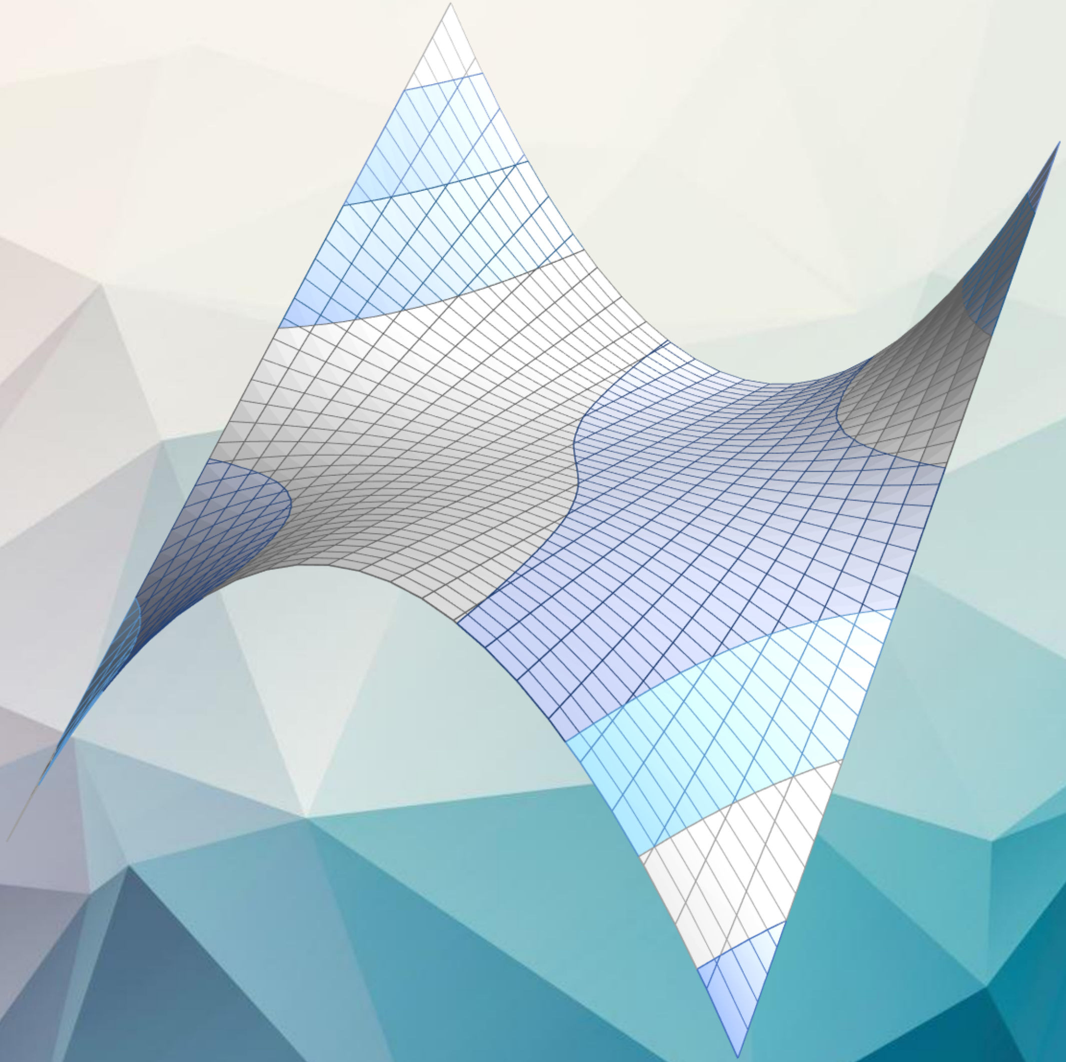
Risk_ Management



UCEMA

Emiliano Delfau PhD. | QUANT 2020

BIO

- Emiliano Delfau: Licenciado en Economía, cuenta con un Magíster en Finanzas con especialización en Mercado de Capitales de la Universidad Torquato Di Tella y también un Doctorado en Finanzas en la UCEMA.

- Más de 17 años de experiencia en el ámbito de Administración y Gestión de Riesgos en entidades financieras y también se desempeña como docente en carreras de posgrado en la Universidad Austral y la UCEMA.

- Especialidad es el diseño y programación de métodos computacionales bajo paquetes estadísticos como Python, R y similares, principalmente en el ámbito de ingeniería financiera y Analytics.

- EMAIL: **emiliano_delfau@hotmail.com**

TEMARIO

Introducción

- Caso Práctico
- Definición de Riesgo e Incertidumbre

Riesgo de Mercado

- Introducción
- Incertidumbre, volatilidad y correlación
- Características del VaR

Evaluación de Riesgos

- Bancos vs Portfolio Management
- Cuantil como métrica de riesgo

VaR Definición

- Definición matemática
- Significancia
- *Holding period*

VaR Factores de Riesgo

- Modelo de único factor: OLS y EWMA
- Descomposición de riesgos
- Modelo de factores múltiples

Proyectos

- Programación en Python y Casos de Estudio.

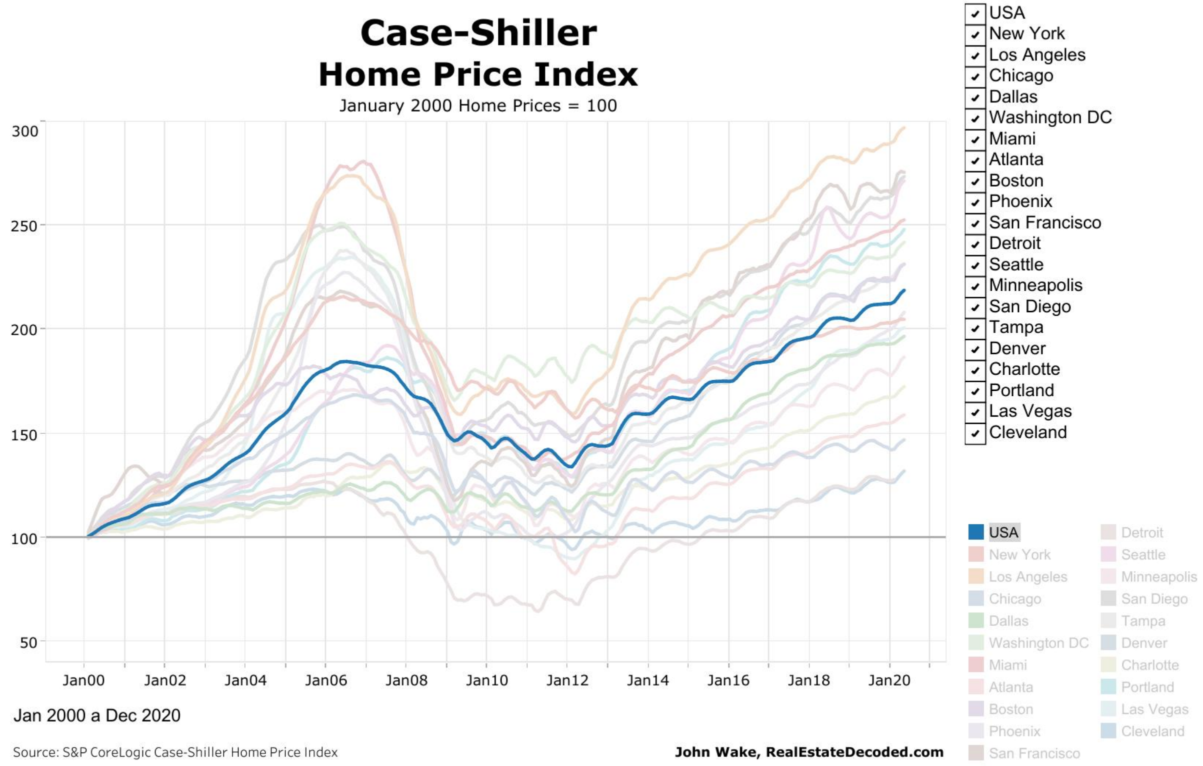
INTRODUCCIÓN

- La ***gestión del riesgo financiero*** es una disciplina relativamente nueva.
- Está impulsada por la necesidad de ***rendimientos óptimos sobre el capital basado en el riesgo*** y, en última instancia, por la ***supervivencia*** de la empresa.
- *Drivers* externos incluyen: ***clientes***, que generalmente son reacios al riesgo, y ***reguladores*** de la industria, cuyos objetivos son proteger a los inversores y promover la competencia, aunque su principal preocupación es la estabilidad financiera en la economía global.
- En los últimos años, la ***volatilidad del mercado ha aumentado*** a medida que la negociación se centra en instrumentos cada vez más complejos cuyos riesgos son extremadamente difíciles de evaluar.

EJEMPLO: EL GRAN TSUNAMI

Un fracaso catastrófico de la predicción

- 23 de octubre de 2008: mercado de valores estaba en caída libre (casi un 30% en las últimas cinco semanas).
- Lehman Brothers había ido a la quiebra, mercados de crédito habían dejado de funcionar.
- Las casas en Las Vegas, por ejemplo, habían perdido el 40 por ciento de su valor.
- El desempleo se estaba disparando.
- La confianza en el gobierno fue la más baja que los encuestadores habían medido nunca.
- El Comité de Supervisión de la Cámara de Representantes había convocado a S&P, Moody's y Fitch Ratings, para que testificaran (imagen de castigos).



https://realestatedecoded.com/case-shiller/

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don't / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- Las agencias de calificación habían otorgado un AAA (nota usualmente reservada para un pequeño grupo de gobiernos/empresas más solventes del mundo) a miles de valores respaldados por hipotecas cuya probabilidad de *default* a 5 años era 0,12%, aproximadamente 1 cada 850.
- Realidad: alrededor del 28% de los CDOs-AAA incumplieron, de acuerdo con las cifras internas de S&P.
- Modelo: las agencias de calificación no tenían un historial en absoluto de los CDO: estos eran valores nuevos y altamente novedosos, y las tasas de *default* estimadas por S&P no se derivaron de datos históricos, sino que se basaron en los supuestos de un modelo estadístico (defectuoso).
- Magnitud del error: los CDO-AAA tenían 200 veces más probabilidades de *default* en la práctica que en teoría.

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don't / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- Los CDOs son “canastas” de deudas hipotecarias que se dividen en diferentes grupos, o "tramos", algunos de los cuales se supone que son bastante riesgosos y otros que están calificados como casi completamente seguros.
- Imaginemos que tenemos un conjunto de cinco hipotecas, cada una de las cuales asume que tiene un 5% probabilidad de *default*.
- Podemos crear una serie de apuestas basadas en el estado de estas hipotecas, cada una de las cuales es progresivamente más alta.
- La más segura de estas apuestas, lo que llamaré el **Alpha Pool**, se paga a *menos* que las cinco hipotecas entren en *default*. El más arriesgado, el **Epsilon Pool**, no paga si *cualquiera* de las cinco hipotecas entren en *default*.

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

❖ Ordenando: el **Alpha Pool** consta de cinco hipotecas, cada una de las cuales tiene solo un 5% de PD. Pierdes la apuesta sólo si los cinco realmente no cumplen.

❖ ***¿Cuál es el riesgo de que eso suceda?***

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don't / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- En realidad, esa no es una pregunta fácil, y ahí está el problema. *Las suposiciones y aproximaciones que elija producirán respuestas profundamente diferentes*. Si hacemos suposiciones incorrectas, el modelo puede estar extraordinariamente equivocado.
- Una suposición es que cada hipoteca es ***independiente*** de las demás. En este escenario, nuestro riesgo está bien ***diversificados***, ejemplo: si un carpintero en Cleveland incumple con su hipoteca, esto no tendrá relación con un dentista en Denver si entra en *default*. En este ejemplo, el riesgo de perder "la apuesta" sería bajo, el equivalente a sacar doble "uno" en una tirada de dos dados 5 veces seguidas. Específicamente, sería un 5% llevado a la quinta potencia, que es solo una oportunidad en 3,200,000 (0.00003%).
- Este supuesto "milagro" de la diversificación es cómo las agencias de calificación aseguraron que un grupo de hipotecas de alto riesgo que solo tenían una calificación crediticia B+ en promedio (que normalmente implicaría más de un 20% de PD) y casi no tenían posibilidad de incumplimiento cuando se juntaban.

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don't / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- El otro extremo es asumir que las hipotecas, en lugar de ser completamente ***independientes*** entre sí, se comportarán exactamente igual. Es decir, las cinco hipotecas entran en *default* o ninguna lo hará.
- En lugar de tener cinco tiradas separadas de dados, ahora estamos apostando por el resultado de sólo uno.
- Hay un 5% de posibilidades de obtener un “doble 1” y todas las hipotecas entran en *default*, haciendo que tu apuesta sea 160,000 veces más riesgosa de lo que pensabas originalmente (de 0.00003% a 5%).

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- ¿Cuál de estos supuestos es más válido?

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

Qué salió mal ?

- Dependerá de las condiciones económicas. Si la economía y el mercado de la vivienda son saludables, podríamos decir que las cinco hipotecas no tienen nada que ver entre sí, y ser una aproximación razonable. Los *defaults* sucederán de vez en cuando debido eventos desafortunados (alguien recibe una factura médica enorme o pierden su trabajo, etc.). Sin embargo, el riesgo predeterminado de una persona no tendrá mucho que ver con el de otra.
- Pero supongamos, en cambio, que hay ***algún factor común que vincula el destino de estos propietarios***. Por ejemplo: hay una burbuja inmobiliaria masiva que ha provocado que los precios de las viviendas aumenten en un 80% sin ninguna mejora tangible en los fundamentos. Ahora tenemos un problema: si un prestatario incumple, el resto podría sucumbir a los mismos problemas. El riesgo de perder su apuesta ha aumentado...

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

- El último escenario fue el que surgió en los Estados Unidos a partir de 2007.
- Moody's, por ejemplo, pasó por un período de ajustes *ad hoc* en su modelo en el que aumentó la probabilidad de *default* asignada a los valores con calificación AAA en un 50%. Eso podría parecer a priori una actitud muy prudente: ¿seguramente un 50% de amortiguación será suficiente para explicar cualquier holgura en los supuestos?
- Podría haber estado bien si el potencial de error en sus pronósticos hubiera sido lineal y aritmético. Pero el apalancamiento, o las inversiones financiadas por deuda, muchas veces introduce potencialmente errores altamente geométricos y no lineales.
- El ajuste del 50% de Moody ***fue como aplicar protector solar y afirmar que lo protegía de una fusión nuclear***, totalmente inadecuado para la magnitud del problema.
- No era solo una posibilidad de que sus estimaciones de riesgo de incumplimiento pudieran ser 50 por ciento demasiado bajas: podrían haberlo subestimado con la misma facilidad en un 500 por ciento o 5,000 por ciento. En la práctica, los incumplimientos eran doscientas veces más probables de lo que afirmaban las agencias de calificación, lo que significa que su modelo estaba “fuera” en un 20,000% (de aprox 0.12% a 28%).

* Libro: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

EL GRAN TSUNAMI

- **<u>EL RIESGO</u>**, como lo expresó por primera vez el economista Frank H. Knight en 1921, ***es algo a lo que se le puede poner precio***. Digamos que ganarás una mano de póker a menos que tu oponente se acerque a una escalera interior: las posibilidades de que eso ocurra son exactamente 1 oportunidad en 11. No es agradable cuando recibes un “golpe” en póker, pero al menos conoces las probabilidades y puedes dar cuenta de ello con anticipación. A la larga, obtendremos beneficios haciendo loterías arriesgadas con probabilidades bajas.
- **<u>LA INCERTIDUMBRE</u>**, por otro lado, ***es un riesgo difícil de medir***. Es posible que tenga una vaga conciencia de los “riesgos” que acechan por ahí. Incluso podríamos estar muy preocupado por ellos. Pero no tenemos una idea real de cuántos de ellos hay o cuándo podrían “atacar”. Nuestra estimación podría estar fuera por un factor de 100 o por un factor de 1,000. No hay una buena manera de saberlo. Esto es incertidumbre.
- La alquimia que realizaron las agencias de calificación ***fue convertir la incertidumbre en lo que parecía y se sentía como un riesgo***. Tomaron valores altamente novedosos, sujetos a una enorme cantidad de incertidumbre sistémica, y afirmaron la capacidad de cuantificar cuán riesgosos eran. No solo eso, sino que de todas las conclusiones posibles, llegaron a la sorprendente de que estas inversiones estaban casi libres de riesgos.

* <u>Libro</u>: The signal and the noise : why most predictions fail but some don’t / Nate Silver.

RIESGO DE MERCADO

- Una *métrica* de riesgo de mercado es ***una medida de la incertidumbre en el valor futuro de una cartera, es decir, una medida de la incertidumbre en el rendimiento o ganancia y pérdida (P&L) de la cartera***.
- Para determinar la dispersión del rendimiento de una cartera o de pérdidas y ganancias, necesitamos conocer el potencial de variación de los precios de los activos individuales y la dependencia entre los movimientos de los diferentes precios de los activos.
- La ***volatilidad*** y la ***correlación*** son métricas de riesgo de cartera, pero solo son suficientes (en el sentido de que estas métricas por sí solas definen la forma del rendimiento de una cartera o la distribución de pérdidas y ganancias) ***cuando los activos o factores de riesgo tienen una distribución normal multivariante***. Cuando estos rendimientos no son multivariados normales (o multivariantes Student-t) es inapropiado y engañoso utilizar la volatilidad y la correlación para resumir la incertidumbre en el valor futuro de una cartera.

RIESGO DE MERCADO

- Siguiendo el ejemplo de los reguladores y los grandes bancos internacionales a mediados de la década de 1990, casi todas las instituciones financieras ahora utilizan alguna forma de valor en riesgo (VaR) como medida de riesgo.
- Esta adopción casi universal de VaR ha provocado debate. Muchos *quants* y académicos argumentan en contra porque no es necesariamente sub-aditiva, lo que contradice el principio de la diversificación y, por lo tanto, también los fundamentos de la teoría moderna de carteras.
- Tenemos una métrica estrechamente asociada, el ***VaR condicional***, o lo que prefiero llamar la ***pérdida de cola esperada*** (ETL por sus siglas en inglés *expected tail loss*) que es sub-aditiva. Es simple estimar una vez que hemos desarrollado un modelo VaR, entonces, ¿por qué no usar ETL en lugar de VaR? (ver libro de Szegö - 2004).

RIESGO DE MERCADO

Las características atractivas de VaR como métrica de riesgo son las siguientes:

- ✓ Corresponde a un “monto” que podría perderse con alguna probabilidad elegida.
- ✓ Mide el riesgo de los ***factores de riesgo***, así como las ***sensibilidades de los factores de riesgo***.
- ✓ Se puede comparar en diferentes mercados y diferentes exposiciones.
- ✓ Es una métrica universal que se aplica a todas las actividades y a todos los tipos de riesgo.
- ✓ Cuando se agrega (VaR total de carteras) o se desagrega (para aislar los riesgos de los componentes correspondientes a diferentes tipos de factores de riesgo) tiene en cuenta las dependencias entre los activos o las carteras constituyentes.

RIESGO DE MERCADO

- La evaluación de VaR suele ser más compleja que la evaluación de métricas de riesgo tradicionales, porque *depende de la distribución multivariada de retorno del factor de riesgo y de la dinámica de esta distribución*, así como del *mapeo de factores de riesgo de la cartera*.
- Aunque VaR y sus medidas relacionadas, como ETL y *benchmark-VaR* se han adoptado recientemente de manera casi universal, la evolución de la evaluación de riesgos en la industria financiera se ha basado en varias métricas de riesgo tradicionales que se siguen utilizando junto con VaR.
- En términos generales, algunas métricas de riesgo tradicionales sólo miden la *sensibilidad a un factor de riesgo*, ignorando el *riesgo del factor en sí*. Por ejemplo, la ***beta*** de una cartera de acciones o el ***delta*** y ***gamma*** de una cartera de opciones son ejemplos de ***sensibilidades de precios***.

EVALUACIÓN DE RIESGOS: BANCOS vs PORTFOLIO MANAGEMENT

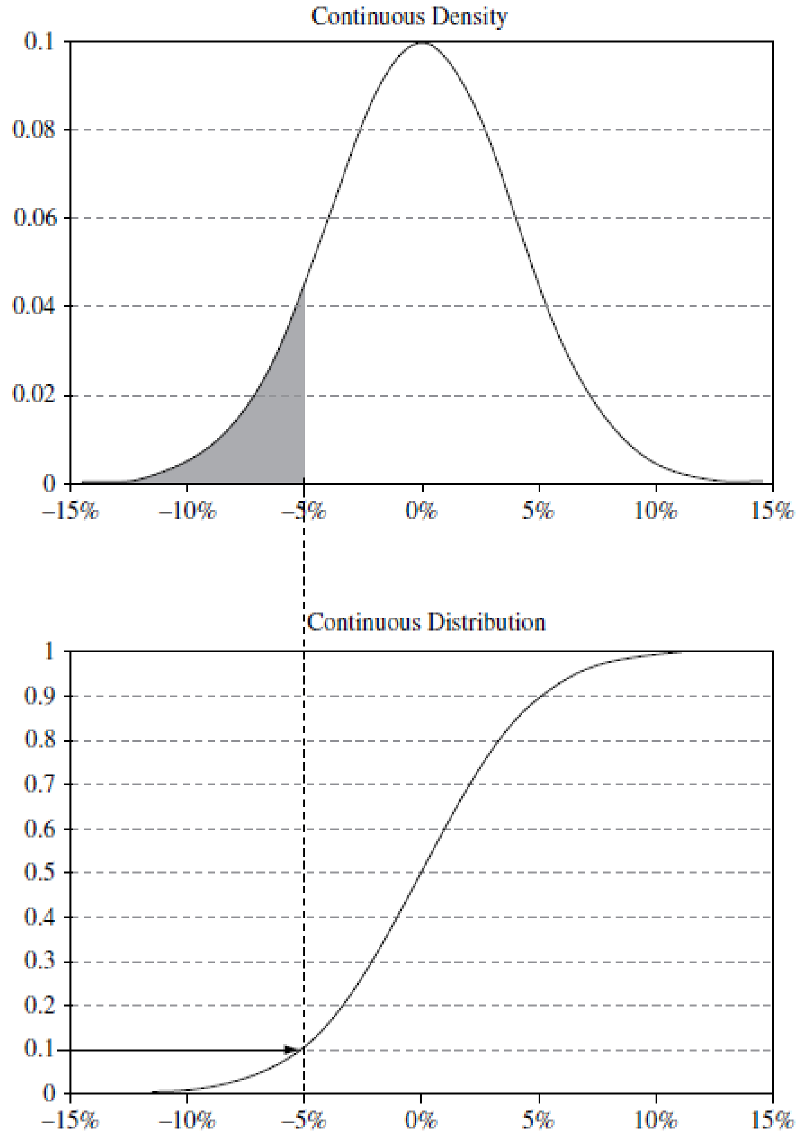
- Las métricas utilizadas para evaluar los riesgos del mercado han evolucionado por separado en la banca, la gestión de carteras.

- **Bancos**: Una decisión importante para los bancos es si mantener el riesgo o cubrir al menos parte de él. Para esto, el administrador de riesgos primero debe poder medir el riesgo. A menudo, los riesgos de mercado se miden en el muy corto plazo, y en un corto plazo se asume que el rendimiento esperado de un activo financiero es la tasa de rendimiento libre de riesgo. Por lo tanto, modelar el rendimiento esperado no entra en escena. Más bien, el ***riesgo está asociado con el rendimiento inesperado*** (desviación del retorno respecto de su valor esperado).

- **Portfolio Management**: No están regulados como los Bancos, sólo tienen la responsabilidad de informar los riesgos a los clientes. Usualmente siguen un *benchmark*. El horizonte de riesgo sobre el cual el riesgo se evalúa es mayor, los bancos utilizan frecuencia diaria mientras que los fondos es mensual o mayor.

CUANTIL COMO MÉTRICA DE RIESGO

- Cualquier valor x de X corta la distribución de X en dos partes: la parte que se encuentra a la izquierda/derecha de x.
- Cuando el área debajo función a la izquierda de x es α, el área bajo de la densidad a la función es $(1-\alpha)$. **Llamamos a x *el cuantil α de la distribución***.
- Formalmente x_α es el cuantil α de X si $\mathrm{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$.
- El cuantil α de una variable aleatoria continua es el valor x_α de X que corta un área determinada α a la izquierda de la función de densidad.
- En esta figura, el cuantil 0.1 está en −5%, lo que significa que:
- $\mathrm{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$ entonces: $\mathrm{P}(X \leq -5\%) = 0.1$
- Algunos cuantiles tienen nombres específicos como “cuartiles” (0.25, 0.50 y 0.75) y los cuantiles 0.01, 0.02,…., 0.99 se llaman “percentiles” (el primero se llama 1er percentil).



CUANTIL COMO MÉTRICA DE RIESGO

- Para una distribución que surge a partir de una variable aleatoria continua *X*, ***el cuantil α*** (entre 0 y 1) es un número real x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \alpha$$

- Cuando una variable aleatoria X tiene una función de distribución conocida $F(x)$, ***podemos encontrar los cuantiles de X invirtiendo esta función de distribución***:

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

- Por ejemplo, el cuantil inferior de X del 5% es $F^{-1}(0.05)$ y este punto corta el 5% del área (inferior) de la distribución.
- Es decir: $P(X < F^{-1}(0.05)) = 5\%$
- Más generalmente: : $P(X < F^{-1}(\alpha)) = \alpha$
- Si tenemos un rendimiento objetivo como cuantil α de una distribución de retornos, la probabilidad de un rendimiento inferior al objetivo es α. Por ejemplo, el cuantil del 5% de una distribución de retornos de −3% establece que tenemos un 95% de confianza en que el rendimiento no será inferior al −3%.

```
# Quantile
print(round(norm.ppf(0.025),4)) # Excel: DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,025)
-1.96
print(round(norm.cdf(-1.96),4)) # Excel: DISTR.NORM.ESTAND.N(J5;VERDADERO)
0.25
# Equivalent
print(round(norm.cdf(norm.ppf(0.025)),4))
0.25
```

CUANTIL COMO MÉTRICA DE RIESGO

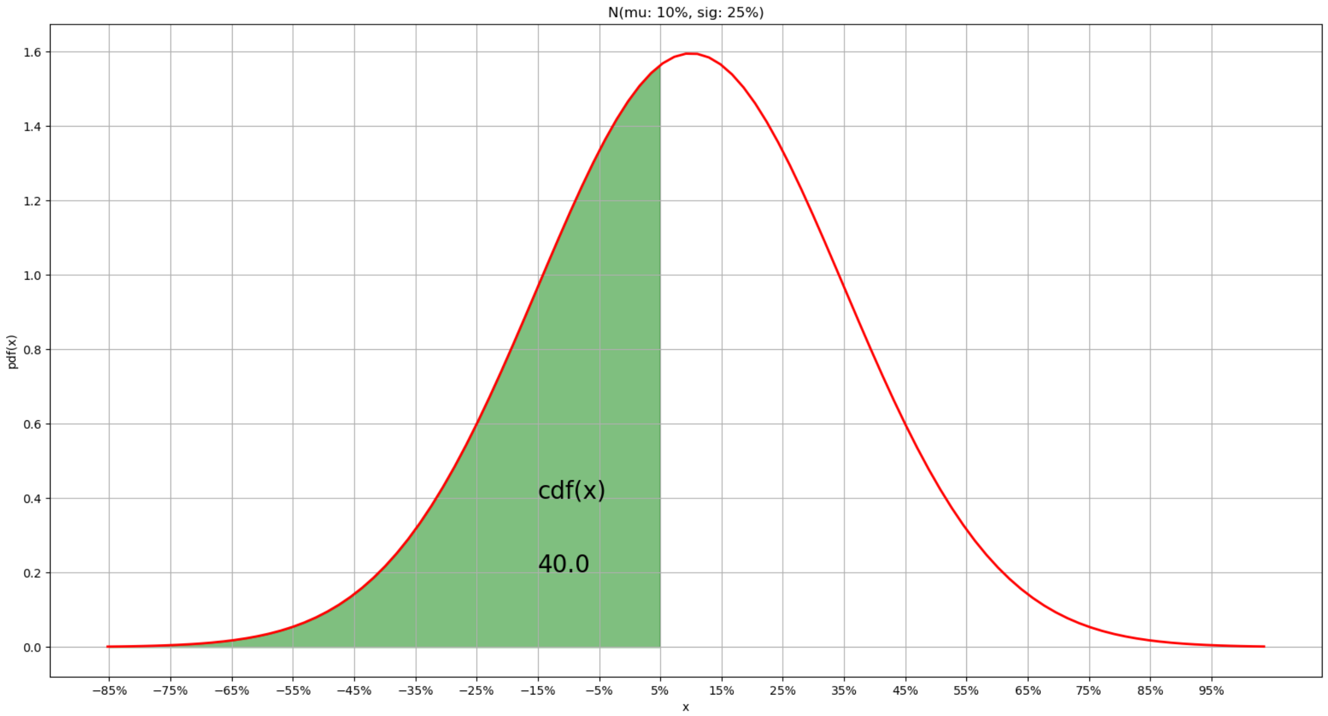
- El siguiente ejemplo considera un retorno que se supone es i.i.d. normal, con media μ y desviación estándar σ. Entonces, para cualquier $\alpha \in (0,1)$ aplicando la transformación normal estándar se obtiene:

$$P(X < x_\alpha) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

- Donde Z es una variable normal estándar.
- Por ejemplo, si tenemos un retorno que se distribuye normalmente con una media de 10% y desviación estándar del 25%, entonces la probabilidad de obtener un retorno menor del 5% es del 42%, porque:

$$P(X < x_\alpha) = P\left(\frac{X - 10\%}{25\%} < \frac{5\% - 10\%}{25\%}\right)$$

$$= P(Z < -20\%) = 42\%$$

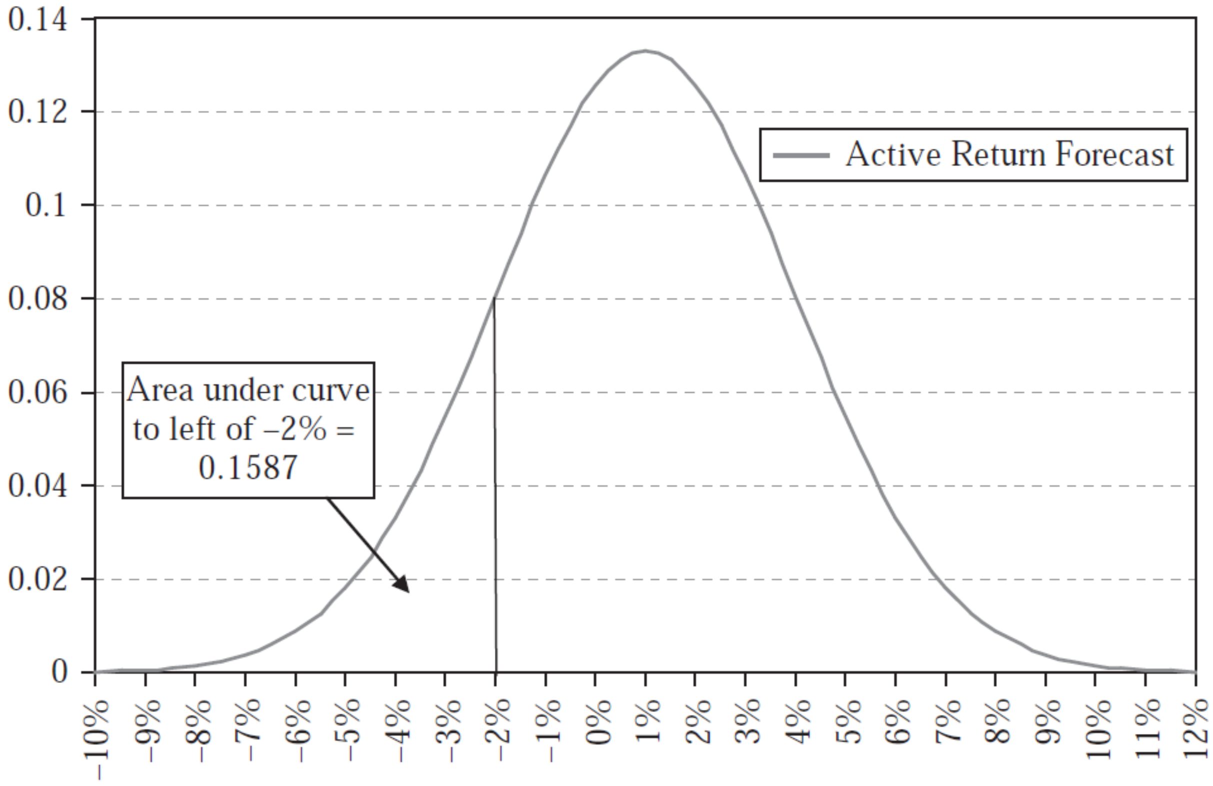


CUANTIL COMO MÉTRICA DE RIESGO

- ***Ejemplo: probabilidad de obtener un desempeño menor al benchmark***: Consideremos un fondo cuyos rendimientos futuros se distribuyen normalmente, con un rendimiento activo esperado durante el próximo año del 1% y una desviación estándar sobre este rendimiento activo esperado (*tracking error* o error de seguimiento) del 3%.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un rendimiento inferior al *benchmark,* por ejemplo de -2% o más durante el próximo año?

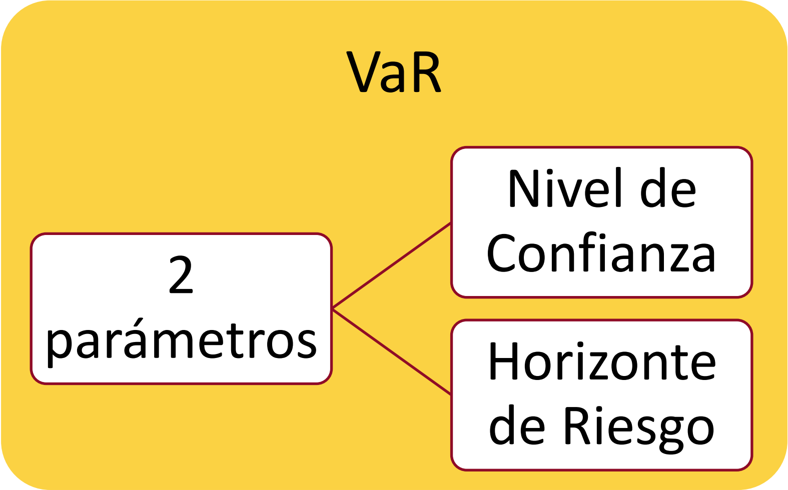
CUANTIL COMO MÉTRICA DE RIESGO

$$P(X < -2\%) = P\left(\frac{X - 1\%}{3\%} < \frac{-2\% - 1\%}{3\%}\right) = P(Z < -1) = 15{,}87\%$$



VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN

- El VaR es una ***pérdida*** que estamos ***bastante seguros*** de que no se ***superará*** si la ***cartera actual se mantiene durante un período de tiempo***.
- En esta sección asumiremos que el VaR se mide a nivel de cartera, ***sin considerar la asignación de las carteras a sus factores de riesgo***.



VaR (VALOR A RIESGO): DEFINICIÓN

- El nivel de significancia $\boldsymbol{\alpha}$ (o nivel de confianza $\boldsymbol{1 - \alpha}$). Usualmente es 1% y 99% respectivamente;
- El horizonte de riesgo, denotado ***h***, que es el período de tiempo, medido tradicionalmente en *días de negociación* en lugar de días calendario, durante el cual se mide el VaR.
- Basilea utiliza 10 días.
- Para gestión puede ser entre 1 y 3 días aprox.

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN

- ❖ VaR asume que las posiciones actuales permanecerán estáticas en el horizonte de riesgo elegido, y que ***sólo evaluamos la incertidumbre sobre el valor de estas posiciones*** al final del horizonte de riesgo.
- ❖ Asumir que una cartera se mantiene estática significa que ***vamos a evaluar la incertidumbre del P&L no realizado o teórico***, es decir, los P&L basados en una cartera estática.
- ❖ Sin embargo, ***los P&L realizados o reales representan el ajuste en las posiciones***, así como los costos de todas las transacciones que se realizan en la práctica.
- ❖ Para que el P&L tenga sentido hoy, cualquier valor de cartera que pueda realizarse dentro de los días de negociación en el futuro requiere un descuento. Es decir, el P&L debe expresarse en términos de valor presente, descontándolo utilizando una tasa libre de riesgo.

$$P\&L_{Discounted\ h-day} = B_{ht}P_{t+h} - P_t$$

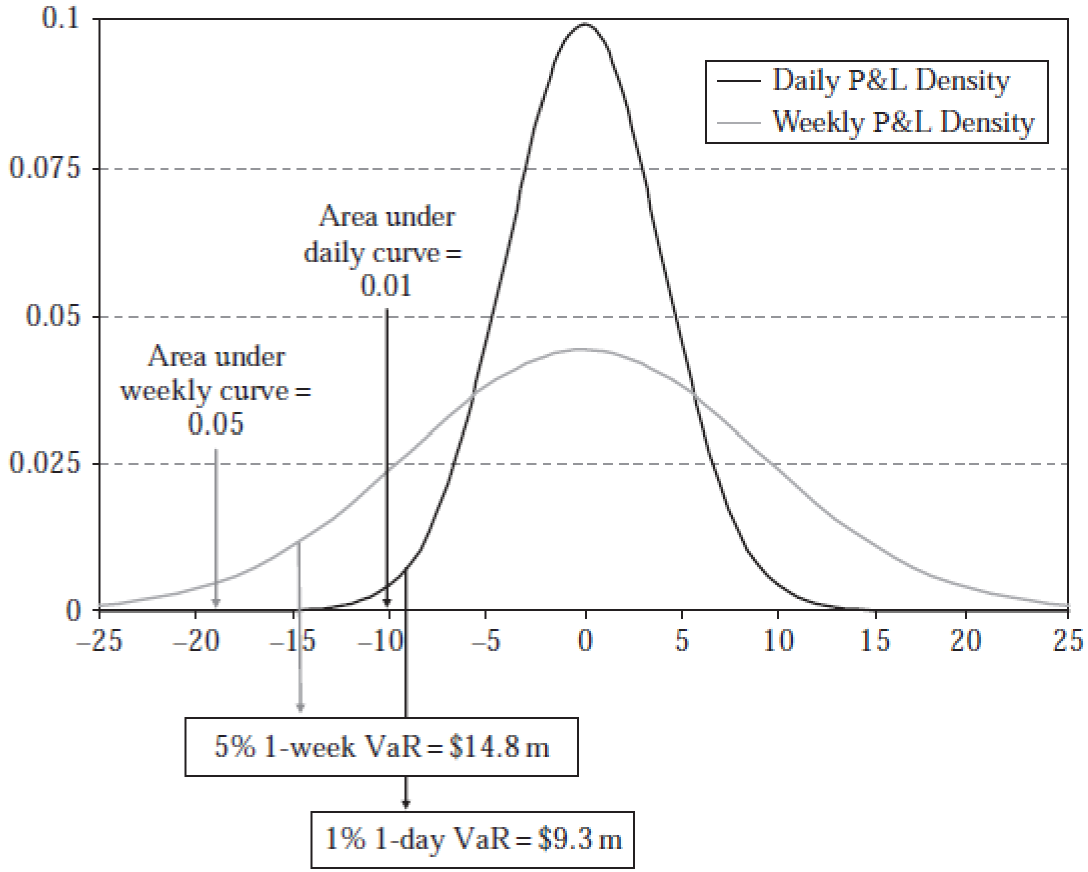
- ❖ Aunque podemos observar el valor de la cartera y el valor del bono de descuento en el tiempo t, el valor de la cartera en el tiempo *t+h* es incierto, por lo tanto, el P&L descontado es una variable aleatoria.

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- No podemos decir nada seguro acerca de las pérdidas y ganancias de una cartera porque es una variable aleatoria, pero podemos asociar un nivel de confianza con cualquier pérdida.
- Por ejemplo, un VaR ***diario*** del 5%, (nivel de confianza del 95%) es un nivel de pérdida que anticipamos experimentar con una frecuencia del 5%, cuando la cartera actual se mantiene durante 24 horas.
- Dicho de otra forma, ***tenemos un 95% de confianza en que el VaR no será superior cuando la cartera se mantenga estática durante 1 día*** o anticipamos que esta cartera perderá el 5% VaR o más un día de cada 20 (al 99% será un día cada 100, etc.).

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- Suponiendo que el retorno esperado de la cartera (la tasa libre de riesgo) o P&L descontado tiene una expectativa cero y que, los retornos se distribuyen normalmente:
- El ***P&L diario*** tiene una desviación estándar de $ 4 millones
- El ***P&L semanal*** tienen una desviación estándar de $ 9 millones.



VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- Por lo tanto, para estimar el VaR al momento ***t*** necesitamos encontrar el cuantil $\boldsymbol{\alpha}$ ($x_{ht,\alpha}$) de la distribución de $P\&L_{h\text{-}day}$. Es decir, debemos encontrar $x_{ht,\alpha}$ tal que:
$$P\left(B_{ht}P_{t+h} - P_t < x_{ht,\alpha}\right) = \alpha$$
- Y establecer el $VaR_{ht,\alpha} = -x_{ht,\alpha}$
- Cuando medimos el VaR desde la distribución de P&L, queda expresado en valor.
- Sin embargo es preferible medir el mismo en términos de rentabilidad, dado que el primero se encuentra medido en términos absolutos no es comparable una potencial pérdida de $ 10 millones cuando el portafolio vale $ 1 millón que cuando vale $ 10 millones.
- Pero cuando tenemos posiciones long/short o cuando los factores de riesgo pueden tomar signos negativos, el concepto de retorno no tiene mucho sentido porque puede ser cero, por lo tanto es mejor medir en términos de P&L.

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

VaR normal lineal (*portfolio level*)

- Sin considerar factores de riesgo y asumiendo que los retornos se distribuyen i.i.d normal:

$$X^{i.i.d} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- Como ya vinos, la fórmula para x_α, el cuantil α del retorno, tal que $P(X < x_\alpha) = \alpha$:

$$P(X < x_\alpha) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right),$$

-
- Donde $Z \sim N(0,1)$. Entonces si: $P(X < x_\alpha) = \alpha$, tenemos:

$$P\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

- Pero por definición: $P(Z < \Phi^{-1}(\alpha)), = \alpha$ entonces: $\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- Pero por definición: $P(Z < \Phi^{-1}(\alpha)), = \alpha$ entonces: $\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$
- Donde Φ corresponde a una función de distribución normal estándar. Por ejemplo $\Phi^{-1}(1\%) = 2.3264$
- Dado que $x_\alpha = -VaR_\alpha$ por definición y que $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ por la simetría de la distribución normal estándar. Reemplazando en la anterior:
$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha) * \sigma - \mu$$
- Considerando el horizonte de riesgo:
$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) * \sigma_h - \mu_h$$

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- Ejemplo: ¿Cuál es el VaR al 10% en un horizonte de 1 año de $ 2 millones invertidos en un fondo cuyos retornos anuales (por encima a la tasa libre de riesgo) que se supone que se distribuyen normalmente, tienen una media del 5% y una volatilidad del 12%?

$$X \sim N(0.05, 0.12^2)$$

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

- Ejemplo: ¿Cuál es el VaR al 10% en un horizonte de 1 año de \$ 2 millones invertidos en un fondo cuyos retornos anuales (por encima a la tasa libre de riesgo) que se supone que se distribuyen normalmente, tienen una media del 5% y una volatilidad del 12%?

$$X \sim N(0.05, 0.12^2)$$

- Como vimos tenemos que encontrar el ***cuantil $\boldsymbol{\alpha}$*** al 10% de los retornos, es decir, la x tal que $P(X < x_\alpha) = 0.1$. Aplicando la transformación normal de la variable X obtenemos:

$$P\left(Z < \frac{x_\alpha - 0.05}{0.12}\right) = 0.1$$

- Dado que si conocemos la distribución podemos establecer $\boldsymbol{x_\alpha = F^{-1}(\alpha)}$, sabemos que $\boldsymbol{F^{-1}(0.1) = -1.2816}$ y $\boldsymbol{P\left(X < F^{-1}(\alpha)\right) = \alpha}$ entonces: $\boldsymbol{P(Z < -1.2816) = 0.1}$ por lo tanto:

$$\frac{x_\alpha - 0.05}{0.12} = -1.2816 = -1.2816 * 0.12 + 0.05 = -0.1038$$

- Por lo tanto el VaR al 10% en un horizonte de un año es $-0.1038 * 2\,millones = 207{,}572$. Es decir, estamos 90% seguros de que no perderemos un monto mayor que este en el próximo año.

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Escalamiento

- Usualmente el VaR de mercado se mide en un horizonte de riesgo a corto plazo, 1 día, y luego se escala para representar el VaR en un horizonte de riesgo más largo.
- ¿Cómo debemos escalar un VaR que se estima en un horizonte de riesgo a un VaR que se mide en un horizonte de riesgo diferente?
- ¿Y qué suposiciones deben hacerse para tal escala?

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Escalamiento

- El VaR se basa en el supuesto de que los retornos son i.i.d. con distribución normal y que la cartera se rebalancea diariamente para mantener constantes los pesos de la cartera.
- Si el VaR se basa en un mapeo de factores de riesgo, es matemáticamente manejable asumir que las sensibilidades de los factores de riesgo son constantes a lo largo del horizonte temporal de análisis y que los retornos de los factores de riesgo son i.i.d. y tienen una distribución normal multivariante.
- Como resultado, los retornos de una cartera lineal serán i.i.d. distribuidos normalmente.

VaR (Valor a Riesgo): DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Escalamiento

- Quitando el sufijo "t" y asumiendo que la tasa libre de riesgo es 0, partiendo de un VaR diario:

$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha) * \sigma_h - \mu_h$$
$$VaR_{1,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha) * \sigma_1 - \mu_1$$

- El retorno: $X_{1t} \approx \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)$. Usamos esta aproximación porque los retornos logarítmicos son aditivos. Es decir, el retorno total en *h-días* es la suma de los h retornos diarios consecutivos.
- Dado que la suma de las variables normales es otra variable normal, los retornos logarítmicos por *h-días* se distribuyen normalmente con media $\mu_h = h\mu_1$ y desvío estándar $\sigma_h = \sqrt{h\sigma_1}$

Date	S&P 500	Daily Log Return	Weekly Log Return	Sum of 5 Daily Log Returns
31-dic-04	1211,92			
3-ene-05	1202,08	-0,0082		
4-ene-05	1188,05	-0,0117		
5-ene-05	1183,74	-0,0036		
6-ene-05	1187,89	0,0035	=LN(7-ene-05/31-dic04)	=SUMA()
7-ene-05	1186,19	-0,0014	-0,0215	-0,0215
10-ene-05	1190,25	0,0034	-0,0099	-0,0099
11-ene-05	1182,99	-0,0061	-0,0043	-0,0043
12-ene-05	1187,7	0,0040	0,0033	0,0033
13-ene-05	1177,45	-0,0087	-0,0088	-0,0088

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- En la práctica, ***las medidas de VaR se basan en un mapeo de factores de riesgo de la cartera***, en cuyo caso el modelo proporciona una estimación del ***VaR sistemático***, también llamado ***total risk factor VaR***. Éste puede ***descomponerse*** en el VaR debido a ***diferentes tipos de factores de riesgo***.

- El ***VaR específico***, también llamado ***VaR residual***, mide el riesgo que no capturado por el mapeo de factores de riesgo.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- El mapeo de factores de riesgo implica la construcción de un modelo que relaciona el rendimiento de la cartera (o P&L) con variaciones en sus factores de riesgo.
- Por ejemplo, un portfolio de acciones internacionales que tiene posiciones en *cash equity* y futuros sobre índices, normalmente consideraríamos variaciones en los siguientes factores de riesgo:
  - Principales índices de acciones de mercado al contado (S&P 500, FTSE 100, CAC 40);
  - Tipos de cambio al contado (forex) (como $ / £, $ / e);
  - Rendimientos de dividendos en cada mercado importante;
  - Tasas LIBOR spot iguales al vencimiento de los futuros en el mercado nacional y
  - Divisas extranjeras (como USD, GBP y EUR).

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- En el modelo de factores de riesgo, los valores de los coeficientes ($\beta's$) sobre las variaciones de los factores de riesgo se denominan ***sensibilidades de la cartera a las variaciones de los factores de riesgo***. Por ejemplo, la cartera de renta variable internacional anterior tiene:
  - Una sensibilidad que se denomina ***beta con respecto a cada uno de los principales índices bursátiles***;
  - Una sensibilidad que es ***igual a 1 respecto a cada tipo de cambio***;
  - Una sensibilidad que se denomina ***PV01* con respecto a cada tipo de interés, o cada rendimiento por dividendo***.

NOTA: el PV01 se mide en términos de valor ($), pero las dos primeras sensibilidades se miden en términos de porcentaje.

- Para convertir las 2 primeras a términos de valor ($) multiplicamos por la cantidad invertida en cada país, en moneda nacional.
- Para convertir el PV01 a términos porcentuales, lo dividimos por la cantidad total invertida en esa cartera que tiene exposición a esa curva de rendimiento.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- **El proceso de *atribución de riesgo* es el mapeo desde el VaR total hacia varios *VaRs de componentes*** correspondientes a diferentes tipos de factores de riesgo.
- La razón por la que los gestores de riesgos asignan a sus portfolios distintos factores de riesgo es debido a que **el análisis de los distintos componentes de riesgo proporciona un marco eficiente para cubrir estos riesgos y para la asignación de capital**.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- Otra razón por la que basamos el VaR en un mapeo de factores de riesgo es que las carteras típicas son demasiado grandes para medir el VaR mapeando todos sus instrumentos.
- Por ejemplo, medir el VaR a nivel de cada activo en una cartera de acciones que contiene 1000 acciones requiere modelar la distribución multivariante de los rendimientos de 1000 acciones. Por lo general, tratamos de resumir esta distribución usando solo la matriz de covarianza de retornos, pero en este ejemplo todavía tendríamos que lidiar con una matriz enorme.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- Solo unas pocas carteras (pequeñas) no requieren un mapeo de factores de riesgo. Por ejemplo, realmente no necesitamos mapear la cartera de un inversor privado que tiene posiciones de efectivo en solo unas pocas acciones, o cualquier otra cartera pequeña que contenga posiciones similares y sencillas.
- Pero las carteras de efectivo pequeñas no son el negocio de las instituciones financieras. Por lo general, la institución manejará decenas de miles de posiciones complejas con exposiciones a cientos de factores de riesgo diferentes. Por lo tanto, incluso medir el VaR a nivel de factor de riesgo es un desafío.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

- Cuando medimos el VaR en carteras que se asignan a factores de riesgo, hay tres fuentes importantes de *riesgo del modelo* en la estimación del VaR:
  - La elección del mapeo de factores de riesgo es subjetiva. Un administrador de riesgos diferente puede elegir un conjunto diferente de factores de riesgo.
  - Las sensibilidades a los factores de riesgo pueden tener errores de estimación. En el caso de las carteras acciones, las sensibilidades a los factores de riesgo, que se denominan *beta* de los factores de riesgo, dependen de un modelo y su estimación está sujeta a errores de muestreo, como hemos visto en la sección.
  - Se ignora el riesgo específico de la cartera. Al medir el VaR con base en un mapeo de factores de riesgo, lo único que capturamos es el VaR sistemático.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

VaR lineal Acciones

- Ejemplo: consideramos el caso de una cartera de acciones (invertido en efectivo) cuyo **exceso de retorno es *Y*** y suponemos que tiene **un sólo factor de riesgo**, como un **índice de mercado**, con un **rendimiento en exceso X**. Entonces, el modelo de factores puede escribirse: $Y = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ (donde α y β son parámetros constantes y ε_t es el retorno específico o residual).
- Suponemos que los retornos en exceso sobre el factor de riesgo X se distribuyen normalmente y que el retorno en exceso esperado durante los próximos h días es μ_h con una desviación estándar de σ_h.
- Entonces, el **retorno en exceso de la cartera debido a los movimientos en el índice de mercado también se distribuirá normalmente, con esperanza $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta\mu_h})$ y desviación estándar $(\boldsymbol{\beta\sigma_h})$**.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

VaR lineal Acciones

- Dado que el α de la cartera es *idiosincrásico, no entra en la parte sistemática del riesgo*; en cambio, *ingresa al componente de riesgo específico (residual) del VaR*.
- Por lo tanto, para medir el VaR sistemático de la cartera, *que aquí se denomina VaR de acciones*, cuyo único factor de riesgo es un índice de acciones, asumimos que el exceso de rendimiento de la cartera se distribuye normalmente con expectativa $\beta\mu_h$ y desviación estándar $\beta\sigma_h$.

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

VaR lineal Acciones

- Entonces $VaR_{h,\alpha} = \beta(\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_h - \mu_h)$ y desviación estándar $\beta\sigma_h$.
- Una cartera con 2 acciones: \$ 1 millón en acción AA con una *beta* de 1.2 y \$ 2 millones se en acción BB con una beta de 0.8 con respecto a un índice de mercado amplio. Cuyo retorno en exceso sobre el índice es i.i.d. y normalmente distribuido con media (esperanza) 5% y volatilidad 20% anual, ¿cuál es el 1% VaR a 10 días de la cartera?

VaR (Valor a Riesgo): RISK FACTOR

VaR lineal Acciones

- Entonces $VaR_{h,\alpha} = \beta(\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_h - \mu_h)$ y desviación estándar $\beta\sigma_h$.
  - ✓ $\beta_\$ = 1M * 1.2 + 2M * 0.8 = 2.8M$
  - ✓ $\mu_{10} = 0.05 * \frac{10}{250} = 0.2\%$
  - ✓ $\sigma_{10} = 0.2 * \frac{10}{250}^{\frac{1}{2}} = 4\%$
- $VaR_{h,\alpha} = 2.8(2.32635 * 4\% - 0.2\%) = \$254{,}951$

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Teoría de la valuación de activos

- Desarrollamos brevemente de manera cronológica la teoría matemáticas respecto a la teoría de la valoración de activos que fue pionera en *William Sharpe* durante la década de 1960.
- La teoría se basa en los siguientes supuestos fundamentales sobre los activos en el universo de inversión y las características de los inversores:
    1. Hay un activo libre de riesgo y hay un mercado ilimitado de préstamos/endeudamiento a la tasa libre de riesgo.
    2. Todos los activos se describen completamente por su rendimiento esperado, la desviación estándar de los rendimientos y la correlación de los rendimientos con los rendimientos de otros activos.
    3. Todos los activos se pueden comprar o vender en cualquier cantidad.
    4. Todos los inversores comparten la misma información.
    5. Todos los inversores son adversos al riesgo en el sentido de que prefieren la cartera con la varianza mínima correspondiente a cualquier nivel de rendimiento dado.
- Primero vamos a mostrar que estos supuestos nos llevan a una cartera de mercado única de activos (riesgosos) que todos los inversores coinciden en que es la cesta óptima. En otras palabras, todos los inversores mantendrán carteras que son una combinación de la cartera de mercado y el activo libre de riesgo (esto a veces se lo llama teorema de separación de Tobin).
- Luego seguimos el desarrollo del modelo de fijación de precios de activos de capital, que introduce el concepto de beta de mercado de un activo, también llamado riesgo sistemático. El modelo implica que los activos sin riesgo sistemático deben ganar la tasa libre de riesgo, y cualquier retorno excedente sobre la tasa libre de riesgo es proporcional al riesgo sistemático. La beta de mercado se deriva de la covarianza del rendimiento de los activos y el rendimiento de la cartera de mercado. Pero la covarianza es solo el primer momento de la distribución conjunta entre los rendimientos. Terminamos esta sección esbozando algunos intentos recientes de extender el concepto de riesgo sistemático para que se base en momentos superiores a la covarianza.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Teoría de la valuación de activos: *Capital Market Line*

- Dada cualquier cartera P, podemos formar otra cartera colocando una proporción w^* de nuestros fondos en P y una proporción $(1-\mathrm{w})$ en el activo libre de riesgo. El rendimiento esperado de la nueva cartera está dado por: $\boldsymbol{\mu = w\mu_p + (1-w)R_f}$
- El nuevo retorno esperado estará en la línea entre P y R_f en un punto determinado por w. La desviación estándar de los retornos de la nueva cartera está dada por $\boldsymbol{\sigma = w\sigma_p}$. Dado que la R_f tiene varianza cero podemos dar vuelta la última en $\boldsymbol{w = \sigma_P^{-1}\sigma}$. Reemplazando esta en la primera nos da:

$$\boldsymbol{\mu = R_f + \sigma_P^{-1}\sigma\,(\mu_p - R_f)}$$

- Lo que es igual a:

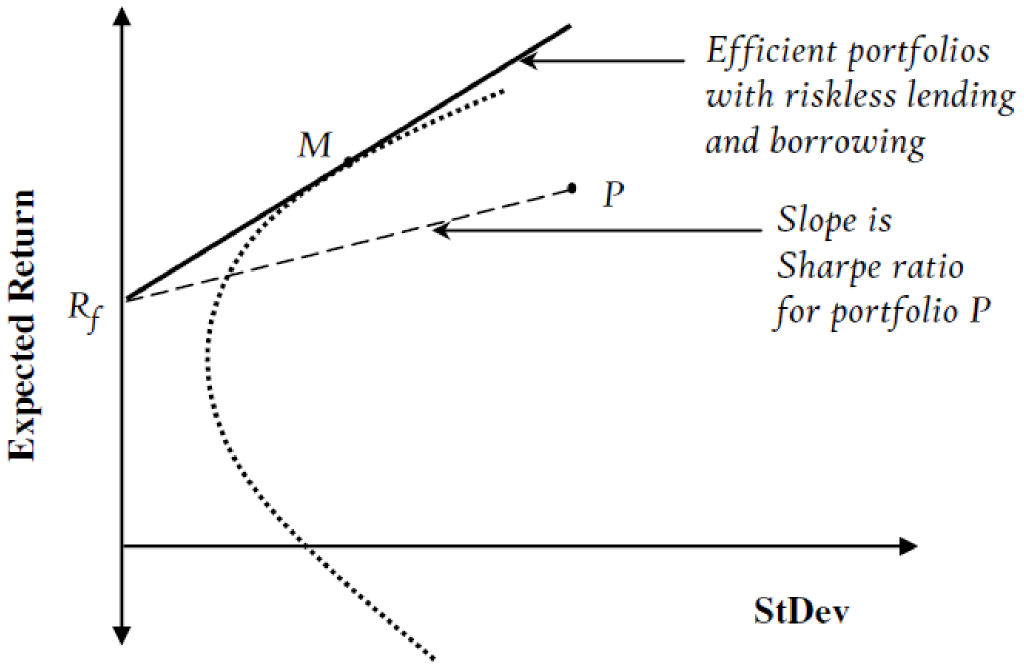
$$\boldsymbol{\mu = R_f + \lambda\sigma}\ ; \quad \boldsymbol{\lambda = \frac{(\mu_p - R_f)}{\sigma_p}}$$

w puede ser mayor que 1 si pedimos prestado a la *tasa libre de riesgo* para invertir más en P de lo que tenemos en nuestros fondos.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Teoría de la valuación de activos: *Capital Market Line*

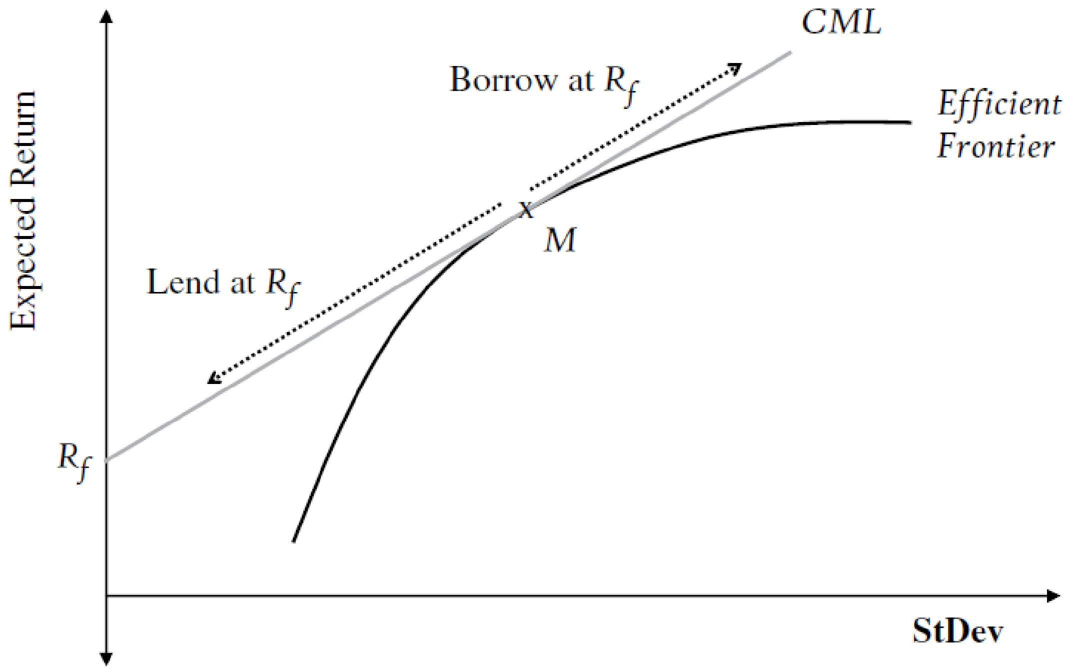
- El λ se lo denomina ratio de Sharpe. El retorno esperado de cualquier cartera nueva que sea una combinación de la cartera P y el activo libre de riesgo está en una línea que pasa por P con una pendiente que corta el eje de rendimientos en R_f.
- La curva punteada es el **conjunto de oportunidades** sin préstamos/endeudamiento a la tasa libre de riesgo.
- La línea negra es la **frontera eficiente** cuando si hay préstamos/endeudamiento a la tasa libre de riesgo.
- Según los cinco supuestos establecidos, cuando no hay préstamos/endeudamiento, todos los inversores acordarán la asignación óptima entre todos los activos de riesgo en M. Esta asignación se denomina ***cartera de mercado*** *(market portfolio)*.



MODELO DE FACTOR ÚNICO

Teoría de la valuación de activos: *Capital Market Line*

- Algunos inversores pueden optar por pedir prestado y otros pueden optar por prestar a la tasa libre de riesgo según sus preferencias, pero **la alocación neta sobre todos los inversores al activo libre de riesgo debe ser cero**. Dado que todos los inversores están de acuerdo en la cartera óptima que contiene solo activos de riesgo, las ponderaciones de la cartera de cada activo de riesgo en la cartera de mercado deben ser proporcionales a su capitalización de mercado.
- Al tomar prestado o prestar a la tasa de interés libre de riesgo, podemos lograr cualquier nivel de riesgo y rendimiento en la CML, es decir, la línea que pasa por la tasa de interés libre de riesgo R_f y la cartera de mercado M
- Las carteras a la izquierda de M son combinaciones de préstamos a la tasa R_f y tenencia M. Las carteras a la derecha son combinaciones de préstamos a la tasa R_f y tenencia M. La cartera real que se elegirá a lo largo de esta línea depende de las preferencias de riesgo del inversor.



Ejercicio: ***Capital Market Line***

- Suponga que la cartera de mercado tiene un rendimiento esperado del 10% con una desviación estándar del 20%. Encuentre la ecuación para la CML si la tasa libre de riesgo es 5%.
- Solución: la intersección de la CML es igual a la tasa de rendimiento libre de riesgo, es decir, 0,05 en este ejemplo, y la pendiente de la CML es la relación de Sharpe para la cartera de mercado, es decir:

$$\lambda = \frac{(\mu_p - R_f)}{\sigma_p} = \frac{(0.1 - 0.05)}{0.2} = 0.25$$

Lo que es igual a:

$$\mu = 0.05 + \lambda 0.25$$

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Modelo de índice único

- El CAPM asume la existencia de una **cartera de mercado** y la **CML** (Markowitz), pero **estos conceptos en sí mismos no nos dicen cómo valorar los activos de riesgo**. **El propósito del CAPM es deducir cómo valorar los activos de riesgo cuando el mercado está en equilibrio.**
- Para derivar el CAPM**, consideramos las condiciones bajo las cuales un activo de riesgo puede agregarse a una cartera ya bien diversificada**. Las condiciones **dependen del riesgo sistemático del activo**, también llamado **riesgo no diversificable** del activo, ya que no se puede diversificar manteniendo una gran cartera de diferentes activos de riesgo. También necesitamos conocer la tasa de rendimiento **libre de riesgo** y el **rendimiento esperado de la cartera de mercado**.
- Con todo lo anterior preguntamos: **dado el riesgo sistemático de un activo, ¿cuál debería ser su "exceso de rendimiento esperado"* para justificar su incorporación a nuestra cartera bien diversificada?**

Exceso de rendimiento esperado: de un activo (o cartera) de riesgo es la diferencia entre el rendimiento esperado del activo (o cartera) y la tasa de rendimiento libre de riesgo.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Modelo de índice único

- El modelo *capital asset pricing model* (CAPM) hipotetiza la siguiente relación entre el exceso de retorno esperado de cualquier activo y el exceso de retorno esperado de la cartera de mercado:

$$E(R_i) - R_f = \beta_i\left(E(R_M) - R_f\right)$$

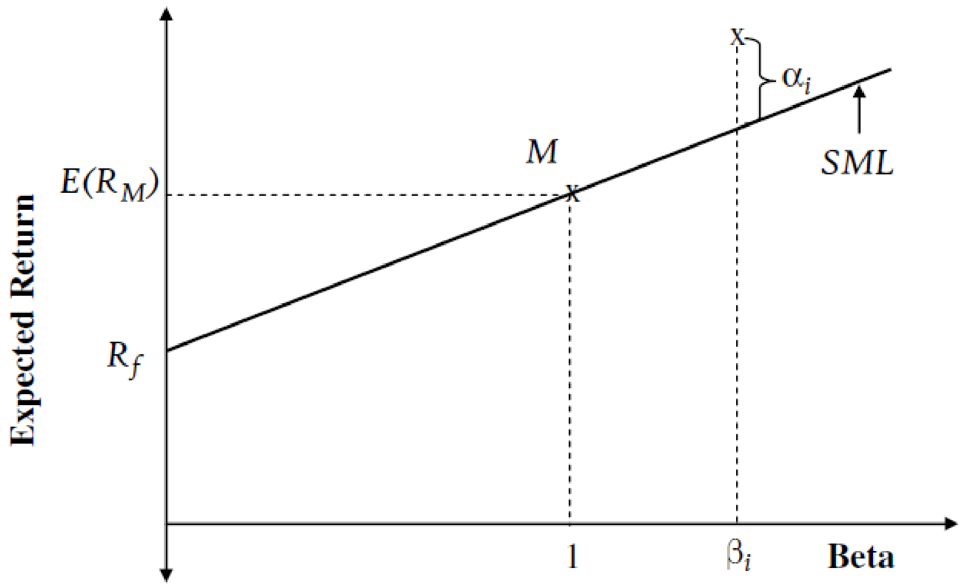
- Donde R_i es el retorno del activo i, R_f es el retorno libre de riesgo, R_M es el retorno de mercado y β_i es el beta del activo i. El CAPM introduce el concepto de ***beta de mercado*** de un activo, también llamado **riesgo sistemático**.
- En equilibrio, el CAPM establece que el "exceso de retorno esperado" del activo i debe ser proporcional al riesgo sistemático del activo,β_i. Esto implica que **los activos sin riesgo sistemático deben ganar la tasa libre de riesgo**, y **cualquier retorno excedente sobre la tasa libre de riesgo es proporcional al riesgo sistemático**.
- El beta de mercado, β_i, se deriva de la covarianza del retorno entre los activos y el mercado. Éste representa **la sensibilidad del rendimiento del activo a los cambios en el rendimiento del mercado**: si el exceso de rendimiento esperado de la cartera de mercado aumenta en un 1%, el exceso de rendimiento esperado del i-ésimo activo de riesgo aumenta en un β_i*%. Entonces, β_i es una medida de riesgo de sensibilidad en relación con el factor de riesgo de mercado.
- El término dentro del paréntesis $\left(E(R_M) - R_f\right)$ se llama **prima de riesgo de mercado**: es el rendimiento adicional que los inversores pueden esperar, por encima de la tasa libre de riesgo, para compensarlos por el riesgo de mantener la cartera de mercado.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Security Market Line (SML)

$$E(R_i) - R_f = \beta_i\left(E(R_M) - R_f\right)$$

- La SML se deriva de la función de CAPM donde $E(R_i)$ se representa en función del *beta* CAPM.
- Pasa por los puntos $(0, R_f)$ y $(1, E(R_M))$ tiene pendiente $E(R_M) - R_f$
- En el modelo de equilibrio CAPM, el rendimiento esperado y el *riesgo sistemático* de todos los activos se encuentran en esta línea.
- Para determinar cuánto rendimiento requerimos para un nivel dado de riesgo sistemático, simplemente leemos el valor del SML correspondiente a este nivel de beta.
- En el modelo de equilibrio del CAPM, ningún activo individual puede tener un rendimiento "anormal" como α por encima, punto "x" (o por debajo) de la tasa libre de riesgo sin asumir ningún riesgo de mercado.
- Si el mercado no está en equilibrio, cualquier activo con un alfa positivo tiene un rendimiento esperado que excede su rendimiento de equilibrio y, por lo tanto, debe comprarse, y cualquier activo con un alfa negativo tiene un rendimiento esperado que está por debajo de su rendimiento de equilibrio, por lo que debe venderse. La presión de compra/venta hacen que las ganancias anormales desaparecerán.



MODELO DE FACTOR ÚNICO

Modelo de índice único CAPM estimación

- El CAPM implica el siguiente modelo lineal para la relación entre rendimientos "ordinarios" en lugar de rendimientos en exceso:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i\big(E(R_M)\big)$$

- Donde $\alpha_i \neq 0$ salvo que $\beta_i = 1$.
- El modelo se basa en la relación de rendimiento esperado en la que el rendimiento "X" de un factor, como un índice de mercado amplio, se utiliza como proxy del rendimiento de la cartera de mercado R_M.
- Así, el modelo de índice único permite investigar las características de riesgo y rendimiento de los activos en relación con el índice de mercado amplio.
- De manera más general, si el rendimiento de una cartera se mide en relación con un *benchmark*, éste se utiliza como el factor X.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Modelo de índice único CAPM estimación

- Podemos expresar el mismo como:

$$E(R_{it}) = \alpha_i + \beta_i X_t + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \sim iid\left(0, \sigma_i^2\right)$$

  - α_i mide el rendimiento esperado del activo en relación con el *benchmark* o índice de mercado. Un valor positivo (negativo) indica un rendimiento esperado superior (inferior) al *benchmark* o iondice;
  - β_i es el ***factor de sensibilidad de riesgo*** del activo;
  - $\beta_i \sigma_X$ es la ***volatilidad sistemática del activo*** y σ_X es la volatilidad de los rendimientos del índice;
  - σ_i es la volatilidad específica del activo.

MODELO DE FACTOR ÚNICO

Modelo de índice único CAPM

- El riesgo no diversificable (sistemático):

$$\beta_i = {cov(r_i, r_m)}/{\sigma^2_{r_m}}$$

$$\rho_{i,m} = {cov(r_i, r_m)}/{\sigma_{r_i}\sigma_{r_m}}$$

Tomando ambas: $\beta_i = {\sigma_{r_i}}/{\sigma_{r_m}} * \rho_{i,m}$