktion – Sprungantwort

Die Eingangsfunktion  $y(t)$  wird hier zum Zeitpunkt  $t = 0$  sprungförmig um einen bestimmten Wert  $y_0$  geändert,

$$y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t). \quad (3.10)$$

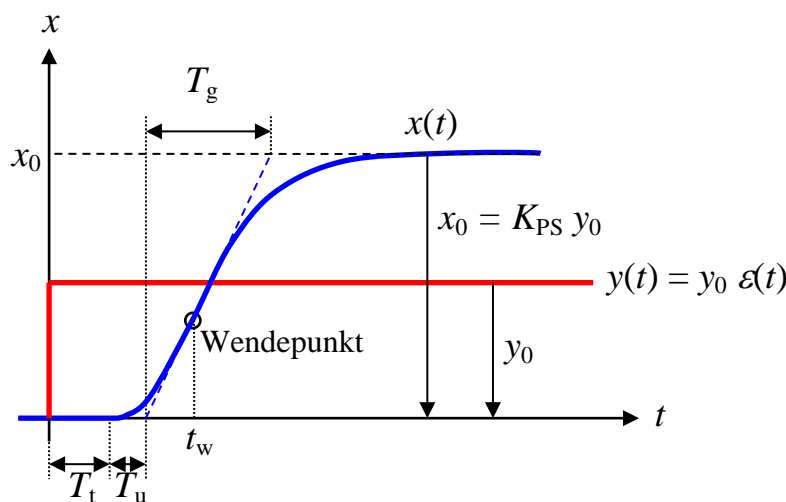
$\varepsilon(t)$  beschreibt dabei den **Einheitssprung** (unit step), der den Bedingungen

$$\varepsilon(t < 0) = 0$$

$$\varepsilon(t \geq 0) = 1$$

genügt.

Der zeitliche Verlauf  $x(t)$  als Ergebnis dieser Anregungsfunktion wird **Sprungantwort** (step response) genannt. Bild 3.2 zeigt Eingangs- und Ausgangsfunktion eines Übertragungssystems (Regelstrecke) mit Ausgleich.



**Bild 3.2:** Sprungantwort eines Übertragungssystems (Regelstrecke) mit Ausgleich – gekennzeichnet durch die Kennwerte:

$T_t$	Totzeit	$T_g$	Ausgleichszeit
$T_u$	Verzugszeit	$K_{PS}$	Übertragungsbeiwert

Der dargestellte Verlauf ist eine mögliche Lösung der Differentialgleichung (3.1). Allerdings ist in Bild 3.2 noch ein Effekt enthalten, der bei praktischen Systemen manchmal auftritt und in Gleichung (3.1) noch nicht berücksichtigt ist. Dieser besteht darin, dass sich die Ausgangsgröße  $x(t)$  während einer **Totzeit** oder **Laufzeit**  $T_t$  nach der Aufschaltung der Eingangsgröße zunächst nicht ändert. Nach Ablauf von  $T_t$  entspricht  $x(t)$  dann genau der Lösung von (3.1). Oft ist es schwierig, die Zeit bis zur Wendetangente in  $T_t$  und  $T_u$  aufzuteilen. Deshalb wird die Totzeit  $T_t$  insbesondere bei kleinen Totzeiten zur Vereinfachung der Verzugszeit  $T_u$  zugeschlagen.

Bezieht man die Änderung der Ausgangsgröße  $x(t)$  auf die Änderung der Eingangsgröße  $y_0$ , bildet man also den Quotienten  $x(t)/y_0$ , so erhält man die **Übergangsfunktion** oder bezogene Sprungantwort  $h(t)$  (unit step response) des Systems.

Sind die Systemparameter  $a_v$ ,  $b_\mu$  nicht bekannt, das heißt die Sprungantwort oder die Übergangsfunktion liegt nur grafisch aufgrund einer Messung vor, so ist es nur mit beträchtlichem Aufwand möglich, die Parameter  $a_v$ ,  $b_\mu$  ungefähr zu bestimmen. Man begnügt sich dann oft mit einer näherungsweisen Kennzeichnung des Systems. Als zweckmäßig für die Praxis haben sich dazu die Größen  $T_t$  (**Totzeit**),  $T_u$  (**Verzugszeit**) und  $T_g$  (**Ausgleichszeit**) erwiesen.

Die Totzeit wurde bereits definiert. Die Verzugszeit  $T_u$  und die Ausgleichszeit  $T_g$  werden in folgender Weise bestimmt: Legt man die Tangente im Wendepunkt der Kurve  $x(t)$  an, so ergibt der Schnittpunkt der Tangente mit der Abszisse die Zeit  $T_t + T_u$ , der Schnittpunkt mit dem neuen, stationären Wert die Zeit  $T_t + T_u + T_g$  (Bild 3.2). Der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  des Übertragungsgliedes ergibt sich aus  $K_{PS} = x_0/y_0$ .

Damit kann das System durch die Kenngrößen  $T_t$ ,  $T_u$ ,  $T_g$  und  $K_{PS}$  näherungsweise beschrieben werden. Da bei einem System  $n$ -ter Ordnung mit der Totzeit  $T_t$  die Parameter  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  zusätzlich nötig wären, um das System exakt zu beschreiben, kann es sich bei der Beschreibung durch die Ersatzgrößen nur um eine Näherung handeln, die jedoch den Vorzug der Einfachheit hat und für die Praxis häufig genügt.

Die tatsächlichen Systemparameter hängen mit den Ersatzgrößen in recht komplizierter Weise zusammen, sodass es im allgemeinen Fall nur schwer möglich ist, aus der gemessenen Sprungantwort auf die Ordnung  $n$  des Systems zu schließen. Nur für den Sonderfall  $m = 0$  und zusammenfallender Wurzeln der charakteristischen Gleichung (System mit  $n$  gleichen Energiespeichern),

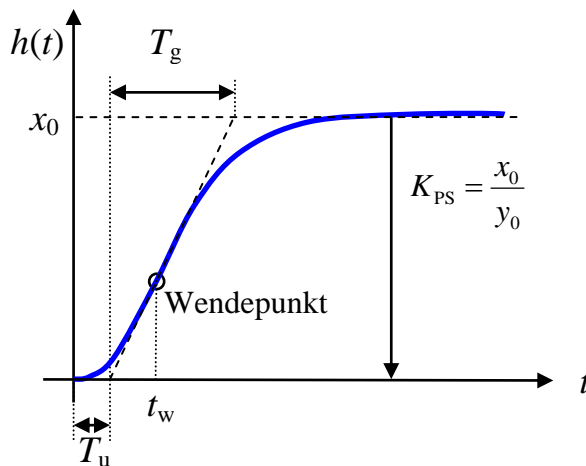
$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = -\frac{1}{T_1} \quad , \quad (3.11)$$

ist es einfach, aus der in Bild 3.3 dargestellten zugehörigen Übergangsfunktion  $h(t)$  über die eingezeichneten Größen  $T_u$ ,  $T_g$  und  $t_w$  (Zeit, bei welcher der Wendepunkt in  $x(t)$  erreicht ist) die Ordnung  $n$  und die Zeitkonstante  $T_1$  zu bestimmen [4]:

$$n \approx 10 \cdot \frac{T_u}{T_g} + 1 \quad (3.12)$$

$$T_1 = \frac{t_w}{n-1} = \frac{t_w}{10 \cdot \frac{T_u}{T_g}}$$

Dieser betrachtete Sonderfall ist von nicht allzu großer praktischer Bedeutung, veranschaulicht jedoch, dass bei Systemen höherer Ordnung die Verzugszeit  $T_u$  relativ groß wird.



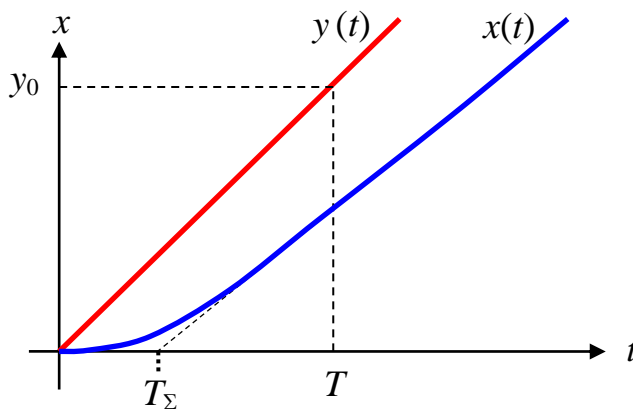
*Bild 3.3: Übergangsfunktion eines Systems mit  $n = 3$  gleichen Zeitkonstanten*

### 3.2.2 Anstiegsfunktion – Anstiegsantwort

Hierbei wird das Eingangssignal  $y(t)$  mit konstanter Geschwindigkeit geändert,

$$y(t) = y_0 \cdot \frac{t}{T}, \quad (3.13)$$

und die Reaktion des Systems beobachtet. Bild 3.4 zeigt die entstehende *Anstiegsantwort* oder *Rampenantwort*.



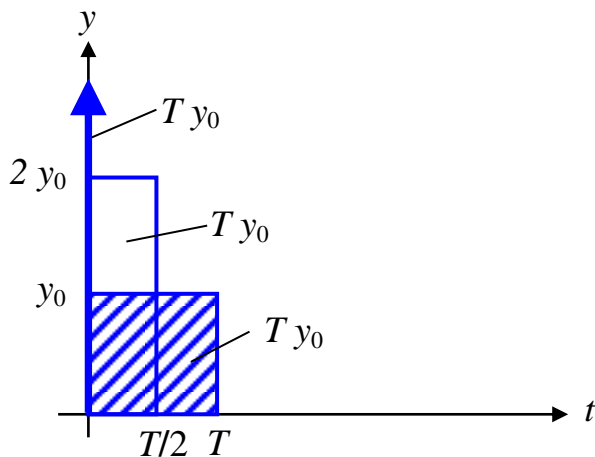
*Bild 3.4: Anstiegsfunktion und Anstiegsantwort (Rampenantwort)*

Der Schnittpunkt der Asymptote, der sich  $x(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nähert, mit der Abszisse liefert den Zeitpunkt  $T_\Sigma$ , für den  $T_\Sigma \approx T_t + T_u + T_g$  gilt (Summenzeitkonstante). Eine exakte Ermittlung der Größen  $T_u$ ,  $T_t$  und  $T_g$  ist hier nicht so leicht wie bei der Sprungantwort möglich. Der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  bestimmt die Steigung der Rampenantwort.

### 3.2.3 Impulsfunktion – Impulsantwort

Die **Impulsfunktion** und die **Impulsantwort** (pulse response) sind von eher theoretischer Bedeutung, jedoch kann in manchen Fällen eine näherungsweise Messung der Impulsantwort von Interesse sein.

Man denkt sich die Eingangsfunktion gemäß einem **Dirac-Impuls** (Nadel-Impuls) und beobachtet wieder die Reaktion des Systems. Bild 3.5 veranschaulicht, wie ein solcher Dirac-Impuls entsteht bzw. genähert werden kann.



*Bild 3.5: Bildung der Impulsfunktion  $\delta(t)$*

Man stellt sich vor, dass die Eingangsgröße  $y$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf  $y_0$  springt und zur Zeit  $t = T$  wieder auf 0 zurückgestellt wird. Dann verkürzt man die Impulsdauer z.B. auf  $T/2$  und steigert gleichzeitig die Amplitude auf  $2 \cdot y_0$ . Die Impulsfläche  $T \cdot y_0$  bleibt dabei konstant. Im Grenzfall einer unendlich kurzen Impulsdauer erhält man dann einen unendlich hohen Impuls, den gewichteten Dirac-Impuls  $T \cdot y_0 \cdot \delta(t)$ , dessen Fläche nach wie vor  $T \cdot y_0$  ist.

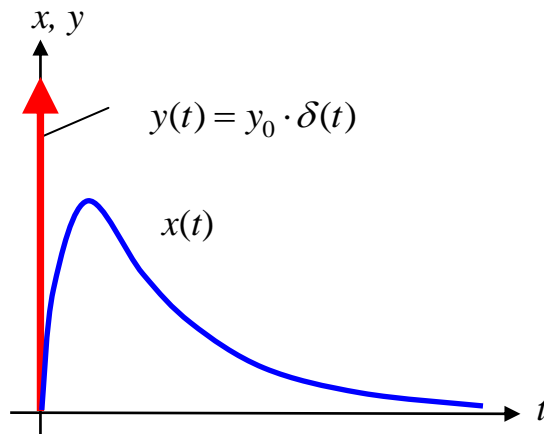
Der Verlauf der Ausgangsgröße bei dieser Anregungsfunktion ist im Bild 3.6 dargestellt.

Die bezogene Impulsantwort ( $y(t) = y_0 \cdot \delta(t)$ ) einer Strecke  $x(t) / y_0 = g(t)$  wird auch **Gewichtsfunktion** genannt.

Sie ist von besonderem Interesse, da bei bekannter Gewichtsfunktion  $g(t)$  die Ausgangsgröße  $x(t)$  auch bei beliebiger Eingangsfunktion  $y(t)$  gemäß der Beziehung

$$x(t) = \int_0^t y(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.14)$$

berechnet werden kann (**Faltungsintegral**, Duhamelsches Integral).



*Bild 3.6: Impulsfunktion und Impulsantwort*

So ergibt sich die Übergangsfunktion durch einmalige Integration der Gewichtsfunktion, die bezogene Anstiegsantwort durch zweimalige Integration der Gewichtsfunktion nach der Zeit.

In Wirklichkeit kann ein echter Dirac-Impuls  $\delta(t)$  natürlich nicht erzeugt werden, da weder die unendlich kurze Dauer noch die unendliche Amplitude realisiert werden können.

Wenn jedoch die Dauer  $T$  eines realen Impulses endlicher Amplitude  $y$  klein gegenüber den Verzögerungen des Systems ist, so kann man annehmen, dass der Unterschied zwischen der sich dabei ergebenden Systemantwort und der Impulsantwort unerheblich ist. Unter dieser Voraussetzung kann die Impulsantwort dann zumindest näherungsweise gemessen werden.

Häufig werden Systeme auch mit harmonischen Funktionen, wie z.B. der Sinusfunktion, angeregt. Die Antwort des Systems wird nach einem Einschwingvorgang wieder eine Sinusfunktion sein, welche gegenüber dem Eingangssignal phasenverschoben und in der Amplitude verändert sein kann (s. Kap. 4).

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Grundsätzlich sind in der Differentialgleichung (3.1) bereits alle linearen Übertragungsglieder mit Ausnahme des Totzeitsystems enthalten, es ist jedoch sinnvoll, die einfacheren Übertragungsglieder besonders zu betrachten. Man bekommt dadurch eine bessere Vorstellung von den Zusammenhängen.

Außerdem sind Regler meist Kombinationen einfacher Übertragungssysteme, so dass man die allgemeine Differentialgleichung (3.1) meist nur zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Strecke braucht, wenngleich diese auch häufig nur annäherungsweise durch die Ersatzparameter  $K_{PS}$ ,  $T_u$  und  $T_g$  gekennzeichnet ist.

### 3.3.1 Proportionalglied ohne Verzögerung (P-Glied)

Hier vereinfacht sich die Differentialgleichung zu der Beziehung

$$x = K_p \cdot y \quad ; \quad (3.15)$$

das Eingangssignal wird also völlig unverzögert in das Ausgangssignal umgeformt. Bei allen praktischen Systemen ist dies eine Näherung, da immer eine gewisse Verzögerung vorhanden sein wird. Diese kann jedoch so klein sein, dass sie ohne Bedenken vernachlässigt werden kann. Bei einer Durchflussregelstrecke folgt beispielsweise bei Flüssigkeiten die Menge nahezu unverzögert der Schieberstellung.

### 3.3.2 Proportionalglied mit Verzögerung (PT<sub>1</sub>-Glied)

Für  $m = 0$ ,  $n = 1$ ,  $b_0 = K_p$ ,  $a_1 = T_1$ ,  $a_0 = 1$  erhält man aus (3.1) die Differentialgleichung

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y \quad (3.16)$$

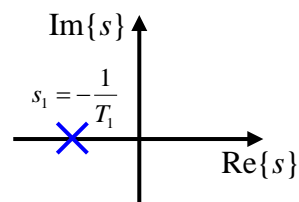
eines **PT<sub>1</sub>-Glieder**. Die Sprungantwort ergibt sich nach dem beschriebenen Lösungsverfahren. Mit dem Ansatz

$$x_h = C \cdot e^{s_1 \cdot t}$$

folgt

$$T_1 \cdot s_1 + 1 = 0 \quad ,$$

$$s_1 = -\frac{1}{T_1} \quad .$$



*Lage des Pols in der komplexen Ebene*

Als partikuläre Lösung kann man den stationären Zustand nehmen, dem das System zustrebt:

$$x_p = K_p \cdot y_0 \quad ;$$

Damit wird

$$x(t) = x_h + x_p = C \cdot e^{-t/T_1} + K_p \cdot y_0 \quad .$$

Die Integrationskonstante  $C$  bestimmt man aus der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  zu  $C = -K_p \cdot y_0$ , so dass man für die Sprungantwort

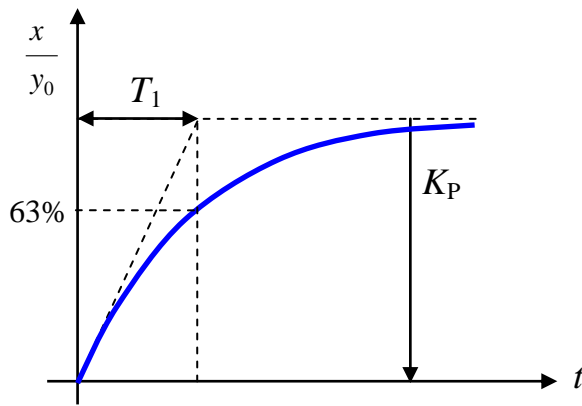
$$x(t) = K_p \cdot y_0 \cdot \left(1 - e^{-t/T_1}\right) \quad (3.17)$$

und für die Übergangsfunktion (bezogene Sprungantwort)

$$h(t) = \frac{x(t)}{y_0} = K_p \cdot \left(1 - e^{-t/T_1}\right) \quad (3.18)$$

erhält. Bild 3.7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Übergangsfunktion.





*Bild 3.7: Übergangsfunktion eines PT<sub>1</sub>-Gliedes*  
*K<sub>P</sub> Übertragungsbeiwert      T<sub>1</sub> Zeitkonstante*

Sie ist durch die Parameter  $K_P$  und  $T_1$  bestimmt. Für  $T_1 \rightarrow 0$  erhält man den Sonderfall eines P-Gliedes.

Beispiele für PT<sub>1</sub>-Glieder sind in Bild 3.8 enthalten.

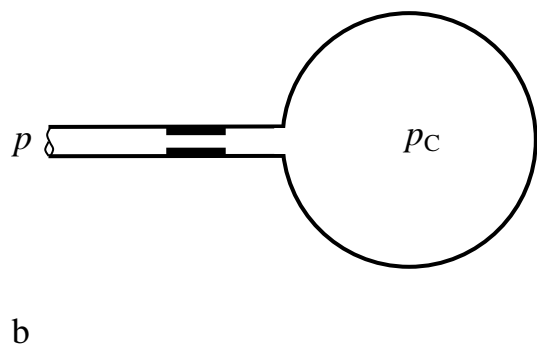
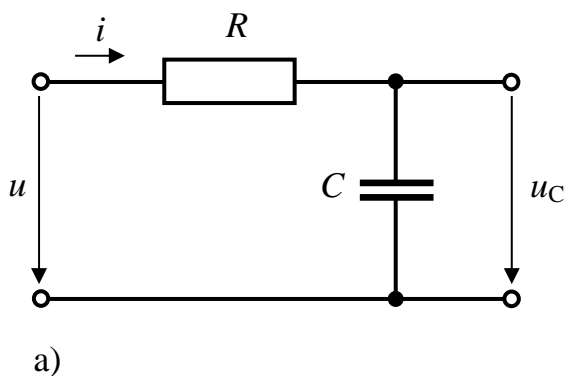
Für das RC-System gilt

$$i \cdot R + u_C = u.$$

Mit  $i = C \frac{d}{dt} u_C$  erhält man

$$R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = u.$$

Im vorliegenden Fall ist also  $T_1 = R \cdot C$  und  $K_P = 1$ . Für das in Bild 3.8b gezeigte System gilt eine entsprechende Beziehung.



*Bild 3.8: Beispiele für Verzögerungsglieder erster Ordnung*  
*u, p ~ Eingangsgröße      u<sub>C</sub>, p<sub>C</sub> ~ Ausgangsgröße*

### 3.3.3 Integrales Übertragungsglied (I-Glied)

Die Differentialgleichung des *I-Gliedes*

$$\frac{1}{K_I} \cdot \dot{x} = y \quad (3.19)$$

entsteht aus (3.1) für  $m = 0$ ,  $n = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1/K_I$ .

Man kann Gleichung (3.19) integrieren und erhält dann

$$x = K_I \int y \, dt + C \quad (3.20)$$

Die Integrationskonstante  $C$  hängt von der Anfangsbedingung  $x(0) = x(t=0) = C$  ab. Sie ist Null für  $x(0) = 0$ .

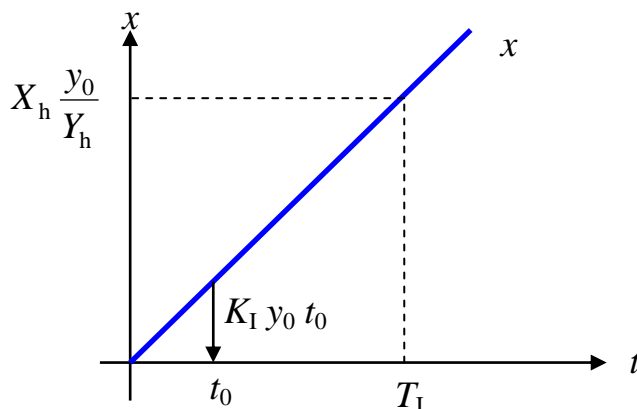
Die Ausgangsgröße ist also gleich dem Integral der Eingangsgröße.  $K_I$  wird **In-tegrierbeiwert** genannt.

Bezieht man  $x$  und  $y$  auf ihre Messbereiche  $X_h$  und  $Y_h$ , so erhält man den Zusammenhang

$$\frac{x}{X_h} = \frac{K_I \cdot Y_h}{X_h} \int \frac{y}{Y_h} \cdot dt = \frac{1}{T_I} \int \frac{y}{Y_h} \cdot dt \quad (3.21)$$

$T_I$  ist die Integrierzeit.

Die Sprungantwort eines Integrier-Gliedes ist eine mit der Zeit linear wachsende Funktion, wie sie in Bild 3.9 für  $y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t)$  dargestellt ist.



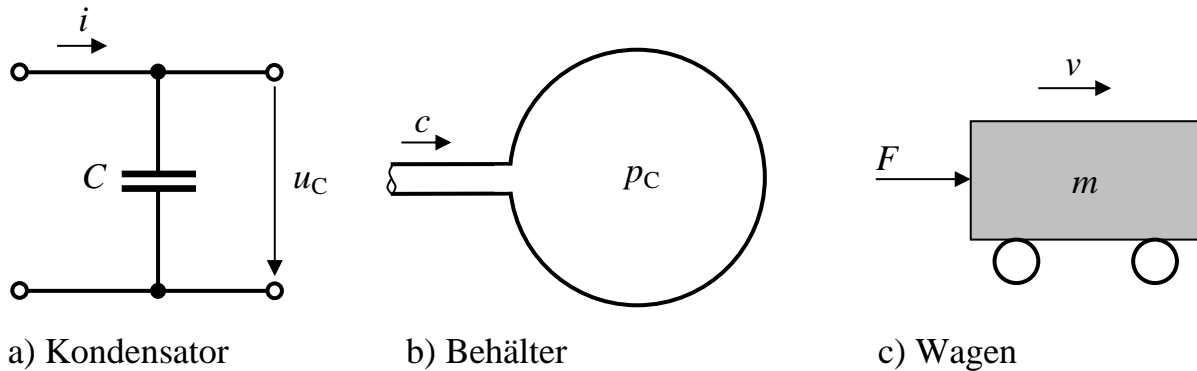
**Bild 3.9:** Sprungantwort eines I-Gliedes  
 $K_I$  Integrierbeiwert  $T_I$  Integrierzeit

Man kann sich die Integrierzeit  $T_I$  als die Zeit vorstellen, die vergeht, bis die Ausgangsgröße (Regelgröße  $x$ ) ihren Messbereich  $X_h$  durchlaufen hat, wenn die Eingangsgröße (Stellgröße  $y$ ) um ihren Stellbereich  $Y_h$  verändert wurde.

Die besondere Eigenschaft eines I-Gliedes besteht darin, dass sich die Ausgangsgröße so lange ändert, wie die Eingangsgröße ungleich Null ist. Für  $y = 0$  bleibt die Ausgangsgröße auf einem konstanten, beliebigen Wert, der von der

Vorgeschichte des Systems abhängt. Man nutzt diese Eigenschaft in Regeleinrichtungen dazu aus, Regelkreise zu verwirklichen, die im stationären Zustand eine verschwindende Regeldifferenz aufweisen sollen.

Beispiele für Integrierglieder sind in Bild 3.10 gezeigt.



*Bild 3.10: Beispiele für Integrierglieder*  
 $i, c, F \sim y$                        $u_C, p_C, v \sim x$

Wird ein Kondensator mit konstantem Strom gespeist, so nimmt seine Spannung gemäß der Beziehung

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

zu (Bild 3.10a).

Der Druck in einem Behälter, der mit einem Volumenstrom  $c$  (Teilchen pro Zeiteinheit) gespeist wird, nimmt ebenfalls gemäß

$$p = K_I \int c \cdot dt$$

zu.  $K_I$  hängt von der Temperatur  $T$ , dem Volumen des Speichers und der Boltzmann-Konstanten ab (Bild 3.10b).

Bei dem in Bild 3.10c gezeigten Wagen mit der Masse  $m$  greife eine Kraft  $F$  an. Dann besteht der Zusammenhang

$$v = \frac{1}{m} \int F \cdot dt$$

zwischen Geschwindigkeit und Kraft. Man hat wieder ein I-System vor sich.

### Zahlenbeispiel 3

Bei einem Wagen mit der Masse  $m = 1000 \text{ kg}$  betrage die maximale Schubkraft  $F_h = 2000 \text{ N}$ , der Messbereich für die Geschwindigkeit sei  $V_h = 100 \text{ km/h}$ .

Dann ist der Integrierbeiwert  $K_I = \frac{1}{m} = 10^{-3} \frac{1}{\text{kg}}$ .

Die Integrierzeit wird zu

$$T_I = \frac{1}{K_I} \frac{V_h}{F_h} = 10^3 \text{ kg} \frac{100 \text{ km/h}}{2000 \text{ N}} = 13,9 \text{ s}$$

berechnet.

Der Wagen wird also in 13,9 s auf 100 km/h beschleunigt, wenn die maximale Schubkraft angreift.

### 3.3.4 Differenzierendes Übertragungsglied (D-Glied)

Setzt man in (3.1)  $m = 1$ ,  $n = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = K_D$ ,  $a_0 = 1$ , so erhält man die Differentialgleichung eines **D-Gliedes**

$$x = K_D \cdot \dot{y} \quad (3.24)$$

Die Ausgangsgröße ist also proportional der zeitlichen Änderung der Eingangsgröße. Bezieht man  $x$  und  $y$  wieder auf die zugehörigen Messbereiche, so erhält man

$$\frac{x}{X_h} = \frac{K_D \cdot Y_h}{X_h} \cdot \frac{\dot{y}}{Y_h} = T_D \cdot \frac{\dot{y}}{Y_h} \quad (3.25)$$

$K_D$  wird **Differenzierbeiwert**,  $T_D$  **Differenzierzeit** genannt. Die Sprungantwort des D-Gliedes ist ein Nadelimpuls (siehe 3.2.3, Impulsfunktion), dessen Fläche gleich  $K_D \cdot y_0$  ist.

Beispiele für differenzierende Systeme sind in Bild 3.10 enthalten, wenn man dort Eingangs- und Ausgangsgröße vertauscht. So gilt z.B.

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C \quad .$$

Legt man an einen Kondensator plötzlich eine Spannung, so würde ein unendlich hoher, unendlich kurzer Stromimpuls entstehen. Man ersieht schon aus diesem Beispiel, dass differenzierende Systeme nur näherungsweise zu realisieren sind; aufgrund des endlichen Innenwiderstandes der Spannungsquelle kann der Strom nur einen endlichen Wert annehmen. Der Kondensator würde also auch nicht plötzlich, sondern verzögert auf die entsprechende Spannung aufgeladen.

### 3.3.5 Differenzierendes Übertragungsglied mit Verzögerung (DT<sub>1</sub>-Glieder)

Die Differentialgleichung

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_D \cdot \dot{y} \quad (3.26)$$

entsteht wieder aus (3.1) für  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = K_D$ ,  $a_1 = T_1$ ,  $a_0 = 1$ .

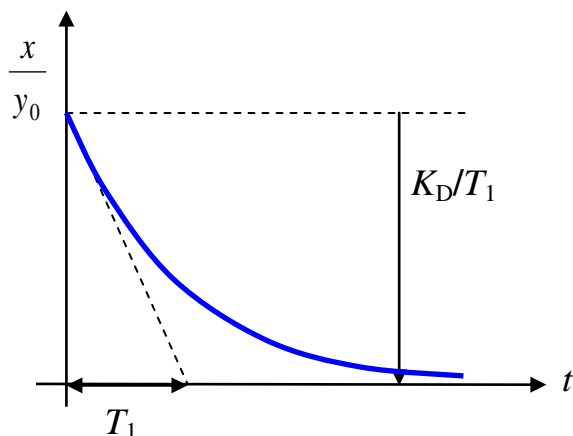
Die Lösung für  $y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t)$ , das heißt die Sprungantwort lautet

$$x(t) = y_0 \cdot \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (3.27)$$

Die Übergangsfunktion

$$\frac{x}{y_0} = \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (3.28)$$

ist in Bild 3.11 dargestellt.



*Bild 3.11: Übergangsfunktion eines DT<sub>1</sub>-Systems  
 $K_D$  Differenzierbeiwert  $T_1$  Zeitkonstante*

Wird die Verzögerungszeitkonstante  $T_1$  verkleinert, so wächst die Anfangsamplitude. Gleichzeitig klingt das Ausgangssignal schneller ab. Die Fläche unter der Übergangsfunktion ist dabei konstant gleich  $K_D$ . Im Grenzfall  $T_1 \rightarrow 0$  entsteht wieder ein D-Glied, dessen Sprungantwort ein Dirac-Impuls ist.

### 3.3.6 Proportional-Differentialglied mit Verzögerung 1. Ordnung (PDT<sub>1</sub>-Glieder)

Auch die Differentialgleichung

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_D \cdot \dot{y} + K_P \cdot y \quad (3.29)$$

ist ein Spezialfall der Gleichung (3.1).

$K_P$  ist der **Proportionalbeiwert**,  $K_D$  der **Differenzierbeiwert** des Übertragungsgliedes. Man kann die Beziehung (3.29) etwas umschreiben,

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_P \left( \frac{K_D}{K_P} \dot{y} + y \right) = K_P (T_v \cdot \dot{y} + y) \quad (3.30)$$

Der Ausdruck  $T_v = K_D/K_P$  wird **Vorhaltzeit** genannt.

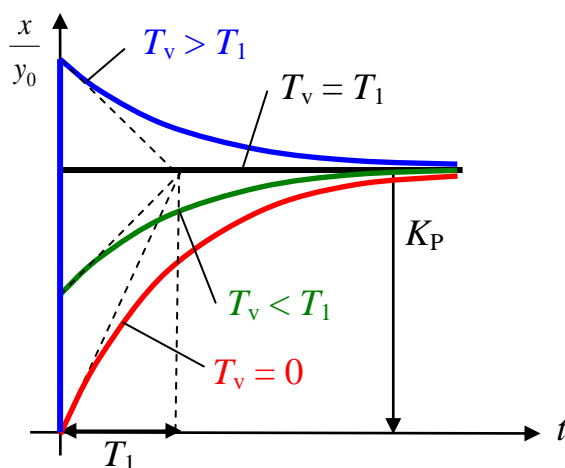
Der Verlauf der Sprungantwort

$$\frac{x(t)}{y_0} = K_P \left[ 1 + \left( \frac{T_v}{T_1} - 1 \right) \cdot e^{-t/T_1} \right] \quad (3.31)$$

hängt vom Verhältnis  $T_v/T_1$  ab.

Für  $T_v = 0$  erhält man ein PT<sub>1</sub>-Glieder, für  $T_v = T_1$  ein reines P-Glieder.

Bild 3.12 zeigt den Verlauf der Übergangsfunktion  $x(t)/y_0$  für verschiedene Werte von  $T_v/T_1$ .



**Bild 3.12:** Übergangsfunktion eines PDT<sub>1</sub>-Gliederes für verschiedene Werte von  $T_v/T_1$ .

Für  $T_1 \rightarrow 0$  entsteht der Grenzfall eines Proportional-Differentialgliedes (PD-Glieder) ohne Verzögerung. Die Sprungantwort bzw. Übergangsfunktion würde wieder einen Nadelimpuls aufweisen. Ein solches Übertragungsglied ist natür-

lich nicht realisierbar. Reale PD-Glieder sind in Wirklichkeit immer PDT<sub>1</sub>-Glieder, wobei das Verhältnis  $T_v/T_1$  meistens im Bereich  $2 < T_v/T_1 < 10$  liegt.

Die Palette der Übertragungsglieder ließe sich noch beliebig erweitern, mit den in den Punkten 3.3.1 bis 3.3.6 besprochenen sind jedoch die wichtigsten bekannt. Die meisten technischen Regler weisen ein Übertragungsverhalten auf, das entweder direkt einem der aufgeführten entspricht oder durch eine einfache Kombination aus ihnen hervorgeht.

Es soll jedoch noch ein weiteres Übertragungsglied behandelt werden, an dem auf besonders einfache Weise die Begriffe der *Stabilität* und *Dämpfung* erläutert werden können.

### 3.3.7 Übertragungssystem 2. Ordnung (PT<sub>2</sub>-Glied)

Das System wird durch die Beziehung

$$a_2 \cdot \ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_0 \cdot y \quad (3.32)$$

gekennzeichnet. Man schreibt diese Gleichung gewöhnlich in der Form

$$\frac{a_2}{a_0} \cdot \ddot{x} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \dot{x} + x = \frac{b_0}{a_0} \cdot y$$

und führt die folgenden Abkürzungen ein:

$$\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \omega_0 \quad , \quad \omega_0 = \text{Kennkreisfrequenz}$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2\vartheta}{\omega_0} \quad , \quad \vartheta = \text{Dämpfungsgrad (Theta)}$$

$$\frac{b_0}{a_0} = K_P \quad , \quad K_P = \text{Übertragungsbeiwert.}$$

Damit wird aus (3.32) die Beziehung

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x} + \frac{2\vartheta}{\omega_0} \cdot \dot{x} + x = K_P \cdot y \quad , \quad (3.33)$$

deren Lösung nach dem im Kapitel 3.1 angedeuteten und im Abschnitt 3.3.2 am Beispiel des PT<sub>1</sub>-Gliedes vorgeführten Verfahren erfolgen kann.

Nimmt man wieder an, dass die Eingangsgröße  $y$  sprungförmig geändert wird,  $y = y_0 \cdot \varepsilon(t)$ , so erhält man als partikuläre Lösung

$$x_p = K_P \cdot y_0 \quad .$$

Die Lösung der homogenen Gleichung erhält man mit Hilfe des Ansatzes (3.4). Die charakteristische Gleichung

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\mathcal{G} \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1 = 0 \quad (3.34)$$

hat die Wurzeln

$$s_1 = -\mathcal{G} \cdot \omega_0 + \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \cdot \omega_0 \quad \text{und} \\ s_2 = -\mathcal{G} \cdot \omega_0 - \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \cdot \omega_0 . \quad (3.35)$$

Man erkennt, dass sich nur für  $\mathcal{G} > 1$  reelle Nullstellen ergeben mit  $s_{1,2} < 0$ , und man führt dann meist die Abkürzungen

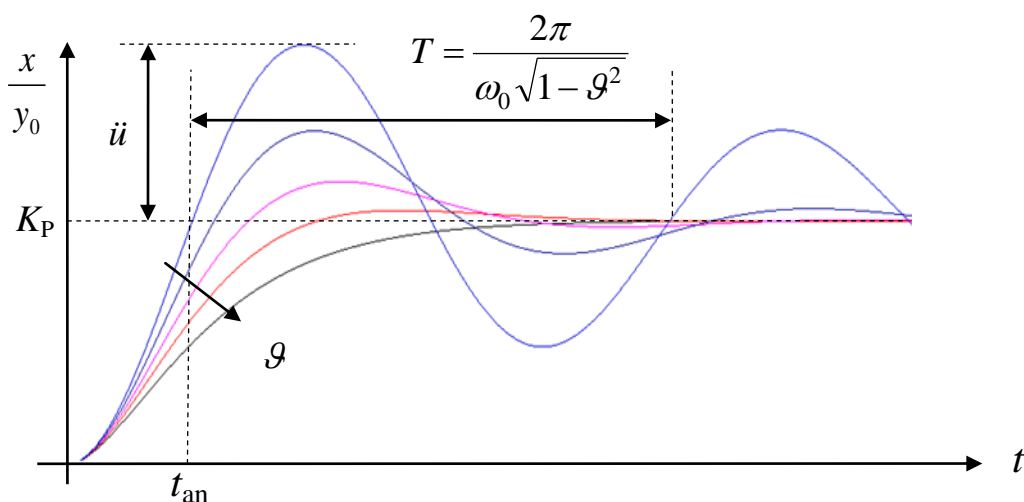
$$s_1 = -\frac{1}{T_1} , \quad s_2 = -\frac{1}{T_2} \quad (3.36)$$

ein (nicht schwingend).

Die Übergangsfunktion

$$\frac{x(t)}{y_0} = K_P \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right) \quad (3.37)$$

hat dann den in Bild 3.13 ( $\mathcal{G} = 1$ ) dargestellten *aperiodischen* Verlauf, der auch durch die Ersatzgrößen  $T_u$  und  $T_g$  gekennzeichnet werden könnte. Der Zusammenhang zwischen  $T_u$ ,  $T_g$  und  $T_1$ ,  $T_2$  ist recht kompliziert, so dass er später in Kapitel 3.4.5 nur näherungsweise angegeben wird. Nur im Spezialfall  $T_1 = T_2 = T$  kann die Beziehung (3.14) angewendet werden.



*Bild 3.13: Übergangsfunktion eines Systems zweiter Ordnung*

*Parameter: Dämpfungsgrad  $\mathcal{G} = 0,1 / 0,3 / 0,5 / 0,707 / 1$*

Liegt der Dämpfungsgrad im Bereich  $0 < \mathcal{G} < 1$ , so werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung konjugiert komplex. Die Übergangsfunktion lautet dann

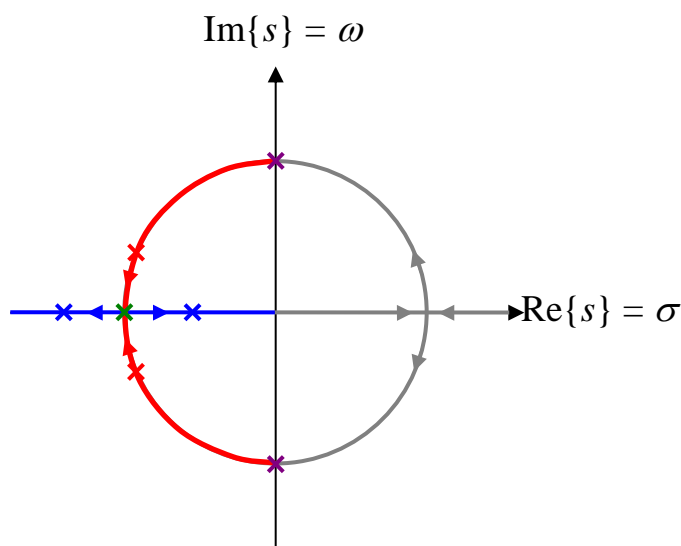


$$\frac{x(t)}{y_0} = K_p \left[ 1 - \frac{e^{-\delta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \sin(\sqrt{1-\vartheta^2} \omega_0 t + \arccos \vartheta) \right] . \quad (3.38)$$

Den zugehörigen zeitlichen Verlauf zeigt das Bild 3.13 für  $\vartheta < 1$ . Es ergibt sich also eine gedämpfte Schwingung. Die **Überschwingweite**  $m$ , die **Eigenfrequenz**  $\omega_e = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\vartheta^2}$  und die **Anregelzeit**  $t_{an}$  hängen vom Dämpfungsgrad  $\vartheta$  ab.

Für  $\vartheta = 1/\sqrt{2} = 0,707$  wird  $\ddot{u} \approx 4\%$ , für  $\vartheta = 0,5$  wird  $\ddot{u} \approx 16\%$ .

Drehspulmesswerke gehorchen näherungsweise der Differentialgleichung (3.33) ( $y$  = Messstrom,  $x$  = Anzeigewert). Man strebt als guten Kompromiss zwischen einer möglichst kurzen Anregelzeit und geringer Überschwingweite bei Messwerken meistens den Wert  $\vartheta = 0,7$  an.



*Bild 3.14: Lage der Pole eines PT<sub>2</sub>-Systems mit dem Dämpfungsgrad  $\vartheta$  als Parameter*

- $\vartheta > 1$ : negativ reelle Wurzeln
- $\vartheta = 1$ : negativ reelle Doppelwurzel
- $0 < \vartheta < 1$ : konjugiert komplexe Wurzeln mit negativem Realteil
- $\vartheta = 0$ : imaginäre Wurzeln
- $-1 < \vartheta < 0$ : konjugiert komplexe Wurzeln mit positivem Realteil
- $\vartheta = -1$ : positiv reelle Doppelwurzel
- $\vartheta < -1$ : positiv reelle Wurzeln

Für Dämpfungsgrade  $\vartheta < 0$  ist das System instabil, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung liegen in der rechten  $s$ -Halbebene (siehe auch Bild 3.1).

Im Bereich  $-1 < \vartheta < 0$  ergeben sich aufklingende Schwingungen, für  $\vartheta < -1$  erhält man eine monoton aufklingende Übergangsfunktion.

Bild 3.14 zeigt die Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der  $s$ -Ebene, wenn man den Dämpfungsgrad  $\vartheta$  variiert (**Wurzelortskurve**).

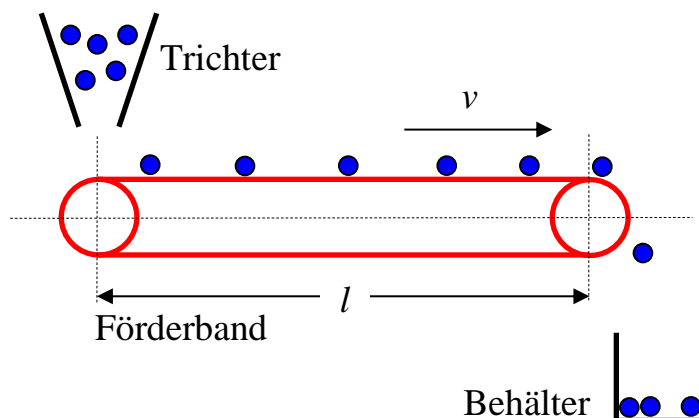
### 3.3.8 Totzeitglied ( $T_t$ -Glieder)

Bei der Diskussion der in Bild 3.2 dargestellten Übergangsfunktion war bereits darauf hingewiesen worden, dass Übertragungssysteme eine Eigenschaft haben können, die durch die Beziehung (3.1), die für Systeme mit konzentrierten Speichern (Induktivitäten, Kapazitäten, Speichervolumen, Masse usw.) gilt, nicht erfasst wird. Diese Eigenschaft besteht darin, dass die Ausgangsgröße nach einer Änderung der Eingangsgröße während der **Totzeit** (oder **Laufzeit**)  $T_t$  zunächst ihren alten Wert beibehält.

Bild 3.15 zeigt ein Beispiel für ein Totzeitglied. Über einen Trichter wird Material auf ein Förderband der Länge  $l$  geschüttet, das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Das Material wird in einem Behälter aufgefangen.

Ändert man plötzlich die Menge des zugeführten Materials  $y$ , so wird sich diese Änderung erst nach der Laufzeit des Bandes  $T_t = l/v$  am Bandende auswirken.

Ein ähnlicher Effekt ergibt sich, wenn man am Anfang einer langen Rohrleitung plötzlich den Druck eines Gases erhöht. Die Druckänderung wird sich erst nach einer gewissen Totzeit  $T_t$  am Rohrende bemerkbar machen.



*Bild 3.15: Förderband als Beispiel für ein Totzeitsystem*

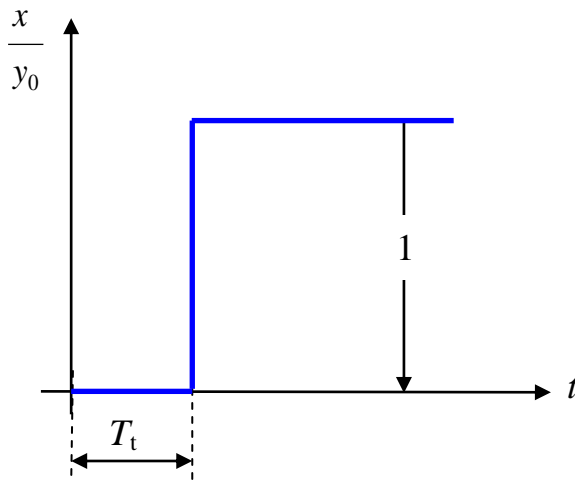
$l$       *Länge des Förderbandes*

$v$       *Geschwindigkeit des Förderbandes*

Man spricht bei solchen Übertragungsgliedern von Systemen mit verteilten Speichern, deren Beschreibung durch eine partielle Differentialgleichung erfolgt, von der hier nur die Lösung interessiert. Benutzt man die in Abschnitt 3.2.1. gegebene Definition für den Einheitssprung, so gilt für den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße eines Totzeitsystems

$$x(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t - T_t) \quad . \quad (3.39)$$

In Bild 3.16 ist die Übergangsfunktion des Totzeitgliedes aufgezeichnet.



*Bild 3.16: Übergangsfunktion eines Totzeitgliedes*

### 3.3.9 Zusammenfassung einfacher Übertragungsglieder

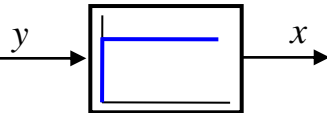
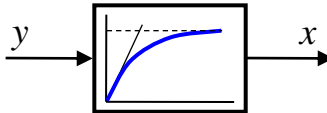
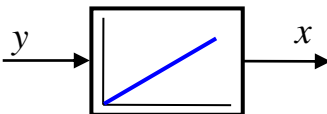
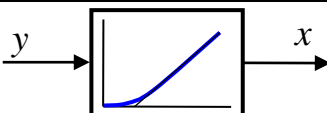
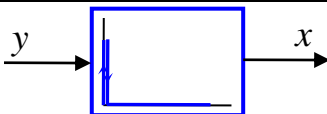
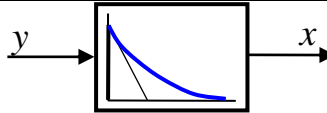
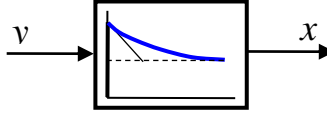
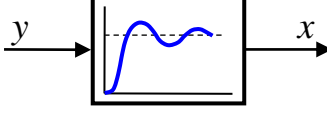
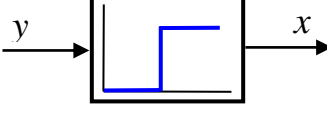
Die in Abschnitt 3.3. behandelten Übertragungsglieder sollen zur besseren Übersicht nochmals in Form einer Tabelle zusammengestellt werden, Bild 3.17. In der ersten Spalte ist jeweils die Bezeichnung, in der zweiten die Differentialgleichung des Übertragungsgliedes angegeben. Die dritte Spalte enthält einen Block, der das Übertragungsverhalten kennzeichnen soll. Zu diesem Zweck ist in ihm die Übergangsfunktion des Übertragungsgliedes eingezeichnet. Die Übertragungsglieder sind alle *rückwirkungsfrei* und *linear*.

### Im Kapitel 3 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:

#### PFK 5: Modelle

Naturwissenschaftliche und mathematische Modelle kennen und auf Realweltprobleme anwenden.

- Erkennen und Verstehen technischer Zusammenhänge
- Differentialgleichungen (DGL) beschreiben das Zeitverhalten von Systemen (Ausnahme: Totzeit)
- Betrachtung des Verhaltens einfacher Übertragungsglieder im Zeitbereich
- Sprungantwort, Impulsantwort, Rampenantwort veranschaulichen das Zeitverhalten von Übertragungsgliedern (Versuch 1)
- Schwingungsfähige Systeme zweiter Ordnung sind durch die Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  und den Dämpfungsgrad  $\mathcal{D}$  (Theta) gekennzeichnet

Bezeichnung	Differentialgleichung	Übertragungsblock Symbol: Sprungantwort
P- Glied	$x = K_P \cdot y$	
PT <sub>1</sub> -Glieder	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_P \cdot y$	
I-Glieder	$\dot{x} = K_I \cdot y$	
IT <sub>1</sub> -Glieder	$T_1 \cdot \ddot{x} + \dot{x} = K_I \cdot y$	
D-Glieder	$x = K_D \cdot \dot{y}$	
DT <sub>1</sub> -Glieder	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_D \cdot \dot{y}$	
PDT <sub>1</sub> -Glieder	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_P(T_v \cdot \dot{y} + y)$	
PT <sub>2</sub> -Glieder	$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} + \frac{2\vartheta}{\omega_0} \dot{x} + x = K_P \cdot y$	
T <sub>t</sub> -Glieder	$x = y(t - T_t)$	

*Bild 3.17: Zusammenstellung einfacher Übertragungsglieder  
Darstellung im Zeitbereich (Symbol = Übergangsfunktion  $h(t)$ )*

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.1 Frequenzgang und Ortskurve

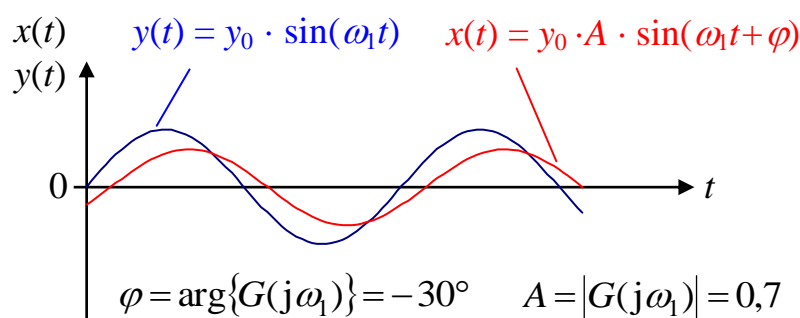
Bisher wurde gezeigt, dass das Übertragungsverhalten dynamischer Systeme durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, deren Lösung im Prinzip angedeutet und anhand einfacher Beispiele demonstriert wurde. Der Einfachheit und Einheitlichkeit halber wird dabei meistens eine spezielle Eingangsfunktion, der Einheitssprung  $\varepsilon(t)$ , verwendet.

Insbesondere bei schnellen Systemen ist es üblich, auch sinusförmige Eingangssignale

$$y(t) = y_0 \cdot \sin \omega \cdot t \quad (4.1)$$

zu benutzen und die Reaktion des Systems auf ein solches Signal zu beobachten. Wenn man wartet, bis die Einschwingvorgänge abgeklungen sind (Betrachtung der quasi stationären Lösung), so wird sich die Ausgangsgröße bei einem linearen System ebenfalls nach einer sinusförmigen Funktion ändern, welche die gleiche Frequenz, aber meist eine andere Amplitude und Phasenlage als die Eingangsgröße besitzt:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (4.2)$$



*Bild 4.1 Phasenverschiebung und Amplitudendämpfung eines Systems bei einer sinusförmigen Stellgröße (die Phase eilt nach  $\rightarrow \varphi \leq 0$ )*

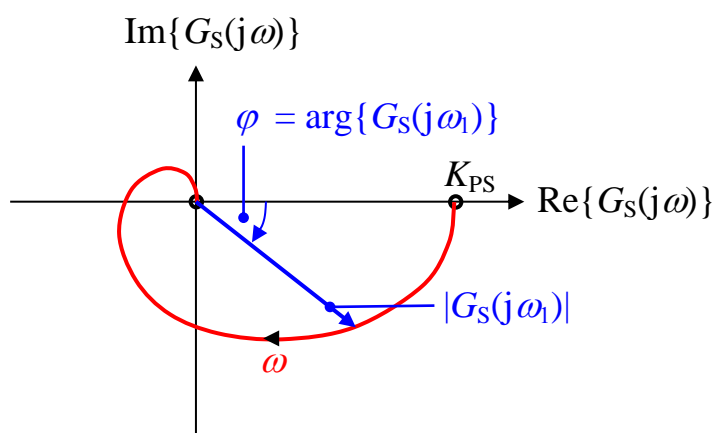
Das Verhältnis  $x_0/y_0$  der Amplituden von Eingangs- und Ausgangsgröße und die Phasenverschiebung  $\varphi$  hängen von der **Kreisfrequenz**  $\omega$  des Eingangssignals ab. Denkt man sich nun einen Zeiger  $G(j\omega)$  in die komplexe Zahlenebene eingetragen, dessen Länge gleich dem Verhältnis  $x_0/y_0$  und dessen Drehung gegenüber der reellen Achse gleich der Phasenverschiebung  $\varphi$  ist, so erhält man für verschiedene Kreisfrequenzen  $\omega$  verschiedene Zeiger. Verbindet man die Spitzen der Zeiger, dann ergibt sich eine Kurve, die so genannte **Ortskurve** des Systems. Man kann aus ihrem Verlauf genauso auf das Systemverhalten schließen wie z.B. aus der Übergangsfunktion. Genauso wie es dort prinzipiell möglich war, die Parameter  $a_v$ ,  $b_\mu$  der Gleichung (3.1) zu bestimmen, kann man diese auch bei bekannter Ortskurve ermitteln.

Es ist also im Grunde gleichgültig, ob man die Übergangsfunktion (oder Sprungantwort) oder die Ortskurve misst, jedoch hat die Darstellung im Frequenzbereich in manchen Fällen Vorteile.

Bild 4.2 zeigt die **Ortskurve** eines Systems mit Ausgleich. Der Zeiger  $G$  ist nur für die Kreisfrequenz  $\omega = \omega_1$  mit eingezeichnet.

Man erkennt, dass der Zeiger eine komplexe Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  ist,  $G = G_s(j\omega)$ . Man bezeichnet die Funktion  $G_s(j\omega)$  als **Frequenzgang** des Systems.

Der Wert des Frequenzganges für  $\omega = 0$  ist der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  des Systems, wie aus der Definition sofort hervorgeht.



**Bild 4.2** Ortskurve eines Systems (einer Strecke 3. Ordnung) mit Ausgleich (die Phase eilt nach  $\rightarrow \varphi \leq 0$ )

Es wurde bisher darüber gesprochen, wie die Ortskurve eines Systems, das heißt sein Frequenzgang, gemessen werden kann. Es bleibt noch zu klären, wie die komplexe Funktion  $G_s(j\omega)$  mit der Differentialgleichung zusammenhängt.

## 4.2 Laplace-Transformation

Es wird hier lediglich das Verfahren ohne Ableitung angerissen. Einzelheiten können in der entsprechenden Literatur nachgelesen werden [2, 4].

Transformiert man die zeitlich veränderliche Größe  $x(t)$  gemäß der Beziehung

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (4.3)$$

in den **Bildbereich (Frequenzbereich)**, so erhält man bei Anwendung von Gleichung (4.3) auf die Differentialgleichung (3.1) unter der Voraussetzung, dass die Anfangsbedingungen sämtlich gleich Null sind, das heißt, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe befindet,

$$a_n \cdot s^n \cdot X + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot X + \dots + a_1 \cdot s \cdot X + a_0 \cdot X = b_m \cdot s^m \cdot Y + \dots + b_1 \cdot s \cdot Y + b_0 \cdot Y,$$

eine algebraische Gleichung, die nach der gesuchten Unbekannten  $X$  aufgelöst werden kann,

$$X = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot Y. \quad (4.4)$$

Nr.	Zeitfunktion $f(t)$ , $f(t) = 0$ für $t < 0$	$L$ -Transformierte $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau}{1 + s\tau}$
6	$t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau^2}{(1 + s\tau)^2}$
7	$t^n \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau^{n+1} \cdot n!}{(1 + s\tau)^{n+1}}$
8	$\varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{s(1 + s\tau)}$
9	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$

*Tab 4.3 Korrespondenzen der Laplace-Transformation*

Man hat das Problem also rezeptmäßig gelöst, denn wenn man in Gleichung (3.1) für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow s^2$  usw. einsetzt, kommt man sofort zur Beziehung (4.4). Es ist allerdings zu beachten, dass  $X$  jetzt eine Funktion von  $s$  und nicht mehr

von  $t$  ist und dass  $X(s)$  und  $x(t)$  gemäß der Laplace-Transformation (4.3) zusammenhängen.

Man kann  $X(s)$  relativ einfach aus  $Y(s)$  berechnen; will man jedoch den zeitlichen Verlauf  $x(t)$  bestimmen, dann muss man diesen über das **Umkehrintegral**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s) \cdot e^{st} ds \quad (4.5)$$

ermitteln.

Das ist nicht gerade einfach, und es wäre sicher zweckmäßiger, die Differentialgleichung nach dem gezeigten Verfahren direkt zu lösen, wenn nicht umfangreiche Tabellen bestünden, aus denen man bei gegebenem  $y(t)$  das zugehörige  $Y(s)$  entnehmen, über (4.4) das entsprechende  $X(s)$  bestimmen und dann mit der Tabelle wieder  $x(t)$  ermitteln kann. Tabelle 4.3 zeigt die wichtigsten Korrespondenzen der Laplace-Transformation.

### 4.3 Die Übertragungsfunktion (transfer function)

Das Verhältnis

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = G_S(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (4.6)$$

wird Übertragungsfunktion des Systems bzw. der Strecke genannt. Sie enthält die gleichen Parameter  $a_v$ ,  $b_\mu$  wie die Differentialgleichung, sagt also genau so viel über das Systemverhalten aus wie diese.  $s = \sigma + j\omega$  ist dabei eine komplexe Variable.

Man erkennt, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms von  $G_S(s)$  (auch **Pole der Übertragungsfunktion** genannt) identisch mit den Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung sind. Damit ein System stabil ist, müssen die Pole von  $G_S(s)$  also in der linken  $s$ -Halbebene liegen.

Setzt man  $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ), so erhält man den **Frequenzgang**  $G_S(j\omega)$  des Systems. Dieser ist also ein Spezialfall der Übertragungsfunktion. Damit ist der Zusammenhang zum vorhergehenden Abschnitt hergestellt. Für verschiedene Werte von  $\omega$  kann man dann den Frequenzgang  $G_S(j\omega)$  berechnen und in die komplexe  $G$ -Ebene eintragen, um auf diese Weise die Ortskurve zu ermitteln. Man sagt, man bildet die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene auf die  $G$ -Ebene ab.



## 4.4 Bode-Diagramm

Im Bild 4.2 ist der Verlauf des Frequenzganges  $G_S(j\omega)$  als Ortskurve in der komplexen Ebene dargestellt. Dies hat den Vorteil, dass die grundsätzlichen Eigenschaften, die  $G_S(j\omega)$  hat, deutlich werden.

Für die praktische Handhabung ist aber eine andere Darstellung besser geeignet. Hierbei werden Betrag  $|G(j\omega)|$  und Phase  $\varphi(j\omega)$  des Frequenzganges getrennt über der Kreisfrequenz  $\omega$  aufgetragen, wobei für die Amplitude und die Frequenz ein logarithmischer Maßstab gewählt wird.

Man nennt die entstehenden *logarithmischen Frequenz-Kennlinien Bode-Diagramm*. Es bietet vor allen Dingen dann Vorteile, wenn aus mehreren Einzelfrequenzgängen, die in Produktform verknüpft sind, der Gesamtfrequenzgang bestimmt werden soll. In der Ortskurvendarstellung musste zu diesem Zweck eine Drehstreckung des Zeigers  $G_S(j\omega)$  entsprechend Gleichung (4.7) vorgenommen werden, um bei gegebenem  $G_1(j\omega)$  und  $G_2(j\omega)$  den Gesamtfrequenzgang  $G_S(j\omega)$  zu bestimmen.

$$G_S = G_1 \cdot G_2 \quad . \quad (4.7)$$

Logarithmiert man Gleichung (4.7), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \log G_S &= \log[|G_1| \cdot |G_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}] \\ \log G_S &= \log|G_1| + \log|G_2| + j K (\varphi_1 + \varphi_2) \quad , \end{aligned} \quad (4.8)$$

das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} \log|G_S| &= \log|G_1| + \log|G_2| \\ \varphi_S &= \varphi_1 + \varphi_2 \quad . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Man hat damit die komplexe Multiplikation auf zwei reelle Additionen zurückgeführt.

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Für die in Abschnitt 3.3 behandelten einfachen Übertragungsglieder sollen nun die Übertragungsfunktionen angegeben werden.

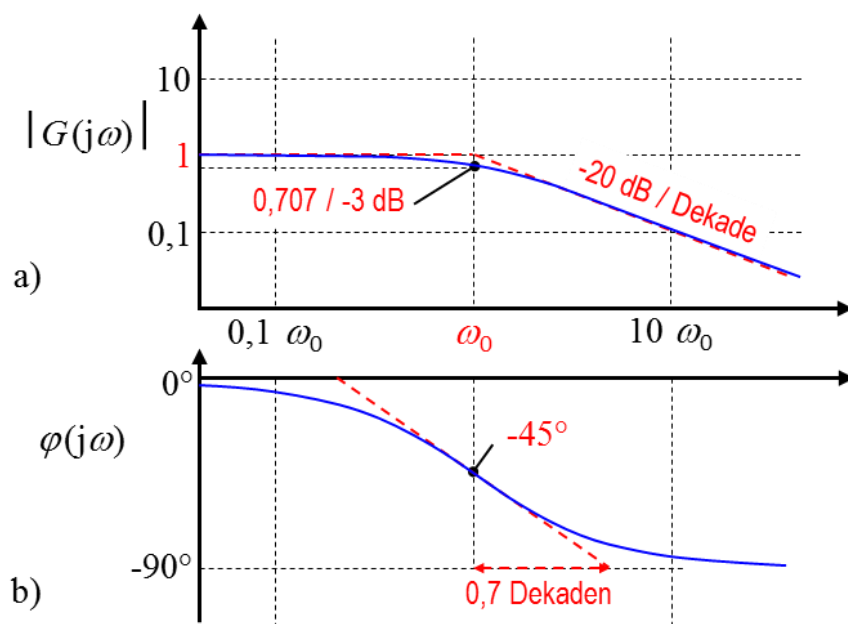
Da die Ermittlung von  $G(s) = X(s) / Y(s)$  bei gegebener Differentialgleichung rein schematisch erfolgen kann, indem man für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$  schreibt und aus der entstehenden algebraischen Gleichung das Verhältnis  $X(s) / Y(s)$  ermittelt, wird nur exemplarisch das PT1- und das PT2-Glied vorgestellt.

### 4.5.1 Übertragungsfunktion des PT<sub>1</sub>-Gliedes

Wenn man entsprechend in der Gleichung 3.16 für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$  einsetzt, erhält man Gleichung 4.10:

$$X(s) = \frac{K_P}{1+T_1 \cdot s} \cdot Y(s) \quad (4.10)$$

Bild 4.4 zeigt ein Bode-Plot des PT1-Gliedes. Bis zur Grenzfrequenz  $\omega_0$  verläuft der Amplitudengang annähernd konstant, bei der Grenzfrequenz ist  $|\omega_0 \cdot T_1| = 1$ , dementsprechend ergibt sich eine Amplitudendämpfung von -3 dB. Oberhalb der Grenzfrequenz fällt die Amplitude annähernd mit -20 dB pro Dekade ab (Asymptote). Der Phasengang fällt stetig von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$  ab.

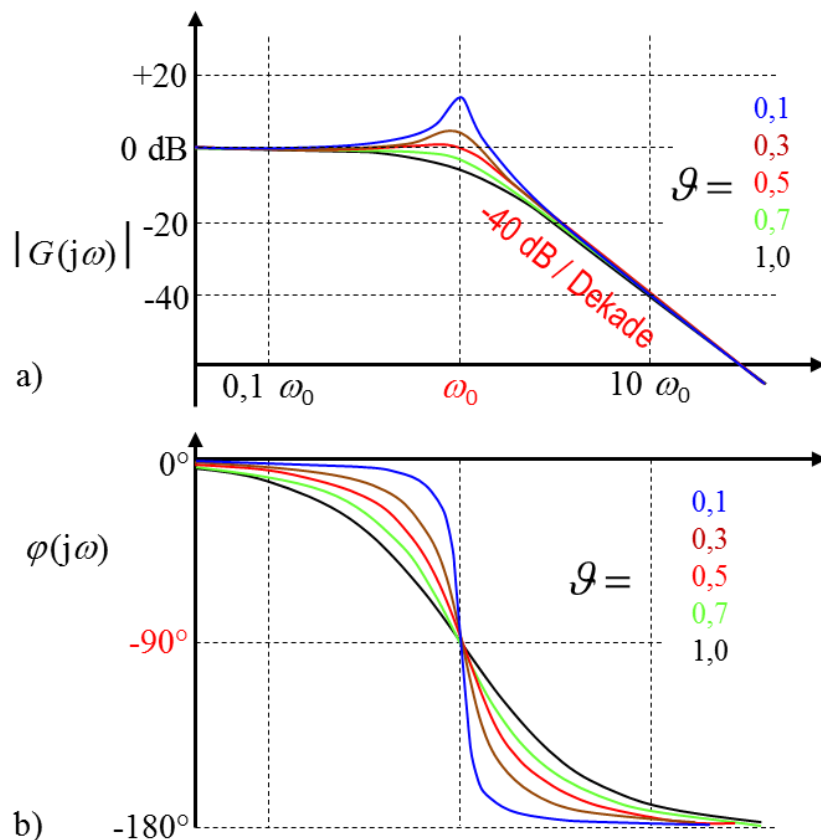


*Bild 4.4 Bode-Plot eines PT1-Gliedes mit dem Übertragungsbeiwert  $K_P = 1$  und der Grenzfrequenz  $\omega_0 = 1 / T_1$   
a) Amplitudengang      b) Phasengang*

#### 4.5.2 Übertragungsfunktion des PT<sub>2</sub>-Gliedes

Bei einem PT<sub>2</sub>-Glieder fällt der Amplitudengang oberhalb der Grenzfrequenz mit -40 dB pro Dekade ab. Im Bereich der Grenzfrequenz hängt der Verlauf zusätzlich vom Dämpfungsgrad  $\mathcal{D}$  ab.

$$X(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2\mathcal{D}}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \cdot Y(s) \quad (4.11)$$

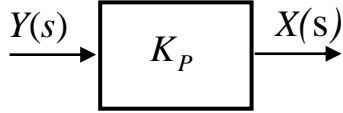
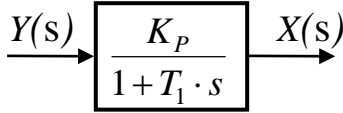
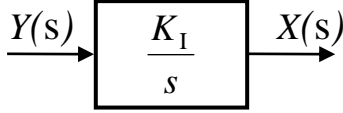
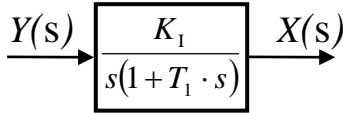
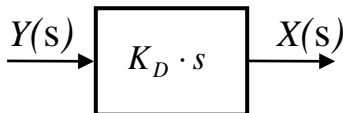
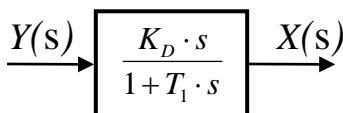
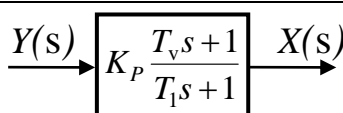
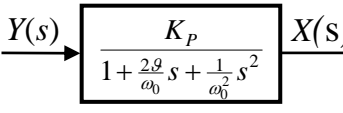
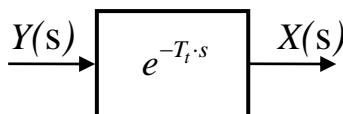


**Bild 4.2** Bode-Plot eines PT<sub>2</sub>-Gliedes mit dem Übertragungsbeiwert  $K_P = 1$ , der Grenzfrequenz  $\omega_0$  und verschiedenen Dämpfungsgraden  $\mathcal{D}$   
a) Amplitudengang      b) Phasengang

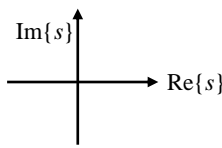
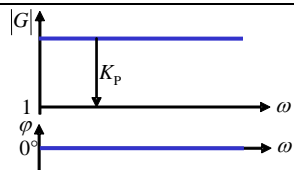
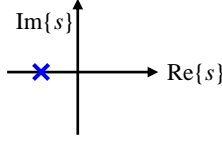
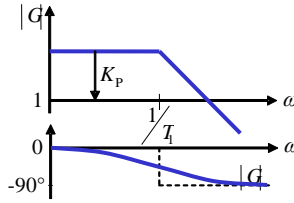
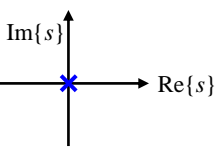
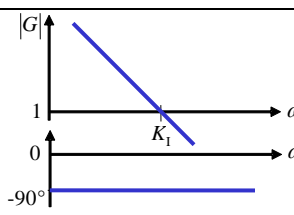
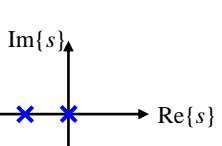
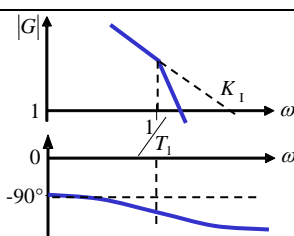
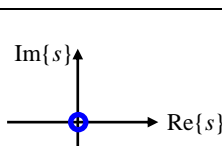
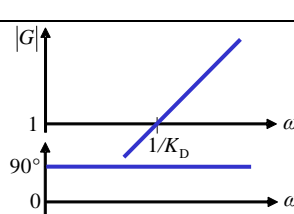
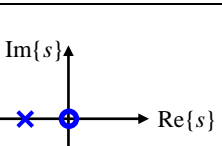
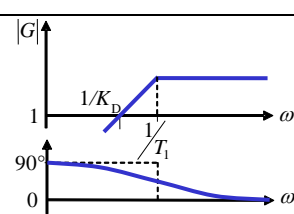
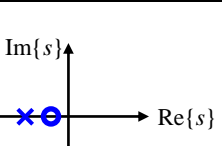
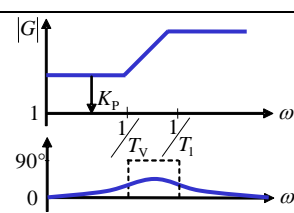
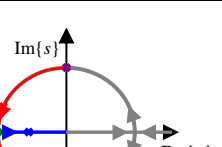
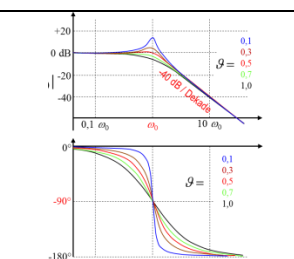
Es erfolgt eine Zusammenstellung in Form einer Tabelle. Es soll nur noch einmal darauf hingewiesen werden, dass  $G(s)$  das Verhältnis von  $X(s)$  zu  $Y(s)$  (Laplace-Transformierte) und nicht etwa das Verhältnis der zeitlich veränderlichen Größen  $x(t)$  zu  $y(t)$  darstellt!

*Um stets eine klare Unterscheidung zu haben, sind deshalb zeitlich veränderliche Größen mit **kleinen**, ihre Transformierten im Bildbereich mit **großen Buchstaben** bezeichnet.*

Um das Übertragungsverhalten zu kennzeichnen, wird in den Block in der dritten Spalte jeweils die Übertragungsfunktion  $G(s)$  geschrieben. In der Tabelle in Bild 3.17 (Zeitbereich) ist dagegen jeweils die Übergangsfunktion  $h(t)$  eingezeichnet.

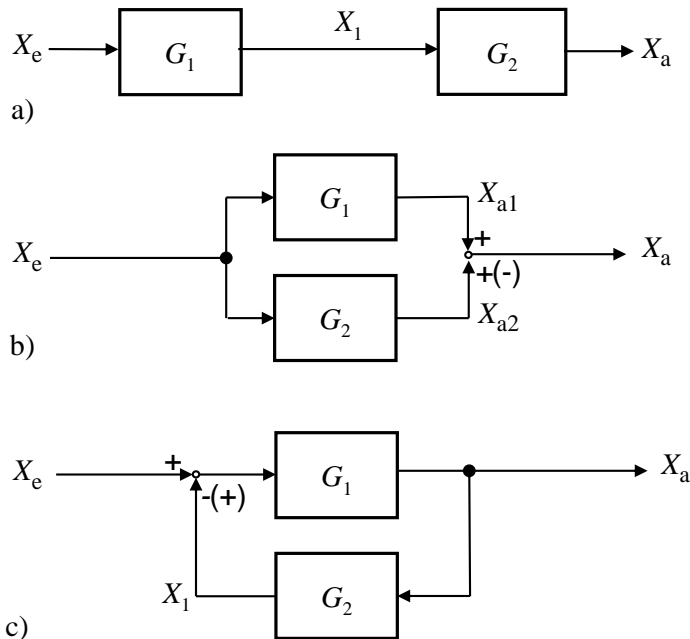
Bezeichnung	Gleichung	Übertragungsblock
P-Glied	$X(s) = K_P \cdot Y(s)$	
PT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + T_1 s} Y(s)$	
I-Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s} Y(s)$	
IT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s(1 + T_1 \cdot s)} Y(s)$	
D-Glied	$X(s) = K_D \cdot s \cdot Y(s)$	
DT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 s} Y(s)$	
PDT <sub>1</sub> -Glied Lag/Lead-Glied	$X(s) = K_P \frac{1 + T_v s}{1 + T_1 s} Y(s)$	
PT <sub>2</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} Y(s)$	
Totzeit-Glied	$X(s) = e^{-T_t s} \cdot Y(s)$	

*Bild 4.6 Zusammenstellung einfacher Übertragungsglieder.  
Darstellung im Bildbereich (komplexer Frequenzbereich)*

Bezeichnung	Pole / Nullstellen	Bode Diagramm
P-Glied		
PT1-Glied		
I-Glied		
IT1-Glied		
D-Glied		
DT1-Glied		
PDT1-Glied Lag-Lead Glied		
PT2-Glied		

## 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern

Bereits im ersten Abschnitt wurde erläutert, dass sich Steuerketten oder Regelkreise aus einer Kombination von Übertragungsgliedern zusammensetzen. Es entsteht nun die Frage, wie das Übertragungsverhalten des Gesamtsystems berechnet werden kann, wenn das Verhalten der einzelnen Übertragungsglieder bekannt ist. In Bild 4.7 sind drei Grundkombinationen gezeigt.



**Bild 4.7** Grundkombinationen von Übertragungsgliedern

a) Reihenschaltung      b) Parallelschaltung      c) Rückkopplung

Bild 4.7a stellt eine rückwirkungsfreie **Reihenschaltung** von Übertragungsgliedern mit den Übertragungsfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  dar. Über die Beziehungen

$$X_1 = G_1 \cdot X_e, \quad X_a = G_2 \cdot X_1 \quad (4.12)$$

erhält man durch Eliminierung der Zwischengröße  $X_1$  den Zusammenhang

$$X_a = G_1 \cdot G_2 \cdot X_e \quad (4.13)$$

zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße.

Hier wird der Vorteil der Rechnung im Bildbereich besonders deutlich: Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich einfach durch Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen,  $G = G_1 \cdot G_2$ . Im Zeitbereich hätte man  $x_a(t)$  über das Faltungsintegral (3.16) berechnen müssen.

Für die in Bild 4.7b gezeichnete **Parallelschaltung** erhält man  $G = G_1 \pm G_2$ :

$$X_a = X_{a1} \pm X_{a2} = (G_1 \pm G_2) \cdot X_e = G \cdot X_e. \quad (4.14)$$

Bei der in Bild 4.7c gezeigten Rückführschaltung spricht man von einer **Gegenkopplung** oder **Mitkopplung**, je nachdem, ob das negative (-) oder positive Vorzeichen (+) an der Vergleichsstelle gültig ist. Dabei entspricht die Gegenkopp-

lung dem Prinzip einer Regelung. Für den Zusammenhang zwischen einzelnen Größen gilt

$$\begin{aligned} X_a &= G_1 \cdot (X_e \mp X_1) \\ X_1 &= G_2 \cdot X_a \end{aligned} \quad (4.15)$$

woraus durch Elimination von  $X_1$

$$\begin{aligned} X_a &= G_1 \cdot (X_e \mp G_2 \cdot X_a) \\ X_a (1 \pm G_1 \cdot G_2) &= G_1 \cdot X_e \end{aligned}$$

$$X_a = \frac{G_1}{1 \pm G_1 \cdot G_2} \cdot X_e \quad (4.16)$$

folgt. Die Gesamtübertragungsfunktion  $G(s)$  der rückgekoppelten Schaltung lautet also (Mason's gain formula)

$$G = \frac{G_1}{1 \pm G_1 \cdot G_2} \quad (4.17)$$

Das positive Vorzeichen im Nenner gilt für Gegen-, das negative für Mitkopplung. In einem Fall wirkt das über  $G_2$  umgeformte Ausgangssignal der Eingangsgröße entgegen, im anderen Fall unterstützt es die Eingangsgröße.

Aus den drei Grundschaltungen können nun beliebig komplizierte Systeme aufgebaut werden. Die Berechnung der Gesamtübertragungsfunktion  $G$ , die ja das Verhalten des Gesamtsystems beschreibt, erfolgt dann entsprechend den Regeln (4.13), (4.14) und (4.17).

## 4.7 Übertragungsfunktion der Strecke

Gleichung (4.6) entspricht der Übertragungsfunktion einer allgemeinen Regelstrecke ohne Totzeit. Bei chemischen oder verfahrenstechnischen Anlagen liegen meistens Systeme vor, bei denen  $b_m = b_{m-1} = \dots = b_1 = 0$  ist (kein differenzierender Einfluss). Die Streckenübertragungsfunktion  $G_S(s)$  lautet dann mit der Abkürzung  $b_0/a_0 = K_{PS}$  und bei Berücksichtigung einer Totzeit

$$G_S(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K_{PS} \cdot e^{-sT_t}}{\frac{a_n}{a_0} \cdot s^n + \dots + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + 1} \quad (4.18)$$

In vielen Fällen sind die Pole der Übertragungsfunktion (Wurzeln des Nennerpolynoms) negativ reell. Man kann dann Gleichung (4.18) in der Form

$$G_S(s) = \frac{K_{PS} \cdot e^{-sT_t}}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1) \dots (T_n \cdot s + 1)} \quad (4.19)$$

schreiben. Dabei gilt

$$T_1 = -1/s_1, T_2 = -1/s_2, \dots, T_n = -1/s_n, \quad (4.20)$$

wobei  $s_1, s_2, \dots, s_n$  die Pole der Übertragungsfunktion sind.

### Zahlenbeispiel 4

Bei einer Regelstrecke wurden folgende Werte berechnet:

$$K_{PS} = 1, \quad T_t = 2 \text{ s}, \quad \frac{a_2}{a_0} = 30 \text{ s}^2 \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_0} = 13 \text{ s}.$$

Man erhält also für die Pole die negativ reellen Werte

$$s_1 = -\frac{13}{60} \frac{1}{\text{s}} + \sqrt{\left(\frac{13}{60}\right)^2 \frac{1}{\text{s}^2} - \frac{1}{30} \frac{1}{\text{s}^2}} = -\frac{1}{10} \frac{1}{\text{s}},$$

$$s_2 = -\frac{13}{60} \frac{1}{\text{s}} - \sqrt{\left(\frac{13}{60}\right)^2 \frac{1}{\text{s}^2} - \frac{1}{30} \frac{1}{\text{s}^2}} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\text{s}}.$$

Mit den Zeitkonstanten

$$K_{PS} = 1, \quad T_1 = -\frac{1}{s_1} = 10 \text{ s}, \quad T_2 = -\frac{1}{s_2} = 3 \text{ s}, \quad T_t = 2 \text{ s}$$

lässt sich also für die Übertragungsfunktion der Strecke

$$G_S(s) = \frac{K_{PS} \cdot e^{-T_t s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

schreiben.



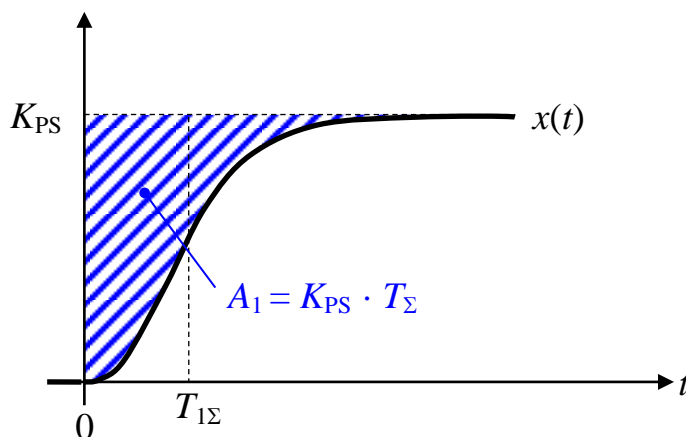
#### 4.7.1 Parameterschätzung für eine PT<sub>1</sub>-Streckennäherung

Es wurde schon bemerkt, dass die aus der Übergangsfunktion abgeleiteten Ersatzgrößen  $T_g$  und  $T_u$  in recht komplizierter Weise mit den Koeffizienten  $a_v$  bzw. den Zeitkonstanten  $T_v$  zusammenhängen. Die Übertragungsfunktion kann deshalb oft nur angenähert werden.

Hier wird eine Streckenapproximation vorgestellt, die im Folgenden „T-Summen-Näherung“ genannt wird. Sie ist aus der Erfahrung bei der Einstellung von Reglern in der chemischen Industrie entstanden. Es wird kein hochgenaues Erreichen des Entwurfszieles gefordert, aber die Nähe dieses Ziels soll mit hoher Zuverlässigkeit erreicht werden. Die **Summenzeitkonstante**  $T_{1\Sigma}$  kann bei Strecken mit s-förmiger Sprungantwort leicht durch Integration ermittelt werden:

$$A_1 = \int_0^{\infty} K_{PS} - h(t) dt \quad (4.21)$$

$$A_1 = K_{PS} \cdot T_{1\Sigma}$$



**Bild 4.8** Definition der Summenzeitkonstante  $T_{1\Sigma}$  (s-förmige Sprungantwort)

Dadurch kann  $T_{1\Sigma}$  auch bei relativ großem Messrauschen gut bestimmt werden, Bild 4.8.

Soll Gleichung (4.6) durch ein PT<sub>1</sub>-Glied angenähert werden, so berechnen sich die Koeffizienten wie folgt:

$$T_{1\Sigma} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \quad ; \quad K_{PS} = \frac{b_0}{a_0} \quad (4.22)$$

Von Hand, das heißt durch Betrachten der Sprungantwort, kann man  $T_{1\Sigma}$  bestimmen, indem man gemäß Bild 4.9 die beiden schraffierten Flächen in die Sprungantwort einzeichnet. Sind die Flächen gleich, kann an ihrer Grenze  $T_{1\Sigma}$  abgelesen werden.

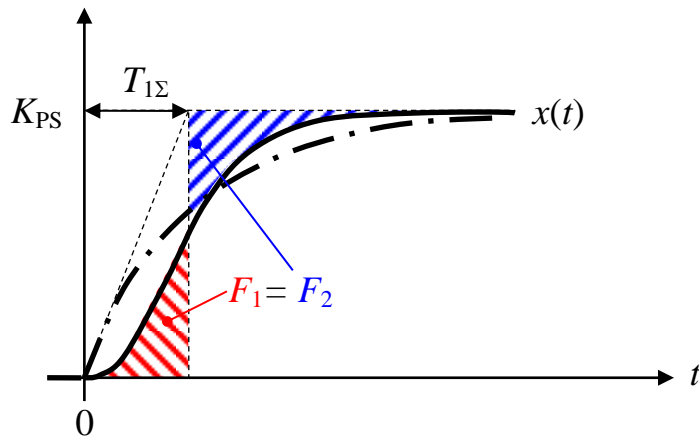


Bild 4.9 Bestimmung der Summenzeitkonstante  $T_{1\Sigma}$

#### 4.7.2 Näherung eines Totzeitgliedes durch ein $PT_n$ -Glied

Oft behindert der Term  $e^{-sT_t}$  eine algebraische Umformung bzw. Vereinfachung von Übertragungsfunktionen. Wenn die **Totzeit**  $T_t$  nicht dominant ist ( $T_t < T_1$ ), kann man  $e^{-sT_t}$  durch eine Taylor Reihenentwicklung annähern. Mit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots ,$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{und} \quad x = s T_t \quad \text{folgt:}$$

$$e^{-sT_t} = \frac{1}{1 + T_t s + \frac{T_t^2}{2} s^2 + \frac{T_t^3}{6} s^3 + \dots} . \quad (4.23)$$

Je kleiner die Totzeit bezogen auf die Zeitkonstanten  $T_i$  des Systems ist, desto geringer ist die erforderliche Ordnung  $n$  der Taylor Näherung.

### 4.7.3 Parameterschätzung für eine PT<sub>n</sub>-T<sub>t</sub>-Streckennäherung

Auch für die praktische Anwendung von Streckennäherungen höherer Ordnung sind Methoden der Parameterschätzung und Prozessidentifikation vorteilhaft, die auch von weniger geschultem Personal angewendet werden können. Von großem Interesse sind robuste Entwurfsgleichungen, die sich möglichst nur auf wenige Informationen aus dem Zeitbereich stützen. Ziel ist es hier, eine möglichst gute Approximation an eine PT<sub>2</sub>- oder PT<sub>3</sub>-Strecke zu erhalten. Aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung werden hier  $T_{1\Sigma}$  statt  $a_1$ ,  $T_{2\Sigma}^2$  statt  $a_2$  usw. verwendet. Die genäherte Übertragungsfunktion lautet dann wie folgt:

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{1 + T_{1\Sigma} \cdot s + T_{2\Sigma}^2 \cdot s^2 + T_{3\Sigma}^3 \cdot s^3} \quad (4.24)$$

Über die Wendetangente an die Übergangsfunktion (Bild 3.2) lässt sich eine Schätzung der Koeffizienten der Übertragungsfunktion entsprechend Gleichung (4.24) vornehmen. Tabelle 4.10 zeigt eine Zusammenstellung von Schätzgleichungen.

$0 < T_u/T_g \leq 0,104$ (zweite Ordnung)	$0,104 < T_u/T_g \leq 0,773$ (dritte Ordnung)
$\tilde{T}_{1\Sigma} = \frac{T_g}{1 + 3,45 T_u/T_g}$	$\tilde{T}_{1\Sigma} = \frac{0,7T_g}{1 - 0,7T_u/T_g}$
$\tilde{T}_{2\Sigma}^2 = T_u T_g (1,11 + 1,90 T_u/T_g)$	$\tilde{T}_{2\Sigma}^2 = T_u T_g \quad ^{1)}$
$\tilde{T}_{3\Sigma}^3 = 0$	$\tilde{T}_{3\Sigma}^3 = \frac{2 \cdot \tilde{T}_{2\Sigma}^4}{3 \cdot \tilde{T}_{1\Sigma}} \left( 1 - \frac{0,1}{T_u/T_g} \right)$

<sup>1)</sup> genauer:  $\tilde{T}_{2\Sigma}^2 = 0,6 T_u T_g (1 + 0,7 T_u/T_g + 0,11 T_g/T_u)$

*Tabelle 4.10 Parameterschätzungen aus Kennwerten der Übergangsfunktion [12]*

Die Zusammenhänge wurden im Bereich  $T_u/T_g > 0,104$  für Ausgleichsstrecken 3. bis 10. Ordnung mit gleichen und gestaffelten Zeitkonstanten ermittelt. Im Bereich  $T_u/T_g \leq 0,104$  finden sich Strecken 2. Ordnung mit unterschiedlichen Zeitkonstanten. Die Kennzeichnung mit einer Schlangenlinie über dem Symbol bedeutet, dass bei den Koeffizienten ( $\tilde{T}_\nu^\nu$ ) eine eventuelle Totzeit  $T_t$  noch nicht berücksichtigt ist [12]:

$$G_S(s) = \frac{K_{PS} \cdot e^{-sT_t}}{1 + \tilde{T}_{1\Sigma} \cdot s + \tilde{T}_{2\Sigma}^2 \cdot s^2 + \tilde{T}_{3\Sigma}^3 \cdot s^3} \quad (4.25)$$

Zur Berücksichtigung einer Totzeit wird der Ausdruck  $e^{-sT_t}$ , wie in Gleichung (4.23) dargestellt, durch eine Taylor Reihenentwicklung angenähert.

$$G_s(s) = \frac{K_{PS}}{1 + \tilde{T}_{1\Sigma} \cdot s + \tilde{T}_{2\Sigma}^2 \cdot s^2 + \tilde{T}_{3\Sigma}^3 \cdot s^3} \cdot \frac{1}{1 + T_t s + \frac{T_t^2}{2} s^2 + \frac{T_t^3}{6} s^3 + \dots} \quad (4.26)$$

Durch Ausmultiplizieren ergeben sich die Koeffizienten der approximierten Übertragungsfunktion. Hierbei werden die Koeffizienten von  $s^n$  ab  $n \geq 4$  vernachlässigt.

$$T_{1\Sigma} = \tilde{T}_{1\Sigma} + T_t \quad (= \text{Summenzeitkonstante})$$

$$T_{2\Sigma}^2 = \tilde{T}_{2\Sigma}^2 + \tilde{T}_{1\Sigma} T_t + \frac{1}{2} T_t^2 \quad (4.27)$$

$$T_{3\Sigma}^3 = \tilde{T}_{3\Sigma}^3 + \tilde{T}_{2\Sigma}^2 T_t + \frac{1}{2} \tilde{T}_{1\Sigma} T_t^2 + \frac{1}{6} T_t^3$$

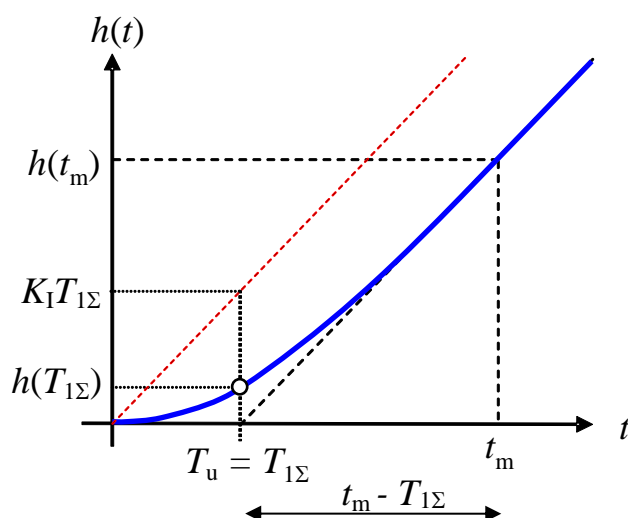
### 4.7.3 Parameterschätzung für eine IT<sub>n</sub>-Streckennäherung

Auch für IT<sub>n</sub>-Strecken können mit Hilfe von Schätzgleichungen die Koeffizienten für eine möglichst gute Approximation der Übertragungsfunktion ermittelt werden.

Über die Anstiegsasymptote an die Übergangsfunktion (Bild 4.11) lässt sich eine Schätzung der Koeffizienten der IT<sub>2</sub>-Übertragungsfunktion (4.28) vornehmen [6].

$$G_s(s) = \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_{1\Sigma} s + T_{2\Sigma}^2 s^2} \quad (4.28)$$

Ein Schätzwert für die Summenzeitkonstante  $T_{1\Sigma}$  kann direkt abgelesen werden. Die Steigung der Asymptote entspricht dem Integrierbeiwert  $K_I$ .



*Bild 4.11 Übergangsfunktion einer IT<sub>n</sub>-Strecke*

$$K_I = \frac{h(t_m)}{t_m - T_{1\Sigma}} \quad (4.29)$$

Zu Approximation einer IT<sub>2</sub>-Strecke (dritte Ordnung) wird eine Hilfsvariable  $h_1$  aus den im Zeitverlauf direkt ablesbaren Größen berechnet:

$$h_1 = \frac{h(T_{1\Sigma})}{K_I \cdot T_{1\Sigma}} \quad (4.30)$$

Wenn der Betrag der Hilfsvariable  $h_1 > 0,36$  ist, kann  $T_{2\Sigma}^2$  vernachlässigt werden ( $T_{2\Sigma}^2 = 0 \rightarrow$  IT<sub>1</sub>-Strecke). Ansonsten kann  $T_{2\Sigma}^2$  wie folgt geschätzt werden:

$$T_{2\Sigma}^2 = T_{1\Sigma}^2 \frac{1 - 8,4(h_1 - 0,02)^2}{2} \quad \text{für } h_1 \leq 0,36 \quad (4.31)$$

## 4.8 Grenzwertbetrachtungen

Die **Grenzwertsätze** der Laplace-Transformation ermöglichen einige vereinfachende Betrachtungen. Der Satz vom Anfangswert erlaubt die Berechnung des Funktionswertes  $f(0+)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$  aus der Laplace-Transformierten Funktion  $F(s)$

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad (4.32)$$

Bildet man nun die Übergangsfunktion  $h(t)$  durch das Faltungsprodukt der Übertragungsfunktion  $g(t)$  mit dem Einheitssprung  $\varepsilon(t)$ , so erhält man im Zeitbereich

$$h(t) = \varepsilon(t) * g(t) \quad (4.33)$$

bzw. im Bildbereich

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \quad (4.34)$$

Durch Anwendung des Grenzwertsatzes (4.27) erhält man

$$h(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \quad (4.35)$$

Anschaulich betrachtet, setzt man für  $s = j\omega$  eine unendlich hohe Frequenz für den Einheitssprung bei  $t = 0$  (Anfangswert) ein.

Mit Hilfe des Satzes vom Endwert lässt sich – wenn das System stabil ist – das Verhalten von  $h(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  aus  $G(s)$  berechnen,

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (4.36)$$

Hier setzt man für  $s = j\omega$  die „Frequenz 0“ für den Einheitssprung bei  $t = \infty$  ein. Man kann dadurch recht einfach bestimmen, wie sich die Sprungantwort  $h(t)$  bei  $t = 0+$  bzw. bei  $t \rightarrow \infty$  verhält.

## Im Kapitel 4 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden

- PFK 1: Finden sinnvoller Systemgrenzen  
Denken in Systemen. Abgrenzung der zu betrachtenden Aspekte einer Aufgabe von äußeren Aspekten, die nicht unmittelbar beeinflussbar sind.
- PFK 2: Abstrahieren  
Verallgemeinern, verkürzen, formalisieren und vereinfachen, um die wesentlichen Aspekte eines fachlichen Problems oder einer beliebigen Aufgabe herauszuarbeiten, und beurteilen von Modellen.
- PFK 5: Modelle  
Naturwissenschaftliche und mathematische Modelle kennen und auf Realweltprobleme anwenden.
- Interpretation von Systemen mit gegebenen physikalischen Zusammenhängen (axiomatisch)
  - Übertragungsfunktionen  $G(s)$  einfacher Übertragungsglieder
  - Frequenzgang  $G(j\omega)$ , Ortskurve und Bode-Diagramm von Systemen und Reglern
  - Schätzen der Übertragungsfunktionen  $G(s)$  – Struktur und Parameter – aus der Übergangsfunktion (Sprungantwort)  $h(t)$  (Versuch 1)
  - Kombination von Übertragungsgliedern
  - Grenzwertbetrachtungen

## 5 Dynamisches Verhalten der Regeleinrichtungen

Nachdem das dynamische Verhalten der Regelstrecke im Zeit- und Bildbereich beschrieben wurde, muss noch auf den zweiten Bestandteil eines Regelkreises, die Regeleinrichtung, eingegangen werden.

Auch hier erfolgt die Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens durch die Differentialgleichung oder die Übertragungsfunktion bzw. den Frequenzgang.

Die in der Praxis gewöhnlich verwendeten Regler entsprechen den im Abschnitt 3.3 bereits erläuterten Übertragungsgliedern oder Kombinationen aus ihnen. Im Folgenden wird eine Zusammenstellung der wichtigsten Reglertypen gegeben.

### 5.1 Proportional-Regler (P-Regler)

Die Wirkungsweise des **P-Reglers** wurde schon ausführlich besprochen. Er wird durch die Gleichungen

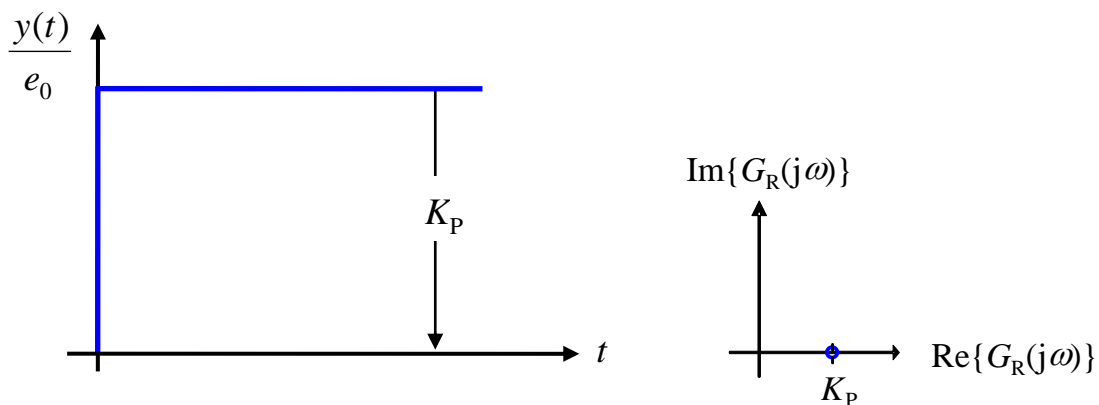
$$y = K_P (w - x) = K_P \cdot e \quad (5.1)$$

im Zeitbereich bzw. durch

$$Y = K_P (W - X) = K_P \cdot E, \quad (5.2)$$

das heißt  $G_R = K_P$  - im Bildbereich - beschrieben.

Die Übergangsfunktion ist in Bild 5.1 dargestellt. Die Ortskurve entartet zu einem Punkt auf der reellen Achse der  $G$ -Ebene.



*Bild 5.1: Übergangsfunktion und Ortskurve des P-Reglers*

Regelungen mit P-Regler weisen immer eine bleibende Regeldifferenz auf, die mit wachsendem  $K_P$  kleiner wird (siehe Abschnitt 2.2.3).

## 5.2 Proportional-Differential-Regler (PD-Regler)

Hier wird nicht nur die Regeldifferenz selbst, sondern auch die Änderung der Regeldifferenz zur Bildung der Stellgröße benutzt. Die Regeleinrichtung wirkt also bereits korrigierend, wenn die Regelgröße die Tendenz hat, von der Führungsgröße abzuweichen. Die Differentialgleichung

$$T_1 \cdot \frac{d}{dt} y + y = K_P \left( T_v \cdot \frac{d}{dt} e + e \right) \quad (5.3)$$

gibt dieses Verhalten wieder.

Im Bildbereich lautet die Beziehung (5.3)

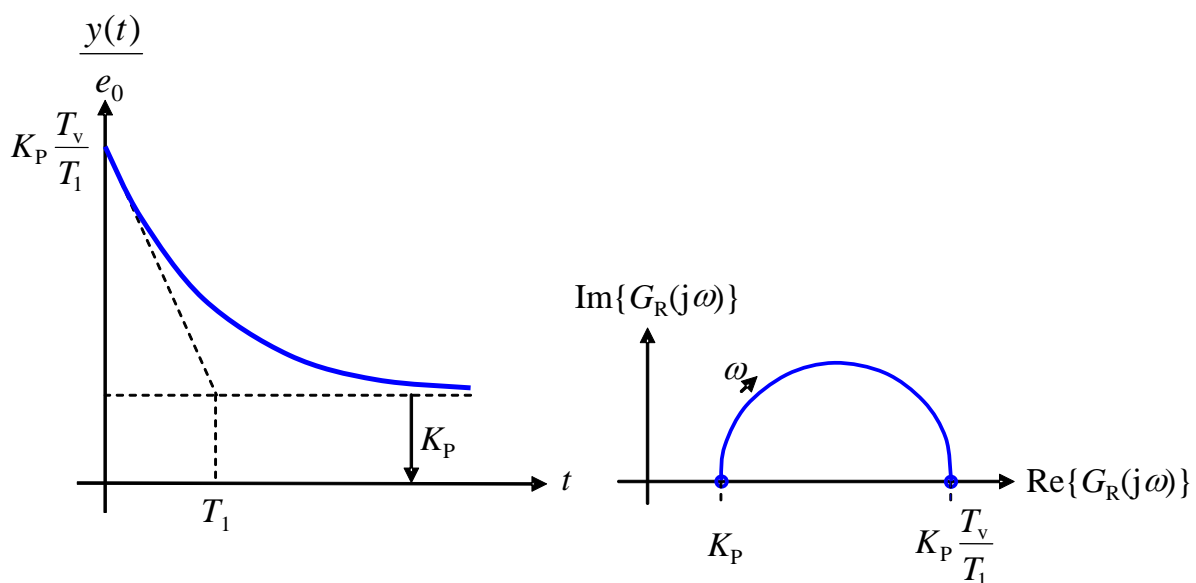
$$Y(s) = K_P \frac{1 + T_v s}{1 + T_1 s} \cdot E(s) , \quad (5.4)$$

das heißt

$$G_R(s) = K_P \frac{1 + T_v s}{1 + T_1 s} .$$

Im Fall eines idealen PD-Reglers wäre  $T_1 = 0$ . Es wurde jedoch bereits erwähnt, dass ein solches Übertragungsverhalten nicht realisierbar ist. Dies ist in der Praxis auch nicht erstrebenswert, da die Regeleinrichtung dann schon bei höherfrequenten Störungen kleiner Amplitude, die der Regelgröße überlagert sein können, zur Übersteuerung neigen würde.

Man wählt das Verhältnis  $T_v / T_1$  im Bereich  $2 < T_v / T_1 < 10$ . Bild 5.2 zeigt die Übergangsfunktion und Ortskurve eines realen PD-Reglers.  $K_P$  ist der Übertragungsbeiwert.



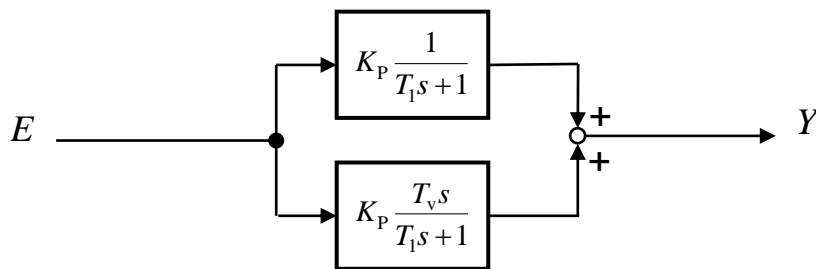
*Bild 5.2: Übergangsfunktion und Ortskurve des realen PD-Reglers  
(Die Phase eilt vor  $\rightarrow 90^\circ \geq \varphi \geq 0^\circ$ )*



$T_v$  wird *Vorhaltzeitkonstante* genannt. Sie ist gleich derjenigen Zeit, um welche die Anstiegsantwort einer idealen PD-Regeleinrichtung einen bestimmten Wert der Stellgröße früher erreicht als eine entsprechende P-Regeleinrichtung.

Auch bei der Regelung mit PD-Regler entsteht eine bleibende Regeldifferenz. Da jedoch durch die Vorhaltbildung eine stabilisierende Wirkung entsteht, kann  $K_P$  oft gegenüber einer reinen P-Regeleinrichtung vergrößert und damit die bleibende Regeldifferenz  $e$  verkleinert werden.

Man kann sich einen realen PD-Regler z.B. durch die Parallelschaltung (Summendarstellung) eines P- und eines D-Übertragungsgliedes vorstellen (Bild 5.3).



*Bild 5.3: Parallelschaltung eines  $PT_1$ - und eines  $DT_1$ -Gliedes*

Im stationären Zustand ( $e = \text{konst.}$ ) ist der D-Einfluss ohne Wirkung, und es gilt  $y = K_P \cdot e$ . Ein reiner D- oder  $DT_1$ -Regler ist nicht für eine Regelung geeignet, da er im stationären Zustand nur die Stellgröße  $y = 0$  liefern kann.

### 5.3 Integral-Regler (I-Regler)

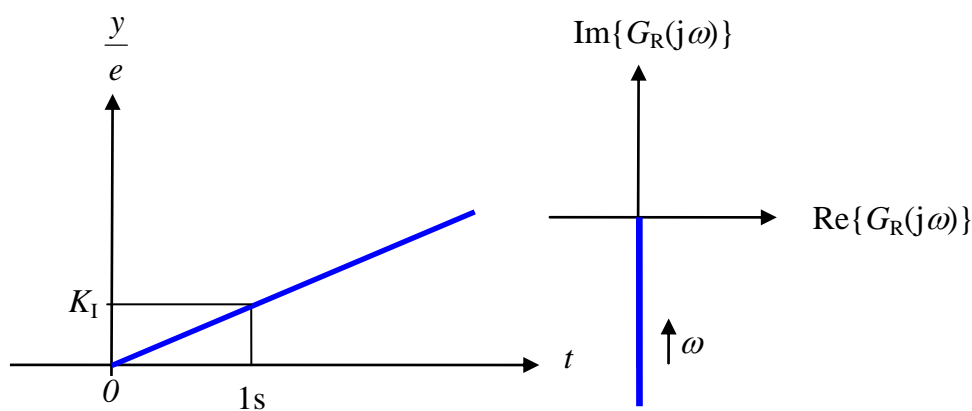
Durch Verwendung einer integrierenden Regeleinrichtung wird eine bleibende Regeldifferenz vermieden. Der reine **I-Regler** wird durch die Differentialgleichung

$$y(t) = K_I \int e(t) dt + y_0 \quad (5.5)$$

beschrieben,  $K_I$  ist der Integrierbeiwert.

Die zugehörige Beziehung im Bildbereich lautet

$$Y(s) = \frac{K_I}{s} \cdot E(s),$$



*Bild 5.4 Übergangsfunktion und Ortskurve des I-Reglers  
(Die Phase eilt immer um  $90^\circ$  nach:  $\varphi = -90^\circ$ )*

das heißt

$$G_R(s) = \frac{K_I}{s} \quad (5.6)$$

Die Übergangsfunktion ist in Bild 5.4 (und Bild 3.9) aufgetragen. Die Ortskurve ist gleich der negativen imaginären Achse der  $G$ -Ebene. Reine I-Regler haben die Eigenschaft, dass sie zu relativ langsamen Regelungen führen, da die Stellgröße erst durch Integration der Regeldifferenz gebildet wird.

## 5.4 Proportional-Integral-Regler (PI-Regler)

Dieser Nachteil entfällt bei der PI-Regeleinrichtung. Hier wird zusätzlich zum Integralanteil ein Proportionalanteil gebildet.

Der Differentialgleichung

$$y = K_P \left( e + \frac{1}{T_n} \int e \, dt \right) + y_0 \quad (5.7)$$

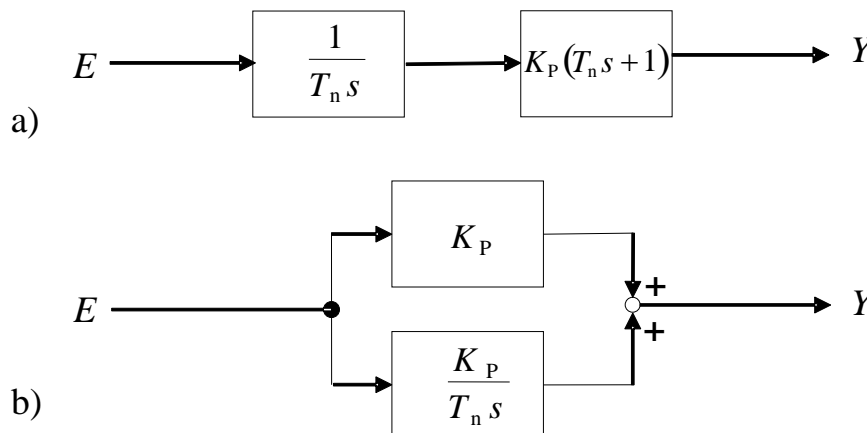
entspricht im Bildbereich die Beziehung

$$Y(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_n s} \right) \cdot E(s) = K_P \frac{1 + T_n s}{T_n s} \cdot E(s) \quad (5.8)$$

das heißt

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_n s} \right) = K_P \frac{1 + T_n s}{T_n s} \quad .$$

Man kann sich den **PI-Regler** entweder als Reihenschaltung eines PD- und eines I-Gliedes (Produktform) oder als Parallelschaltung eines P- und eines I-Gliedes vorstellen (Summenform), Bild 5.5.



**Bild 5.5:** PI-Übertragungsglied

a) Reihenschaltung eines I- und eines PD-Gliedes (Produktform)

b) Parallelschaltung eines P- und eines I-Gliedes (Summenform)

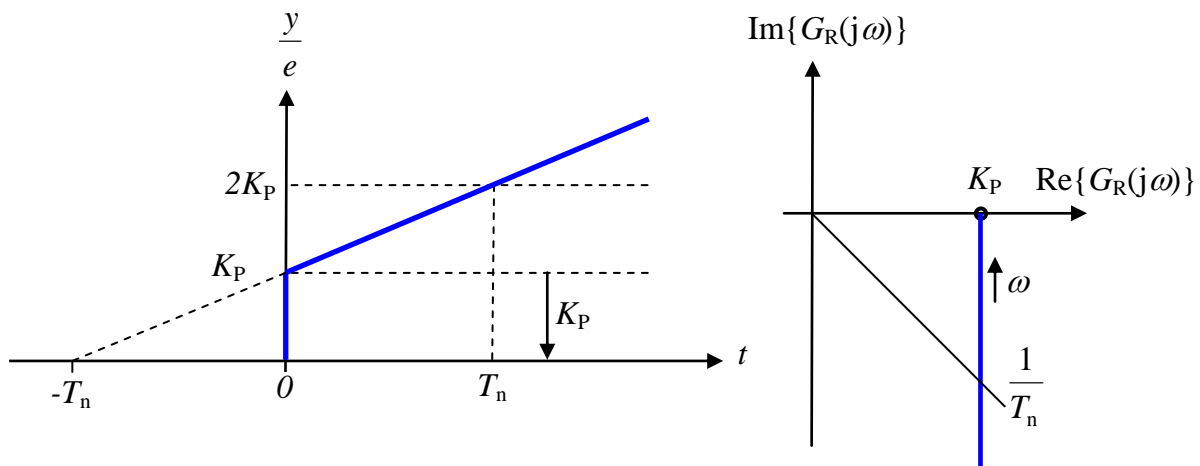
$K_P$  ist der Übertragungsbeiwert, der mit dem Proportionalbereich wieder über Gleichung (2.12) zusammenhängt.  $T_n$  wird **Nachstellzeit** genannt.

Bild 5.6 zeigt die Übergangsfunktion und Ortskurve eines PI-Reglers.

Die Nachstellzeit ist die Zeit, die bei der Übergangsfunktion benötigt wird, um aufgrund der I-Wirkung eine gleich große Stellgrößenänderung zu erzielen, wie sie infolge des P-Anteiles sofort entsteht.

Die PI-Regeleinrichtung verbindet die Vorteile des P- und des I-Reglers:

Bei Entstehen einer Regeldifferenz wird aufgrund des P-Anteiles sofort eine korrigierende Stellgröße  $y$  erzeugt. Der I-Anteil sorgt dafür, dass die Regeldifferenz  $e$  im stationären Zustand vollständig verschwindet.



*Bild 5.6 Übergangsfunktion und Ortskurve des PI-Reglers  
(Die Phase eilt nach:  $-90 \leq \varphi \leq 0$ )*

## 5.5 Proportional-Integral-Differential-Regler (PID-Regler)

Hier wird die Stellgröße durch Überlagerung aller drei bisher besprochenen Einflüsse (**P**roportional-, **I**ntegral-, **D**ifferential-Wirkung) gebildet.

Die Differentialgleichung einer realen PID-Regeleinrichtung lautet

$$T_1 \frac{d}{dt} y + y = K_P \left( e + \frac{1}{T_n} \int e dt + T_v \frac{d}{dt} e \right) + y_0 \quad (5.9)$$

Im Bildbereich erhält man die Beziehung (*Summenform*)

$$(T_1 \cdot s + 1) Y = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s \right) E \quad ,$$

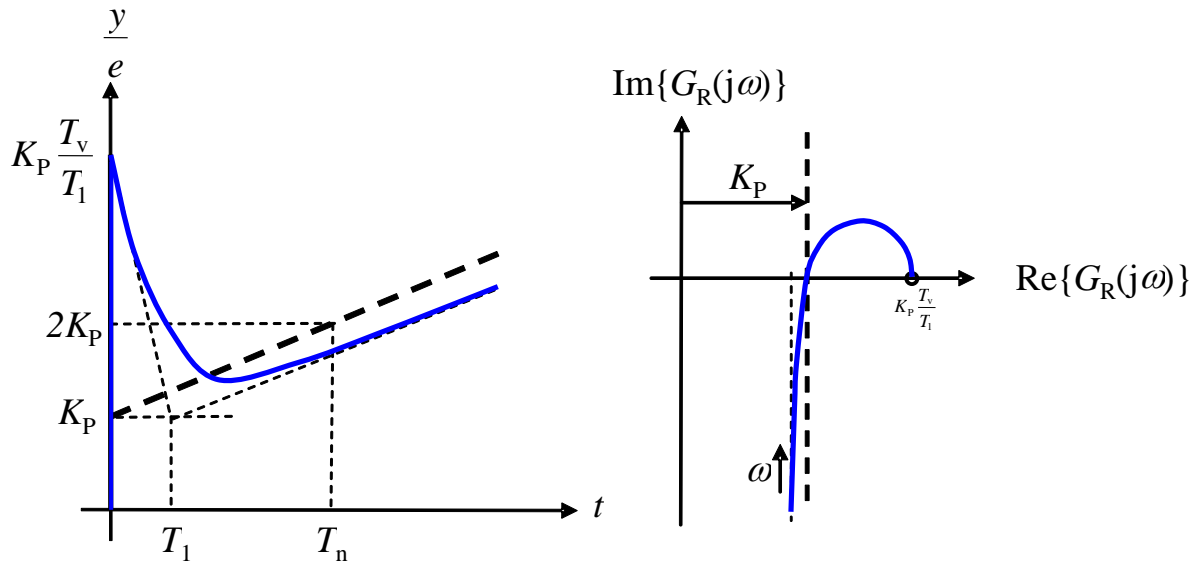
das heißt

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s \right) \frac{1}{T_1 s + 1} \quad (5.10)$$

$$G_R(s) = K_P \frac{T_n T_v s^2 + T_n s + 1}{T_n s (T_1 s + 1)} \quad .$$

$K_P$  ist der Übertragungsbeiwert,  $T_n$  die Nachstellzeit und  $T_v$  die Vorhaltzeit.  $T_1$  ist eine unvermeidbare Verzögerung, die aber aus den bei der Besprechung des PD-Reglers schon genannten Gründen sogar wünschenswert ist. Sie wird wieder so gewählt, dass  $T_v / T_1$  im Bereich  $2 < T_v / T_1 < 10$  liegt. Der Unterschied zum idealen PID-Regler ( $T_1 = 0$ ) ist damit nur gering.

Bild 5.7 zeigt Übergangsfunktion und Ortskurve des realen PID-Reglers. Die Verläufe für  $T_1 = 0$  sind dabei gestrichelt eingetragen.



*Bild 5.7: Übergangsfunktion und Ortskurve des realen PID-Reglers*

In vielen Fällen ist es zweckmäßiger, Gleichung (5.10) (Summenform, entspricht der Parallelschaltung eines P-, I- und D-Kanals) in der so genannten **Produktform**)

$$G_R(s) = K_P \left( 1 + sT_v + \frac{1}{sT_n} \right) \frac{1}{1 + sT_1} = K_{P\pi} \frac{(1 + sT_{n\pi})(1 + sT_{v\pi})}{sT_{n\pi}(1 + sT_1)} \quad (5.11)$$

zu schreiben.

Dabei besteht zwischen  $T_n$ ,  $T_v$ ,  $T_{n\pi}$ ,  $T_{v\pi}$  und  $K_{P\pi}$ ,  $K_P$  der Zusammenhang (Nullstellen des Zählers)

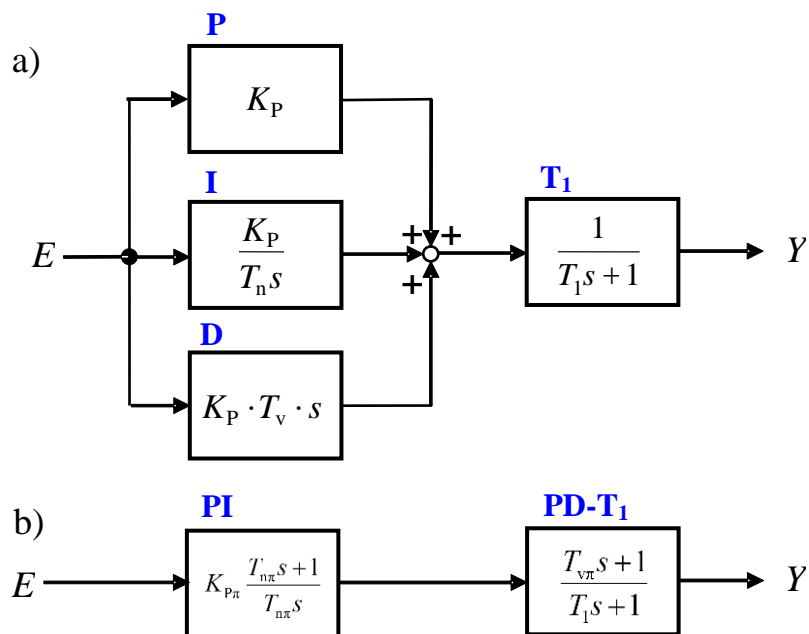
$$\begin{aligned} K_P &= K_{P\pi} \frac{T_{n\pi} + T_{v\pi}}{T_{n\pi}}, \\ T_v &= \frac{T_{n\pi} \cdot T_{v\pi}}{T_{n\pi} + T_{v\pi}}, \\ T_n &= T_{n\pi} + T_{v\pi}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Produktschreibweise mit  $T_{n\pi} > T_{v\pi}$  entspricht der Reihenschaltung eines PI-Gliedes mit der Proportionalverstärkung  $K_{P\pi}$  und der Nachstellzeit  $T_{n\pi}$ ,

$$G_1(s) = K_{P\pi} \frac{T_{n\pi}s + 1}{T_{n\pi}s},$$

und eines PD- $T_1$ -Gliedes (realer PD-Regler mit  $K_P = 1$  und der Vorhaltezeit  $T_{v\pi}$ ),

$$G_2(s) = \frac{T_{v\pi}s + 1}{T_1s + 1} \quad .$$



*Bild 5.8: PID-T<sub>1</sub> Übertragungsglied*  
*a) Parallelschaltung (Summenform)*  
*b) Reihenschaltung (Produktform)*

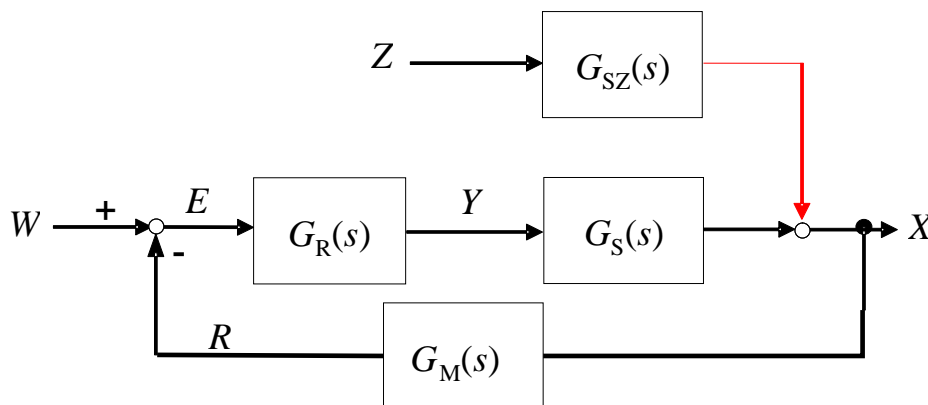
In Bild 5.8 sind die beiden verschiedenen Darstellungsformen der PID-Regeleinrichtung gezeigt, wobei die Produktform meist mathematisch einfacher handhabbar ist, weil Pole und Nullstellen direkt ablesbar sind.

## 5.6 Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Nachdem nun das dynamische Verhalten von Regelstrecke und Regeleinrichtung bekannt ist, kann mit den Gleichungen (4.21), (4.22) und (4.23) das Übertragungsverhalten des **geschlossenen Regelkreises** bestimmt werden.

Man wählt dazu zweckmäßigerweise die Darstellung im Frequenzbereich (Kennzeichnung des Systemverhaltens durch die Übertragungsfunktion), die die bereits erwähnten Vorteile gegenüber einer Berechnung im Zeitbereich (Differentialgleichungen) aufweist.

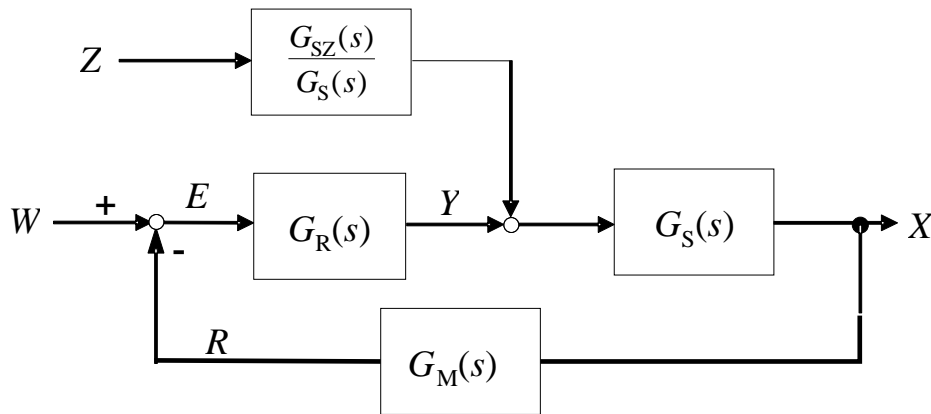
Bild 5.9 zeigt den Wirkungsplan eines Regelkreises.



**Bild 5.9** Wirkungsplan eines Regelkreises mit Laststörung

Die Darstellung entspricht der in Bild 2.1, der Angriffspunkt der Störgröße ist jedoch jetzt festgelegt worden. Die Störung wirkt über  $G_{sz}$  als Laststörung auf die Regelgröße ein. Dem liegt die Vorstellung zugrunde, dass nur eine Störgröße angreift, deren Auswirkung auf die Regelgröße bekannt ist. Dies ist natürlich eine Näherung, da im praktischen Fall eine Vielzahl von Störungen vorliegen kann, deren Einfluss im Einzelnen nicht erfassbar ist. Die in Bild 5.9 eingezeichnete Störgröße stellt nur die dominierende Störung dar. **Die Stabilität einer Regelung ist jedoch unabhängig vom Angriffspunkt und Verlauf der Störung**, wie noch gezeigt wird. Es ist deshalb im Grunde genommen gleichgültig, wo die Störung einwirkt, sie wird aufgrund des Prinzips einer Regelung ausgeglichen, solange sie nicht in einem Frequenzbereich liegt, in dem die Regelung unwirksam wird.

Der Angriffspunkt der Störung wird oft vor der Strecke (gleicher Angriffsort wie die Stellgröße  $Y$ ) als Versorgungsstörung angenommen. Die Darstellung in Bild 5.9 kann ohne weiteres entsprechend umgeformt werden. Es entsteht dann die in Bild 5.10 gezeigte Anordnung, wie man leicht durch Anwendung der durch Gleichung (4.22) gegebenen Regel nachprüfen kann.



*Bild 5.10 Wirkungsplan eines Regelkreises, Störgröße auf Stellgröße umgerechnet - Versorgungstörung*

Ist  $G_S = G_{SZ}$ , so hat eine Änderung der Störgröße die gleiche Wirkung wie eine Änderung der Stellgröße. Dieser Sonderfall liegt manchen Einstellregeln für die Regelparameter zugrunde.

Aus Bild 5.9 folgt für den Zusammenhang zwischen Eingangsgröße (Führungsgröße  $W$ ) und Ausgangsgröße (Regelgröße  $X$ ) bei Berücksichtigung der Störgröße  $Z$  die Beziehung

$$X = \frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M} \cdot W + \frac{1}{1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M} \cdot G_{SZ} \cdot Z \quad (5.13)$$

Der Ausdruck

$$G_W(s) = \frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M} \quad (5.14)$$

wird **Führungsübertragungsfunktion** und der Ausdruck

$$G_Z(s) = \frac{G_{SZ}}{1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M} \quad (5.15)$$

**Störungsübertragungsfunktion** des geschlossenen Kreises genannt.

Vergleicht man die Beziehung (5.13) mit Gleichung (2.14), so erkennt man, dass sie rein formal das gleiche Aussehen hat. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass  $G_R(s)$ ,  $G_S(s)$ ,  $G_M(s)$  frequenzabhängige Funktionen sind, während  $K_P$ ,  $K_{PS}$  konstante Faktoren waren. Bei Verwendung eines P-Reglers ( $G_R = K_P$ ) an einer Strecke entsprechend Gleichung (4.7) folgt aus der Beziehung (5.13) für den stationärer Zustand ( $s = j\omega = 0$ ) sofort Gleichung (2.14). Die viel allgemeinere Beziehung (5.13) beschreibt sowohl das dynamische Verhalten als auch den stationärer Zustand.

Der Nenner der Übertragungsfunktion

$$1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M = 1 + G_o$$



bestimmt die Stabilität des Systems. Das Produkt  $G_R \cdot G_S \cdot G_M = G_o$  wird **Kreisübertragungsfunktion** bzw. Kreisfrequenzgang (mit  $s = j\omega$ ) genannt.

Wie in Abschnitt 3.1 bereits gezeigt wurde, hängt die Stabilität nur von den Wurzeln des Nenners (den Polen) der Übertragungsfunktion ab.

Die Stabilität des geschlossenen Kreises wird also durch die **Nullstellen** des Ausdrucks

$$1 + G_R \cdot G_S \cdot G_M = 0 \quad (5.16)$$

bestimmt. Diese müssen in der linken  $s$ -Halbebene liegen, damit das System stabil ist.

Wie man sieht, haben  $G_W$  und  $G_Z$  den gleichen Nenner. Ist das System also für Führung stabil, so ist es das auch für Störung. Dies ist eine allgemein gültige Eigenschaft linearer Systeme. Für diese Stabilitätsbetrachtung dürfen Pole und Nullstellen nur eingeschränkt gekürzt werden.

In der Beziehung (5.16) kommt nur das Produkt  $G_R \cdot G_S = G_o$  vor, das heißt die Stabilität des geschlossenen Kreises hängt von den Eigenschaften des offenen Kreises (Regler **und** Strecke) ab. Man muss nun die freien Parameter so wählen, dass ein gewünschtes Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises entsteht. Dabei kann man die Strecke selbst nicht verändern. Die Anpassung muss also durch geeignete Wahl von den Reglerparametern ( $K_P$ ,  $T_v$ ,  $T_n$ ) geschehen.

Um den Idealfall zu erreichen, hätte man das Produkt  $G_R \cdot G_S \cdot G_M$  im gesamten Frequenzbereich  $G_R \cdot G_S \cdot G_M \gg 1$  zu wählen, da dann wieder unabhängig von Störungen

$$X = W$$

gelten würde. Leider hat eine solche Wahl der Parameter zur Folge, dass die Nullstellen von  $1 + G_o$  in die rechte  $s$ -Halbebene fallen, das heißt das System wird instabil.

Bevor entsprechende Einstellregeln für die Regeleinrichtung angegeben werden, muss das Stabilitätsproblem noch etwas näher untersucht werden. Dabei wird im Folgenden angenommen, dass die Regelstrecke (Gleichung 4.7) selbst stabil ist, das heißt ihre Pole sämtlich in der linken  $s$ -Halbebene liegen, vergleiche z.B. Gleichung (4.8).

Eine Ausnahme sind Strecken ohne Ausgleich. Bei ihnen ist  $a_0 = 0$ , das heißt sie haben einen Pol im Ursprung der  $s$ -Ebene, also bei  $s = 0$ . Im Zeitbereich bedeutet dies nichts anderes als ein ständiges Wachsen der Ausgangsgröße bei konstanter Eingangsgröße. Als Beispiel für eine solche Strecke wurde die Niveauregelung angeführt.

Instabile Regelstrecken (als Beispiel kann man sich ein inverses Pendel oder einen thermisch instabilen Reaktor mit einer temperaturabhängigen exothermen

Reaktion vorstellen) sollen aus den später folgenden Betrachtungen zur Stabilität ausgenommen werden.

**Im Kapitel 5 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:**

PFK 7: Technische Systeme analysieren

- Elementare Regler: P-, PD-, I-, **PI**-, PID-Regler
- Sprungantwort (Versuch 1)
- Führungsübertragungsfunktion  $G_W(s)$
- Störübertragungsfunktion  $G_Z(s)$
- Kreisübertragungsfunktion  $G_0(s)$

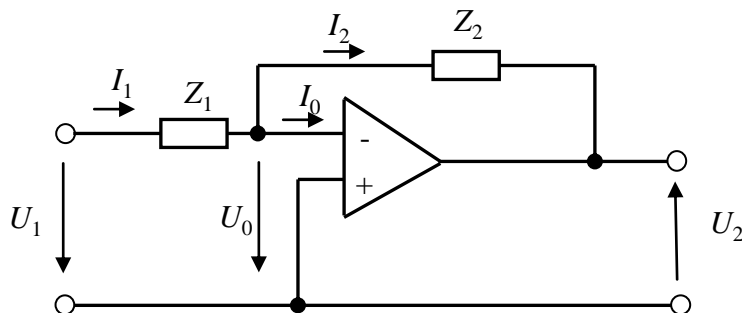
## 6. Gerätetechnische Realisierung eines Reglers

Mit den im Kapitel 5 besprochenen Regeleinrichtungen sind die für die technische Praxis wichtigsten bekannt. Es wäre natürlich möglich, das Spektrum zu erweitern, jedoch ist dies für die meisten Anwendungen nicht erforderlich. Außerdem ist es im Interesse einer rationellen Fertigung, Projektierung und Inbetriebnahme sinnvoll, sich auf die genannten Typen zu beschränken.

### 6.1 Realisierung eines Reglers in analoger Schaltungstechnik

Nun soll noch kurz auf eine Methode hingewiesen werden, die vor allen Dingen bei *analogen Reglern* verwendet wird, um einer Regeleinrichtung ein gewünschtes Übertragungsverhalten zu geben.

Die in Bild 6.1 gezeigte Anordnung besteht aus einem beschalteten Operationsverstärker mit möglichst hoher Leerlaufverstärkung ( $V_o > 10^6$ ), hoher Eingangsimpedanz und großer Bandbreite. Wir gehen davon aus, dass der Operationsverstärker sich annähernd wie ein Proportionalglied ohne Verzögerung verhält. Dieser mit den Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  beschaltete Verstärker wird als invertierender Verstärker beschrieben, so dass automatisch eine Gegenkopplung entsteht.



*Bild 6.1 Beschalteter Operationsverstärker  
( $U_2$  hier in umgekehrter Zählrichtung)*

Bei großem Eingangswiderstand und großer Leerlaufverstärkung kann man annehmen, dass der Eingangsstrom  $I_0 \sim 0$  und die Eingangsspannung  $U_0 \sim 0$  vernachlässigbar klein sind (virtuelle Masse). Unter diesen Voraussetzungen gelten die Beziehungen

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{U_2}{Z_2} \quad \text{und} \quad I_1 = I_2 \quad (6.1)$$

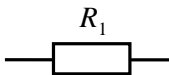
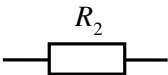
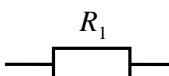
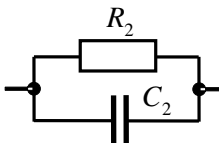
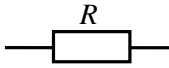

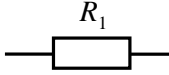
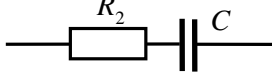
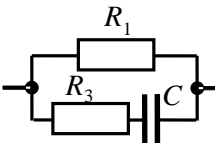
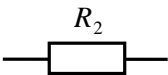
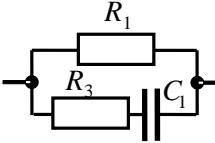
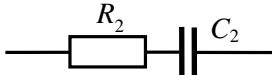
woraus sich sofort die Gleichung

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = G \quad (6.2)$$

ergibt.

Das Übertragungsverhalten des beschalteten Verstärkers wird durch die Eingangsimpedanz  $Z_1$  und die Gegenkoppelimpedanz  $Z_2$  bestimmt. In Tabelle 6.2 sind verschiedene Kombinationen  $Z_1$ ,  $Z_2$  und die sich jeweils ergebende Übertragungsfunktion  $G(s)$  angegeben.

Man sieht, dass durch eine entsprechende Beschaltung ein gewünschtes Zeitverhalten realisiert werden kann. Zusätzlich muss beachtet werden, dass immer ein Bauteil mehr ausgelegt werden muss, als der Regler Parameter aufweist. Bei einem P-Regler sind z.B. zwei Widerstände auszulegen. Die Widerstände sind so zu dimensionieren, dass der Strom des OP nicht überschritten wird, die Schaltung aber auch nicht zu hochohmig und damit störanfällig wird. Erfahrungsgemäß sind Werte im unteren  $k\Omega$  Bereich sinnvoll.

Bezeichnung	$G(s)$	$Z_1$	$Z_2$
P-Glied	$\frac{R_2}{R_1} = K_P$		
PT <sub>1</sub> -Glied	$\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} = K_P \frac{1}{T_1 s + 1}$		
I-Glied	$\frac{1}{RC s} = \frac{K_I}{s}$		
PI-Glied	$\frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C s + 1}{R_2 C s} = K_P \frac{T_n s + 1}{T_n s}$		
PD-T <sub>1</sub> -Glied Lag/Lead (realer PD)	$\frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 + R_3) C s + 1}{R_3 C s + 1} = K_P \frac{T_v s + 1}{T_1 s + 1}$		
PID-T <sub>1</sub> -Glied (realer PID in Produktform)	$\frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_3 C_1 s + 1} \frac{(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$ $= K_{P\pi} \frac{(T_{v\pi} s + 1)(T_{n\pi} s + 1)}{(T_1 s + 1) T_{n\pi} s}$		

Tab. 6.2: Beschaltungsmöglichkeiten eines Operationsverstärkers und zugehörige Übertragungsfunktionen

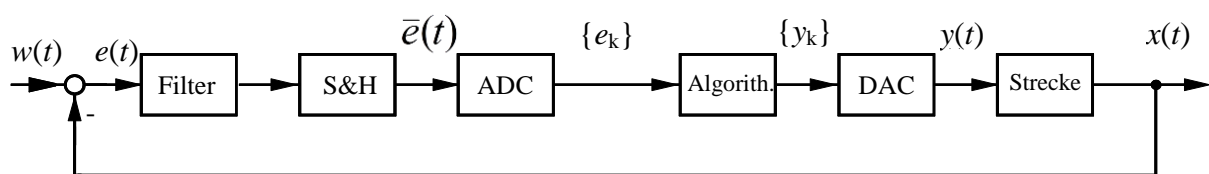
Bei Regelvorgängen, die innerhalb von elektronischen Schaltungen stattfinden, ist ein basierend auf beschalteten Operationsverstärkern realisierter analoger Regler eine oft genutzte Lösung. Bei linear geregelten und bei einfachen Schalt-  
netzteilen wird die Spannung zum Beispiel fast immer linear geregelt.

## 6.2 Realisierung digitaler Regeleinrichtungen (Abtastregelung)

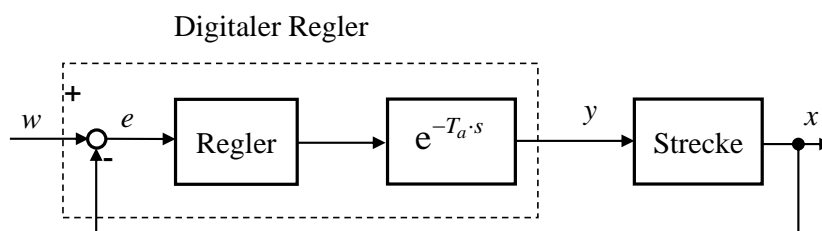
Bei Universalreglern hingegen wird die Regelung heute nur noch selten mit beschalteten Operationsverstärkern realisiert. Hier stehen andere Kriterien im Vordergrund:

- Anbindung an ein Leitsystem über einen Feldbus zur Übermittlung von Prozessdaten (Führungsgröße und Regelgröße) und / oder Servicedaten (Parameter, Softwareupdate).
- In einem weiten Bereich frei wählbare und exakt reproduzierbare Reglerparameter.
- Durch den Einsatz von Mikrocontrollern können selbst lernende und adaptive Algorithmen implementiert werden.

Bild 6.3 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines **digitalen Universalreglers**. Die analoge Eingangsschaltung, bestehend aus Anti-Aliasing-Tiefpass, Abtaster und Analog-Digital-Umsetzer ist optional, und wird bei digitaler Vorgabe der Führungsgröße bzw. digitaler Rückführung der Regelgröße nicht benötigt. Charakteristisch ist die zyklische Abarbeitung des Regelalgorithmus durch einen Mikrocontroller oder Signalprozessor. Besonders schnelle digitale Regelungen können mit Field Programmable Gate Arrays (FPGA) aufgebaut werden. Die **Zykluszeit (Abtastzeit)  $T_a$**  liegt üblicherweise im einstelligen Millisekundenbereich und ist damit so gewählt, dass sie deutlich kleiner ist als die Verzögerungszeiten der zu regelnden Strecke. Aus regelungstechnischer Sicht wird diese als Totzeit betrachtet, Bild 6.4. Zur Berechnung der Reglerparameter wird die Totzeit  $T_a$  der Regelstrecke zugeschlagen. Man nennt diese Betriebsweise **quasi-analog**, da die Erfahrungen, Regeln und Hilfsmittel aus der analogen Regelungstechnik weiter verwendet werden können.



*Bild 6.3 Schematische Darstellung eines digitalen Regelkreises*



*Bild 6.4 Ersatzschaltbild eines quasianalogen digitalen Regelkreises mit der Berücksichtigung der Abtast- / Zykluszeit  $T_a$  als Totzeit*

### 6.3 Modellierung und Simulation von Regelkreisen

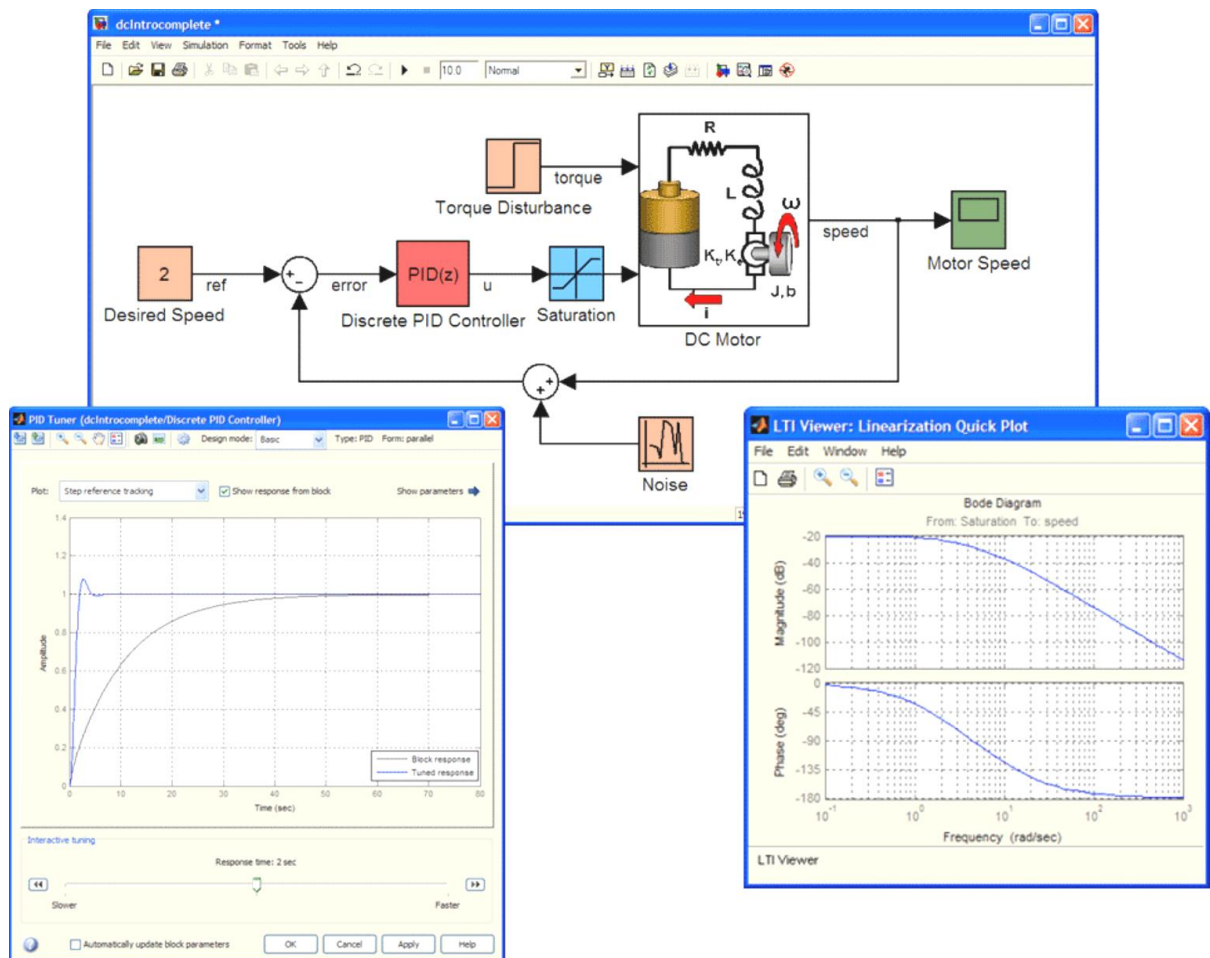
**MATLAB** ist eines der verbreitetsten Programme, insbesondere in der Regelungstechnik, zum wissenschaftlichen numerischen Rechnen. Hersteller ist die Firma The Math Works Inc. in den USA. Ergänzt durch die grafische Oberfläche **Simulink** kann es für die Modellierung und Simulation dynamischer Systeme genutzt werden. Regelkreise werden als Signalflusspläne eingegeben. In den Bibliotheken (Library) von Simulink sind zahlreiche Blöcke (Komponenten) für die Simulation von zeitkontinuierlichen, zeitdiskreten und auch nichtlinearen Systemen zusammengestellt. Mit Hilfe der Maus können die Blöcke auf die Arbeitsfläche gezogen, verbunden und anschließend parametrisiert werden.

Im Vergleich mit textorientierten Programmiersprachen ergeben sich folgende Vorteile:

- Mit Simulink erstellte Signalflusspläne können übersichtlich gestaltet werden und sind daher im Allgemeinen leicht lesbar und unmittelbar als Dokumentation geeignet.
- Es ergeben sich kurze Entwicklungszeiten, da Simulationen und Test durch die intuitive Bedienung schnell und übersichtlich durchgeführt und dokumentiert werden können.
- Die Analyse und die Auswertung kann sowohl im Zeitbereich (Sprungantwort) als auch im Frequenzbereich (Ortskurve, Bode-Diagramm) erfolgen.

Leider ist Matlab<sup>®</sup> / Simulink<sup>®</sup> sehr teuer, so dass es außerhalb von Hochschulen oft nur in den Entwicklungsabteilungen von großen Unternehmen eingesetzt wird.

Im RT Labor (Versuch 2) wird deshalb Scilab Xcos eingesetzt.



**Bild 6.5** *Matlab Simulink:*

- *Signalflussplan (oben)*
  - *Simulierte Sprungantwort (links unten) und*
  - *berechnetes Bode-Diagramm (rechts unten)*
- [Quelle: The Math Works Inc.]

**Im Kapitel 6 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:**

PFK 6: Technische Systeme simulieren

PFK 9: Technische Systeme realisieren

- Elementare Regler: P-, PD-, I-, **PI**, PID-Regler
- Realisierung analoger Regler
- Realisierung digitaler Regler

## 7. Stabilität von Regelkreisen

Verantwortlich für die Gefahr der Instabilität von Regelkreisen sind die Verzögerungen durch die Energiespeicher in Verbindung mit der signalverstärkenden Gegenkopplung. Es muss deshalb stets sichergestellt werden, dass ein System stabil ist.

Wie bereits erläutert, kommt es auf die Lage der Pole (Nullstellen des Nenners)  $1 + G_R \cdot G_S = 0$  an. Man könnte diese nun direkt ausrechnen, was jedoch auf die Lösung einer Gleichung  $n$ -ten Grades hinausläufe. Es ist bekannt, dass dafür kein allgemeines Verfahren existiert und man auf die Anwendung numerischer Methoden und den Einsatz eines Digitalrechners angewiesen ist.

Es existieren jedoch Verfahren, die Stabilität eines Systems zu überprüfen, ohne die Pole der Übertragungsfunktion  $G_W(s)$  explizit zu bestimmen. Die wichtigsten Methoden sollen im Folgenden (ohne Beweis) kurz aufgeführt werden.

### 7.1 Hurwitz-Kriterium

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktionen  $G_R$  und  $G_S$  analytisch bekannt sind. Das Verfahren soll an einem Beispiel erläutert werden.

Gegeben sei eine Regelstrecke mit

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} \quad , \quad (7.1)$$

die mit einem P-Regler

$$G_R(s) = K_P \quad (7.2)$$

geregelt werden soll.

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises wird dann gemäß (5.14) zu

$$G_W(s) = \frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S} \quad \text{bzw.} \quad (7.3)$$
$$G_W(s) = \frac{K_{PS} \cdot K_P}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K_S \cdot K_P} \quad .$$

Man erkennt, dass der Nenner von  $G_W(s)$  ein Polynom in  $s$  ist,

$$N_W(s) = T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)s + 1 + K_{PS}K_P \quad . \quad (7.4)$$

Bezeichnet man die Koeffizienten wieder allgemein mit  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  und  $a_0$ , so kann man für die Beziehung (7.4) auch

$$N_W(s) = a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 \quad (7.5)$$

schreiben.



Damit die Nullstellen von Gleichung (7.5) negative Realteile haben, müssen nach Hurwitz drei Bedingungen erfüllt sein:

1. Alle Koeffizienten müssen vorhanden sein (ungleich Null).
2. Alle Koeffizienten  $a_v$  müssen positives Vorzeichen haben.
3. Folgende Determinante (System dritter Ordnung) ist positiv:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Im vorliegenden Beispiel sind bei einem positiven  $K_P$  die Bedingungen 1 und 2 erfüllt. Aus der 3-ten Bedingung folgt mit den gewählten Bezeichnungen

$$(1 + K_{PS} \cdot K_P) T_1 T_2 T_3 < (T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \quad (7.6)$$

Daraus kann der maximal zulässige Übertragungsbeiwert  $K_{Pmax}$  der Regleinrichtung zu

$$K_{Pmax} = \frac{1}{K_S} \left[ \frac{(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}{T_1 T_2 T_3} - 1 \right] \quad (7.7)$$

berechnet werden.

Man erkennt bereits an dem einfachen Beispiel, dass der Rechenaufwand zur Bestimmung von  $K_{Pmax}$  über die Hurwitzbedingung nicht gering ist. Hat man Regelstrecken höherer Ordnung und einen anderen Regler (I, PI, PD, PID), so wächst der Grad des Nennerpolynoms ( $n > 3$ ). Die dritte Hurwitzbedingung wird dann wesentlich komplizierter, der Aufwand zur Berechnung der Reglerkenngrößen ist für praktische Bedürfnisse nicht mehr sinnvoll [2, 3]. Außerdem würde die Anwendung des Hurwitz-Kriteriums nur die Regler-Kenngrößen liefern, für die sich der geschlossene Kreis an der **Stabilitätsgrenze** befindet. Man ist jedoch gewöhnlich an Kennwerten interessiert, die ein gut gedämpftes Verhalten des Systems beschreiben.

### **Zahlenbeispiel 5**

Eine Regelstrecke 3. Ordnung mit Ausgleich und den Kennwerten

$$K_{PS} = 1, \quad T_1 = 10 \text{ s}, \quad T_2 = 2,2 \text{ s} \text{ und } T_3 = 1,5 \text{ s}$$

soll mit einem P-Regler betrieben werden. Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der Übertragungsbeiwert des Reglers

$$K_P < \frac{(10 + 2,2 + 1,5)(10 \cdot 2,2 + 10 \cdot 1,5 + 2,2 \cdot 1,5)}{1 \cdot 10 \cdot 2,2 \cdot 1,5} - 1 = 15,7$$

sein.

## 7.2 Nyquist-Kriterium

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Stabilität des geschlossenen Systems von den Eigenschaften des offenen Kreises bestimmt wird, da der Nenner der Übertragungsfunktion  $G(s)$  (siehe Gleichung 5.13) mit der Kreisübertragungsfunktion  $G_o$  festliegt. Soll das geschlossene System stabil sein, müssen die Nullstellen des Nenners

$$1 + G_o(s) = 0 \quad (7.8)$$

in der linken  $s$ -Halbebene liegen. Der Grenzfall liegt vor, wenn sich die Nullstellen auf der imaginären Achse, das heißt für  $s = j\omega$ , ergeben. Es muss also nachgeprüft werden, ob für irgendeine Frequenz  $\omega_1$  Gleichung (7.8) erfüllt ist,

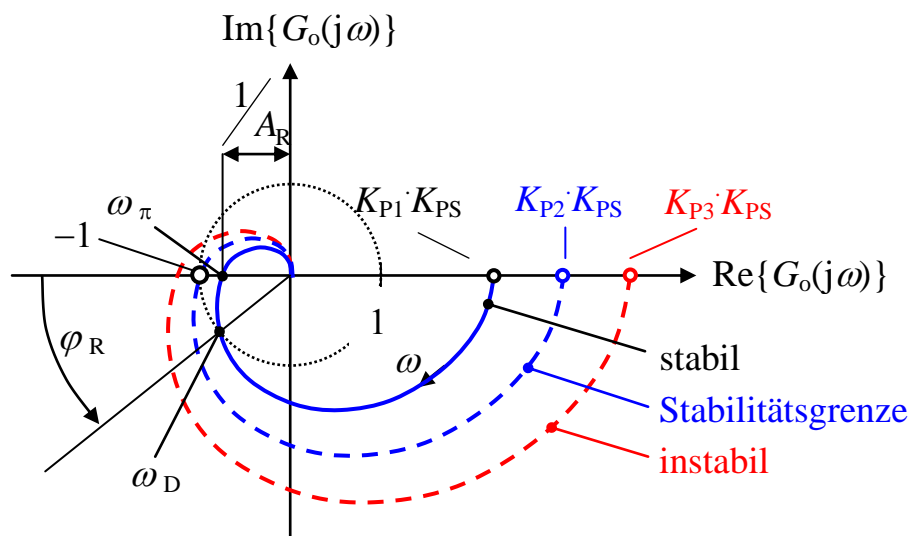
$$1 + G_o(j\omega_1) = 0 \quad (7.9)$$

Ist dies der Fall, das heißt gilt

$$G_o(j\omega_1) = -1,$$

so ist das geschlossene System an der **Stabilitätsgrenze** und führt Dauerschwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$  aus.

Man trägt also die Ortskurve des Kreisfrequenzganges in der  $G_o$ -Ebene auf und untersucht, ob  $G_o(j\omega)$  durch den Punkt „-1“ läuft.



**Bild 7.1:** Verlauf der Ortskurve des offenen Kreises (System 3. Ordnung)

Bild 7.1 zeigt für ein System mit Ausgleich (P-Regler, Strecke mit Ausgleich) drei verschiedene Möglichkeiten für den Verlauf der Ortskurve  $G_o(j\omega)$ .

Das Nyquist-Kriterium besagt nun:

Das geschlossene System ist dann stabil, falls der **kritische Punkt „-1“** (Bild 7.1) links von der Ortskurve des offenen Kreises liegt, wenn diese in Richtung wachsender Frequenzen hin durchlaufen wird.

Überprüft man die in Bild 7.1 enthaltenen Ortskurven auf diesen Sachverhalt hin, so stellt man sofort fest, dass die Ortskurve 1 ein stabiles, die Ortskurve 3 ein instabiles geschlossenes System erwarten lässt. Kurve 2 stellt den Stabilitätsgrenzfall dar. Dies lässt sich auch anschaulich deuten. Bei der Messung des Kreisfrequenzganges wird die Eingangsgröße nach einer harmonischen Funktion,

$$e = \hat{e} \cdot \sin(\omega \cdot t) ,$$

geändert.  $G_o(j\omega_1) = -1$  bedeutet, dass die Ausgangsgröße bei der Kreisfrequenz  $\omega_1$ , eine Schwingung gleicher Amplitude ausführt, wobei die Phasenverschiebung gegenüber der Eingangsgröße  $\varphi_k = -180^\circ$  beträgt,

$$x = +\hat{e} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - 180^\circ) = -\hat{e} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) .$$

Schließt man nun den Regelkreis unter Beachtung der Vorzeichenumkehr an der Vergleichsstelle, so wird die Eingangsgröße des Regelkreises für  $\omega = 0$  gerade

$$e = -x = \hat{e} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) ,$$

die Schwingung erhält sich also selbst aufrecht.

Die Anwendung des Nyquist-Kriteriums hat den Vorteil, dass die Ortskurve  $G_S(j\omega)$  des Streckenfrequenzganges nicht analytisch bekannt sein muss, sondern dass sie auch graphisch aufgrund einer Messung vorliegen kann.

Bei Verwendung eines P-Reglers ist dann lediglich die Frage zu beantworten, wie groß dessen Übertragungsbeiwert  $K_P$  gewählt werden darf, damit die Ortskurve  $G_o = K_P \cdot G_S$  die Nyquist-Bedingung erfüllt. Aus Bild 7.1 kann man entnehmen, dass

$$K_{P_{\max}} < K_{P2}$$

gelten muss, damit das geschlossene System stabil ist.

Bei Verwendung eines anderen Reglertyps (PD, PI, PID) unterscheidet sich  $G_S$  und  $G_o$  nicht nur um einen konstanten Faktor  $K_P$  wie beim Proportionalregler. Der Reglerfrequenzgang  $G_R(j\omega)$  ist dann ebenfalls eine komplexe Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$ . Um den **Kreisfrequenzgang  $G_o(j\omega)$**  zu bestimmen, muss das Produkt

$$G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)$$

berechnet werden.

Man stellt den Frequenzgang zu diesem Zweck am besten in der Form

$$G(\omega) = |G(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \tag{7.10}$$

dar. Der Kreisfrequenzgang wird damit

$$G_o(\omega) = |G_S| \cdot |G_R| \cdot e^{j(\varphi_R + \varphi_S)} . \tag{7.11}$$

$G_o(j\omega)$  ergibt sich also durch Multiplikation der Beträge der Einzel-frequenzgänge und durch Addition der Winkel.

Liegt der Streckenfrequenzgang  $G_s(j\omega)$  als Ergebnis einer Messung für die Kreisfrequenzen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  vor, so muss man für diese Punkte den Reglerfrequenzgang  $G_R(j\omega_1), \dots, G_R(j\omega_n)$  bestimmen und erhält  $G_o(j\omega)$  entsprechend der Gleichung (7.11). Es ist dann zu überprüfen, ob für die gewählten Parameter die Nyquist-Bedingung erfüllt ist.

Es ist sofort einzusehen, dass das Verfahren bei Verwendung eines Proportionalreglers relativ einfach ist, da nur ein freier Parameter, der Übertragungsbeiwert  $K_P$ , festzulegen ist. Beim PD- und PI-Regler sind es zwei ( $K_P, T_v$  bzw.  $K_P, T_n$ ), beim PID-Regler drei Kenngrößen ( $K_P, T_v, T_n$ ), die gewählt werden müssen.

Es ist deshalb nicht so ohne weiteres möglich, sofort einen Satz von Parametern zu finden, der den gewünschten Verlauf der Ortskurve des Kreisfrequenzgangs zur Folge hat. Eine Lösung dieser Aufgabenstellung wird in einem späteren Kapitel gegeben.

Zunächst soll untersucht werden, welchen Verlauf  $G_o(j\omega)$  prinzipiell haben sollte, um ein möglichst optimales Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises zu erzielen.

Es wurde schon erwähnt, dass  $G_o(j\omega)$  über einen weiten Frequenzbereich sehr groß sein soll. Aus Bild 7.1 geht jedoch hervor, dass dann wegen der durch die unvermeidlichen Verzögerungen bedingten Phasennacheilung  $\varphi_o$  die Gefahr besteht, dass  $G_o(j\omega)$  den kritischen Punkt -1 umschließt und die Nyquist-Bedingung verletzt wird.

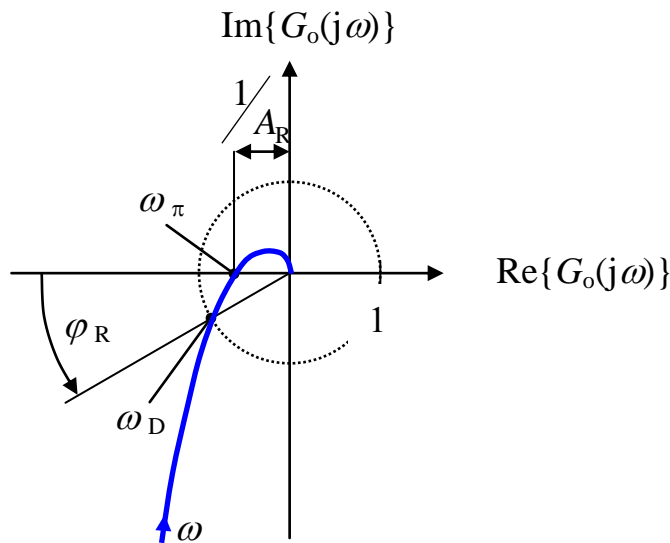
Aus dieser Darstellung wird besonders deutlich, welche Grenze für den Übertragungsbeiwert  $K_P$  eines P-Reglers besteht.

Durch Verwendung eines PD-, PI- oder PID-Reglers gelingt es bei geeigneter Wahl der Kenngrößen, die Ortskurve  $G_o(j\omega)$  so zu verformen, dass sie im **Nutzfrequenzbereich**  $0 < \omega < \omega_n$  sehr große Werte annimmt, während sie im kritischen Bereich so verläuft, dass der Punkt -1 links von  $G_o(j\omega)$  liegt.

Bei einem Regler mit Integralanteil (PI, PID) wird  $G_o(j\omega)$  für  $\omega = 0$  unendlich groß und läuft mit wachsenden Frequenzen in den Koordinatenursprung. Bild 7.2 zeigt die Ortskurve eines solchen Systems. Die Regelstrecke entspricht dabei z.B. Gleichung (7.1), der Regler hat PI-Verhalten (Gleichung 5.8).

Für  $\omega = 0$  ist die Bedingung  $|G_o(j\omega)| \gg 1$  ideal erfüllt, es wird also immer  $X = W$  sein. Der Regelkreis weist im stationären Zustand keine Regeldifferenz auf. Dies gilt jedoch exakt nur für  $\omega = 0$ . Für große Frequenzen wird  $G_o(j\omega)$  kleiner, die Regelung folgt der Änderung der Führungsgröße nur unvollkommen. Im Grenzfall  $\omega \rightarrow \infty$  wird  $G_o(j\omega) = 0$ , die Regelung spricht auf Führungsgrößen dieser

Frequenz nicht an, und Störgrößen wirken sich so aus, als ob nur eine Steuerung vorliegen würde.



*Bild 7.2: Ortskurve des Kreisfrequenzganges (System 3. Ordnung)  
(Strecke 2. Ordnung mit Ausgleich (PT<sub>2</sub>) und integrierender Regler)*

Regelkreise sind also immer für einen gewissen Nutzfrequenzbereich entworfen, der den stationären Zustand ( $\omega = 0$ ) gewöhnlich enthält. Die Reglerkenngrößen werden so gewählt, dass  $G_o$  in diesem Bereich möglichst groß ist. Gleichzeitig wird darauf geachtet, dass die Nyquist-Bedingung eingehalten wird.

Im Allgemeinen genügt es aber nicht, sicherzustellen, dass der geschlossene Kreis stabil ist, man möchte vielmehr auch ein gut gedämpftes **Einschwingverhalten** ( $\vartheta > 0,5$  - vgl. Abschnitt 3.3.7) erzielen. Die Ableitung des Zusammenhangs zwischen dem Verlauf der Ortskurve des offenen Kreises und der als Maß für die Dämpfung benutzten Resonanzüberhöhung des geschlossenen Kreises geht über den Rahmen des Grundlagentextes hinaus. Das Ergebnis wird deshalb ohne Beweis angeführt.

Um eine ausreichende Dämpfung zu gewährleisten, muss die Ortskurve  $G_o(j\omega)$  einen entsprechenden Abstand vom kritischen Punkt -1 einhalten. Als relatives Maß dafür kann man entweder den **Amplitudenrand** (Amplitudenreserve)  $A_R$  oder den **Phasenrand** (Phasenreserve)  $\varphi_R$  benutzen, die wie folgt definiert sind:

1. Amplitudenrand  $A_R$  (Gain Margin)

$$A_R = \frac{1}{|G_o(\omega_\pi)|} \quad (7.12)$$

$\omega_\pi$  ist dabei die Frequenz, bei der der Phasenwinkel des Kreisfrequenzganges

$$\varphi_o(\omega_\pi) = \arg(G_o(\omega_\pi)) = -\pi \triangleq 180^\circ \quad (7.13)$$

wird.

## 2. Phasenrand $\varphi_R$ (Phase Margin)

$$\varphi_R = \pi + \varphi_o(\omega_D) \quad (7.14)$$

$\omega_D$  ist die Frequenz, bei der der Betrag des Kreisfrequenzganges

$$|G_o(j\omega_D)| = 1 \quad (7.15)$$

wird.  $\omega_D$  wird **Durchtrittsfrequenz** genannt.

Bei der Bemessung eines Regelkreises müssen die Kenngrößen so gewählt werden, dass  $A_R$  bzw.  $\varphi_R$  bestimmte Werte nicht über- oder unterschreiten. Sie sollen im Bereich

$$2 < A_R < 6 \quad ; \quad 30^\circ < \varphi_R < 60^\circ \quad (7.16)$$

liegen. Kleine Werte für  $A_R$  und  $\varphi_D$  führen zu einer schnelleren, aber schlechter gedämpften Regelung, große Werte zu einer besser gedämpften, aber langsameren Regelung.

Es ist oft eine Frage der speziellen technischen Anwendung, welches Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises angestrebt wird.

## 7.3 Bode-Diagramm

Im vorhergehenden Abschnitt ist der Verlauf des Kreisfrequenzganges  $G_o(j\omega)$  als Ortskurve in der komplexen Ebene dargestellt. Dies hat den Vorteil, dass die grundsätzlichen Eigenschaften, die  $G_o(j\omega)$  haben muss, damit der geschlossene Kreis ein wünschenswertes Verhalten aufweist, besonders deutlich werden.

Für die praktische Ermittlung der freien Parameter ist aber eine Darstellung in einem Bode-Diagramm vorzuziehen.

Es bietet vor allen Dingen dann Vorteile, wenn aus mehreren Einzelfrequenzgängen, die in Produktform verknüpft sind, der Gesamtfrequenzgang bestimmt werden soll. In der Ortskurvendarstellung musste zu diesem Zweck eine Drehstreckung des Zeigers  $G_s(j\omega)$  entsprechend Gleichung (7.11) vorgenommen werden, um bei gegebenem  $G_R(j\omega)$  und  $G_s(j\omega)$  den Kreisfrequenzgang  $G_o(j\omega)$  zu bestimmen.

Bei einem Bode-Diagramm wird die komplexe Multiplikation auf zwei Additionen – Betrag und Phase – zurückgeführt.

Das Vorgehen soll an dem bereits benutzten Beispiel erläutert werden. Die Übertragungsfunktion der Strecke dritter Ordnung,

$$G_s(s) = \frac{K_s}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)(T_3 \cdot s + 1)} \quad (7.19)$$

kann als Reihenschaltung dreier PT<sub>1</sub>-Glieder aufgefasst werden. Vom Betrag

$$|G_S(j\omega)| = \frac{K_S}{\sqrt{(T_1^2 \cdot \omega^2 + 1)(T_2^2 \cdot \omega^2 + 1)(T_3^2 \cdot \omega^2 + 1)}}$$

wird entsprechend der Vorschrift (7.18) der Logarithmus gebildet:

$$\ln|G_S| = \ln K_S - \frac{1}{2} \ln(T_1^2 \omega^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(T_2^2 \omega^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(T_3^2 \omega^2 + 1) . \quad (7.20)$$

Diese Funktion muss nun im Bode-Diagramm aufgetragen werden. Es ist jedoch von Vorteil, zunächst nur die Asymptoten für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  zu bestimmen. Aus (7.20) folgt für

$$\omega \rightarrow 0: \quad \ln|G_S| = \ln K_S \quad (7.21)$$

$$\omega \rightarrow \infty: \quad \ln|G_S| = \ln K_S - \ln T_1 \cdot \omega - \ln T_2 \cdot \omega - \ln T_3 \cdot \omega . \quad (7.22)$$

Für kleine Frequenzen erhält man also eine Parallele zur  $\omega$ -Achse, für sehr große Frequenzen eine Überlagerung von drei Geraden mit der Steigung -1.

Bild 7.3 zeigt den Verlauf der **Betragsfunktion**. Betrags- und Frequenzachse haben einen logarithmischen Maßstab. Der wirkliche Verlauf schmiegt sich den Asymptoten an.

Die Phase des Frequenzganges

$$\varphi_S = -\arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2 - \arctan \omega T_3 \quad (7.23)$$

ergibt sich durch Überlagerung der Phasenwinkel der drei PT<sub>1</sub>-Glieder. Der Verlauf dieser Funktion ist ebenfalls in Bild 7.3 enthalten. Die  $\omega$ -Achse ist wieder logarithmisch, die Ordinate jedoch linear geteilt.

Ist der Verlauf  $G_S(j\omega)$  experimentell bestimmt worden, so kann man aus dem Betragsverlauf näherungsweise auf die Zeitkonstanten  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  schließen, wenn man den wirklichen Verlauf durch die Asymptoten ersetzt. Die Knickpunkte liegen dann bei  $\omega_1 = 1/T_1$ ,  $\omega_2 = 1/T_2$  und  $\omega_3 = 1/T_3$ .

Will man die vorliegende Strecke mit einem P-Regler regeln, so muss man sich zur Bestimmung des zulässigen  $K_P$  zunächst eine gewünschte Phasenreserve  $\varphi_R$  vorgeben. Da die P-Regeleinrichtung keine zusätzliche Phasenverschiebung bringt ( $\varphi_R = 0$ ), liegt damit die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  fest.

$K_P$  muss jetzt so gewählt werden, dass der Betrag des Kreisfrequenzganges bei der Durchtrittsfrequenz gleich Eins wird,  $|G_k(j\omega_D)| = K_P |G_S(j\omega_D)| = 1$ .

Eine Multiplikation mit  $K_P$  bedeutet eine Verschiebung der Betragslinie. Dies ist in Bild 7.3 eingezeichnet. Das zulässige  $K_P$  ergibt sich aus dem Abstand der Betragskennlinie  $|G_S(j\omega)|$  von der  $\omega$ -Achse bei  $\omega = \omega_D$ .

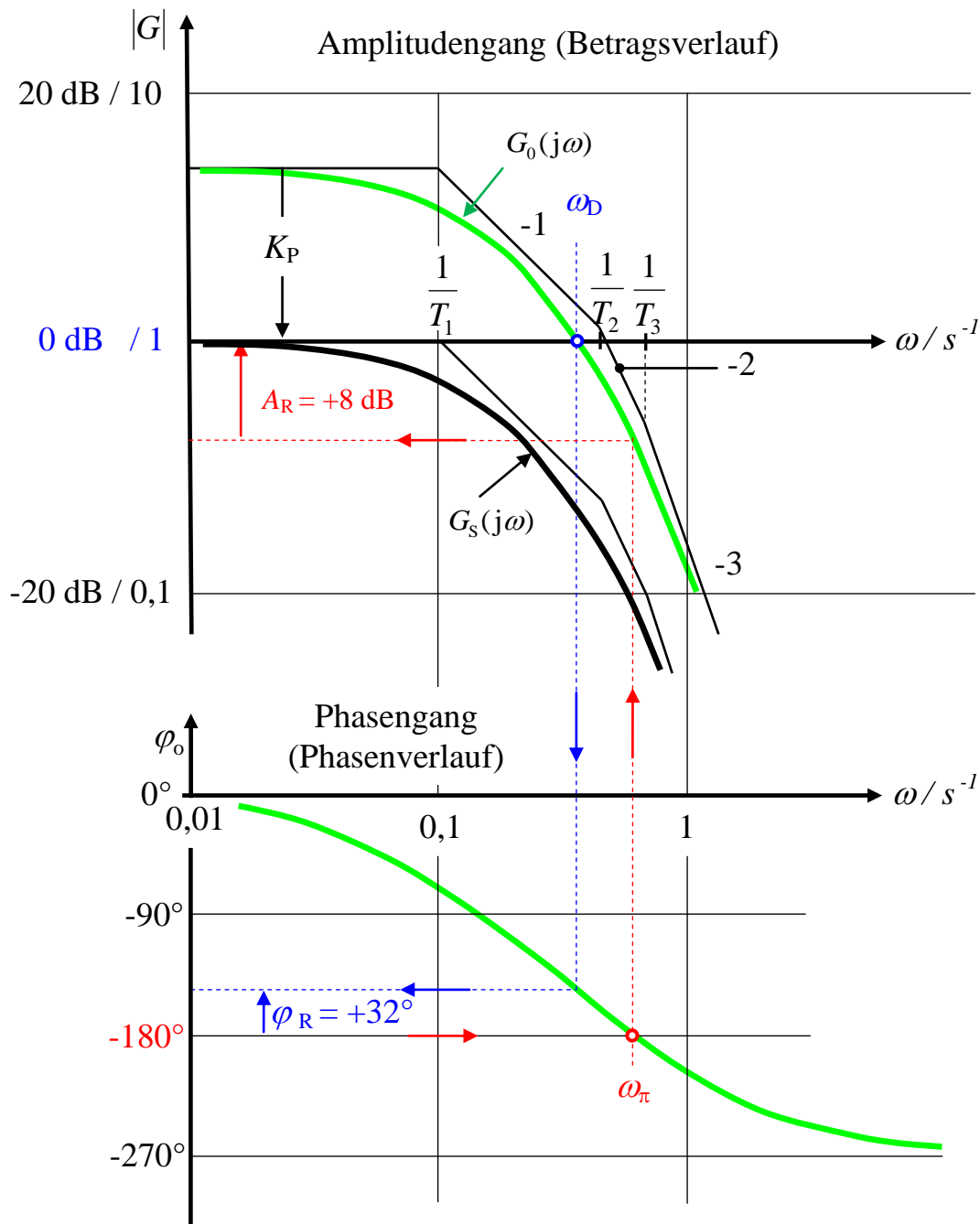
Man erkennt schon aus diesem Beispiel, dass die Konstruktion eines Bode-Diagramms wesentlich einfacher als die der entsprechenden Ortskurve ist.



Hinzu kommt, dass es für die Erstellung des Bode-Diagramms ein speziell geteiltes Papier und Lineale gibt, auf denen die Phasenverschiebung eines  $PT_1$ - und eines Totzeitsystems direkt abgelesen werden kann. Dabei wird oft eine etwas abgeänderte Darstellung gewählt. Statt die Betragsachse logarithmisch zu teilen und so die Logarithmusbildung dem Papier zu übertragen, kann man natürlich auch den Logarithmus des Betrages bilden und einen linearen Maßstab zugrunde legen. Man kann dann für das Betrags- und das Phasendiagramm das gleiche Papier verwenden.

In der Tabelle im Bild 4.6 sind deshalb *Frequenzgänge* und *Frequenzkennlinien* der wichtigsten Übertragungsglieder zusammengestellt. Die Konstruktion des Bode-Diagramms kann dann im speziellen Fall durch Überlagerung (Addition) der einzelnen Frequenzkennlinien erfolgen.





*Bild 7.3: Bode-Diagramm der Regelstrecke und des offenen Kreises*  
 $G_R = K_P$

Meistens wird nicht  $\ln|G_o(j\omega)|$ , sondern  $20 \cdot \log|G_o(j\omega)|$  aufgetragen. Man ordnet dieser an sich dimensionslosen Größe die Maßeinheit dB (Dezibel) zu.  $|G_o(j\omega_1)|=10$  bedeutet dann  $20 \cdot \log|G_o(j\omega_1)| = 20 \text{ dB}$ .

Statt der Steigungen -1, -2, und -3 in Bild 7.3 ergeben sich -20 dB/Dekade, -40 dB/Dekade und -60 dB/Dekade.

Das Bode-Diagramm bringt gegenüber der Ortskurvendarstellung natürlich keine neuen Erkenntnisse, erleichtert aber die praktische Anwendung.

Bei Verwendung eines Reglers mit Zeitverhalten (PD, PI, PID) werden die Frequenzkennlinien nach dem gleichen Verfahren überlagert. Die Phasenverschiebung des Kreisfrequenzganges hängt dann aber gemäß der Beziehung  $\varphi_o = \varphi_R + \varphi_S$  auch von der Phase des Reglers ab.

Da man in der Wahl der Reglerparameter eine gewisse Freiheit hat, kann über ein geeignetes  $\varphi_R$  erreicht werden, dass die Gesamtphase  $\varphi_k$  in einem bestimmten Bereich angehoben wird und so eine gewünschte Phasenreserve bei einer größeren Durchtrittsfrequenz und größeren Kreisverstärkung entsteht [4, 5].

Der zur Verfügung stehende Raum reicht hier nicht aus, um all diese Möglichkeiten anhand von Beispielen zu erläutern.

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)(T_3 \cdot s + 1)}$$

*Zahlenwerte:*  $K_{PS} = 1$ ,  $T_1 = 10 \text{ s}$ ,  $T_2 = 2,2 \text{ s}$ ,  $T_3 = 1,5 \text{ s}$ ,  $K_P = 5$

### Zahlenbeispiel 6

Eine Regelstrecke entsprechend Gleichung (7.19) mit

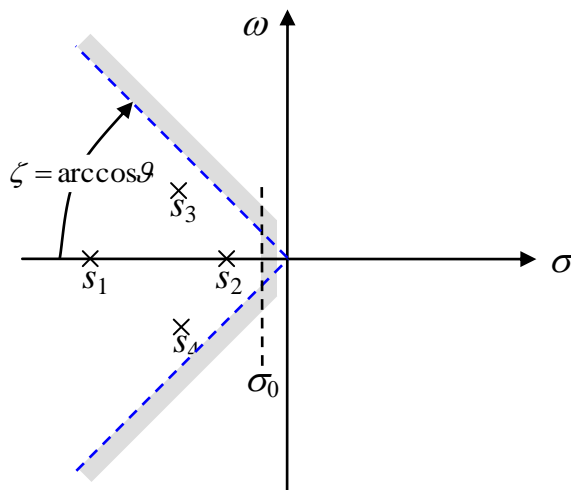
$T_1 = 10 \text{ s}$ ,  $T_2 = 2,2 \text{ s}$ ,  $T_3 = 1,5 \text{ s}$ ,  $K_{PS} = 1$

soll mit einem P-Regler betrieben werden. Damit der geschlossene Kreis eine ausreichende Dämpfung aufweist, werde eine Phasenreserve von  $\varphi_D = 32^\circ$  vorgegeben. Aus dem Bode-Diagramm (Bild 7.3) ermittelt man die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D = 0,36 \text{ s}^{-1}$ . Der Übertragungsbeiwert des Reglers ergibt sich zu  $K_P = 5$ . Damit ist ein ausreichender Abstand zur Stabilitätsgrenze vorhanden.

Der Betrag des Frequenzganges bei  $\omega_\pi = 0,6 \text{ s}^{-1}$  ist  $|G_o(j\omega_\pi)| = 0,37$ , so dass sich ein Amplitudenrand von  $A_R = 2,7$  ergibt.

## 7.4 Wurzelortskurve

Die Festlegung der Reglerparameter mit Hilfe des Bode-Diagramms unter Berücksichtigung eines bestimmten Phasen- bzw. Betragsabstandes gewährleistet, dass die Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises in der linken  $s$ -Halbebene liegen. Bild 7.5 zeigt die Polverteilung eines stabilen Systems.



*Bild 7.5: Polverteilung eines stabilen Systems*

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass es nicht genügt, dass die Pole einen negativen Realteil haben. Damit das System schnell reagiert und über einen ausreichenden **Dämpfungsgrad** verfügt, müssen die Pole z.B. in dem in Bild 7.5 eingezeichneten Sektor liegen.

Dieser wird durch die beiden Halbstrahlen  $s = R \cdot e^{\pm j(\pi - \zeta)}$ ,  $0 < R < \infty$  und die Parallele zur Ordinate  $s = \sigma_0$  begrenzt. Es ist also dafür gesorgt, dass alle Pole in-

nerhalb des Sektors einen Dämpfungsgrad  $\vartheta > \cos \zeta$  besitzen und die Schwingungen genügend schnell abklingen, wenn der Betrag  $\sigma_0$  genügend groß (negativ) gewählt wird.

Die Lage der Pole hängt von den Systemparametern ab. Verändert man eine dieser Kenngrößen, z.B. den Übertragungsbeiwert  $K_P$  der Regeleinrichtung, so ändern sich die Pole längs bestimmter Bahnen, den so genannten Wurzelortskurven. (Vgl. dazu Abschnitt 3.3.7.)

Die Bestimmung der Reglerkenngrößen auf der Grundlage der Wurzelortskurven stößt auf die bereits genannten Schwierigkeiten, da zur Berechnung der Pole im allgemeinen Fall eine Gleichung  $n$ -ten Grades gelöst werden muss. Außerdem stehen in den meisten Fällen mehrere Parameter ( $K_P$ ,  $T_n$  und  $T_v$ ) zur Verfügung. Man erhält also eine Schar von Wurzelortskurven, aus deren Verlauf dann auf die günstigste Parameterkonstellation geschlossen werden muss, bei der die Pole optimal innerhalb des Sektors verteilt sind [2, 4].

Für die praktische Anwendung kommt dieses Verfahren nur bei nicht zu komplizierten Regelstrecken infrage, deren Übertragungsfunktion analytisch bekannt ist. Die prinzipiellen Überlegungen verdeutlichen jedoch das Ziel, das bei der Reglerparametrierung angestrebt wird. Geschieht dies auf der Basis des Bodeplanes, so kann man pauschal sagen, dass eine Vergrößerung des Phasenabstandes  $\varphi_D$  eine größere Dämpfung zur Folge hat (der Winkel  $\vartheta$  in Bild 7.5 wird kleiner), eine Vergrößerung der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  führt zu einem schnelleren System (der Betrag von  $\sigma_0$  in Bild 7.5 wird größer).

### **Im Kapitel 7 werden folgende Kompetenzen vermittelt:**

PFK 7: Technische Systeme analysieren

PFK 9: Technische Systeme realisieren

- Untersuchung bezüglich der Regelkreisstabilität mit verschiedenen Methoden:
- Hurwitz-Kriterium –  $G_W(s) / G_Z(s)$  (Nennerpolynom)
- Nyquist-Kriterium –  $G_0(s)$  (aufgeschnittener Regelkreis) (Ortskurve und Bode-Diagramm)
  - Amplitudenreserve / Phasenumkehrfrequenz  $\omega_\pi$
  - Phasenreserve / Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  (Versuche 2 und 3)
- Wurzelortskurve –  $G_W(s) / G_Z(s)$  (Nenner-Nullstellen)

## 8. Reglerparametrierung – Anpassung des Reglers an die Strecke

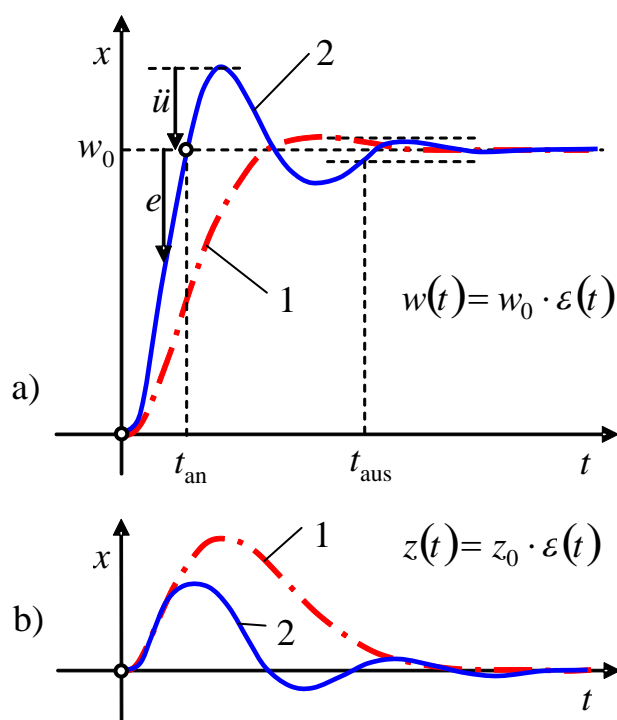
Damit ein Regelkreis seine Aufgabe möglichst gut erfüllt, muss die Reglerstruktur mit den zugehörigen Parametern so an die Strecke angepasst werden, dass das geschlossene System ein „optimales“ Verhalten annimmt.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, dass Regelgeschwindigkeit und Dämpfung voneinander abhängen. Es ist also aus Gründen der Stabilität nicht möglich, den Idealfall  $x = w$  unabhängig von Störgrößen  $z$  im gesamten Frequenzbereich zu realisieren.

Der Regelkreis wird sprungförmigen Änderungen der Führungsgrößen deshalb mehr oder minder verzögert folgen, Störungen werden erst nach einer gewissen Zeit ausgegelt.

Bild 8.1 zeigt mögliche Verläufe der Regelgröße, wenn Führungsgröße  $w$  oder Störgröße  $z$  (siehe auch Bild 5.9) sprungförmig verstellt werden.

Die Reglerkenngrößen können dabei mit Hilfe des Bodediagramms ermittelt worden sein. Zum Verlauf 1 gehört dann eine große **Phasenreserve**  $\varphi_R$  bei kleiner **Durchtrittsfrequenz**  $\omega_D$ , der Verlauf 2 resultiert bei kleinerer **Phasenreserve** und erhöhter **Durchtrittsfrequenz**.



**Bild 8.1:** Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises

- |                               |                      |                           |
|-------------------------------|----------------------|---------------------------|
| a) bei Führungsgrößenänderung | 1 gut gedämpft       | $\vartheta \approx 0,707$ |
| b) bei Störgrößenänderung     | 2 schwächer gedämpft | $\vartheta \approx 0,5$   |

Welches Verhalten als „optimal“ bezeichnet wird, hängt weitgehend von der persönlichen Einstellung und vom Anwendungszweck, das heißt von der Auswirkung der Regelgrößenschwankungen, ab. Bei einem Durchflussregelkreis, bei dem nach geschaltete Speicher die Schwingungen glätten, kann die Regelung schneller und weniger gedämpft eingestellt werden als bei einer Lageregelung für Fräsmaschinen, bei der ein Überspringen der Regelgröße unbedingt verhindert werden muss.

Für die Kennzeichnung eines wünschenswerten Einschwingverhaltens gibt es verschiedene **Gütekriterien**, denen eine Bewertung des zeitlichen Verlaufes der Regeldifferenz  $e(t)$  bei einer sprungförmigen Störung zugrunde liegt.

Dabei kann z.B. gefordert werden, dass die **quadratische Regelfläche**

$$\int_0^{\infty} e^2 \cdot dt \rightarrow \min \quad (8.1)$$

zu einem Minimum wird. Diese Bedingung bewertet große Abweichungen besonders stark. Vielfach wird auch

$$\int_0^{\infty} |e| \cdot dt \rightarrow \min \quad (8.2)$$

verlangt. Man spricht dann von **Betragsoptimierung**.

Das so genannte **ITAE-Kriterium** (Integral of time multiplied absolute value of error) lautet

$$\int_0^{\infty} t \cdot |e| \cdot dt \rightarrow \min \quad (8.3)$$

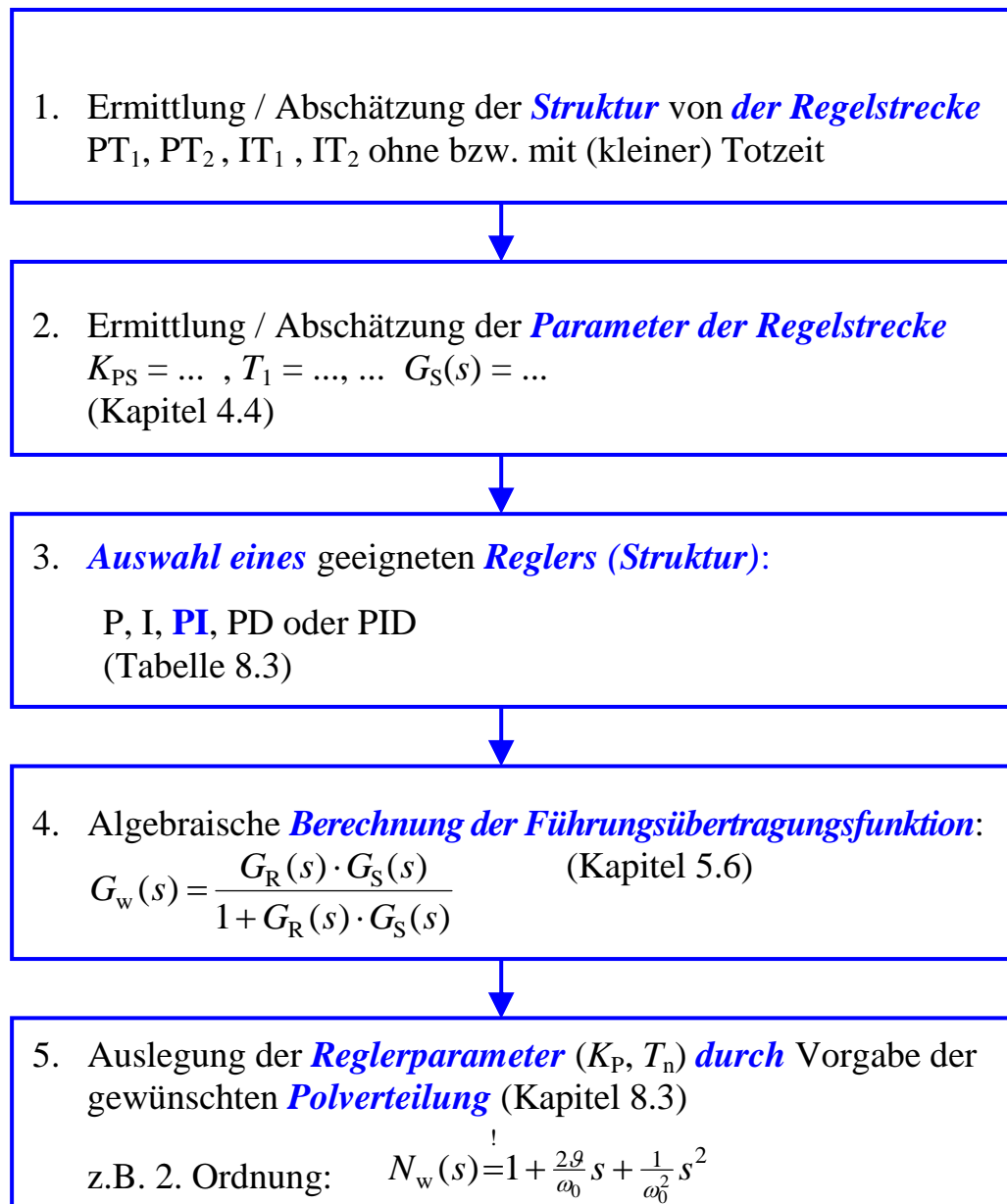
Diese Bedingung bewertet außer dem *Betrag* vor allen Dingen die **Dauer der Abweichung**.

Die Bewertungen (8.1) bis (8.3) können als **Gütemaß** für den Einschwingvorgang herangezogen werden. Es existieren noch eine Reihe weiterer Kriterien, die im Einzelnen nicht aufgeführt werden. Allen liegt der gemeinsame Gedanke zugrunde, eine mathematische Formulierung für eine optimale Einstellung des Regelkreises zu finden.

Die Auswertung der Gleichungen (8.1) bis (8.3) zur direkten Berechnung der Kenngrößen der Regeleinrichtung ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Es ist im Allgemeinen einfacher, die freien Parameter über Vorgabe der Dämpfung  $\mathcal{D}$  oder einer Phasenreserve  $\varphi_R$  mit Hilfe des Bode-Diagramms zu bestimmen.

Die im Abschnitt 7.4 angegebenen Werte für  $\varphi_R$  bzw.  $A_R$  sind Erfahrungswerte, die zu einem Einschwingverhalten führen, welches ähnlichen Bedingungen genügt wie sie durch (8.1) bis (8.3) wiedergegeben werden.

Kann die Übertragungsfunktion der Strecke aufgrund der Konstruktion und physikalischen Eigenschaften analytisch bestimmt werden, ist es oft empfehlenswert, die Parameter über Vorgabe einer wünschenswerten Polverteilung zu berechnen [5], Bild 8.2.



**Bild 8.2:** Analytische Vorgehensweise zum Entwurf eines Reglers

Oft ist diese Vorgehensweise dadurch erschwert, dass die Parameter und / oder die Struktur nicht analytisch berechnet, sondern nur genähert bzw. geschätzt werden können. Bevor im Folgenden auf zwei für die Praxis besonders wichtige, weil einfachere Bemessungsverfahren eingegangen wird, soll noch die Frage untersucht werden, welcher Reglertyp (P, I, PD, PI, PID) bei gegebener Strecke zu wählen ist, da diese Aufgabe ja im Vorfeld gelöst werden muss. Erst dann können die Parameter der Regeleinrichtung bestimmt werden.

Die Übersicht wird in Form einer Tabelle (Bild 8.3) gegeben. In ihr sind häufig vorkommende Regelstrecken enthalten. Die Aufgabe, welcher Regler sich jeweils am besten eignet, soll nur als erste Orientierung verstanden werden. Es kann im Einzelfall sein, dass aus speziellen Gründen auch einmal eine andere Zuordnung getroffen wird.

Regler Strecke	P	I	PI	PD	PID
reine Totzeit	-	etwas schlechter als PI	Führung + Störung	-	-
Totzeit + Verzögerung 1. Ordnung	-	schlechter als PI	etwas schlechter als PID	-	Führung + Störung
Totzeit + Verzögerung 2. Ordnung	nicht geeignet	schlecht	Störung	Führung	Führung + Störung
1. Ordnung + sehr kleine Totzeit (Verzugszeit)	Führung	nicht geeignet	Störung	Führung bei Verzugszeit	Störung bei Verzugszeit
mit Ausgleich höhere Ordnung $PT_n$	nicht geeignet	schlechter als PID	etwas schlechter als PID	nicht geeignet	Führung + Störung
ohne Ausgleich mit Verzögerung $IT_n$	Führung (ohne Verzögerung)	instabil	Störung (ohne Verzögerung)	Führung	Störung

Tab. 8.3: Wahl eines geeigneten Reglers bei gegebener Strecke [5]

## 8.1 Einstellung nach Ziegler-Nichols

Bei diesem Verfahren ist es nicht notwendig, die Daten der Regelstrecke zur Ermittlung der Reglerparameter zu bestimmen. Es geht davon aus, dass Strecken höherer Ordnung vorliegen, die näherungsweise durch ein  $PT_1$ - $T_t$ -Übertragungsverhalten beschrieben werden können.

$$G_S(s) \approx \frac{K_{PS}}{1 + sT_1} \cdot e^{-sT_t} \quad (8.4)$$

Wird eine solche Strecke versuchsweise mit einem P-Regler betrieben, so kann bei genügender Vergrößerung von  $K_P$  der Stabilitätsgrenzfall erreicht werden. Der Regelkreis führt dann beim kritischen ( $_{kr}$ ) Übertragungsbeiwert des Proportionalreglers  $K_{P_{kr}}$  Dauerschwingungen der Periodendauer  $T_{kr}$  aus.

Ziegler und Nichols haben nun Einstellregeln angegeben, die die Ermittlung der Reglerkenngrößen aus den charakteristischen Werten  $K_{P_{kr}}$  und  $T_{kr}$  gestatten.  $K_P$  wird durch Vorgabe einer Amplitudenreserve bestimmt (ca. 6 dB) und aus der



Periodendauer der Schwingung ( $T_{kr}$ ) werden die Nachstellzeit bzw. Vorhaltezeit abgeleitet. Sie sind wieder in Tabellenform zusammengestellt, Tabelle 8.4.

Regler	$K_P$	$T_n$	$T_v$
P	$0,5 \cdot K_{Pkr}$	-	-
PI	$0,45 \cdot K_{Pkr}$	$0,85 \cdot T_{kr}$	-
PID	$0,6 \cdot K_{Pkr}$	$0,5 \cdot T_{kr}$	$0,12 \cdot T_{kr}$

*Tab. 8.4: Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols [7]*

Die sich dabei ergebenden Einschwingvorgänge weisen meistens einen eher geringen Dämpfungsgrad  $\vartheta$  zwischen 0,3 und 0,4 auf, so dass häufig eine Korrektur erforderlich wird (Verkleinerung von  $K_P$ , Vergrößerung von  $T_n$  und gegebenenfalls auch Anpassung von  $T_v$ ).

Das Verfahren setzt voraus, dass man die Strecke zunächst mit einem reinen P-Regler betreiben kann ( $T_v = 0$ ,  $T_n \rightarrow \infty$ ) und dann  $K_P$  solange vergrößern darf, bis Dauerschwingungen auftreten. In vielen praktischen Fällen wird es jedoch aus Sicherheitsgründen oft nicht möglich sein, einen Regelkreis an der Stabilitätsgrenze zu betreiben. Die praktische Bedeutung des Verfahrens ist dadurch begrenzt.

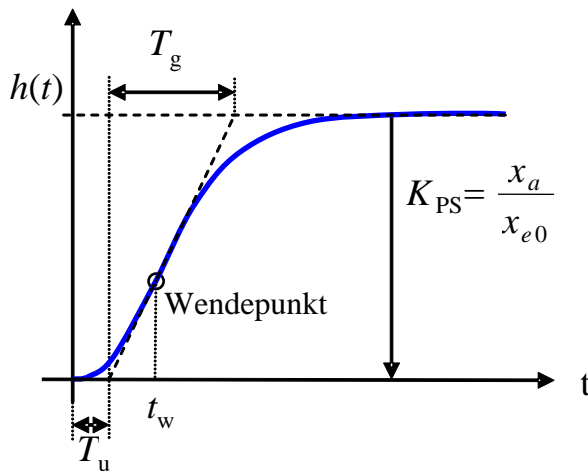
## 8.2 Reglerentwurf mit Schätzformeln

Da die Messung des Streckenfrequenzganges insbesondere bei eher langsamen Prozessen aufwendig und manchmal nicht durchführbar ist, liegt als Information über das dynamische Verhalten der Strecke häufig nur die s-förmige Übergangsfunktion vor (Bild 8.5). Die Anwendung des Bode-Diagramms zur Kennwertmittlung der Regeleinrichtung wird bei eher schnellen Prozessen genutzt [16].

### 8.2.1 Schätzformeln für Strecken mit Ausgleich

Man war deshalb bestrebt, Schätzformeln zu entwickeln, die eine Bestimmung der Reglerkenngrößen aus den Ersatzparametern  $T_u$  und  $T_g$  oder  $T_\Sigma$  bei bekanntem Streckenbeiwert  $K_{PS}$  erlauben.

Zu diesem Thema liegt eine große Zahl von Untersuchungen vor [2, 4], deren Ergebnisse meistens auf experimentellem Weg durch Simulation verschiedener Regelstrecken (PT<sub>1</sub>-T<sub>1</sub>-System, System höherer Ordnung mit gleichen Zeitkonstanten, System höherer Ordnung mit verschiedenen Zeitkonstanten) mit einem Digitalrechner gewonnen wurden. Als Kriterien für eine optimale Einstellung können dabei z.B. die Bedingungen (8.1) bis (8.3) herangezogen oder der Verlauf der Übergangsfunktion hinsichtlich Überschwingweite  $x_m$  und Anregelzeit  $t_{an}$  direkt beurteilt werden.



*Bild 8.5: S-förmige Übergangsfunktion einer Strecke höherer Ordnung mit Ausgleich*

Die optimalen Einstellwerte werden je nach verwendetem Kriterium und zugrunde gelegter Strecke natürlich etwas verschieden sein. Es lassen sich jedoch Mittelwerte angeben, die bei den hier betrachteten Regelstrecken zu stabilen Einstellungen führen. Diese Einstellregeln sind in der nachstehenden Zusammenstellung (Bild 8.6) für optimales Störverhalten angegeben [2, 4].

Aus der Tabelle ist folgende Tendenz zu erkennen:

1. Bei gegebenen Streckendaten ( $K_{PS}$ ,  $T_g$ ,  $T_u$ ) kann der Übertragungsbeiwert  $K_P$  des Reglers vergrößert werden, wenn die Regeleinrichtung einen Vorhalt aufweist (z.B. PD- gegenüber P-Regler usw.).
2. Die Nachstellzeit kann verkleinert werden, wenn die Regeleinrichtung einen D-Anteil enthält (PID- gegenüber PI-Regler).

Für optimales Führungsverhalten wird die Nachstellzeit  $T_n = (1 \dots 1,2) \cdot T_g$  gewählt,  $K_P$  nimmt kleinere Werte als in der Tabelle 8.6 an.

Die Einstellregeln können z.B. in [2] nachgelesen werden.

Bei der Anwendung der Schätzformeln ist zu beachten, dass die Verzugszeit  $T_u$  und die Ausgleichszeit  $T_g$  zur Beschreibung des Verhaltens der Regelstrecke an sich nicht ausreichen. Die tatsächlich vorliegende Regelstrecke wird sich also in ihrem Verhalten mehr oder weniger von der Regelstrecke unterscheiden, die bei der Ermittlung der Schätzformeln zugrunde gelegt wurde, auch wenn sich für  $T_u$  und  $T_g$  die gleichen Werte ergeben. Man darf sich daher nicht darauf verlassen, dass das Verhalten des geschlossenen Regelkreises immer den Erwartungen entsprechen wird.

Regler	$K_P$	$T_n$	$T_v$
P-	$\frac{T_g}{T_u \cdot K_{PS}}$	-	-
PD-	$1,2 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_{PS}}$	-	$(0,25..0,5) \cdot T_u$
PI-	$0,8 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_{PS}}$	$3 \cdot T_u$	-
PID-	$1,2 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_{PS}}$	$2 \cdot T_u$	$0,42 \cdot T_u$

*Tab. 8.6: Reglereinstellung mit Schätzformeln für Strecken mit Ausgleich [5]*

Solange das Verhältnis  $T_u/T_g$  klein ist ( $T_u/T_g < 0,3$ ), wird die Einstellung der Reglerparameter entsprechend den Einstellregeln meistens sofort zum Erfolg führen. Bei einem größeren Verhältnis  $T_u/T_g$  (Strecken höherer Ordnung) muss man jedoch damit rechnen, dass die Einstellwerte nachträglich korrigiert werden müssen, da die Dämpfung des geschlossenen Regelkreises bei den zunächst ermittelten Reglerparametern zu gering sein kann.

Eine Verkleinerung von  $K_P$  bewirkt im Allgemeinen eine Verbesserung der Dämpfung, ebenso wie dies bis zu einem gewissen Grad durch eine Vergrößerung von  $T_n$  erreicht werden kann. Die Regelgeschwindigkeit (Bandbreite) nimmt dann jedoch ab.

### **Zahlenbeispiel 7**

Für den Regelkreis nach den Zahlenbeispielen 5 und 6 soll mit Hilfe der Schätzformeln der Übertragungsbeiwert  $K_P$  des Reglers bestimmt werden. Dabei wird angenommen, dass die Übergangsfunktion der Strecke experimentell ermittelt wurde, die Zeitkonstanten  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  also nicht bekannt sind.

Aus der Übergangsfunktion werden die Werte

$$K_{PS} = 1, \quad T_u = 2,7 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_g = 13,5 \text{ s}$$

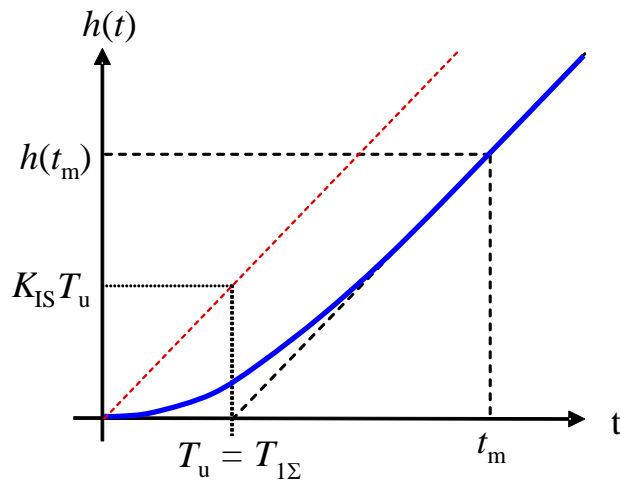
bestimmt. Man erhält also

$$K_P = \frac{T_g}{T_u \cdot K_{PS}} = \frac{13,5 \text{ s}}{2,7 \text{ s} \cdot 1} = 5$$

Ein Vergleich mit Zahlenbeispiel 6 zeigt, dass sich bei dieser Einstellung eine Phasenreserve von  $\varphi_D = 32^\circ$  ergibt.

### 8.2.2 Schätzformeln für Strecken ohne Ausgleich – Sym. Optimum

Für Strecken ohne Ausgleich (Bild 8.7 zeigt die Übergangsfunktion) erhält man die in der Tabelle 8.8 angegebenen Einstellregeln.



*Bild 8.7 Übergangsfunktion einer Strecke ohne Ausgleich*

Regler	$K_P$	$T_n$	$T_v$
P-	$\frac{1}{4 \cdot g^2} \cdot \frac{1}{K_{IS} \cdot T_u}$	-	-
PD-	$0,5 \cdot \frac{1}{K_{IS} \cdot T_u}$	-	$0,5 \cdot T_u$
PI-	$0,42 \cdot \frac{1}{K_{IS} \cdot T_u}$	$5,8 \cdot T_u$	-
PID-	$0,4 \cdot \frac{1}{K_{IS} \cdot T_u}$	$3,2 \cdot T_u$	$0,8 \cdot T_u$

*Tab. 8.8 Reglereinstellung mit Schätzformeln für Strecken ohne Ausgleich [5]*

Am Beispiel des PI-Reglers soll gezeigt werden, wie diese Formeln entstehen.

Es gelte für die Übertragungsfunktion der IT<sub>1</sub> Strecke

$$G_s(s) = \frac{K_{IS}}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \quad (8.5)$$

$T_1$  ( $T_u$ ) kann dabei eine definierte Verzögerungszeitkonstante oder aber eine Summenzeitkonstante ( $T_{1\Sigma}$ ) sein, die mehrere kleine Verzögerungen repräsentiert. Die Bestimmung der einzelnen Größen geht aus Bild 8.7 hervor.

Bei Wahl eines PI-Reglers enthält die Kreisübertragungsfunktion

$$G_o = K_p \frac{T_n s + 1}{T_n s} \cdot \frac{K_{IS}}{s(T_1 s + 1)} \quad (8.6)$$

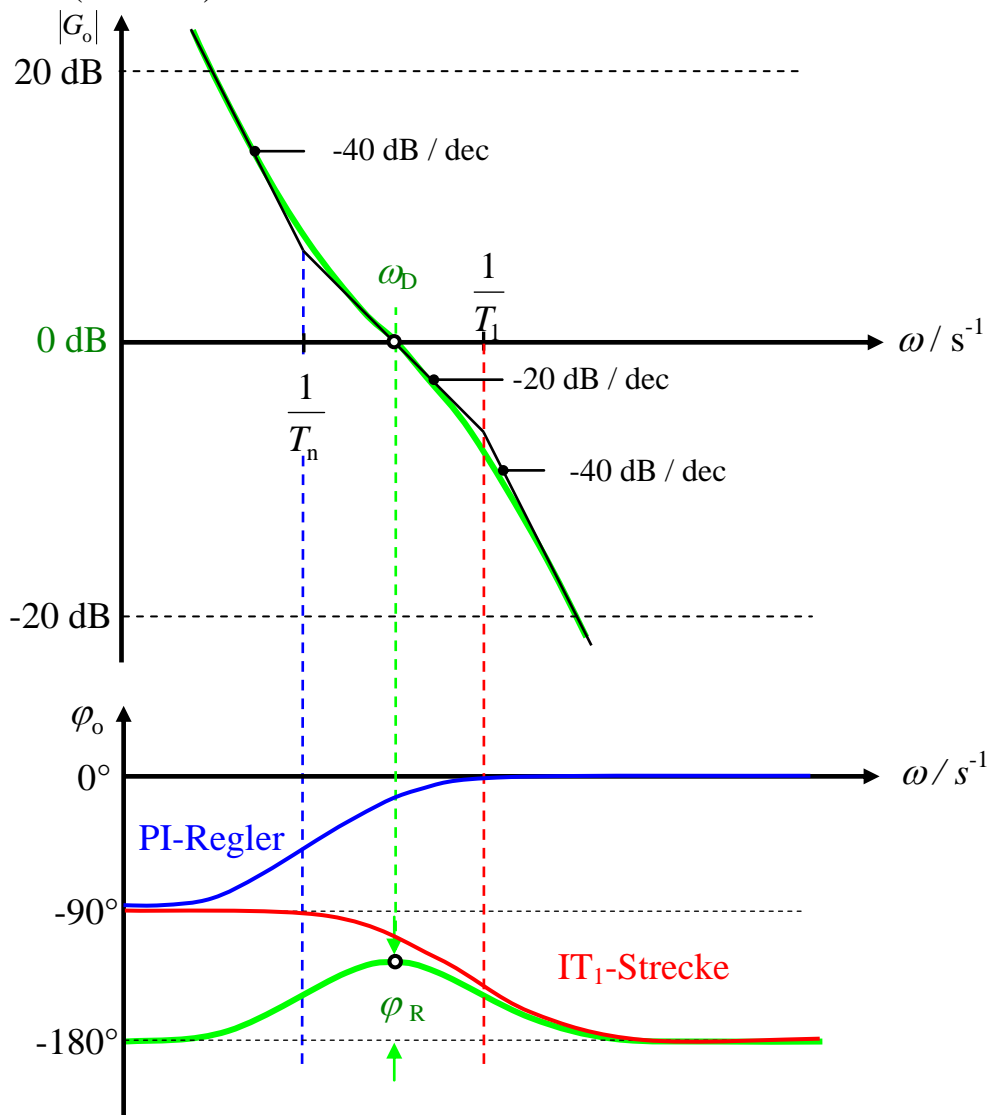
einen doppelten Pol bei  $s = 0$ . Damit das geschlossene System stabil ist, muss auf alle Fälle

$$T_n > T_1 \rightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_n} \quad (8.7)$$

sein. Konstruiert man für diesen Fall das Bode-Diagramm, so erkennt man, dass der Phasenverlauf

$$\varphi_o(\omega) = -\pi + \arctan(\omega T_n) - \arctan(\omega T_1) \quad (8.8)$$

ein Maximum aufweist. Wählt man die Durchtrittsfrequenz so, dass  $|G_o(\omega_D)| = 1$  mit dem Phasenmaximum zusammenfällt, so erhält man optimale Stabilitätsverhältnisse (Bild 8.9).



*Bild 8.9: Bode-Diagramm einer Strecke ohne Ausgleich (IT<sub>1</sub>-Strecke) mit PI-Regler, Symmetrisches Optimum*

Aus diesen Überlegungen lassen sich die Reglerparameter berechnen [9].

Mit dem Ansatz

$$T_n = a^2 \cdot T_1 \quad (8.9)$$

wird

$$\varphi_R = \varphi_o + \pi = \arctan a^2 \omega T_1 - \arctan \omega T_1 \quad (8.10)$$

Das Maximum der Phasenreserve liegt bei

$$\omega_D = \frac{1}{a \cdot T_1} \quad (8.11)$$

Dabei besteht zwischen dem Dämpfungsgrad  $\mathcal{D}$  des geschlossenen Kreises und dem Faktor  $a$  der Zusammenhang

$$a = 2 \mathcal{D} + 1 \quad (8.12)$$

Für  $\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  erhält man  $a = 2,4$  und die in Tab. 8.8 angegebenen Werte

mit

$$\begin{aligned} T_n &= a^2 \cdot T_1 ; \\ K_P &= \frac{1}{a \cdot T_1 \cdot K_{IS}} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Aufgrund des symmetrischen Phasenganges nennt man diese Auslegung eines PI-Reglers **Symmetrisches Optimum** [9].

Regelkreise, die durch eine Kreisübertragungsfunktion der Form (8.6) beschrieben werden, haben die unangenehme Eigenschaft, dass sich die Dämpfung sowohl bei einer Vergrößerung der P-Verstärkung (was als „normal“ gilt) als auch bei einer Verkleinerung von  $K_P$  verschlechtert.

Muss man damit rechnen, dass sich die Streckenparameter in einem gewissen Bereich ändern, so ist gegebenenfalls ein größerer Faktor  $a$  zu wählen, um einen gewissen Sicherheitsabstand zu gewährleisten.

Da bei Regelkreisen der besprochenen Form die lineare Regelfläche Null ist ( $a_1 = b_1$ ), weist die Sprungantwort bei Führungsgrößenänderungen auch bei guter Dämpfung ein deutliches Überschwingen auf. Um das zu vermeiden, kann vor den Regler ein **Sollwertfilter** oder Führungsgrößenfilter (PT<sub>1</sub>-Glieder) mit

$$G_F(s) = \frac{1}{1 + T_n \cdot s}$$

geschaltet werden. Pol und Nullstelle der Führungsübertragungsfunktion bzw. des Filters können dann gegeneinander gekürzt (dyn. komp.) werden.

### 8.3 Reglerparametrierung bei bekannter Streckenübertragungsfunktion

Ist das dynamische Verhalten der Strecke aufgrund ihrer Konstruktion und physikalischen Eigenschaften mathematisch beschreibbar (oder genähert entsprechend Abschnitt 4.4), so kann man bei der Reglereinstellung von der Übertragungsfunktion ausgehen und die Reglerparameter so wählen, dass sich näherungsweise eine wünschenswerte Polverteilung des geschlossenen Kreises (siehe Abschnitt 7.4) ergibt.

#### 8.3.1 Reglerparametrierung bei reinen Totzeitstrecken

Für reine Totzeitstrecken eignet sich am besten ein I-Regler. Hier setzt man:

$$K_I = \frac{1}{4 \cdot \vartheta^2 \cdot K_{PS} \cdot T_t} = \frac{1}{2 \cdot K_{PS} \cdot T_t} \quad \text{mit} \quad \vartheta = 0,707 \quad (8.14)$$

#### 8.3.2 Dynamische Kompensation

Bei der dynamischen Kompensation wird die Nullstelle des PI-Reglers bzw. werden die beiden Nullstellen des PID-Reglers in Produktform so gewählt, dass diese gegen die Pole der Strecke gekürzt werden können. Das Verfahren soll an einem Beispiel demonstriert werden. Die Strecke ist durch die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad , \quad (8.15)$$

$$T_1 > T_2 \quad ,$$

beschrieben. Es handelt sich also um ein System, das eine wesentliche Verzögerung  $T_1$  und noch eine kleine Verzögerung  $T_2$  aufweist.

Für Strecken dieses Typs ist die Wahl eines realen PID-Reglers empfehlenswert, der aus praktischen Gründen in der Produktform dargestellt wird,

$$G_R(s) = K_{P\pi} \frac{(1+T_{n\pi}s)(1+T_{v\pi}s)}{T_{n\pi}s(1+T_{v1}s)} \quad . \quad (8.16)$$

Wählt man  $T_{n\pi} = T_1$  und  $T_{v\pi} = T_2$ , so erhält man für die Kreisübertragungsfunktion nach dem Kompensieren der Pole durch die Nullstellen (Kürzen) eine Übertragungsfunktion mit einem Pol bei  $s = 0$  und einem Pol bei der realen Zeitkonstante des Reglers  $s = -1 / T_{v1}$  ;

$$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_{P\pi} \cdot K_{PS}}{T_1 \cdot s(T_{v1} \cdot s + 1)} \quad . \quad (8.17)$$

Die neu geformte Kreisübertragungsfunktion hat den Vorzug, dass sie durch die Kompensation (nach dem Kürzen) sehr übersichtlich ist. Es ist leicht nachvollziehbar, dass durch den realen D-Anteil die Zeitkonstante  $T_2 (=T_{v\pi})$  durch  $T_{v1}$  „ersetzt“ wird. Die effektiv wirksame  $PT_1$ -Verzögerung verringert sich dadurch deutlich.

Man erhält dann die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$G_w(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{1 + \frac{T_1}{K_{P\pi} \cdot K_{PS}} s + \frac{T_1 \cdot T_{v1}}{K_{P\pi} \cdot K_{PS}} s^2} \quad (8.18)$$

Dabei ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{P\pi} \cdot K_{PS}}{T_1 \cdot T_{v1}}} \quad (8.19)$$

die Resonanzfrequenz und

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_1}{K_{P\pi} \cdot K_{PS} \cdot T_{v1}}} \quad (8.20)$$

der Dämpfungsgrad des geschlossenen Kreises. Aus (8.20) kann man sofort den **Übertragungsbeiwert** des Reglers bestimmen,

$$K_{P\pi} = \frac{1}{4 \cdot \mathcal{G}^2} \cdot \frac{T_1}{K_{PS} \cdot T_{v1}} \quad (8.21)$$

Damit sind die Kennwerte des Reglers bekannt. Die Zulässigkeit der benutzten Betrachtungen kann leicht anhand des Bode-Diagrammes überprüft werden.

Da es üblich ist, nicht  $T_{n\pi}$ ,  $T_{v\pi}$  und  $K_{P\pi}$ , sondern  $T_n$ ,  $T_v$  und  $K_{PS}$  anzugeben, werden die Größen gemäß Gleichung (5.12) noch umgerechnet,

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n\pi} + T_{v\pi} = T_1 + T_2, \\ T_v &= \frac{T_{n\pi} \cdot T_{v\pi}}{T_{n\pi} + T_{v\pi}} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2}, \\ K_P &= K_{P\pi} \left( 1 + \frac{T_{v\pi}}{T_{n\pi}} \right) = \frac{1}{4 \cdot \mathcal{G}^2} \cdot \frac{T_1}{K_{PS} \cdot \tau_{v1}} \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Ist  $T_1$  dominant, also deutlich größer als  $T_2$  ( $T_1 > 10 \cdot T_2$ ) so erhält man die sehr einfachen Beziehungen

$$T_n \approx T_1; \quad T_v \approx T_2; \quad K_P \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{K_{PS} \cdot T_{v1}} \quad (8.23)$$

Dabei ist bereits  $\mathcal{G} = 1/\sqrt{2}$  als im Allgemeinen wünschenswert eingesetzt.

Besteht die Regelstrecke aus  $n$  gleichen PT<sub>1</sub>-Verzögerungsgliedern,

$$G_s(s) = \frac{K_{PS}}{(T \cdot s + 1)^n} \quad (8.24)$$



so kommt man aufgrund der gleichen Überlegungen ( $T_{n\pi} = T_{v\pi} = T$ ) mit einer Summenersatzzeitkonstanten  $T_e = (n - 2) T$  statt der parasitären Zeitkonstante  $T_{v1}$  zu der Einstellvorschrift

$$T_n \approx 2 \cdot T, \quad T_v \approx 0,5 \cdot T, \quad K_P \approx \frac{1}{K_{PS}(n-2)} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Die Nachstellzeit  $T_n$  ist hier viermal so groß wie  $T_v$ . Diesen PID-spezifischen Faktor „vier“ findet man auch in den Tabellen 8.4, 8.6 und 8.8. Die Beispiele ließen sich durch eine Reihe weiterer ergänzen (andere typische Strecken mit P, PD, PI, PID-Regler). Das benutzte Prinzip bei der Wahl der Reglerkenngrößen ist jedoch immer das Gleiche. Man versucht, die Kreisübertragungsfunktion so zu vereinfachen (Nullstellen kompensieren Pole), dass die gewünschte Polverteilung des geschlossenen Systems ohne großen Aufwand näherungsweise berechnet werden kann [5].

Die dynamische Kompensation führt zuverlässig und leicht nachvollziehbar zu robusten Reglereinstellungen. Diese ergeben jedoch nicht zwangsläufig die maximal erreichbare Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  (Bandbreite) bei vorgegebener Dämpfung. Wenn die dominante Zeitkonstante wesentlich größer ist als die zweite (Ersatz-) Zeitkonstante ( $T_1 > 7 \cdot T_e$ ), so erhält man bei Auslegung nach dem *Symmetrischen Optimum* eine kleinere Nachstellzeit  $T_n$  in Verbindung mit leichtem Überspringen.

Ist die dominante Zeitkonstante nur etwas größer als die zweite Zeitkonstante ( $T_1 \approx (2 \dots 3) \cdot T_e$ ), bringt der Entwurf nach der *gestuften Dämpfung* eine deutlich größere Proportionalverstärkung  $K_P$  mit einer leicht größeren Nachstellzeit. Dadurch wird die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  um bis zu 33 % erhöht.

### 8.3.3 Reglerentwurf nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung

Der Entwurf nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung stellt eine universelle Methode des direkten Reglerentwurfs dar. Ähnlich wie bei Systemen zweiter Ordnung werden gestufte Dämpfungen für Systeme dritter Ordnung definiert, die einen direkten Reglerentwurf bei maximaler Bandbreite ermöglichen. Unter Verwendung der Streckenparameter können die Parameter von PI- bzw. PID- $T_1$ -Reglern für Proportionalstrecken und P- bzw. PD- $T_1$ -Reglern für Integralstrecken  $n$ -ter Ordnung mit Totzeit berechnet werden. Vereinfachte Entwurfsregeln basieren lediglich auf der Summe der Zeitkonstanten und der genäherten Ordnung der zu regelnden Strecke [11].

Der Entwurf nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung soll an einem Beispiel demonstriert werden. Eine  $PT_2$ -Strecke ist durch die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{1 + a_1 s + a_2 s^2} = \frac{K_{PS}}{1 + 2 \frac{\eta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \quad (8.25)$$

beschrieben. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$a_1 = 2 \frac{\vartheta}{\omega_0} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \quad .$$

Durch Umformung ergibt sich der Zusammenhang zwischen  $a_1$  und  $a_2$  über den Dämpfungsgrad:

$$a_1^2 = 4\vartheta^2 a_2 \quad . \quad (8.26)$$

Wird eine solche Strecke mit einem I-Regler geregelt,

$$G_R(s) = \frac{K_I}{s} \quad ,$$

so erhalten wir für die Führungsübertragungsfunktion

$$G_W(s) = \frac{K_{PS} \cdot K_I}{K_{PS} \cdot K_I + s(1 + a_1 s + a_2 s^2)} \quad \text{bzw.}$$

$$G_W(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{PS} \cdot K_I} s + \frac{a_1}{K_{PS} \cdot K_I} s^2 + \frac{a_2}{K_{PS} \cdot K_I} s^3} \quad . \quad (8.27)$$

### **Normaler Entwurf (Butterworth):**

Aus der Nachrichtentechnik ist bekannt, dass man bei einem Butterworth Tiefpass ein gut gedämpftes (Führungs-) Verhalten mit Betragsanschniegung erhält. Mit dem charakteristischen Butterworth-Polynom dritter Ordnung [11]

$$1 + 2\Omega + 2\Omega^2 + \Omega^3 \quad (\text{Nenner}) \quad (8.28)$$

und  $\Omega = \frac{s}{\omega_0}$  folgt

$$1 + \frac{2}{\omega_0} s + \frac{2}{\omega_0^2} s^2 + \frac{1}{\omega_0^3} s^3 = 1 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_3 s^3 \quad .$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Auslegungsgleichungen

$$\tilde{a}_1^2 = 2 \cdot \tilde{a}_2 \quad (8.29a)$$

und

$$\tilde{a}_2^2 = 2 \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_3 \quad (8.29b)$$

Angewendet auf (8.27) folgt

$$\left( \frac{a_1}{K_{PS} \cdot K_I} \right)^2 = 2 \left( \frac{1}{K_{PS} \cdot K_I} \right) \left( \frac{a_2}{K_{PS} \cdot K_I} \right)$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 2 a_2 \quad (8.30)$$

und

$$\left( \frac{1}{K_{PS} \cdot K_I} \right)^2 = 2 \left( \frac{a_1}{K_{PS} \cdot K_I} \right) ,$$

$$\rightarrow K_I = \frac{1}{2 \cdot K_{PS} \cdot a_1} . \quad (8.31)$$

Beziehung (8.27) beschreibt, dass die PT<sub>2</sub>-Strecke  $G_S(j\omega)$  so ausgelegt sein sollte, dass sich ein Dämpfungsgrad von  $\vartheta^2 = 0,5$  ergibt (8.26). Wird jetzt  $K_I$  entsprechend Beziehung (8.31) eingestellt, so wird sich bei dem geschlossenen Regelkreis die gewünschte Polverteilung nach Butterworth dritter Ordnung ergeben (Tiefpass mit Betragsanschniegung).

Da die meisten realen Strecken stärker als  $\vartheta^2 = 0,5$  gedämpft sind, kann zur Erhöhung der Durchtrittsfrequenz ein **PD-Glied** mit einer Proportionalverstärkung von eins vorgeschaltet werden

$$G_{PD} = 1 \cdot (1 + T_n s) .$$

Die Vorhaltezeitkonstante  $T_n$  ist hier mit dem Index „n“ versehen, damit der **PD-Regler** später mit dem **I-Regler** einfach zu einem PI-Regler zusammengefasst werden kann, Bild 5.5a.

Um bei der geformten Strecke, bestehend aus **PD-Regler** und **Strecke**, siehe Bild 8.10, eine nullstellenfreie Form des **PD-Reglers** zu erhalten, wird dieser nach Taylor genähert:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\rightarrow (1 + T_n s) \approx \frac{1}{1 - T_n \cdot s + T_n^2 \cdot s^2} . \quad (8.32)$$

Durch die Vernachlässigung der Terme ab 3. Ordnung ist diese Näherung nur in einem eingeschränkten Frequenzbereich gültig. In Verbindung mit einem **I-Regler** und einer Strecke zweiter Ordnung sind die Amplituden höherer Frequenzen in sich stark genug unterdrückt. Die Näherung der geformten und nullstellenfreien Strecke ergibt dann die gewünschte PT<sub>2</sub>-Strecke, bei der mit dem Parameter  $T_n$  die gewünschte Dämpfung eingestellt werden kann:

$$G_{FS}(s) = (1 + T_n s) \frac{K_{PS}}{1 + T_{1\Sigma} \cdot s + T_{2\Sigma}^2 \cdot s^2} \approx \frac{1}{1 - T_n \cdot s + T_n^2 \cdot s^2} \frac{K_{PS}}{1 + T_{1\Sigma} \cdot s + T_{2\Sigma}^2 \cdot s^2} \quad \text{bzw.}$$

$$G_{FS}(s) \approx \frac{K_{PS}}{1 + (T_{1\Sigma} - T_n) s + (T_{2\Sigma}^2 + T_n^2 - T_{1\Sigma} \cdot T_n) s^2} = \frac{K_{PS}}{1 + a_1 s + a_2 s^2} . \quad (8.33)$$

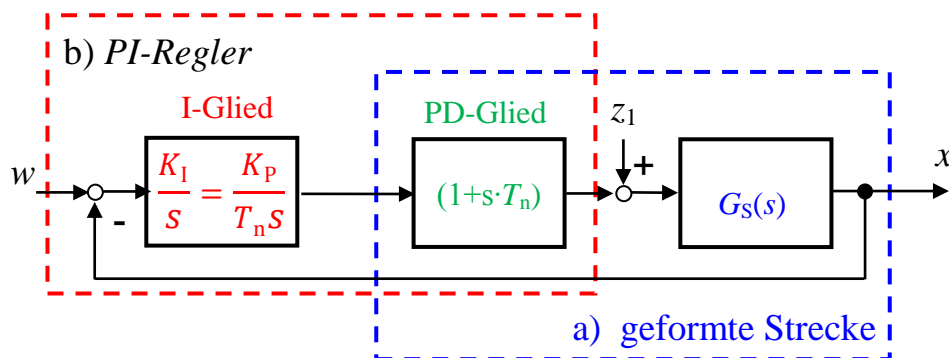
Mit der Vorgabe der Dämpfung  $\vartheta^2 = 0,5$  ( $a_1^2 = 2 a_2$ ) folgt:

$$\begin{aligned}
(T_{1\Sigma} - T_n)^2 &= 2(T_{2\Sigma}^2 + T_n^2 - T_{1\Sigma} \cdot T_n) \quad , \\
(T_{1\Sigma})^2 + T_n^2 &= 2 \cdot T_{2\Sigma}^2 + 2 \cdot T_n^2 \quad \text{und} \\
T_n &= \sqrt{(T_{1\Sigma})^2 - 2 \cdot T_{2\Sigma}^2} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.34}$$

Durch das Zusammenfügen von **I-** und **PD-Regler** erhalten wir einen **PI-Regler** mit den Kennwerten  $T_n$  (8.34) und  $K_P$  (8.35), Bild 8.10.

Mit  $\frac{K_I}{s}(1 + T_n s) = K_P \frac{1+T_n s}{T_n s}$  ,  $K_I = \frac{K_P}{T_n}$  und (8.31) folgt

$$K_P = \frac{T_n}{2 \cdot K_{PS} \cdot (T_{1\Sigma} - T_n)} \tag{8.35}$$



*Bild 8.10 Prinzip der gestuften Dämpfung*

*a) Regelung der geformten Strecke mit einem I-Regler*

*b) Regelung der Strecke mit einem PI-Regler*

### **Scharfer Entwurf (Tschebyscheff):**

Wird statt einer Polverteilung nach Butterworth (8.28) die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises entsprechend eines Tschebyscheff-Filters mit ca. 0,5 dB Welligkeit angestrebt, so ergibt sich das zugehörige charakteristische Polynom [11]:

$$1 + 1,923\Omega + 1,3867\Omega^2 + \Omega^3 \quad \left[ = 1 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_3 s^3 \right] \quad . \tag{8.36}$$

Entsprechend lassen sich die sich daraus ergebenden Koeffizientengleichungen berechnen:

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{8}{3} \cdot \tilde{a}_2 \quad , \tag{8.37a}$$

$$\tilde{a}_2^2 = \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_3 \quad . \tag{8.37b}$$

Äquivalent zu Beziehung (8.27) folgt für die Koeffizienten der geformten Strecke zweiter Ordnung

$$\Rightarrow a_1^2 = a_2 \quad .$$

Das entspricht einem Dämpfungsgrad der geformten Strecke von  $\vartheta = 0,5$ . Und es ergibt sich für den PI-Regler (scharfer Entwurf,  $\rightarrow$  Störungsausregelung):

$$T_n = T_{1\Sigma} - \frac{T_{2\Sigma}^2}{T_{1\Sigma}} \quad , \quad (8.38)$$

$$K_P = \frac{3 \cdot T_n}{8 \cdot K_{PS} \cdot (T_{1\Sigma} - T_n)} = \frac{3 \cdot [(T_{1\Sigma})^2 - T_{2\Sigma}^2]}{8 \cdot K_{PS} \cdot T_{2\Sigma}^2} \quad . \quad (8.39)$$

Wenn die Regelstrecke mit einem PD-Glied so geformt werden kann, dass sie sich ähnlich einer  $PT_2$ -Strecke mit der Dämpfung  $\vartheta = 0,5$  verhält, kann ein PI-Regler so ausgelegt werden, dass sich die Pole des geschlossenen Regelkreises in etwa entsprechend eines Tschebyscheff-Tiefpasses anordnen.

Bei dem normalen wie beim scharfen Entwurf ist kennzeichnend, dass sich der Dämpfungsgrad  $\vartheta$  der geformten Strecke  $a_1^2 = 4d_0^2 a_2$  bei der erweiterten Koeffizientenbeziehung ( $\tilde{a}_2^2 = \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_3$ )

$$\tilde{a}_2^2 = 4d_1^2 \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_3 \quad (8.40)$$

als Auslegungskonstante  $d_1$  wieder findet. Für den „normalen Entwurf“ nach Butterworth wird  $d_1 = \sqrt{0,5}$  angesetzt (8.27b). Für den „scharfen Entwurf“ nach Tschebyscheff wird  $d_1 = 0,5$  (8.37b).

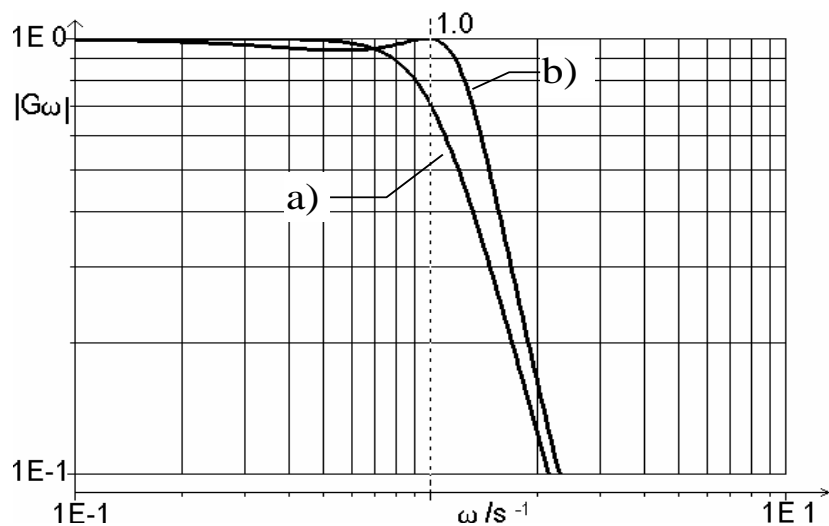
Erweitert man die Beziehungen (8.27) und (8.37) um  $d_0$  als einen Dämpfungsgrad im erweiterten Sinn, so erhält man die Auslegungsgleichung

$$a_1^2 = 4d_0^2 a_2 \quad , \quad (8.41)$$

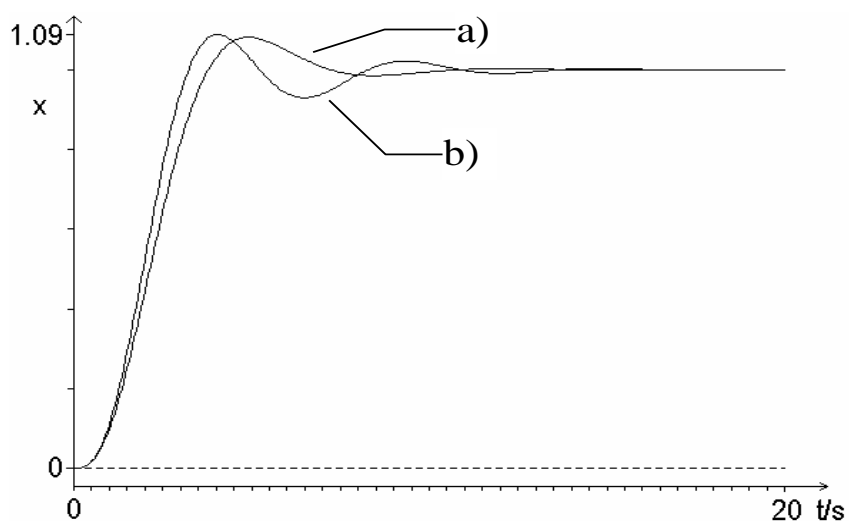
bei der für den „normalen Entwurf“  $d_0 = \sqrt{1/2}$  angesetzt wird. Beim „scharfen Entwurf“ wird  $d_0 = \sqrt{2/3}$ .

In Bild 8.11 zeigt der Amplitudengang eine erhöhte Bandbreite für den scharfen Entwurf im Vergleich zu der Betragsanschniegung des normalen Entwurfs für ein System 3.Ordnung mit  $\omega_0 = 1s^{-1}$ . Bei der Kennkreisfrequenz  $\omega_0$  erreicht der Amplitudengang den Wert 1 bis auf einen Fehler von 0,15%. Im Bereich niedrigerer Frequenzen kommt es zu einem leichten Durchhängen des Amplitudengangs (ca. 0,5 dB). Die Übergangsfunktion in Bild 8.12 zeigt einen steileren Anstieg für den scharfen Entwurf bei gleichem Überspringen von 8...9%, aber größerem Unterschwingen im Vergleich zum normalen Entwurf.

Die entsprechenden Entwurfsgleichungen für andere Regler-Strecken-Kombinationen können in der Literatur nachgelesen werden [12-14], Tabelle 8.13.



*Bild 8.11 System 3. Ordnung: Amplitudengang des geschlossenen Regelkreises  
a) normal (Butterworth)      b) scharf (Tschhebyscheff)*



*Bild 8.12 System 3. Ordnung: Übergangsfunktion des geschlossenen Regelkreises  
a) normal (Butterworth)      b) scharf (Tschhebyscheff)*

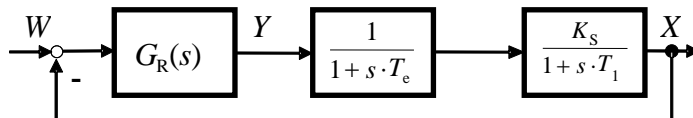
Strecke	Regler	Parameter: gestufte Dämpfung
mit Ausgleich P-T <sub>n</sub>	I	$K_I = \frac{1}{4 \cdot \vartheta^2 \cdot K_{PS} \cdot T_{1\Sigma}} = \frac{1}{2 \cdot K_{PS} \cdot T_{1\Sigma}} \quad \text{mit} \quad \vartheta = 0,707 \quad (8.14)$
	PI	$T_n = T_{1\Sigma} - \frac{T_{2\Sigma}^2}{T_{1\Sigma}} \quad (8.38)$ $K_P = \frac{3 \cdot [(T_{1\Sigma})^2 - T_{2\Sigma}^2]}{8 \cdot K_{PS} \cdot T_{2\Sigma}^2} \quad (8.39)$
	PID	$T_v = \frac{T_{2\Sigma}^2}{T_{1\Sigma}} - \frac{T_{3\Sigma}^3}{T_{2\Sigma}^2}$ $T_n = \frac{(T_{1\Sigma})^2 - T_{2\Sigma}^2}{T_{1\Sigma} - T_v}$ $K_P = \frac{(0,375 \dots 0,5) T_n}{K_{PS} \cdot (T_{1\Sigma} - T_n)}$
ohne Ausgleich I-T <sub>n</sub>	P	$K_P = \frac{1}{4 \cdot \vartheta^2 \cdot K_{IS} \cdot T_{1\Sigma}} = \frac{1}{2 \cdot K_{IS} \cdot T_{1\Sigma}} \quad \text{mit} \quad \vartheta = 0,707$
	PD-T <sub>1</sub>	$T_v = \sqrt{(T_{1\Sigma})^2 - 2 \cdot T_{2\Sigma}^2}$ $T_1 = \alpha \cdot T_v \quad \text{mit} \quad \alpha = 0,05 \dots 0,2$ $K_P = \frac{1}{2 \cdot K_{IS} (T_{1\Sigma} - T_v + T_1)}$

*Tabelle 8.13      Reglereinstellungen nach der gestuften Dämpfung [12-14]*

### 8.3.4 Vergleichende Betrachtung der Entwurfsverfahren

In den vorangegangenen Abschnitten wurden verschiedene Entwurfsverfahren für bekannte Streckenübertragungsfunktionen vorgestellt:

- Symmetrisches Optimum (8.2.2)
- Dynamische Kompensation (8.3.1)
- Gestufte Dämpfung (8.3.2)



*Bild 8.14 Regelkreis mit zwei in reihe geschalteten PT1-Gliedern*

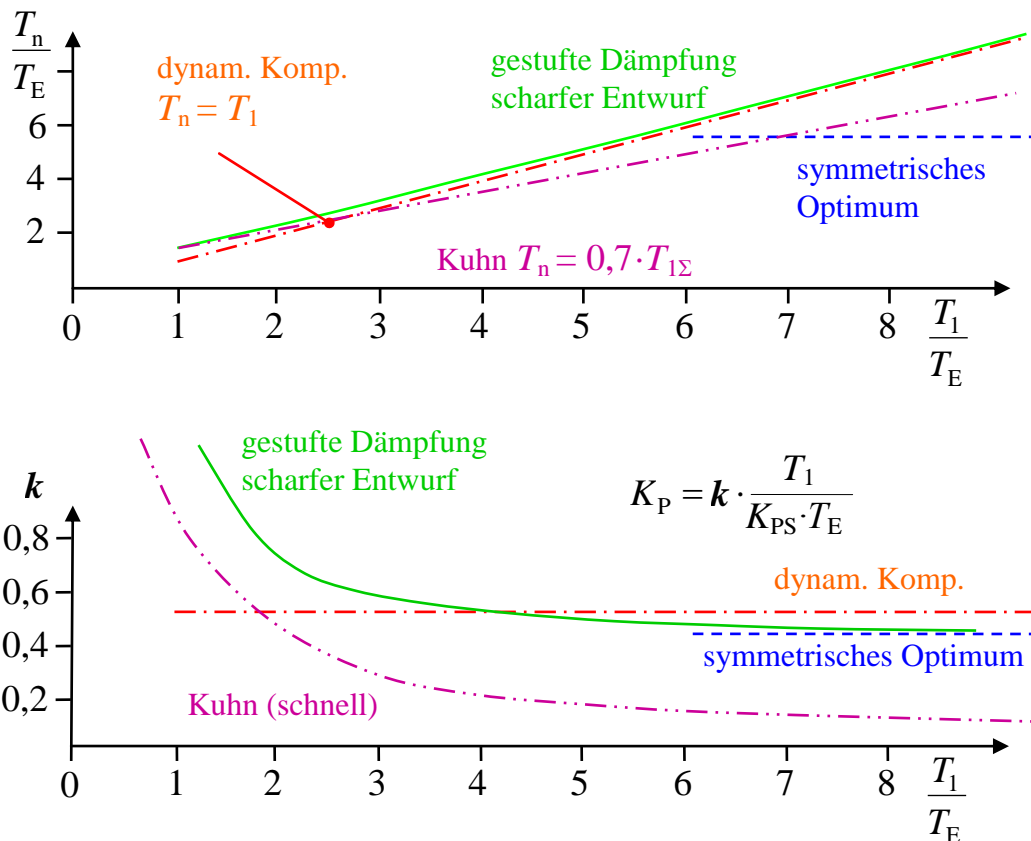
Offen bleibt noch, wann welches Entwurfsverfahren gewählt werden sollte. Beispielhaft soll hier eine  $PT_2$ -Strecke mit einer dominanten Zeitkonstanten  $T_1$  und einer kleineren (Ersatz-) Zeitkonstanten  $T_E$  mit einem PI-Regler geschlossen werden, Bild 8.14. In Bild 8.15 sind entsprechend den Entwurfsverfahren die Nachstellzeit  $T_n$  und die bezogene Kreisverstärkung  $K_p \cdot \frac{T_1 \cdot T_E}{K_{PS}}$  dargestellt.

Das *Symmetrische Optimum* sollte bei Strecken mit Ausgleich nur bei einer deutlich dominanten Zeitkonstanten  $T_1 > 6 \cdot T_E$  genutzt werden. Die  $PT_1$ -Strecke kann dazu im Bereich der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  durch eine reine Integration angenähert werden mit  $T_I = T_1 / K_{PS}$ . Die im Vergleich mit den andern Verfahren kleine Nachstellzeit ist hilfreich zum schnellen ausregeln von Störungen, bewirkt aber auch ein unerwünschtes Überschwingen bei Führungsgrößensprüngen. Ein optionales Führungsgrößenfilter kann das unterdrücken.

Bei der „T-Summen-Regel“ von U. Kuhn ist sofort erkennbar, dass es für ein System zweiter Ordnung nur bedingt geeignet ist. Bei Systemen höherer Ordnung, bei denen keine Zeitkonstante dominant ist ( $T_1 \approx T_2 \approx T_3$ ), bietet die „T-Summen-Regel“ den Vorzug durch rasches Betrachten der Sprungantwort auf robuste Reglerparameter zu schließen [15].

Wenn jedoch  $T_1$  nur wenig größer als  $T_E$  ausfällt, erhält man über die *gestufte Dämpfung* eine deutlich höhere Durchtrittsfrequenz.





**Bild 8.15** Bezogene Nachstellzeiten  $T_n$  und bezogene Proportionalverstärkungen  $K_P$  eines PI-Reglers zur Regelung einer  $PT_2$ -Strecke beschrieben durch  $K_{PS}$ ,  $T_E$  und  $T_1 = a T_E$  berechnet nach verschiedenen Entwurfsverfahren ( $\vartheta = \sqrt{0,5}$ ).

Die **dynamische Kompensation** kann das Verhältnis  $T_1 / T_E$  prinzipbedingt nicht berücksichtigen, da  $T_1$  nur zur Bestimmung von  $T_n$  aber nicht für die Berechnung von  $K_P$  genutzt wird. Die dynamische Kompensation ist hier eher als Referenz zu sehen, da es keinen Bereich gibt, in dem sie höhere Durchtrittsfrequenzen liefert.

### Im Kapitel 8 sollen folgende Kompetenzen vermittelt werden:

PFK 7: Technische Systeme analysieren

PFK 9: Technische Systeme realisieren

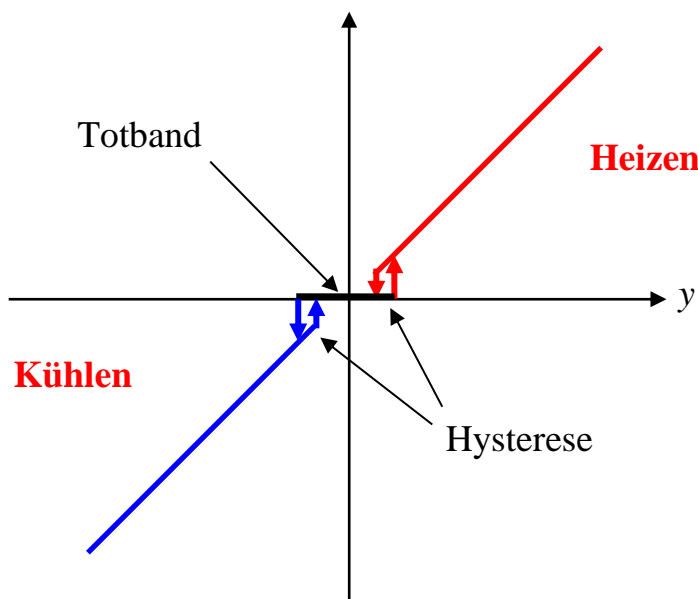
- Gütekriterien zur Bewertung der Sprungantwort
- Auswahl von geeigneten Reglern
- Parametrierung der Regler (Versuche 2 & 3)

## 9. Besondere Regelkreisschaltungen

Bei allen bisherigen Betrachtungen wurde von einem einschleifigen Regelkreis, wie er in Bild 5.9 dargestellt ist, ausgegangen. In der technischen Praxis liegen jedoch häufig Probleme vor, die mit diesem einfachen Prinzip nicht zufrieden stellend gelöst werden können. In einem solchen Fall greift man zu anderen Anordnungen, die auf die jeweilige spezielle Aufgabenstellung besser angepasst sind.

### 9.1 Split-Range-Regelung

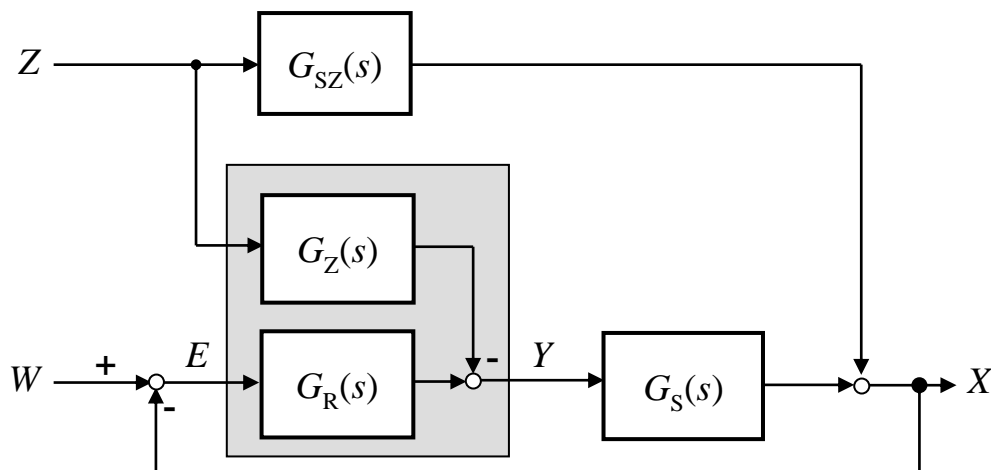
Bei Strecken mit einseitig wirkenden Stellorganen ist es notwendig, den Stellbereich des Reglers auf verschiedene Stellglieder aufzuteilen. Ein wichtiges Beispiel stellen Temperaturregelstrecken mit einem Stellglied zum Heizen und einem Stellglied zum Kühlen dar. Es ist üblich (und meist auch notwendig), einen Stellbereich von 0 bis 100% unter Verwendung eines Totbandes  $\varepsilon$  und/oder einer Hysterese auf die beiden komplementären Stellglieder aufzuteilen.



*Bild 9.1 Aufteilung der Stellgröße  $y$  auf **Heizen** und **Kühlen** für einen Temperaturregelkreis*

### 9.2 Störgrößenaufschaltung

Eine Beseitigung der Auswirkung von Störgrößen durch eine Regelung hat den Nachteil, dass der Regler immer erst dann korrigierend eingreifen kann, wenn eine Regeldifferenz vorliegt. Aufgrund der Verzögerungen der Strecke wird die Störung erst verspätet bemerkt. Sind die eigentlichen Ursachen der Störung nicht bekannt oder nicht messbar, ist dies jedoch das einzig mögliche Verfahren. Liegt aber eine Anlage vor, bei der die Hauptstörgröße gemessen werden kann, so liegt es nahe, diese direkt zur Korrektur zu benutzen. Bild 9.2 zeigt den entsprechenden Wirkschaltplan.



*Bild 9.2: Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung am Reglerausgang*

Um eine Auswirkung der Störgröße auf die Regelgröße vollständig zu verhindern, muss

$$G_Z(s) = \frac{G_{SZ}(s)}{G_S(s)} \quad (9.1)$$

gewählt werden. Das ist gewöhnlich aus energetischen Gründen nicht möglich. Man begnügt sich deshalb oft mit einer Kompensation von  $Z(s)$  im stationären Zustand,

$$G_Z(s) = K_Z = \frac{K_{SZ}}{K_{PS}} \quad , \quad (9.2)$$

oder man nutzt die im Regler vorhandenen Vorhalte aus und schaltet die Störgröße über ein differenzierendes Glied vor dem Regler auf. (Die Aufschaltung muss über ein DT-Glied erfolgen, damit im stationären Zustand keine Verfälschung der Regeldifferenz  $e(t)$  entsteht).

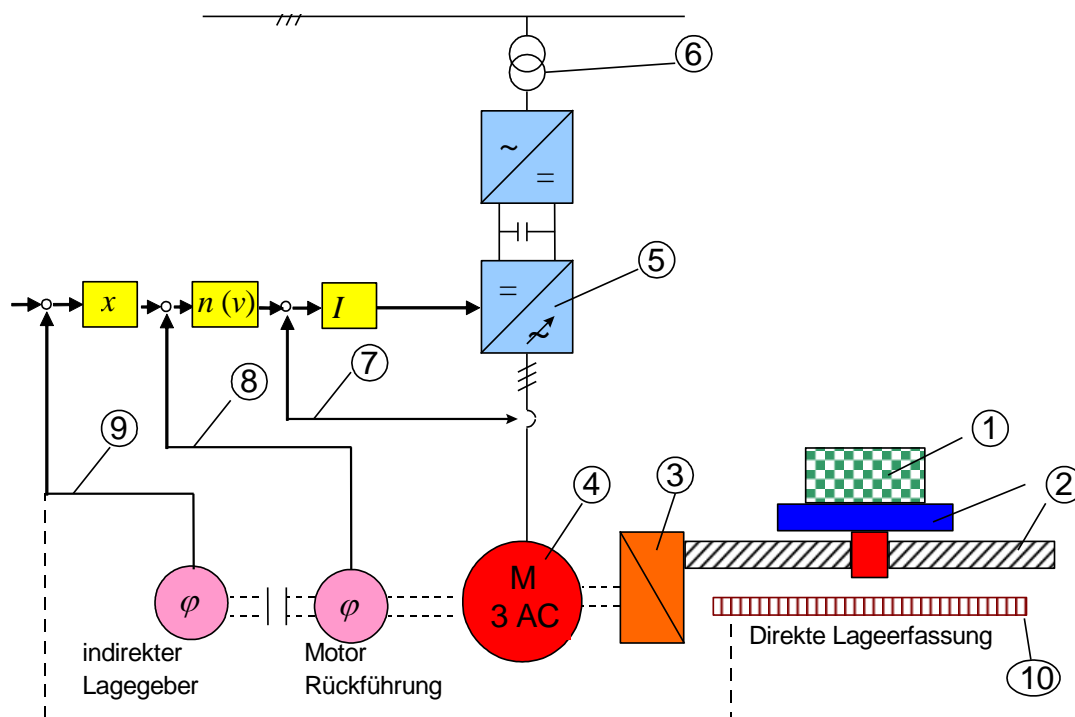
Auch bei einer Kompensation entsprechend Gleichung (9.1) wäre die Regelung nicht überflüssig, da zusätzliche, nicht erfassbare Störgrößen ausgeregelt werden müssen.

Ein wesentlicher Vorteil der Störgrößenaufschaltung besteht in der Tatsache, dass die Stabilität des Kreises durch diese Maßnahme nicht beeinflusst wird. Die Regler-Kennwerte können dadurch so eingestellt werden, als wäre  $G_Z(s)$  nicht vorhanden.

### 9.3 Kaskaden-Regelung

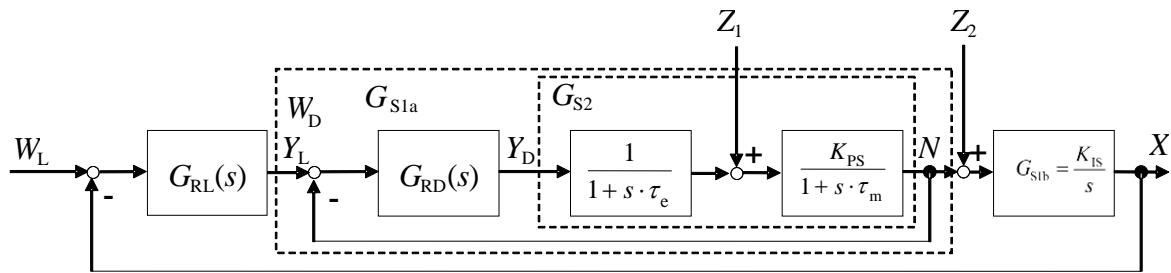
Bei komplizierten Regelstrecken ist es oft schwierig, mit einer einschleifigen Regelung ein befriedigendes Ergebnis zu erzielen. Man versucht deshalb, die Regelstrecke zu unterteilen. Auf diese Weise entstehen neben der Hauptregelgröße eine oder mehrere Hilfsregelgrößen, denen jeweils ein eigener Regler zugeordnet wird. Der **Führungsregler** (übergeordneter Regler) gibt dann dem Hilfs- oder Folgeregler die Führungsgröße vor. Ein Beispiel für eine dreischleifige Kaskadenregelung ist in Bild 9.2 dargestellt.

Dort soll die Lage einer Werkzeugmaschine geregelt werden. Zu diesem Zweck ist ein Drehzahlregelkreis vorgesehen ( $G_{RD}$ ), der seine Führungsgröße vom Lageregler ( $G_{RL}$ ) erhält und die Stellgröße als Führungsgröße an den Stromregler weitergibt. Bild 9.3 zeigt den zugehörigen Wirkungsplan.



**Bild 9.3** Beispiel einer dreischleifigen Kaskadenregelung:  
Lageregelung bei einer Werkzeugmaschine

1	Last	2	Spindel	3	Getriebe
4	Servomotor	5	Servoverstärker	6	Netz
7	Strommessung	8	Drehzahlmessung		
9	Motor Lage	10	Linear Maßstab		



**Bild 9.4** Wirkungsplan einer zweischleifigen Kaskadenregelung

- $\tau_e$  elektrische Ersatzzeitkonstante des Stromreglers
- $\tau_m$  mechanische Zeitkonstante des Antriebs (Trägheitsmomente)
- $K_{IS}$  Getriebeübersetzung / Spindelsteigung
- $G_{RD}$  Drehzahlregler (Folgeregler)
- $G_{RL}$  Lageregler (Führungsregler)
- $Z_1$  Lastmoment
- $Z_2$  Torsion und Lose

Die Vorteile dieser Anordnung sind leicht zu erkennen.

1. Durch Unterteilung der Regelstrecke in einfachere Teilabschnitte  $G_{S1}$ ,  $G_{S2}$  wird das Entwurfsproblem erleichtert (einfachere Regler, einfachere Einstellung).
2. Störgrößen, die im inneren Teilabschnitt angreifen z.B.  $Z_1$ , werden bereits dort ausgeregelt. Ihre Auswirkung auf die Hauptregelgröße wird reduziert (z.B. das Drehmoment).
3. Wesentliche Zwischengrößen (Drehzahl), denen ein eigener Regler ( $G_{RD}$ ) zugeordnet ist, können auf einfache Weise über die zugehörige Führungsgröße ( $w_D$ ) begrenzt werden.
4. Die Auswirkung von Nichtlinearitäten im inneren Kreis wird eingegrenzt (beispielsweise Reibung).
5. Die Regelung kann schrittweise von innen nach außen in Betrieb genommen werden. Durch Fehlschaltungen hervorgerufene Gefahren werden dadurch reduziert.
6. Man hat eine große Flexibilität hinsichtlich Störgrößenaufschaltung oder Vorsteuerung.

Die Einstellung der Reglerparameter kann nach einem der geschilderten Auslegungsverfahren (Kapitel 5) erfolgen. Man passt zunächst den Drehzahlregler (Folgeregler)  $G_{RD}$  an die Teilstrecke  $G_{S2}$  an und gibt dadurch dem inneren Regelkreis ein gewünschtes Zeitverhalten. Dieser ist dann Bestandteil der Regelstrecke, für die der äußere Regler dimensioniert werden muss. Es ist leicht ersichtlich, dass es ein großer Vorteil ist, wenn der innere Regelkreis deutlich schneller ( $>$  dreifach) ist als der äußere Regelkreis. Diese schrittweise Inbetriebnahme bietet für die Praxis große Vorteile.

Eine besonders einfache Einstellregel ergibt sich, wenn es gelingt, die Regelstrecke so zu unterteilen, dass Teilstrecken

$$G_{Sv} = \frac{K_{Sv}}{(\tau_{lv} \cdot s + 1)(\tau_{ev} \cdot s + 1)} = \frac{K_{Sv}}{1 + T_{lv} \cdot s + T_{2v}^2 \cdot s^2} \quad (9.3)$$

mit einer wesentlichen Verzögerung  $\tau_{lv}$  und einer Ersatzzeitkonstanten  $\tau_{ev} < \tau_{lv}$  entstehen.  $\tau_{ev}$  kann mehrere kleine Zeitkonstanten oder eine kleine Totzeit beinhalten.

Im betrachteten Beispiel einer zweischleifigen Kaskadenregelung wäre also

$$G_{s2} = \frac{K_{ps}}{(\tau_m \cdot s + 1)(\tau_e \cdot s + 1)} \quad (9.4)$$

die Übertragungsfunktion vom Drehmomentsollwert zur Geschwindigkeit. Die Zeitkonstante  $\tau_m$  und der Übertragungsbeiwert  $K_{ps}$  können aus dem Bemessungsdrehmoment des Motors, dem gesamten Massenträgheitsmoment des Systems und der Reibung berechnet werden. Die Summenzeitkonstante  $\tau_e$  hängt von den Verzögerungszeiten des Stromrichters ab. Die Integration der Drehzahl zur Lage führt dann zu

$$G_{s1b} = \frac{K_{is}}{s} \quad (9.5)$$

Die Integrationszeitkonstante  $K_{is}$  berechnet sich aus der Getriebeübersetzung.

Verwendet man für den inneren Drehzahlregelkreis einen PI-Regler,

$$G_{RD} = K_{PD} \frac{T_{nD} \cdot s + 1}{T_{nD} \cdot s} \quad (9.6)$$

so ergibt sich nach der dynamischen Kompensation folgende Einstellung:

1. Innerer Kreis mit einem PI-Regler:

$$T_{nD} = \tau_m$$

$$K_{PD} = \frac{1}{4 \cdot \mathcal{G}_D^2} \frac{\tau_m}{K_{ps} \cdot \tau_e}$$

Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Drehzahlregelkreises (nach dem Kürzen) wird

$$G_{0D} = \frac{1}{4 \cdot \mathcal{G}_D^2 \cdot \tau_e} \frac{1}{s \cdot (\tau_e \cdot s + 1)} \quad .$$

Die Führungsübertragungsfunktion des inneren Kreises wird damit

$$G_{WD} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \mathcal{G}_D (2 \cdot \mathcal{G}_D \cdot \tau_e) \cdot s + (2 \cdot \mathcal{G}_D \cdot \tau_e)^2 \cdot s^2} \approx \frac{1}{1 + T_{eD} \cdot s} \quad ; \quad (9.7)$$

sie ist Bestandteil der Regelstrecke des äußeren Kreises.

2. Äußerer Lageregelkreis bei Verwendung eines P-Reglers:

$$G_{0L} = K_{PL} \cdot G_{S1} = K_{PL} \cdot G_{WD} \cdot G_{S1b} \approx K_{PL} \cdot \frac{1}{1 + T_{eD} \cdot s} \cdot \frac{K_{IS}}{s} \quad (9.8)$$

Dabei ist die Ersatzzeitkonstante ( $T_{eD} = 4 \cdot \mathcal{G}_D^2 \cdot \tau_e$ ) aus  $G_{WD}$  entnommen. Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems wird dann

$$G_{WL} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{PL} \cdot K_{IS}} s + \frac{T_{eD}}{K_{PL} \cdot K_{IS}} \cdot s^2} \quad .$$

Mit Einführung der Dämpfung  $\mathcal{G}_L$  wird

$$K_{PL} = \frac{1}{4 \cdot \mathcal{G}_L^2} \cdot \frac{1}{K_{IS} \cdot T_{eD}} \quad .$$

$$G_{WL} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \mathcal{G}_L (2 \cdot \mathcal{G}_L \cdot T_{eD}) \cdot s + (2 \cdot \mathcal{G}_L \cdot T_{eD})^2 \cdot s^2} \quad . \quad (9.9)$$

Die Summenzeitkonstante  $T_e$  vor  $s$  im Nenner von  $G_W$  ist gleich der linearen Regelfläche und kann als Maß für die Regelgeschwindigkeit interpretiert werden.

Für den inneren Drehzahlregelkreis ergibt sich

$$T_{eD} = 4 \cdot \mathcal{G}_D^2 \cdot \tau_e \quad (9.10)$$

und für das Gesamtsystem

$$T_{eL} = 4 \cdot \mathcal{G}_L^2 \cdot T_{eD} = 4 \cdot \mathcal{G}_L^2 (4 \cdot \mathcal{G}_D^2 \cdot \tau_e) \quad . \quad (9.11)$$

Man sieht, dass die erzielbare Regelgeschwindigkeit im Wesentlichen durch die Ersatzzeitkonstante des inneren Kreises bestimmt wird. Je schneller der innere Kreis ausgelegt werden kann, desto schneller wird das Gesamtsystem.

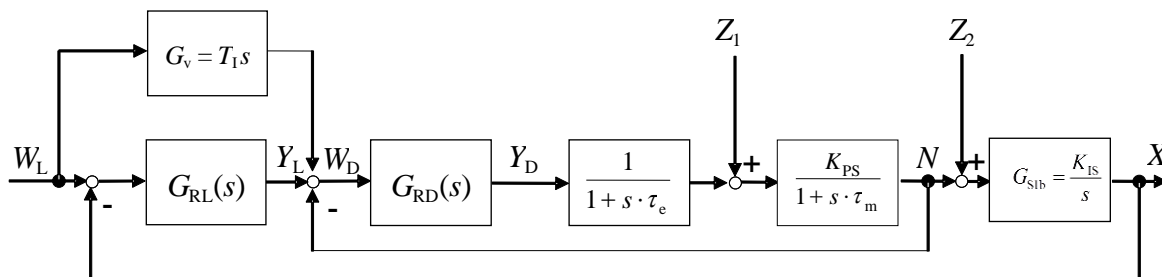
Das in Bild 9.4 enthaltene Schema kann man sich nach rechts und links durch weitere Teilstrecken und Regler ausgedehnt denken. Die Einstellung einer n-schleifigen Kaskadenregelung erfolgt nach dem gleichen Prinzip, die einzelnen Teilkreise werden schrittweise von innen nach außen in Betrieb genommen, wobei die Reglereinstellung mit Schätzformeln, Ziegler-Nichols oder dem zuletzt gezeigten Verfahren (Einstellung der Dämpfung des geschlossenen Regelkreises) vorgenommen werden kann [4].

## 9.4 Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann das Regelverhalten meist verbessert werden. Bei einer Lageregelung kann z.B. durch Differentiation der Führungsgröße die notwendige Verfahrensgeschwindigkeit berechnet werden, siehe Bild 9.4. Wird diese Geschwindigkeit dann hinter dem Lageregler zusätzlich zur Stellgröße als Führungsgröße auf den Drehzahlregler geschaltet, so erhält man ein deutlich verbessertes Regelkreisverhalten:

- Es muss nicht erst eine Regelabweichung  $e$  auftreten, damit die Stellgröße Drehzahl die Regelgröße Lage in der gewünschten Weise beeinflusst. Ein Schleppfehler wird so auch mit einem P-Lageregler statisch und dynamisch vermieden.
- Die Führungsübertragungsfunktion wird deutlich schneller, da für die Bandbreite die Strecke, und damit der innere Drehzahlregelkreis, und nicht der langsamere äußere Lageregler maßgeblich ist.
- Der Regelkreis wird für gutes Störverhalten ausgelegt und weist aufgrund der Vorsteuerung sehr gutes Führungsverhalten auf.
- Die Stabilitätseigenschaften des Regelkreises ändern sich nicht.

Selbstverständlich muss die Führungsgröße der Lage energetisch möglich und damit zweimal differenzierbar sein.



*Bild 9.5 Lageregelkreis mit Vorsteuerung der Drehzahl durch Differentiation der Führungsgröße*

## 9.5 Verhältnisregelung

Bei einer Verhältnisregelung geht es darum, eine Prozessgröße  $x_2$  einer anderen Größe  $x_1$  nachzuführen. Solche Anforderungen finden sich zum Beispiel bei der Stoffzufuhr in einem Kessel oder Schlaufenreaktor. Die Füllstandregelung eines Kessels gibt die Zufuhr der Komponente  $x_1$  vor. Der gemessene Rückführwert  $r_1$  von der Komponente  $x_1$  bestimmt über ein einstellbares Verhältnis  $\alpha$  die Führungsgröße  $w_2$  der Komponente  $x_2$ .

$$w_2(t) = \alpha \cdot r_1(t) \quad (9.12)$$



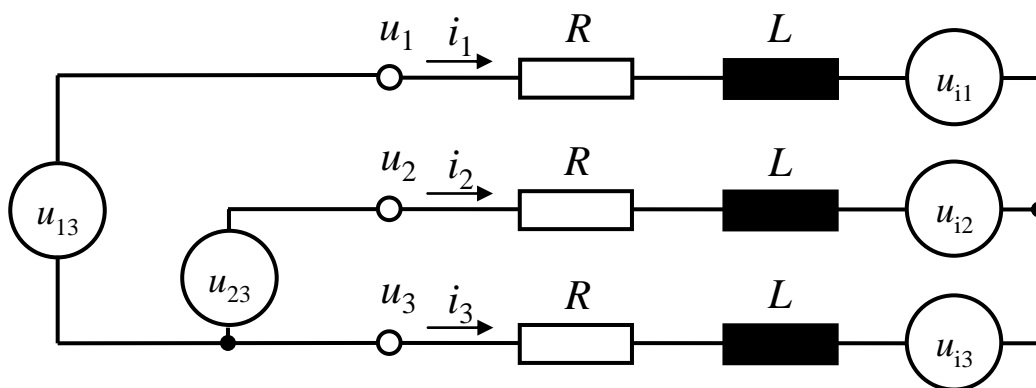
## 9.6 Mehrgrößenregelung

In einer technischen Anlage ist meist eine große Zahl von Regelkreisen vorhanden, die entsprechend den gegebenen Regeln eingestellt werden können, solange die einzelnen Regelgrößen voneinander unabhängig sind. Dies ist aber häufig nicht der Fall, da Kopplungen zwischen den einzelnen Systemgrößen vorhanden sein können. Ein Beispiel soll den Sachverhalt verdeutlichen.

Bei einem dreiphasigen Drehstrommotor sollen die Phasenströme  $i_1$  und  $i_2$  geregelt werden. Der Phasenstrom  $i_3$  stellt sich nach Kirchhoff ein,

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad .$$

Als Stellgrößen können dabei die verketteten Spannungen  $u_{13}$  und  $u_{23}$  verwendet werden. Beide Stellgrößen beeinflussen jedoch nicht nur die zugehörige Regelgröße, sondern die Spannung  $u_{13}$  wirkt auch auf den Strom  $i_2$ , ebenso wie die Spannung  $u_{23}$  auch den Strom  $i_1$  verändert, Bild 9.5.



*Bild 9.6 Schematische Darstellung der gegenseitigen Beeinflussung bei Systemen mit Kopplungen (Drehstrommotor)*

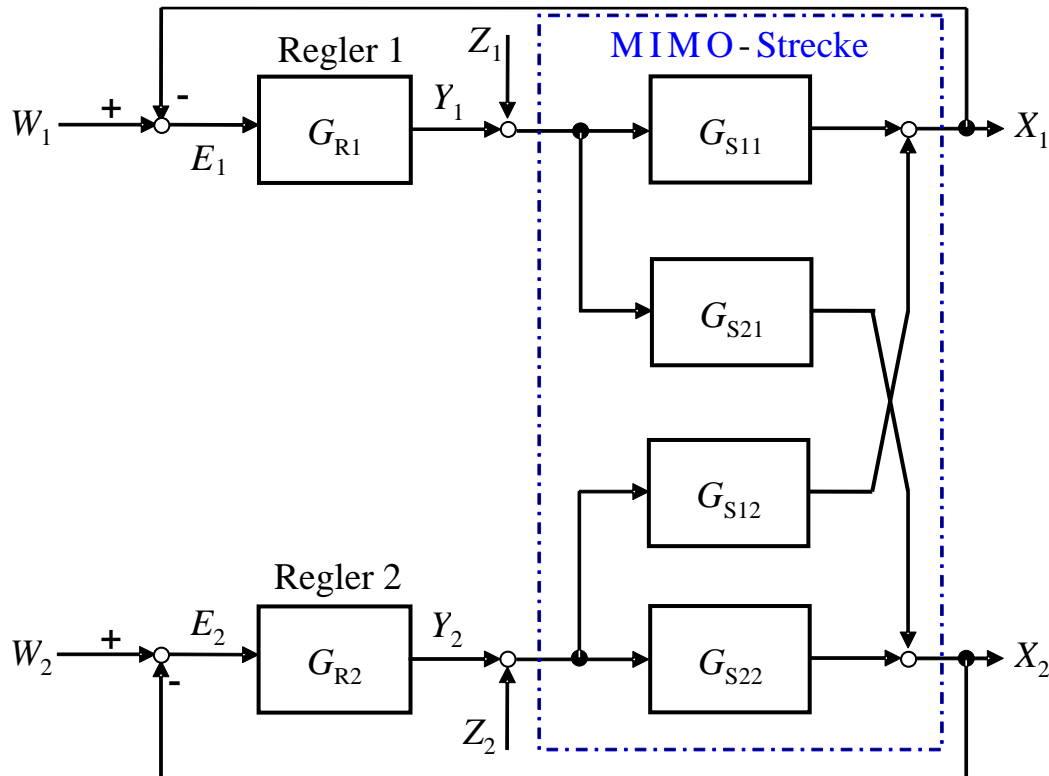
Für die Darstellung eines Mehrgrößenregelsystems im Wirkungsplan gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, bei denen eine ganz bestimmte Voraussetzung über die Feinstruktur des Systems getroffen wird.

Zustandsmatrix A, MIMO, ...

Der hier zur Verfügung stehende Raum reicht nicht aus, um die Probleme im Einzelnen zu diskutieren. Die grundsätzlichen Eigenheiten einer Mehrgrößenregelung sollen deshalb am Beispiel einer Zweigrößenregelung aufgezeigt werden, wobei im Wirkungsplan die so genannte P-Kanonische Darstellung gewählt wird. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, dass man zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens jeweils einen Eingang erregt und die Antwort beider Ausgänge ermittelt. Da Linearität vorausgesetzt wird, können die Einflüsse überlagert werden. Man gelangt auf diese Weise zu dem in Bild 9.6 gezeichneten Wirkungsplan.

$y_1$  kann z.B. die Spannung  $u_{13}$ ,  $y_2$  die Spannung  $u_{23}$  sein.  $x_1$  ist dann der Strom  $i_1$ ,  $x_2$  der Strom  $i_2$ .

Man erkennt sofort, dass das Entwurfsproblem gegenüber dem einschleifigen Regelkreis wesentlich erschwert wird, da eine Veränderung der Regelparameter von  $G_{R1}$  die Einstellung des Reglers  $G_{R2}$  beeinflusst, wie es auch umgekehrt der Fall ist. Die für den einschleifigen Regelkreis angegebenen Einstellregeln sind deshalb nicht ohne weiteres anwendbar.



*Bild 9.7 Wirkungsplan einer Zweigrößenregelung,  
P-kanonische Darstellung  
(Multiple Input Multiple Output (MIMO) Strecke)*

Es gibt leider kein schlüssiges Verfahren, eine Mehrgrößenregelung zu optimieren. Bei der Stromregelung für den Drehstrommotor kann durch **Entkopplungsnetzwerke** der Einfluss von  $Y_1$  auf  $X_2$  und von  $Y_2$  auf  $X_1$  beseitigt werden. Hierzu wird die Stellgröße von Regler 1 bei der Strecke 2 als Störgröße aufgefasst und über eine Störgrößenaufschaltung kompensiert.

Doch oft scheidet das für reale Systeme wegen der meist vorhandenen Nichtlinearitäten aus. Außerdem führt eine Entkopplung nicht zwangsläufig zu einer Verbesserung des Regelverhaltens. Eine praktische Entkopplung erreicht man auch, wenn z.B. das System 1 wesentlich schneller als das System 2 ausgelegt werden kann. Der Einfluss von  $Y_2$  auf  $X_1$  wirkt dann wie eine langsam veränderliche Störgröße, während die schnellen Änderungen von  $Y_1$ ,  $X_2$  nur unwesentlich beeinflussen.

Die allgemeine Behandlung von Mehrgrößenregel-Systemen erfordert Methoden, die weit über die bei einschleifigen Systemen erforderlichen Methoden hinausgehen. Hier muss der interessierte Leser auf die vorhandene Literatur verwiesen werden [4].

## 10. Unstetige Regelung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde angenommen, dass der Regler ein stetig veränderliches Ausgangssignal liefert, das nach einer entsprechenden Leistungsverstärkung als Stellgröße auf die Regelstrecke wirkt.

Stetige Leistungsverstärker sind relativ teuer und aufwendig. Bei Regelstrecken mit ausgeprägtem Tiefpassverhalten (z.B. Gleichung 4.7) ist es möglich, Stellglieder zu verwenden, die nur zwei (Ein-Aus) oder drei Stellungen (Heizen-Aus-Kühlen) annehmen können. Diese Stellglieder werden in einem bestimmten Rhythmus betätigt. Wegen des Tiefpassverhaltens der Strecke verläuft die Regelgröße entsprechend dem zeitlichen Mittelwert der Stellgröße, wenn die Schaltfrequenz ausreichend hoch gewählt wird. Es ist dadurch möglich, die Regelgröße auf jeden Wert einzustellen, obwohl die Stellgröße nur zwei Werte annehmen kann.

Die technische Verwirklichung unstetiger Regeleinrichtungen bzw. Leistungsverstärker ist zwar einfacher als die kontinuierlicher Systeme, die Darstellung der theoretischen Zusammenhänge ist jedoch ungleich schwieriger, da Regelkreise mit schaltenden Übertragungsgliedern *nichtlinear* sind.

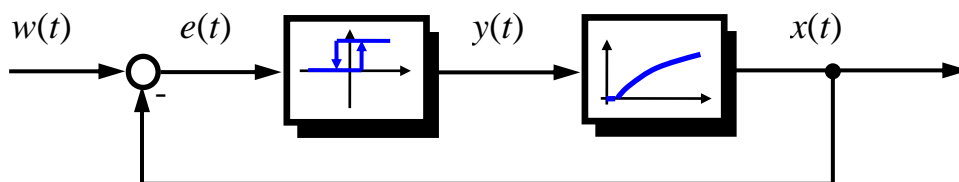
Im Folgenden wird eine vereinfachte Darstellung der Theorie gegeben, die aber für das Verständnis der Wirkungsweise und die Bemessung der Regeleinrichtung ausreichend ist.

### 10.1 Zweipunktregler

Zweipunktregler sind Schalter, die nur zwei Zustände, „Ein“:  $y = Y_h$  und „Aus“:  $y = 0$ , annehmen können.

Bild 10.1 zeigt einen Regelkreis mit Zweipunktregler. Um das Verhalten der Anordnung einfach überblicken zu können, ist als Strecke ein System mit Totzeit  $T_t$  und Verzögerung 1. Ordnung  $T_1$  angenommen,

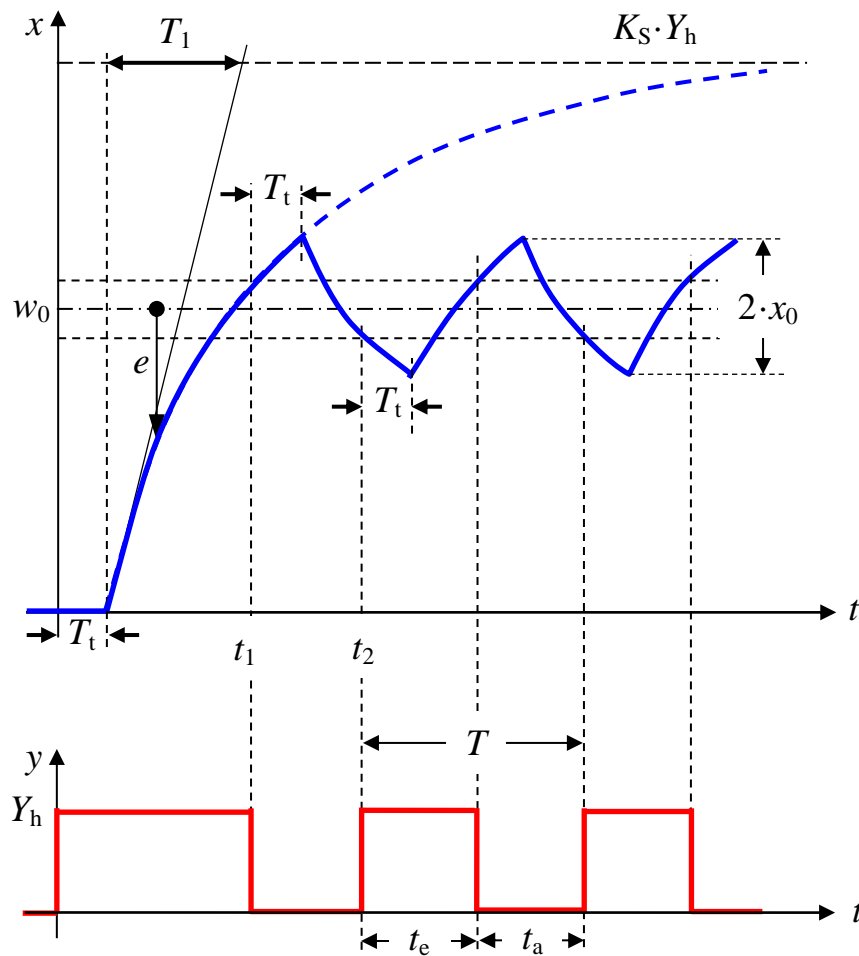
$$G_s = \frac{K_{PS} \cdot e^{-T_t \cdot s}}{T_1 \cdot s + 1} \quad . \quad (10.1)$$



*Bild 10.1 Regelkreis mit Zweipunktregler*

In Bild 10.2 sind die Sprungantwort des geschlossenen Kreises und der Stellgrößenverlauf dargestellt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird die Führungsgröße von  $w = 0$  auf  $w = w_0$  geändert. Die Regeldifferenz  $e$  springt damit ebenfalls auf den Wert  $w_0$ , der Zweipunktregler schaltet ein und liefert die Stellgröße  $Y_h$ . Nach Ver-

streichen der Totzeit  $T_t$  beginnt die Regelgröße entsprechend der Exponentialfunktion anzusteigen und die Regeldifferenz wird abgebaut.



*Bild 10.2 Zweipunktregelung, Regelgrößen- und Stellgrößen-Verlauf  
2  $x_u$  Hysterese des Zweipunktgliedes*

Das Zweipunktglied schaltet nun nicht exakt bei  $e = 0$ , sondern aufgrund einer unvermeidlichen, aber auch erwünschten **Hysterese** erst, wenn  $e$  die Werte  $+x_u$  über- oder  $-x_u$  unterschreitet.

Zum Zeitpunkt  $t_1$  wird

$$x(t_1) = w_0 + x_u, \quad (10.2)$$

das heißt

$$e(t_1) = w_0 - x(t_1) = -x_u \quad (10.3)$$

und der Regler schaltet ab,  $y = 0$ .

Wegen der totzeitbehafteten Strecke macht sich die Änderung der Stellgröße erst nach einer Laufzeit  $T_t$  bemerkbar. Dann nimmt die Regelgröße wieder ab. Sobald sie den Wert

$$x(t_2) = w_0 - x_u \quad (10.4)$$

erreicht hat, wird

$$e(t_2) = w_0 - x(t_2) = +x_u \quad (10.5)$$

und der Regler schaltet wieder ein.

Dieses Spiel wiederholt sich nun ständig, die Regelgröße führt Schwingungen um die Führungsgröße  $w_0$  aus. Der zugehörige Stellgrößenverlauf ist eine periodische Schaltfunktion.

Die **Periodendauer**

$$T = t_e + t_a \quad (10.6)$$

und das **Schaltverhältnis** (Tastgrad, Aussteuerung)

$$\alpha = \frac{t_e}{t_e + t_a} = \frac{t_e}{T} \quad (10.7)$$

hängen von der Hysterese ( $2 \cdot x_u$ ) des Reglers und den Daten der Strecke ( $K_{PS}$ ,  $T_1$ ,  $T_t$ ) ab.

Der Mittelwert der Stellgröße ist

$$\bar{y} = \frac{t_e}{t_e + t_a} \cdot Y_h = \alpha \cdot Y_h \quad (10.8)$$

Um eine einfache Beziehung für den Mittelwert der Regelgröße zu erhalten, ersetzt man die Exponentialfunktionen in Bild 10.2 durch Geradenstücke. Der entstehende Fehler ist dabei nicht groß, wenn die Hysterese und das Verhältnis  $T_t / T_1$  klein sind.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich für Amplitude und Frequenz der Schaltschwingung die Beziehungen

$$x_0 \approx x_u + \frac{K_{PS} \cdot Y_h}{2} \cdot \frac{T_t}{T_1} \quad (10.9)$$

$$T = T_1 \cdot \frac{K_{PS} \cdot Y_h}{w_0} \cdot \frac{\frac{T_t}{T_1} + \frac{2 \cdot w_0}{K_{PS} \cdot Y_h}}{1 - \frac{w_0}{K_{PS} \cdot Y_h}} \quad (10.10)$$

Mit dem Mittelwert der Regelgröße,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= w_0 + \frac{T_t}{T_1} \left( \frac{K_{PS} \cdot Y_h}{2} - w_0 \right) \\ \bar{x} &= w_0 - (x_0 - x_u) \left( \frac{2 \cdot w_0}{K_S \cdot Y_h} - 1 \right) \end{aligned} \quad (10.11)$$

lässt sich eine mittlere Regeldifferenz definieren,

$$\bar{e} = w_0 - \bar{x} = (x_0 - x_u) \left( \frac{2 \cdot w_0}{K_{PS} \cdot Y_h} - 1 \right). \quad (10.12)$$

Man kann Gleichung (10.12) entnehmen, dass die mittlere Regeldifferenz  $\bar{e}$  für

$$w_0 = \frac{K_{PS} \cdot Y_h}{2}$$

verschwindet. Anderenfalls ergibt sich ein systematischer Fehler. Ist die Führungsgröße größer, erhält man einen positiven, andernfalls einen negativen Wert für  $\bar{e}$ .

Eine Regelung in der gezeigten Form hat wesentliche Nachteile. Die Schaltfrequenz  $f$  und die Amplitude  $x_0$  hängen außer von der Hysterese hauptsächlich von den Daten der Strecke ab.

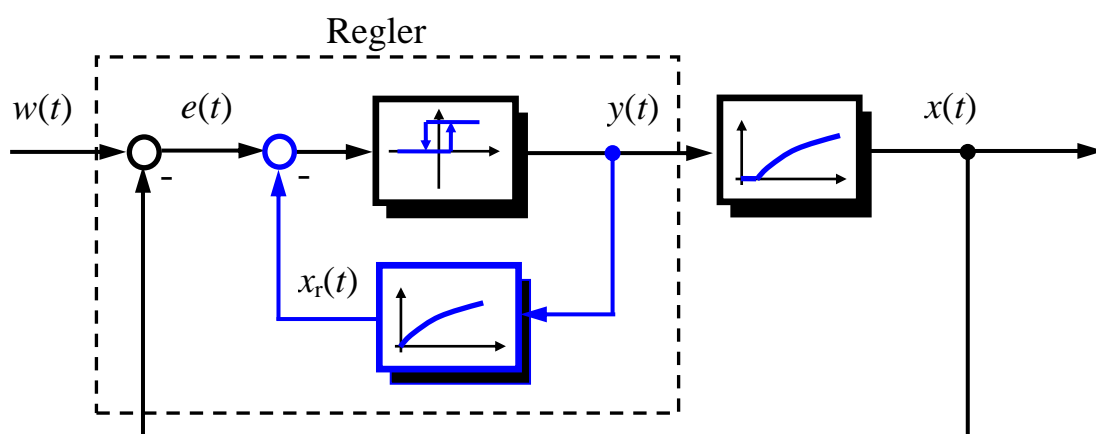
Bei einem ungünstigen Verhältnis  $T_t / T_1$  kann die Amplitude der Schaltschwingung unzulässig groß werden ( $T_t / T_1 = 0,2 \rightarrow x_0 > 10\%$  vom Messbereichsendwert). Eine Verkleinerung der Hysterese nützt in solchen Fällen nichts.

Bei sehr kleinem Verhältnis  $T_t / T_1$  muss wiederum ein bestimmter Mindestwert für  $x_u$  eingehalten werden, da sonst die Schaltfrequenz zu groß wird.

Der Regelkreis nach Bild 10.1 ist in dieser einfachen Form nur in Sonderfällen anwendbar.

Um das Prinzip der Zweipunktregelung (einfache Leistungsverstärkung) universell für Regelstrecken mit Tiefpassverhalten anwendbar zu machen, wird das Zweipunktglied mit einer Rückführung versehen.

Die auf diese Weise entstandene Anordnung ist in Bild 10.3 dargestellt.

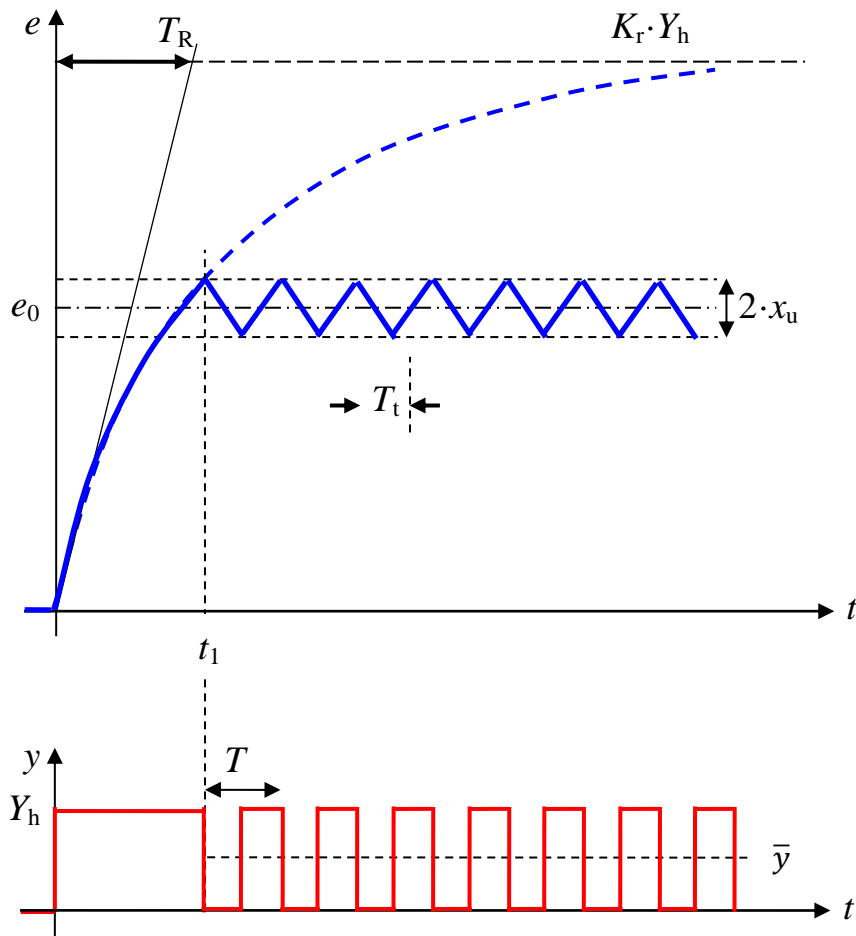


*Bild 10.3 Zweipunktregler mit Rückführung an einer Strecke mit Ausgleich*

Betrachtet man zunächst nur das **Zweipunktglied** mit der **Rückführung**, so wird die Schaltung direkt mit der in Bild 10.1 vergleichbar.

Die Rückführung wirkt praktisch als Regelstrecke, wobei der wesentliche Unterschied zu der vorher besprochenen Anordnung darin besteht, dass die Parameter

$K_r$  und  $T_r$  frei wählbar sind. Bild 10.4 zeigt die Sprungantwort des Zweipunktgliedes mit Rückführung  $\bar{y}$ .



*Bild 10.4 Zweipunktglied mit verzögerter Rückführung, Verlauf der Rückführgröße und der Stellgröße für  $e(t) = e_0 \cdot \varepsilon(t)$*

Die zeitlichen Verläufe entsprechen denen im Bild 10.2, wenn man

$$w_0 \rightarrow e_0, \quad K_{PS} \rightarrow K_r$$

$$T_1 \rightarrow T_r, \quad T_t \rightarrow 0$$

setzt. Die Frequenz der Schaltschwingung,

$$f \approx \frac{1}{T_r} \cdot \frac{e_0}{2 \cdot x_u} \left( 1 - \frac{e_0}{K_r \cdot Y_h} \right), \quad (10.13)$$

hängt zwar immer noch von der Regeldifferenz  $e_0$  ab, kann aber durch geeignete Wahl der Parameter  $K_r$  und  $T_r$  so groß ausgelegt werden, dass die Regelstrecke nur noch auf den Mittelwert

$$\bar{y} = Y_h \cdot \frac{t_e}{T} = \frac{1}{K_r} \cdot e_0 \quad (10.14)$$

der Stellgröße anspricht.

Man spricht dann von einer *quasi kontinuierlichen Regelung*, der Mittelwert der Stellgröße kann zwischen  $\bar{y} = 0$  und  $\bar{y} = Y_h$  kontinuierlich verändert werden. Das Zweipunktglied mit verzögerter Rückführung wirkt als *Pulsbreitenmodulator* (PWM).

Betrachtet man den Stellgrößenverlauf in Bild 10.4, so erkennt man eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verhalten eines kontinuierlichen PD-Reglers.

Nach einer sprungförmigen Änderung von  $e$  erscheint zunächst ein längerer Stellimpuls. Für ein genügend träges System hat er eine ähnliche Wirkung wie der vom kontinuierlichen PD-Regler gelieferte Dirac-Impuls.

Für die Fläche des ersten Stellimpulses erhält man

$$t_1 \cdot Y_h \approx \frac{T_r}{K_r} \cdot e_0, \quad (10.15)$$

wenn man  $t_1 \ll T_r$  und  $x_u \ll e_0$  annimmt.

Aus dem Vergleich mit dem kontinuierlichen Regler folgt damit

$$T_v \approx T_r, \quad K_P \approx \frac{1}{K_r}. \quad (10.16)$$

Betrachtet man also das Zweipunktglied mit verzögerter Rückführung näherungsweise als kontinuierlich wirkenden PD-Regler, dann kann er an die Strecke z.B. mit der Schätzformel (Bild 8.6) angepasst werden.

Es muss dann

$$T_v = \frac{1}{4} \cdot T_u = \frac{1}{4} \cdot T_t, \quad K_P = \frac{1,2 \cdot T_g}{K_{PS} \cdot T_u} = \frac{1,2 \cdot T_1}{K_{PS} \cdot T_t} \quad (10.17)$$

gewählt werden.

Es besteht jedoch die Möglichkeit, die Parameter  $T_v$  und  $K_P$  auch ohne Kenntnis der Sprungantwort der Strecke zu bestimmen [8]. Man betreibt den Zweipunktregler zunächst ohne Rückführung und wählt als Führungsgröße  $w_0 = 0,5 \cdot K_{PS} \cdot Y_h$ , das heißt einen Stellgrad von 50%.

Vernachlässigt man die Hysterese  $2 x_u$  des Zweipunktreglers, so folgt aus den Beziehungen (10.9) und (10.10) für die Amplitude der Dauerschwingung

$$x_0 \approx \frac{K_{PS} \cdot Y_h}{2} \cdot \frac{T_t}{T_1}, \quad (10.18)$$

und für die Periodendauer

$$T \approx 4 \cdot T_t. \quad (10.19)$$

Sind  $x_0$  und  $T$  durch Messung bekannt, so lassen sich daraus das Verhältnis



$$\frac{T_t}{T_l} = 2 \cdot \frac{x_0}{K_{PS} \cdot Y_h} \quad (10.20)$$

sowie die Totzeit

$$T_t \approx \frac{T}{4} \quad (10.21)$$

berechnen.

Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung (10.17) ein, so erhält man für die Vorhaltezeit

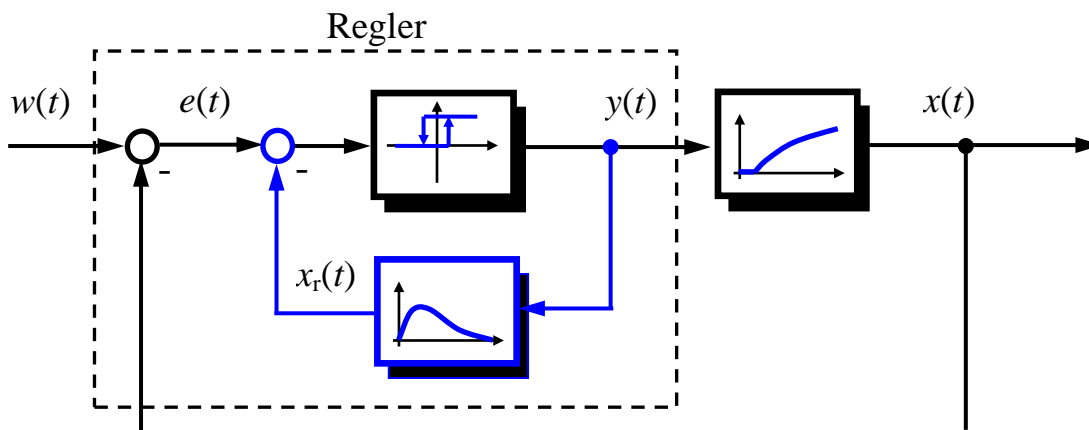
$$T_v \approx \frac{T}{16} \quad (10.22)$$

und den Übertragungsbeiwert

$$K_P \approx 1,2 \cdot \frac{Y_h}{2 \cdot x_0} \quad (10.23)$$

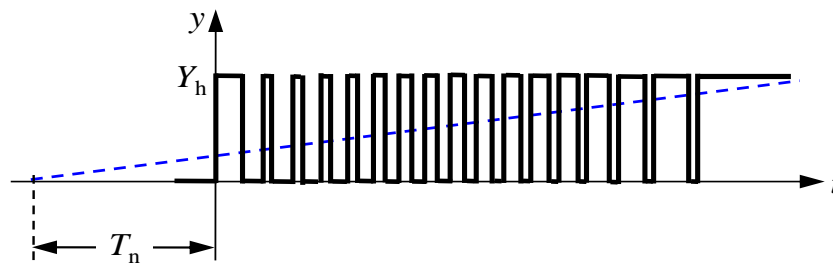
Das gezeigte Verfahren ist besonders auf praktische Bedürfnisse zugeschnitten, da die Bestimmung von  $T_v$  und  $K_P$  aus Periodendauer und Schwankungsbreite der Regelschwingung immer ohne großen Aufwand möglich ist.

Das Zweipunktglied mit verzögerter Rückführung kann unter den genannten Voraussetzungen einem kontinuierlichen PD-Regler gleichgesetzt werden. Bei diesem tritt auch eine bleibende Regeldifferenz auf. Diesen Nachteil kann man beheben, wenn man das Zweipunktglied mit einer **verzögert nachgebenden Rückführung** versieht (Bild 10.5).



*Bild 10.5 Regelkreis mit PID-Zweipunktregler*

Diese bewirkt, dass bei einer sprungförmigen Verstellung der Regeldifferenz zunächst ein längerer Schaltimpuls entsteht, dem ein kürzerer folgt. Durch das Abklingen der Rückführung nimmt die Dauer der Schaltimpulse dann stetig zu,



bis der Regler schließlich dauernd eingeschaltet bleibt (Stellgrad 100%) (Bild 10.6).

*Bild 10.6 Verlauf der Stellgröße bei einem Zweipunktglied mit verzögert nachgebender Rückführung,  $e(t) = e_0 \cdot \varepsilon(t)$*

Der Mittelwert der Stellgröße ähnelt in seinem Verlauf der Sprungantwort eines kontinuierlichen PID-Reglers.

Die Einstellung der Parameter kann mit der Schätzformel

$$T_v = 0,42 \cdot T_t, \quad T_n = 2 \cdot T_t \quad \text{und} \quad K_P = 1,2 \cdot \frac{T_1}{T_t} \quad (10.23)$$

vorgenommen werden. Mit den Gleichungen (10.20) und (10.21) ergibt sich daraus die einfache Bemessungsvorschrift

$$T_v \approx \frac{T}{10}, \quad T_n \approx \frac{T}{2} \quad \text{und} \quad K_P \approx \frac{Y_h}{1,67 \cdot x_0}. \quad (10.24)$$

Beim PID-Zweipunktregler verschwindet im stationären Zustand die bleibende Regeldifferenz.

Es gibt Regelstrecken, bei denen Heizung und Kühlung erforderlich ist, wobei je nach Zustand der Regelstrecke entweder die Heizung oder die Kühlung betrieben wird.

Man verwendet dafür einen **Zweipunktregler mit zwei Schaltpunkten**, die häufig auch gegeneinander verschoben werden können.

Bei Heizung wird mit Schalterpunkt 1, bei Kühlung mit Schalterpunkt 2 gearbeitet. Die Wirkungsweise entspricht jeweils der einer einfachen Zweipunktregelung, das Zeitverhalten kann auch hier über die Rückführung bestimmt werden. Dabei ist es möglich, den beiden Schaltpunkten eine unterschiedliche Rückführung zuzuordnen, wodurch der Regler bei Heizen und Kühlen ein verschiedenes dynamisches Verhalten aufweisen kann.

Man bezeichnet eine solche Regelung als **Mehrpunkt-** oder **doppelte Zweipunktregelung**.

## 11. Literaturhinweise

- [1] N. Große, W. Schorn: Taschenbuch der praktischen Regelungstechnik, Carl Hanser Verlag München Wien (2006).
- [2] H. Unbehauen: Regelungstechnik I, Vieweg-Verlag Braunschweig
- [3] F. Tröster: Steuerungs- und Regelungstechnik für Ingenieure, Oldenbourg Verlag. Kompendium <http://www.oldenbourg.de/verlag/>
- [4] **Lutz, Wendt: Taschenbuch der Regelungstechnik**, Verlag Harri Deutsch.
- [5] K. Fieger: Regelungstechnik, Grundlagen und Geräte, Firmenschrift Hartmann & Braun
- [6] Skript Prof. Schaedel
- [7] ZIEGLER, J.B. und N.B. NICHOLS: Optimum settings for automatic controllers, Trans. ASME 64, S.759-768 (1942).
- [8] CHIEN, K.L., HRONES, J.A. und RESWICK, J.B.: On the automatic control of generalized passive systems. Trans. ASME 74 (1952) S. 175-185.
- [9] KESSLER, C.: Das symmetrische Optimum. Teil 1, rt 6 (1958), Nr.11, S.395-400 und Teil 2, rt (1958), Nr. 12, S. 432-436.
- [10] DEPPING, F. und VOITS M.: Entwurf diskreter Kompensationsregler nach dem Kriterium der Betragsanschniegung des Führungsfrequenzgangs, at 35 (1987) Nr. 4, S. 116-123.
- [11] Tietze Schenk
- [12] SCHAEDEL, H. M.: Direkter Entwurf parameteroptimierter Regler nach dem Kriterium der gestuften Dämpfung. Proc. Jahrestagung der Deutschen Forschungsvereinigung für Mess-, Regelungs- und Systemtechnik, Bremen, Deutschland, Forschungsbericht 95-1, S. 117-153 (1995).
- [13] SCHAEDEL, H. M. und HILGER, F.J.: New methods and CAE-tools for improving basic control engineering education. Proc. 3<sup>rd</sup> East-West Congr. on Engng. Ed., Gdynia, Poland, pp.176-188 (1996).
- [14] SCHAEDEL, H. M.: A new method of direct PID controller design based on the principle of cascaded damping ratios. Proceedings European Control Conference, Brüssel (1997).
- [15] Kuhn, U.: Eine praxisnahe Einstellregel für PID-Regler: Die T-Summen-Regel. Automatisierungstechnische Praxis Mai/1995.
- [16] Krah, J. O.: Bode Plot basierter Servoantriebs Tuning Wizard, SPS-Drives Kongress, Nürnberg 2004.

## 12. Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Quelle	Bemerkung
$u_1 \dots u_p$	Eingangsgrößen	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$u(t)$	Kleinsignal		Lineare Abweichung von einem Arbeitspunkt. Nicht in Regelwerken.
$U(t)$	Großsignal		$U(t) \approx U_0 + u(t)$ . Nicht in Regelwerken.
$u_t$	Totzone bzgl. $u$	DIN 19226-2	
$\hat{u}$	Amplitude von $u$	DIN 19226-2	
$u_m$	Überschwingweite von $u$	DIN 19226-2	
$U(s)$	Laplace-transformierte Eingangsgröße	DIN 19226-2	Größe im Frequenzbereich. Andere Klein-/Großsignale im Frequenzbereich sinngemäß mit Großbuchstaben.
$v_1 \dots v_q$	Ausgangsgrößen	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$u_R, v_R$	Werte im Beharrungszustand	DIN 19226-2	
$c$	Zielgröße	DIN E 1304-10	Keine Definition in Regelwerken zu finden; als Sollwert für Aufgabengröße $q$ aufgefasst.
$w$	Führungsgröße	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$z$	Störgröße	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$e$	Regeldifferenz	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	$e = w - r$ . In DIN E 1304-10 $e = w - x$ . Früher $x_d$ .
$x_w$	Sollwertabweichung	DIN 19226-5	Formelzeichen $x_w$ nicht in Regelwerken. Früher statt Sollwertabweichung: Regelabweichung.
$y$	Stellgröße	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$x$	Regelgröße	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$q$	Aufgabengröße	DIN E 1304-10	In DIN 19226-4: $x_A$
$r$	Rückführgröße	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$x_j$	Zustandsgröße	DIN 19226-1 DIN E 1304-10	
$m$	Reglerausgangsgröße	DIN E 1304-10	In DIN 19226-4: $y_r$ .
$y_h$	Handstellwert		Nicht in Regelwerken.
$s_A$	Analogsignal		Nicht in Regelwerken.
$s_D$	Digitalsignal		Nicht in Regelwerken.
$s_B$	Binärsignal		Nicht in Regelwerken.
$v_v$	Stellgeschwindigkeit	DIN 19226-5	Bezogen auf Stellgröße $y$ .
$T_v$	Stellzeit	DIN 19226-5	Bezogen auf Stellgröße $y$ .
$T_l$	Laufzeit		Bezogen auf Stellgliedausgangsgröße $l$ . Nicht in Regelwerken.
$X_h$	Regelbereich	DIN 19226-4	
$X_{Ah}$	Aufgabenbereich	DIN 19226-4	
$W_h$	Führungsbereich	DIN 19226-4	
$Y_h$	Stellbereich	DIN 19226-4	
$Z_h$	Störbereich	DIN 19226-4	
$K_D$	Differenzierbeiwert	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$V_D$	Differenzierv Verstärkung	DIN EN 60456-1	
$K_I$	Integrierbeiwert (Regler)	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$K_{IS}$	Integrierbeiwert (Strecke)		Nicht in Regelwerken.
$K_P$	Proportionalbeiwert (Regler)	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	

$X_P$	Proportionalbereich	DIN EN 60456-1	
$K_{PS}$	Proportionalbeiwert (Strecke)	DIN 19226-5	
$V_o$	Kreisverstärkung	DIN 19226-5	In DIN E 1304-10: $K_o$
$t$	Zeit (laufend)	DIN 19226-2	
$t_k$	Zeitpunkt	DIN 19226-2	
$t_0$	Anfangszeitpunkt	DIN 19236	
$t_E$	Endzeitpunkt	DIN 19236	
$T$	Verzögerungszeit, Zeitkonstante	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$T_a$	Zeitabstand, Abtastzeit	VDI/VDE 3685-2	Nach DIN 19226-2 ebenfalls mit $T$ bezeichnet. M. E. aber besser als $T$ , um Verwechslungen zu vermeiden.
$T_f$	Filterzeit		Filter 1. Ordnung. Nicht in Regelwerken.
$T_g$	Ausgleichszeit	DIN 19226-2	In DIN E 1304-10: $T_b$
$T_u$	Verzugszeit	DIN 19226-2	In DIN E 1304-10: $T_e$
$T_t$	Totzeit	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$T_{tE}$	Ersatztotzeit	DIN 19226-2	$T_{tE} = T_t + T_u$
$T_n$	Nachstellzeit	DIN 19226-2	In DIN E 1304-10: $T_i$
$T_v$	Vorhaltzeit	DIN 19226-2	In DIN E 1304-10: $T_d$
$T_r$	Anstiegszeit	DIN E 1304-10	
$T_{sr}$	Anschwingzeit	DIN E 1304-10	
$T_s$	Einschwingzeit	DIN E 1304-10	
$T_{cr}$	Anregelzeit	DIN E 1304-10	
$T_{cs}$	Ausregelzeit	DIN E 1304-10	
$T_\Sigma$	Summenzeitkonstante		Nicht in Regelwerken.
$T_E$	Einstellzeit	VDI 4202	90%-Zeit von Messeinrichtungen; Formelzeichen nicht im Regelwerk. Bei Herstellern auch: Ansprechzeit.
$f$	Frequenz	DIN E 1304-10	
$\omega$	Kreisfrequenz	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$\omega_d$	Eigenkreisfrequenz	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	
$\mathcal{D}$	Dämpfungsgrad	DIN 19226-4 DIN E 1304-10	
$\delta$	Abklingkoeffizient	DIN E 1304-10	
$h(t)$	Übergangsfunktion	DIN 19226-2 DIN E 1304-10	Auf Eingangssprung bezogene Sprungantwort

### Zusammenstellung einiger Differentialgleichungen:

Kondensator:  $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$      $C$ : Kapazität in Farad     $1 \text{ F} = 1 \text{ A s} / \text{V}$

Induktivität:  $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$      $L$ : Induktivität in Henry     $1 \text{ H} = 1 \text{ V s} / \text{A}$

Mechanik, linear:  $\pm F(t) = m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x$   
 $a = \ddot{x}$     Beschleunigung in  $\text{m} / \text{s}^2$   
 $v = \dot{x}$     Geschwindigkeit in  $\text{m} / \text{s}$   
 $m$     Masse in  $\text{kg}$   
 $b$     Reibung in  $\text{N} / \text{ms}^{-1}$   
 $c$     Federkonstante in  $\text{N} / \text{m}$   
 $F(t) =$     Kraft in  $\text{N}$  ( $\pm$  Wirkungsrichtung)

Mechanik, rotierend:  $\pm m(t) = J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi$   
 $\alpha = \ddot{\varphi}$     Winkelbeschleunigung in  $\text{rad} / \text{s}^2$   
 $\omega = \dot{\varphi}$     Winkelgeschwindigkeit in  $\text{rad} / \text{s}$   
 $J$     Trägheitsmoment in  $\text{kg m}^2$   
 $b$     Reibung in  $\text{Nm} / \text{rads}^{-1}$   
 $c$     Federkonstante in  $\text{Nm} / \text{rad}$   
 $m(t) =$     Drehmoment in  $\text{Nm}$  ( $\pm$  Wirkungsrichtung)

## 13. Index

Abtastregelung .....	77
Amplitudengang .....	91
Analoge Regler.....	75
Anregelzeit .....	41
Anstiegsantwort.....	29
Anstiegsfunktion .....	29, 30
Arbeitspunkt AP .....	13
Ausgangsgrößen .....	8
Ausgleichszeit .....	28
Bildbereich .....	46
Bode-Diagramm .....	49, 86
Dämpfungsgrad .....	39
D-Glied.....	36
Differentialgleichungen.....	23
Differenzierbeiwert .....	36
Digitale Regler .....	77
Dirac-Impuls.....	30
DT <sub>1</sub> -Glied .....	37
Dynamische Kompensation.....	103
Eigenfrequenz.....	41
Eingangsgrößen .....	8
Festwertregelung .....	12
Folgeregelung.....	12
Frequenzbereich .....	46
Frequenzgang .....	46, 48
Führungsgröße.....	5
Führungsübertragungsfunktion .....	72
Gegenkopplung .....	54
Gestufte Dämpfung .....	105
Grenzwertsätze .....	61
Gütekriterien.....	94
Hurwitz-Kriterium.....	80
I-Glied .....	34
Impulsantwort.....	30
Impulsfunktion .....	30
I-Regler.....	66
Istwert.....	5
ITAE-Kriterium.....	94
Kennkreisfrequenz .....	39
Kleinsignale.....	14
Kreisfrequenzgang .....	83
Kreisübertragungsfunktion.....	73
Kritischer Punkt.....	82
Laplace-Transformation .....	46
Mitkopplung .....	54
Nachstellzeit .....	67
Normaler Entwurf .....	106
Nyquist-Kriterium .....	82
Ortskurve .....	46
Parallelschaltung .....	54

PD-Regler.....	64
PDT <sub>1</sub> -Glieder.....	38
P-Glieder.....	32
Phasengang.....	91
PID-Regler.....	68
PI-Regler.....	67
P-Regler.....	16, 63
Produktform PID-Regler.....	69
PT <sub>1</sub> -Glieder.....	32
PT <sub>2</sub> -Glieder.....	39
Pulsweitenmodulator.....	128
Quadratische Regelfläche.....	94
Regelbereich.....	13
Regeldifferenz.....	9
Regelfaktor.....	19
Regelgröße.....	5
Regelkreis.....	9, 71
Regelstrecke.....	9
Regelung.....	5
Rückwirkungsfrei.....	9
Scharfer Entwurf.....	108
Sollwert.....	5
Sollwertfilter.....	102
Sprungantwort.....	27
Sprungfunktion.....	27
Stabilitätsgrenze.....	81
Stellbereich.....	13
Stellgröße.....	5, 9
Steuerkette.....	8
Störgrößen.....	5
Störungsübertragungsfunktion.....	72
Summenform PID-Regler.....	68
Summenzeitkonstante.....	57
Symmetrisches Optimum.....	102
System.....	7
Totzeit.....	28, 42, 58
Übergangsfunktion.....	28
Überschwingweite.....	41
Übertragungsbeiwert.....	14, 26, 39
Übertragungsfunktion.....	48
Übertragungsglied.....	8, 12
Verzugszeit.....	28
Vorhaltzeitkonstante.....	65
Vorsteuerung.....	119
Wirkungsplan.....	8, 11
Wirkungsrichtung.....	7
Wirkungsweg.....	7
Wurzelortskurve.....	91
Zeitverhalten.....	23
Ziegler-Nichols.....	96
Zweipunktreger.....	123



