

Soluciones del libro Bondy and Murty

Luis (corregido por Juan)

4 de septiembre de 2021

Podemos seguir la siguiente plantilla

1. Graphs

Ejercicio 1.1.1.

Sea G un grafo simple. Pruebe que $m \leq \binom{n}{2}$, y determine cuando sucede la igualdad.

Solución.

Se sabe que cada arista está definida por dos vértices distintos del grafo. Entonces, como el grafo es simple, la cantidad de aristas que se pueden formar es a lo mucho la cantidad de formas de escoger 2 vértices distintos del grafo, cuyo valor es $\binom{n}{2}$. De ahí se sigue que $m \leq \binom{n}{2}$. La igualdad sucede solo cuando el grafo es completo, es decir, existe una arista entre cualesquiera 2 vertices distintos.

Ejercicio 1.1.2.

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito, donde $|X| = r$ y $|Y| = s$.

- a) Pruebe que $m \leq rs$
- b) Deduzca que $m \leq \frac{n^2}{4}$
- c) Describa el grafo bipartito G que satisface la igualdad en la parte b)

Solución.

a) Cada arista del grafo G está determinada únicamente por la elección de 1 vértice del conjunto X y 1 vertice del conjunto Y , por lo que la cantidad de aristas que se pueden formar es a lo mucho $|X||Y|$, cuyo valor es rs . El caso de igualdad ocurre siempre y cuando se hayan trazado todas las aristas posibles entre X y Y .

b) Se sabe que, por la desigualdad de la media aritmética - media geométrica, $\sqrt{rs} \leq \frac{r+s}{2}$. Como $r + s = n$, se demuestra que $rs \leq \frac{n^2}{4}$. Además, como $m \leq rs$, se deduce que $m \leq \frac{n^2}{4}$

c) Para que ocurra la igualdad en la parte b), debe cumplirse dos igualdades: que r sea igual

a) s por propiedad de la desigualdad media aritmética - media geométrica, y que $m = rs$. Como $r + s = n$, entonces $r = s = \frac{n}{2}$ y $m = \frac{n^2}{4}$. Por lo tanto, la igualdad se da si y solo si $n = 2k$, $r = s = k$, donde k es un entero positivo y cada vertice del conjunto X esta unido a todos los vertices del conjunto Y .

Ejercicio 1.1.3.

Pruebe que:

- a) Todo camino es bipartito
- b) Un ciclo es bipartito si y solo si su longitud es par

Solución.

a) Sea A_1, A_2, \dots, A_n el camino dado de n vertices. La coloración que cumple es la siguiente: Para el índice i , si i es par, se pintara a A_i de color azul, caso contrario, se pintara de rojo. Como cada arista del camino esta conformada por 2 vertices de indices consecutivos (distinta paridad), entonces sus coloraciones seran distintas, por lo que cumple la condicion del problema. Por lo tanto el camino es bipartito.

b) Si n es par, entonces aplicamos la coloración dada en la parte a), la cual cumple la condición ya que los indices de los vertices A_n y A_1 tienen distinta paridad y por lo tanto distinta coloracion. Ahora, si el ciclo es bipartito, definimos a X y Y como los colores disponibles. Sin perdida de generalidad supongamos que el vertice A_1 se pinta del color X , entonces, el vertice A_2 se pintara de color Y por condicion del problema. Aplicando la misma logica observamos que A_3 tiene que pintarse de color X , de lo cual se puede observar que los vertices con indice impar se pintan con el color X y los de indice par se pintan de color Y . Por lo tanto, como entre A_n y A_1 existe una arista, entonces n y 1 tienen distinta paridad, por lo que n es par. Lo cual concluye la demostracion.

Ejercicio 1.1.4.

Pruebe que, para todo grafo G : $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

Solución.

Sean $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ los grados de cada uno de los n vertices del grafo. Piden demostrar que $d_1 \leq \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} \leq d_n$, lo cual equivale a demostrar que $n(d_1) \leq d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq n(d_n)$. Procedemos a demostrar esta desigualdad: La 1ra desigualdad es cierta puesto que $d_1 \leq d_i$, para todo indice i , si sumamos para el rango de 1 a n , se obtendra que $n(d_1) \leq d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Respecto a la 2da desigualdad, como $d_i \leq d_n$, para todo indice i , al momento de sumar las desigualdades en el rango de 1 a n , se obtendra que $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq n(d_n)$. Entonces, si juntamos las 2 desigualdades obtenidas, se demostraria la afirmacion.

Ejercicio 1.1.5.

Para $k = 0, 1, 2$ caracterice los k -regular graphs.

Solución.

Para $k = 0$, la condición que debe cumplirse es que el grafo G no debe tener ninguna arista. Para $k = 1$, el grafo G debe estar conformado por $2n$ vertices A_1, A_2, \dots, A_{2n} tales que existe una arista si y solo si es entre los vertices A_i y A_{i+1} , con i impar. Esto se puede demostrar de la siguiente manera:

Sin pérdida de generalidad supongamos que hay una arista entre A_1 y A_2 , entonces, como el grado de ambos vertices es 1, estos vertices forman una componente conexa del grafo, por lo que se aíslan de los demás vertices. Si se aplica la misma lógica para los vertices restantes, se demuestra que el grafo está compuesto por n componentes conexas de 2 vertices cada uno, que equivale al ejemplo que se explico líneas arriba.

Para $k = 2$, el grafo G debe estar conformado por la unión de varios ciclos disjuntos (que no compartan ningún vertex ni arista en común). Esto se puede demostrar de la siguiente manera: Sin pérdida de generalidad supongamos que un camino de longitud máxima que parte de A_1 es: A_1, A_2, \dots, A_k . Como A_k tiene grado 2, debe unirse a algún vertex adicional, como es el último vertex del camino de longitud máxima de A_1 , entonces A_k debe unirse a algún vertex A_i con $i \leq k - 2$. Si $i > 1$, entonces el grado de A_i sería al menos 3 ya que estaría unido con los vertices A_{i-1}, A_{i+1}, A_k , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe unirse a A_1 . De esta manera se demuestra que los vertices A_1, A_2, \dots, A_k forman un ciclo. Además, no deben unirse con ningún otro vertex más ya que el grado aumentaría. Si aplicamos la misma lógica para los vertices que aun no se han analizado, concluimos lo dicho líneas arriba.

Ejercicio 1.1.6.

- a) Pruebe que en cualquier grupo de dos o más personas, siempre existen dos que tienen la misma cantidad de amigos en el grupo.
- b) Describa los grupos de 5 personas tales que entre cualesquiera 2 existe exactamente 1 amigo en común. ¿Existiría algún grupo de 4 personas con la misma propiedad?

Solución.

a) Supongamos por contradicción que existe un grafo G de n vertices V_0, V_1, \dots, V_{n-1} tal que los grados de cada vertex sean distintos. Se sabe que $0 \leq \deg(v) \leq n - 1$ para todo vertex v , de lo cual se concluye que $\deg(v)$ puede tomar n valores. Como todos los grados son distintos, entonces para cada vertex V_i , $\deg(V_i) = i$. Consideremos a los vertices V_0 y V_{n-1} , como V_{n-1} tiene grado igual a $n - 1$, entonces está unido con todos los demás vertices, en particular con V_0 . Sin embargo el grado de V_0 es 0, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, siempre existen dos vertices con el mismo grado.

b) Vamos a demostrar que el grafo resultante que cumple las condiciones debe tener 1 vertex de grado 4 y 4 vertices adicionales A, B, C, D tales que existe una arista entre los pares (A, B) y (C, D) . Para ello vamos a suponer por contradicción que no existe un vertex de grado 4 en el grafo. Sean X y Y dos vertices del grafo con el mismo grado (partiendo de la

parte a)). Entonces, por condicion del problema existe un vertice Z tal que hay una arista en (X, Z) y (Y, Z) . Ahora existen 2 casos: Si X esta unido a algun vertice mas distinto de Y . Sea L tal vertice, ahora, no puede existir una arista entre L y Y ya que X y Y tendrian 2 amigos en comun(L y Z). Ademas, como X y Y tienen el mismo grado, entonces Y debe estar unido al quinto vertice al que llamaremos K . Finalmente, si analizamos entre los vertices L y K , deberia existir algun vertice entre X, Y, Z que este unido a ambos por condicion del problema. Notamos que no puede ser ni X ni Y ya que entre X y Y habrian al menos 2 amigos en comun, por lo tanto L y K deben estar unidos a Z , con esto notamos que el grado de Z es 4, lo cual es una contradiccion. El otro caso es que ni X ni Y estan unidos a algun otro vertice. Si analizamos al par (X, Z) , debe existir otro vertice que este unido a ambos, lo cual concluye que ese vertice debe ser unicamente Y . Entonces entre X, Y, Z se forma un ciclo. Sean L y K los vertices restantes, como entre L y K debe existir algun vertice que este unido a ambos, y ademas como no puede ser ni X ni Y , se concluye que Z debe estar unido a ambos, por lo que el grado de Z seria 4, lo cual una vez mas contradice la afirmacion. Por lo tanto, siempre existe un vertice de grado 4. Sea Z tal vertice y sean A, B, C, D los 4 vertices restantes. Notamos que cualesquiera 2 vertices distintos de Z tienen un amigo en comun que es Z . Ahora, supongamos sin perdida de generalidad que el vertice A tenga grado 3, entonces, como ya esta unido a Z , estara unido a 2 vertices mas P y Q . Pero esto es una contradiccion ya que entre P y Q habrian 2 amigos en comun(A y Z). Por lo tanto, todo vertice distinto de Z tiene grado a lo mucho 2. Si algun vertice X tuviera grado 1, entonces solo estaria unido a Z , y al momento de analizar al par (X, Z) , tendria que unirse a algun otro vertice mas por condicion del problema, por lo que todo vertice distinto de Z tiene grado 2, y la unica forma que suceda esto es que esten unidos mediante pares disjuntos, el cual es el ejemplo mostrado al inicio del problema.

No existe un grafo de 4 vertices que cumpla la condicion. Sean X y Y dos vertices con el mismo grado. Entonces, por condicion del problema existe un vertice Z que esta unido a ambos. Sea W el vertice faltante. Si X esta unido a W , entonces, como X y Y tienen el mismo grado, Y tambien debe estar unido a L , lo cual seria una contradiccion ya que entre X y Y habrian 2 amigos en comun. Si analizamos entre X y Z , debe existir algun vertice que sea amigo de ambos, como no puede ser W , entonces debe ser Y , asi entre X, Y, Z se forma un ciclo. Como entre Z y W debe haber un ciclo, entonces alguno de los vertices X, Y debe estar unido a L , lo cual no es posible por el caso anterior. Por lo tanto, se concluye que no existe un grafo de 4 vertices que cumpla la condicion.

Ejercicio 1.1.9.

Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito:

- Pruebe que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$
- Demuestre que, si G es k -regular, entonces $|X| = |Y|$

Solución.

- Como cada arista está conformada exactamente por 1 vértice del conjunto X y 1 vértice del conjunto Y , entonces se cumple que $\sum_{v \in X} d(v) = m$ y $\sum_{v \in Y} d(v) = m$, por lo que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$

b) Como es k -regular, entonces $\sum_{v \in X} d(v) = k|X| = k|Y|$, por lo que $|X| = |Y|$

Ejercicio 1.1.10.

Un grafo k -partito es uno cuyos vértices pueden ser particionados en k subconjuntos, de modo que no existe una arista que esté conformada por 2 vértices del mismo conjunto. Sea G un grafo k -partito simple y sean a_1, a_2, \dots, a_k el cardinal de cada uno de los k subconjuntos mencionados. Demuestre que $m \leq \frac{\sum_{i=1}^k a_i(n-a_i)}{2}$

Solución.

Sea v un vértice del conjunto de tamaño a_1 , entonces, solo puede estar conectado con aristas que no pertenezcan a tal conjunto, por lo tanto, puede estar unido como máximo a $n - a_1$ vértices. Como se cumple para todo vértice de tal conjunto, entonces, la suma de grados de los vértices que pertenecen al conjunto con cardinal a_i es $a_i(n - a_i)$. De forma similar hacemos con los demás conjuntos, al momento de sumar obtenemos que el doble del número de aristas es a lo mucho $\sum_{i=1}^k a_i(n - a_i)$, entonces : $2m \leq \sum_{i=1}^k a_i(n - a_i)$, lo cual demuestra el problema.

Ejercicio 1.1.11.

Un grafo k -partito es completo si cualesquiera 2 vértices que estén en distintas partes están unidos por una arista. G es llamado grafo Turan o $T_{n,k}$ si es k -partito completo y el tamaño de cada subconjunto es $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.

a) Pruebe que $T_{n,k}$ tiene mas aristas que cualquier otro grafo k -partito completo.

b) Determine $e(T_{n,k})$

Solución.

a) Sean a_1, a_2, \dots, a_k los cardinales de cada subconjunto de un grafo k -partito completo. Entonces, se cumple que el doble del total de aristas es $\sum_{i=1}^k a_i(n - a_i)$, como la suma de todos los a_i es igual a n , entonces el doble del total de aristas es igual a $n^2 - \sum_{i=1}^k a_i^2$, entonces, se necesita minimizar el valor de $\sum_{i=1}^k a_i^2$ para obtener la mayor cantidad de aristas posibles. Y esto se consigue por la desigualdad de media cuadrática, media aritmética cuando los valores de a_i son casi iguales, es decir, pertenecen al conjunto $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.

b) Supongamos que $n = qk + r$, donde $0 \leq r \leq k - 1$. Entonces, como $\sum_{i=1}^k a_i = n$, y cada a_i debe ser $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{k} \rceil$, se debe cumplir que —

Ejercicio 1.1.12.

a) Demuestre que si G es simple y $m > \binom{n-1}{2}$, entonces G es conexo.

b) Para $n > 1$, encuentre un grafo G que no sea conexo.

Solución.

a) Sean x_1, x_2, \dots, x_n los grados de los n vértices. Entonces: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2m$, lo cual significa que $x_1 + x_2 + \dots + x_n > (n-1)(n-2)$. Si existe algún vértice con grado $x_i = 0$, entonces se debe cumplir que existe un vértice con grado $x_j > \frac{(n-1)(n-2)}{n-1}$, lo cual significa que $x_j = n-1$, es decir, está conectado a todos los vértices, lo cual hace al grafo conexo. Entonces para este caso ya está demostrado que G es conexo. Ahora, si todos los grados de los vértices son al menos 1, entonces, existe un grado $x_k > \frac{(n-1)(n-2)}{n} = \frac{n^2-3n+2}{n} > n-3$. Por lo tanto $x_k \geq n-2$. Si $x_k = n-1$, el grafo G ya sería conexo ya que ese vértice está unido con todos los otros vértices. Ahora, si $x_k = n-2$, entonces este vértice está unido con todos los demás, menos con un vértice v_j . Como el grado de v_j es al menos 1, entonces está unido con algún vértice que está conectado con el vértice de grado x_k , lo cual haría al grafo conexo. Con esto queda concluida la demostración.

b) Un ejemplo de ello es un grafo G de n vértices con $n-1$ vértices de grado $n-2$ y el vértice restante de grado 0. Es decir, es un grafo completo de $n-1$ vértices más un vértice de grado 0.

Ejercicio 1.1.13.

- a) Pruebe que si G es simple y $\delta > \frac{n-2}{2}$, entonces G es conexo.
b) Para n par, encuentre un grafo no conexo y que sea $\frac{n-2}{2}$ -regular

Solución.

a) Sean u y v dos vértices cualesquiera del grafo, y sean C_u y C_v el cardinal del conjunto de vértices a los que está unido u y v respectivamente. Por condición del problema, $C_u > \delta$ y $C_v > \delta$. Si sumamos estas 2 ecuaciones obtenemos que $C_u + C_v > 2\delta$, agregándole los vértices iniciales obtenemos que $C_u + C_v + 2 > 2\delta + 2 > n$, de lo cual concluimos que $C_u + C_v + 2 > n$. Sin embargo, podemos notar que si existiera algún vértice que esté unido a los vértices u y v , entonces existiría un camino entre u y v , por lo que este caso ya está resuelto, el otro caso es que los conjuntos de vértices de u y v sean disjuntos, por lo que $C_u + C_v \leq n-2$ (sin contar a u y v), lo cual sería una contradicción por la desigualdad obtenida pasos atrás. Por lo tanto G siempre es conexo.

b) Si $n = 2k$, un ejemplo del grafo G podría ser que esté conformado por 2 sub-grafos disjuntos que sean k -clique. Esto garantiza que todos los grados sean $k-1$ y que no sea conexo ya que no hay forma de unir 2 vértices de un sub-grafo a otro.

Ejercicio 1.1.20.

Sea S un conjunto de n puntos en el plano tales que las distancias entre cualesquiera dos de ellos es al menos 1. Pruebe que existen a lo mucho $3n$ pares de vértices cuya distancia es exactamente 1.

Solución.

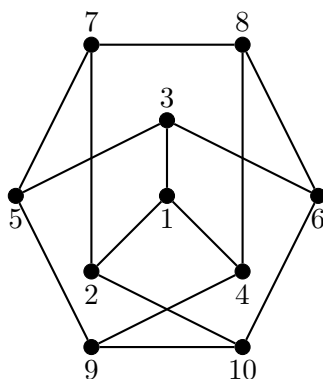
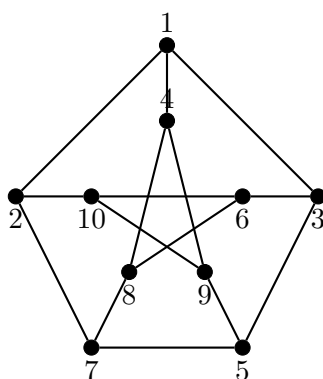
Demostraremos que cada vertice v de S tiene a lo mucho otros 6 puntos del conjunto cuya distancia es exactamente 1. Para ello vamos a suponer por contradicción que existe un vertice x tal que tiene al menos 7 puntos con distancia exactamente 1. Es claro que no existe un par entre ellos que sean colineales con x . Por el principio de casillas, existe un par de vertices a y b tales que el angulo axb es a lo mucho $\frac{360}{7}$, cuyo valor es menor a 60 grados. Por ley de cosenos, la distancia entre a y b es menor a 1, lo cual es una contradicción, lo cual demuestra el lema. Ahora, consideremos una arista entre 2 vertices si su distancia es exactamente 1. Hemos demostrado que el grado de cada vertice es a lo mucho 6. Si hacemos una sumatoria de los grados en todos los vertices obtendremos que la cantidad de aristas es a lo mucho $\frac{6n}{2} = 3n$, lo cual demuestra el problema.

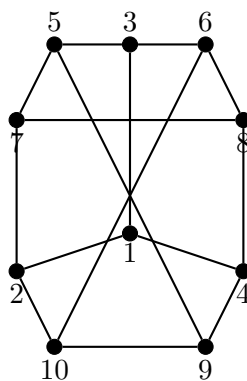
Ejercicio 1.2.5.

Pruebe que los tres grafos de Petersen son isomorfos:

Solución.

A continuación se mostrarán los grafos con los vertices enumerados, donde 2 vertices con el mismo numero indican una correspondencia entre tales vertices de los grafos.





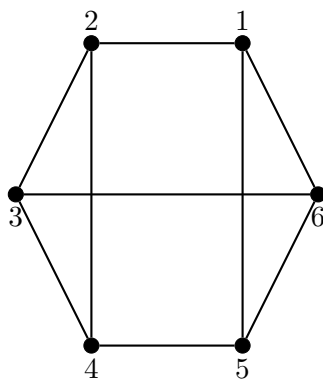
Ejercicio 1.2.17.

Un gráfico simple es transitivo respecto a las aristas si, para dos aristas cualesquiera uv y xy , existe un automorfismo tal que $(u)(v) = xy$.

- Encuentre una gráfica que sea transitiva por vértices pero no transitiva por aristas.
- Demuestre que cualquier grafo sin vértices aislados que sea transitivo por aristas pero no vértice-transitivo es bipartito.

Solución.

- Un ejemplo es el siguiente:



Es claro que este grafo es simétrico respecto a sus vertices ya que los vértices 1, 5, 6 y 2, 3, 4 son simétricos entre sí y además podemos ver que los vértices 1 y 2 también son simétricos. Ahora, si consideramos los pares 16 y 36, notamos que no puede existir un automorfismo tal que $(1)(6) = 36$, ya que 16 pertenece a un triángulo, mientras que 36 no.

- Dividiremos el grafo en sus componentes conexas. Analizaremos sin pérdida de generalidad una componente de ellas.

Supongamos que tal componente tenga un ciclo de longitud impar. Entonces, sean $x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}$ los vértices de tal ciclo. Como el grafo es transitivo por aristas, se cumple que existe un automorfismo entre x_i, x_{i+1} y x_i, x_{i-1} , lo cual demuestra que existe un automorfismo entre los

vértices x_{i-1} y x_{i+1} . Como la longitud del ciclo es impar, se cumple que todos los vértices de tal ciclo son simétricos. Entonces, a partir de uno de esos vértices, podemos hacer un recorrido BFS, de modo que la simetría de los vértices del ciclo se propague en todos los vértices de la componente, haciendo que esta sea simétrica en vértices. Ahora, respecto a las componentes restantes, escogemos la arista x_1, x_2 de la 1ra componente y una arista cualquiera ab de alguna otra componente. Como existe un automorfismo que matchea esas aristas, se debe cumplir que ab debe pertenecer a algún ciclo de longitud impar, lo cual demuestra que todas las componentes tienen un ciclo de longitud impar. Por lo tanto, podemos decir que cada componente por separado es simétrica por vértices. Ahora escogamos 2 aristas cualesquiera de distintas componentes, como existe un automorfismo entre tales aristas, se puede deducir que existe un automorfismo por vértices entre ellos. Por lo tanto, todas los vértices de todas las componentes son simétricas entre sí, lo cual es una contradicción por el enunciado del problema. Por lo tanto, el grafo no tiene ningún ciclo de longitud impar, lo cual equivale a ser un grafo bipartito.