

INGENIOS MATEMÁTICOS PARA LA ARMONÍA MUSICAL

EDGAR ARMANDO DELGADO VEGA

RESUMEN. Proponemos y estudiamos modelos matemáticos para la armonía musical desde un punto de vista simbólico, algebraico y geométrico. Los modelos utilizan la integral de longitud de arco, la derivada, la fórmula de Euler, las raíces de la unidad, el teorema chino del resto y los ciclos eulerianos. Finalmente, reflexionamos sobre el problema de la aguja de Buffon como un proceso para la composición musical algorítmica. Creemos que los problemas e ideas matemáticas a lo largo de la historia pueden servir para impulsar el nexo entre música y matemática en la actualidad.

Palabras Clave: Longitud de arco, Armonía musical, Derivada implícita, Escala musical, Ecuación de la circunferencia, Teorema chino del resto, Fórmula de Euler, Ciclo euleriano, raíces de la unidad, Aguja de Buffon.

ÍNDICE

1. Introducción y Justificación	1
2. Contenidos matemáticos y musicales	2
2.1. Conceptos matemáticos y musicales	2
2.2. Materiales	2
3. Teorema Chino del Resto Musical	3
3.1. Ecuaciones lineales de congruencia	3
3.2. Aplicación de las ecuaciones por congruencia para acordes musicales	3
3.3. Teorema Chino del Resto y protocolo MIDI	4
4. Fórmula de Euler musical	5
5. Las ciudades son acordes y los puentes, progresiones armónicas	6
5.1. Aplicación musical de los grafos	6
6. Longitud de arco de una curva musical	7
6.1. Cálculo Integral para intervalos musicales	8
6.2. Ejemplo musical	8
7. Derivadas implícitas musicales	11
7.1. Interpretación geométrica	11
7.2. Hacia la pendiente de la recta tangente musical	13
7.3. Algoritmo de diferenciación implícita	14
7.4. Aplicación de la derivada sobre el acorde de Si menor	14
8. Música desde las Agujas de Buffon	16
8.1. Aplicación musical para lanzamientos de agujas	16
9. Conclusiones	17
Referencias	17

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La matemática y la música han estado relacionadas desde la antigüedad por medio de los estudios referidos a la física de la cuerda vibrante. A lo largo de la historia han existido una gran cantidad de científicos interesados en la teoría musical. Nombres prominentes como Galileo Galilei, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Johannes

Kepler, Marin Mersenne, Christiaan Huygens, Leonard Euler (tesis doctoral sobre el sonido) han teorizado y escrito sobre la naturaleza de la música (véase [Pap14]).

En la actualidad se han abordado perspectivas más abstractas de la música. Euler con su teoría de grafos para la armonía musical puede ser uno de los casos pioneros en el que la música fue estudiada abstractamente, es decir, desde los símbolos que la representan. Su trabajo dio pie a un nuevo renacer de los estudios de la matemática y música en los siglos XIX y XX, desarrollando una rama de análisis y composición denominada Teoría Neo-Riemanniana [MMP16]. Un hecho histórico contemporáneo para la teoría matemática de la música es el artículo titulado *Motivic rhythms*, escrito por un ganador de la medalla Fields: Alain Connes [Con21].

El presente trabajo pretende mostrar a través de los conceptos matemáticos desarrollados durante el minicurso *Una antología de ingenios matemáticos* organizado por el IMCA e impartido por el Dr. Joe Palacios Baldeón, la manera en que la matemática está presente en el lugar musical. Y, por otro lado, motivar cómo la música puede abrir preguntas y cuestiones matemáticas.

Primero, abordamos el teorema chino del resto y las congruencias puesto que este enfoque permite definir con claridad cómo relacionamos biyectivamente por medio de una función f que va desde las notas musicales, como conjunto, hacia una estructura de anillo de enteros módulo 12. De aquí, se desprenden preguntas interesantes en teoría de números elemental. Nuestra referencia es el clásico libro de Ireland y Rosen [IRR90]. Posteriormente, desarrollamos la fórmula de Euler relacionada al problema de ciclotomía y la transformada discreta de Fourier [Ami09]. Luego, mostramos un ejemplo musical a partir del problema de los puentes de Königsberg.

Subsecuentemente, estudiamos los conceptos base del cálculo diferencial e integral. Nuestro libro de referencia es *Principles of Mathematical Analysis* de Walter Rudin [R⁺76]. Al respecto, es usual que en los libros de texto de cálculo para ingeniería [SCW20, LE10, TWH⁺10] se propongan ejercicios de aplicación relacionados al contenido físico de la música. Sin embargo, la música presenta también una realidad mental en la que se abstraen sus propiedades físicas, como la frecuencia de vibración de las ondas a través de las notas musicales, por ejemplo. Este enfoque geométrico con el que estudiaremos la armonía. Finalmente, reflexionamos sobre un posible modo de usar el proceso experimental sobre el que se basa el problema la Aguja de Buffon para crear música de manera algorítmica.

2. CONTENIDOS MATEMÁTICOS Y MUSICALES

Exponemos una lista no exhaustiva de los conceptos matemáticos y musicales que trataremos en el presente trabajo.

2.1. Conceptos matemáticos y musicales.

- Teorema Chino del Resto, Raíces de la unidad, Grafo Euleriano, escala musical cromática, intervalos musicales
- Longitud de arco, Derivada implícita de una circunferencia, acordes musicales, integrales trigonométricas, progresiones de acordes

2.2. Materiales. Se utilizarán los siguientes materiales y recursos (según posibilidades).

- Instrumento musical: piano, guitarra, flauta, glockenspiel, voz
- Compás, hojas, regla, lápices, partituras, cuadernos pentagramados
- Software Matemático: Geogebra

- Software Musical: Musescore

3. TEOREMA CHINO DEL RESTO MUSICAL

Dado que la escala musical cromática (12 notas) puede representarse como el conjunto de enteros módulo 12 (véase [MMP16]), es natural buscar relaciones armónicas musicales planteando ecuaciones lineales de congruencias. Para desarrollar este trabajo comenzaremos dando la definición matemática de una escala musical.

Definición 1. *La escala musical cromática se asocia biyectivamente con el conjunto de enteros módulo \mathbb{Z}_{12} : $DO \mapsto [0]$, $DO\sharp \mapsto [1]$, $D \mapsto [2]$, $D\sharp \mapsto [3]$, $E \mapsto [4]$, $F \mapsto [5]$, $F\sharp \mapsto [6]$, $G \mapsto [7]$, $G\sharp \mapsto [8]$, $A \mapsto [9]$, $A\sharp \mapsto [10]$, $B \mapsto [11]$.*

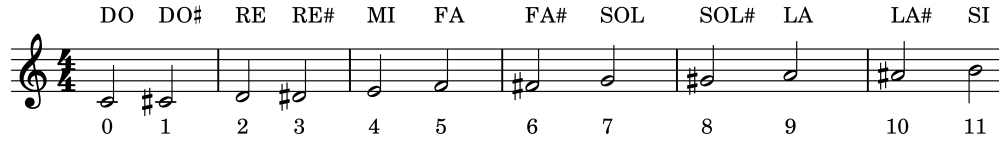


FIGURA 1. Escala cromática asociada al conjunto de enteros módulo 12. Nótese que cada nota es un representante de la clase de equivalencia.

Observe que es interesante pensar la notas musicales como este conjunto modular puesto que las asocia naturalmente con el concepto de relación de equivalencia.

Teorema 1. *La congruencia módulo 12 sobre el conjunto de notas de una escala musical cromática es una relación de equivalencia.*

Demostración. Véase [IRR90, p. 29] □

3.1. Ecuaciones lineales de congruencia. Dados a, b enteros y n un entero positivo, sabemos por Teorema que la ecuación

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

tiene solución si, y sólo si, el máximo común divisor $k = (a, n)$ divide al entero b . Además, la ecuación tiene k soluciones. Estas k -soluciones son el conjunto

$$[x_1]_n, \left[x_1 + \frac{n}{k}\right]_n, \dots, \left[x_1 + (k-1)\left(\frac{n}{k}\right)\right]_n$$

Demostración. Véase [IRR90, p.32]. □

3.2. Aplicación de las ecuaciones por congruencia para acordes musicales. Asumiremos que las ecuaciones lineales de congruencias que planteamos siempre tienen solución. Entonces, buscaremos las soluciones x_i que para el conjunto de acordes musicales tenga una interpretación musical interesante. Recordemos que un acorde musical mayor o menor es un conjunto de tres notas que se tocan de manera simultánea. Veamos el siguiente ejemplo:

$$4x \equiv 8 \pmod{12} \tag{1}$$

tiene $GCD(4, 12) = 4$ soluciones. Enlistemos el valor para cada solución:

$$x_1 = [2],$$

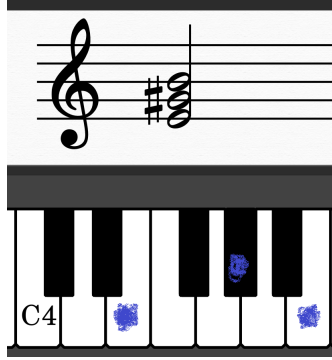


FIGURA 2. Acorde de Mi mayor con su representación en la partitura y el piano. Este acorde es la solución $x_4 = [11]$ a la ecuación de congruencias lineales $4x \equiv 8 \pmod{12}$.

$$x_2 = [5],$$

$$x_3 = [8],$$

$$x_4 = [11].$$

Si pensamos musicalmente, la solución $x_4 = [11]$ es interesante puesto que produce en conjunto con $a = 4$ y $b = 8$ en la Ecuación 1 un acorde de Mi mayor.

Como indagación podremos plantearnos la siguiente pregunta:

¿Qué otros acordes pueden generarse como soluciones a ecuaciones en congruencias lineales?

3.3. Teorema Chino del Resto y protocolo MIDI. En el modo general de resolver sistemas lineales de congruencias que corresponde al Teorema Chino del Resto se presentan complicaciones al modelo. La primera complicación es que al elegir el conjunto de enteros módulo $m = 12$ y $n = 7$, por ejemplo, aunque matemáticamente existe una solución, la interpretación musical de la misma se enmarca más allá de un entorno de enteros módulo 7, o 12, es decir $MCM(6, 7) = 42$, luego de realizar la reducción. Veamos el ejemplo

$$2x \equiv 6 \pmod{12} = x \equiv 3 \pmod{6}$$

$$3x \equiv 5 \pmod{7} = x \equiv 4 \pmod{7}$$

La solución común a ese sistema de dos ecuaciones es

$$X \equiv 39 \pmod{42}.$$

El protocolo MIDI, acrónimo de *Musical Instrument Digital Interface*, es un sistema de comunicación entre diferentes dispositivos musicales. En este protocolo a las notas les corresponde un número; por ejemplo, el Do central del piano es el número 60. Retomando el Teorema Chino del Resto, desde una visión musical podría servir como algoritmo para generar un sonido con equivalencia en notas MIDI, 39 es Re sostenido. Pero, esta asociación entra en conflicto puesto que el conjunto de notas MIDI llega hasta un conjunto de enteros ($m = 127$) no pensados bajo una relación de equivalencia.

4. FÓRMULA DE EULER MUSICAL

La fórmula de Euler, considerada una de las fórmulas más bellas de la ciencia, relaciona la geometría del círculo, el número imaginario i , la identidad multiplicativa, la identidad aditiva, el número trascendental e y el número π :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

En teoría de la música ha sido empleada ampliamente en el contexto de la Transformada Discreta de Fourier (véase [Ami09]). Esta relación surge a partir del isomorfismo entre los enteros módulo 12 y las raíces de la unidad, o raíces de la ecuación $X^{12} - 1$. En el artículo del 2020 *High-dimensional representations of groups in music theory* (véase https://archive.org/details/highrepresentationmusictheory_202101/) escribí respecto a que las notas musicales son, en efecto raíces, de la unidad; visión descrita anteriormente con polinomios en los estudios de cánones y teselaciones.

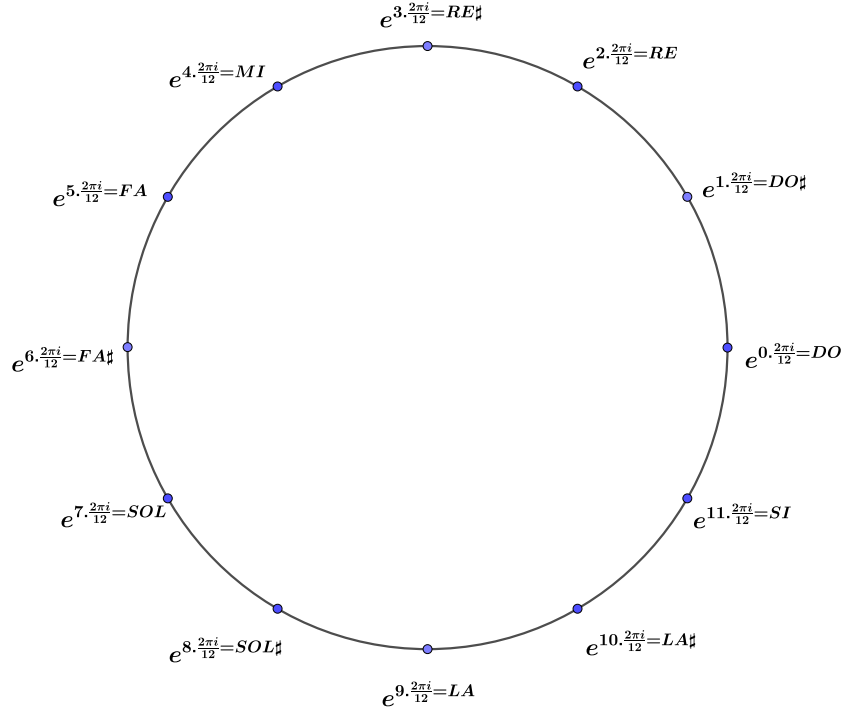


FIGURA 3. Raíces de la unidad del polinomio $X^{12} - 1$. Cada raíz es una nota musical.

Definición 2. Cada nota de la escala cromática es una raíz del polinomio mónico $X^{12} - 1$ y es posible expresarlas como

$$X^{12} - 1 = (X - DO)(X - DO\sharp)(X - RE) \cdots (X - SI) = \prod_{N=DO}^{SI} (X - e^{N \cdot \frac{2\pi i}{12}}).$$

En el mundo geométrico, las raíces de la unidad forman un polígono de 12 lados si las unimos con cuerdas, lo que modela nuevamente bien la noción de acorde musical como un subconjunto de la escala musical cromática.

5. LAS CIUDADES SON ACORDES Y LOS PUENTES, PROGRESIONES ARMÓNICAS

El problema de los puentes de Königsberg motivó la creación de la teoría de grafos por parte de Euler. En una formulación moderna, definimos un grafo como

$$\Gamma = (V, E),$$

donde V es un conjunto finito (llamados nodos vértices) de un espacio topológico y E (aristas o lados) un conjunto de pares no ordenados de elementos diferentes de los nodos.

5.1. Aplicación musical de los grafos. En el contexto musical que modelamos, los grafos suelen ser dirigidos, por lo que el conjunto E de aristas es un par ordenado dotado de una dirección. A estos grafos dirigidos también se les llama digrafos. Puesto que en el problema de los puentes de Königsberg nosotros buscamos cruzar hacia cada parte de la ciudad una única vez por puente, estamos tratando con el concepto moderno de Ciclo Euleriano. Musicalmente, necesitamos la siguiente definición para aplicar este planteamiento:

Definición 3. *Un conjunto de ciudades V_c es conjunto de acordes musicales V_m . Además, un puente E_p entre ciudades V_c corresponde a una progresión de acordes E_m .*

Este planteamiento (salvo asociación con un entorno citadino) fue ya estudiado con el ejemplo de grafo mariposa (véase [MMP16, p.126]). Nosotros podemos escuchar en la música diferentes progresiones armónicas que se basan en este tipo de grafo Euleriano.



FIGURA 4. Grafo Euleriano mariposa de una progresión armónica de cinco acordes basado en el ejemplo 37 de [MMP16, p.126].

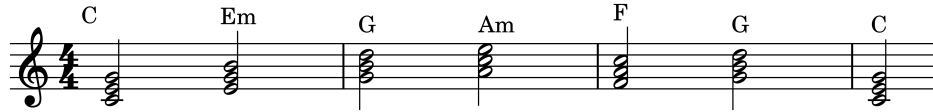


FIGURA 5. Grafo Euleriano de la progresión armónica en partitura. Leyenda: C=Do mayor, Em= Mi menor, G= Sol mayor, F= Fa mayor.

6. LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA MUSICAL

Por geometría elemental recordamos que basta saber el radio o diámetro de una circunferencia para calcular su longitud mediante la famosa fórmula

$$L_{circ} = 2\pi r = \pi D, \quad (2)$$

donde $D = 2r$ es el diámetro de la circunferencia. En la circunferencia musical es mucho más interesante calcular la longitud de los arcos que se forman entre las notas, puesto que permite modelar el concepto de intervalo musical. Por heurística simple, esto puede realizarse fácilmente con la Fórmula (2). El razonamiento es así: Si las notas musicales dividen la circunferencia en 12 partes iguales, entonces cada arco musical tiene longitud

$$Arc_{\sharp} = \frac{2\pi r}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

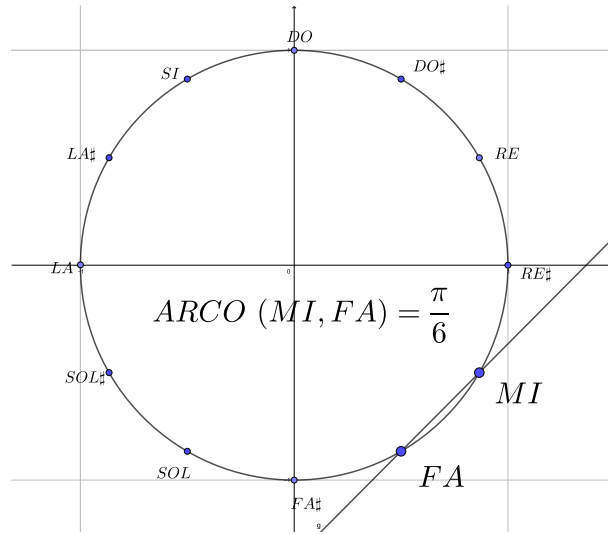


FIGURA 6. Longitud del arco de la circunferencia entre la nota Mi y Fa.

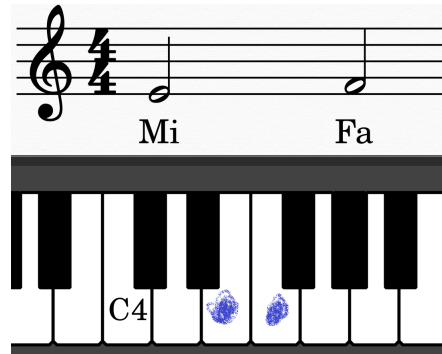


FIGURA 7. Representación en la partitura de las notas Mi y Fa. Abajo, representación de notas Mi y Fa en el piano con marca en azul.

Inmediatamente deducimos que la distancia entre las notas (intervalo musical denotado con \mathcal{I}_\sharp) se calcula mediante

$$\mathcal{I}_\sharp = n \left(\frac{\pi}{6} \right), \quad (3)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. Nótese que si $n = 0$ es unísono, un intervalo de segunda menor si $n = 1$, un intervalo de tercera mayor si $n = 4$, y así sucesivamente. Considerando la escritura matemática, se tratará de un intervalo descendente (rotación en el sentido horario) si $n \leq 1$.

En las secciones subsiguientes nuestra referencia principal será el libro de Walter Rudin *Principles of Mathematical Analysis* [R⁺76].

6.1. Cálculo Integral para intervalos musicales. El modelo anterior para medir distancias entre notas mediante arcos, es decir, intervalos \mathcal{I}_\sharp puede desarrollarse también bajo la mirada del cálculo infinitesimal. Para ello, haremos uso de la integral definida mediante sumas de Riemann como

$$\mathcal{L}_{arc} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \quad (4)$$

La integral de la Ecuación (4) calcula la longitud de arco de una curva cuya derivada es continua en el intervalo real $[a, b]$.

Una manera intuitiva de entender cómo se encuentra esta integral es realizar aproximaciones a la curva mediante segmentos de línea y aplicar el teorema de Pitágoras para la distancia en el plano euclidiano.

6.2. Ejemplo musical. Nuestro objeto de estudio es la circunferencia musical dada por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Nótese que el radio, por el momento, no desvirtúa el concepto musical de altura sobre el que se hace abstracción (frecuencia de onda). Obsérvese que la circunferencia está centrada en el origen $(0, 0)$ y se tienen los 12 puntos distribuidos uniformemente (notas musicales).

Primero, despejamos y en términos de la variable x ,

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - x^2 \\ y &= \pm \sqrt{r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Esta operación produjo dos funciones explícitas y dividió a las notas por cuadrantes. A los cuadrantes I y II le corresponden las notas musicales en la función

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

y, las otras notas musicales están en los cuadrantes III y IV con la función

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2};$$

es decir, dividimos el conjunto de notas en dos semicírculos reflejados por el eje de abscisas.

Puesto que queremos calcular el intervalo (arco) entre las notas Do y Re, seleccionaremos la función que describe el semicírculo superior en el plano y aplicaremos

la fórmula de la Ecuación (4).

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ \frac{df}{dx} &= \frac{(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} (-2x) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Dado que la circunferencia tratada es goniométrica, entonces $r = 1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Do-Re} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \sin^{-1} \frac{x}{1} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia de arco entre la nota Do y la nota Re es $\frac{\pi}{3}$.

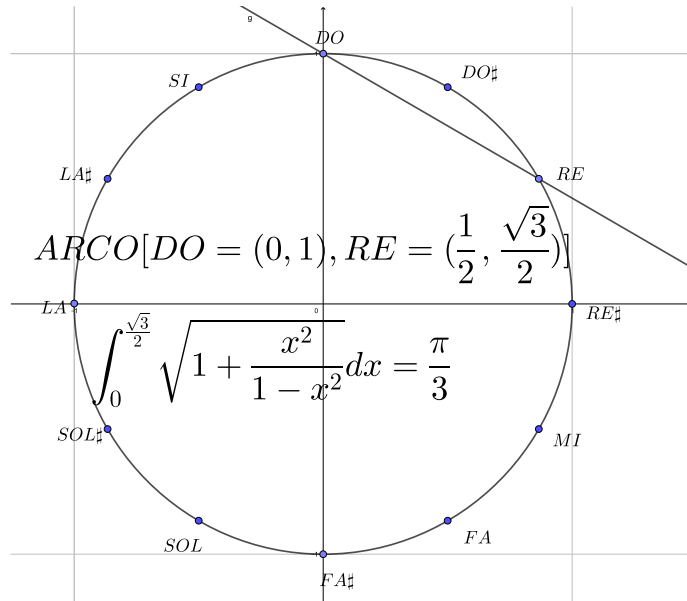


FIGURA 8. Cálculo del arco entre las notas DO y Re $\frac{\pi}{3}$ mediante la integral de longitud de arco.

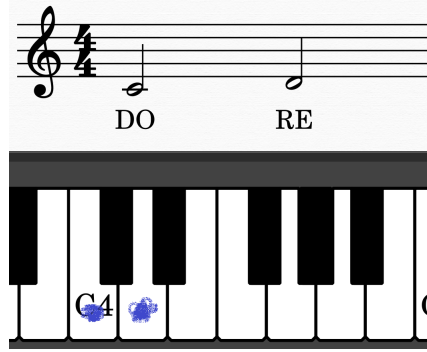


FIGURA 9. Notas Do y Re en partitura. En el piano se muestran marcadas en azul.

El cálculo muestra que la integral nos produce la llamada función trigonométrica inversa del seno. Evaluando las coordenadas de abscisas de las notas del semicírculo superior calculamos la longitud del arco. Veamos ahora la función que describe el semicírculo inferior. Si $f(x)$ es positivo, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Por el contrario, si $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, al aplicar el mismo procedimiento anterior se tiene

$$\frac{dg}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5)$$

Sin embargo, dado que en la fórmula del arco (4) la derivada es potencia cuadrada, deducimos la integral que mide la distancia entre notas musicales de manera general en la siguiente definición.

Definición 4 (Intervalo Musical de Arco). *La distancia de los intervalos musicales de cualquier sistema armónico (n -divisiones) medida en longitudes de arco de una circunferencia unitaria se escribe como*

$$\int_{N1}^{N2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (6)$$

donde $N1$ es la coordenada x de la nota primera y $N2$, la coordenada x de la segunda nota musical.

Desde un punto de vista musical, la integral (6) nos permitiría calcular las distancias (longitud de arco) en cualquier sistema de división de escalas o en música microtonal con $n > 12$. Como último ejemplo, usemos (6) para hallar la distancia interválica de tercera mayor entre la nota Fa y la nota La.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Fa-La} &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\
&= \sin^{-1} \frac{x}{1} \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
&= \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) - \arcsin(-1) \\
&= \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) - (-\arcsin(1)) \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, un intervalo de tercera mayor entre Fa y La tiene longitud de arco $\frac{2\pi}{3}$.

7. DERIVADAS IMPLÍCITAS MUSICALES

Con respecto al empleo de derivadas en este trabajo, estamos interesados en trazar cuerdas secantes entre dos notas musicales, porque también forman un intervalo y nos permite aproximarnos al concepto de derivada intuitivamente. Interpretamos entonces, conceptos musicales y diferenciales análogos.

Anteriormente calculamos la longitud de arco entre las notas sobre la ecuación de la circunferencia de radio unidad $x^2 + y^2 = 1$. Asimismo, dimos una integral general para el cálculo de tales intervalos musicales. Recuerde que, cuando resolvimos esta integral de longitud de arco, trabajamos con dos funciones, a saber, $f(x)$ y $g(x)$ derivadas de la ecuación del círculo. Mencionamos ahora que no se trata de una función propiamente. Si graficamos rectas verticales (criterio de la recta vertical)

$$x = n,$$

con $-1 < n < 1$ sobre la circunferencia, observamos que estas la intersecan en dos puntos.

Así, vemos que $x^2 + y^2 = 1$ contradice la definición de función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

respecto a la unicidad de correspondencia entre un elemento $x \in \mathbb{R}$ del dominio y un elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ en el rango.

Al respecto, las funciones de variable real tratan con una variable dependiente y expresada en términos de una variable independiente x . Un ejemplo convencional es el de las funciones polinómicas de un solo término (monomios) $y = f(x) = x^n$, cuya derivada $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ se calcula inmediatamente usando la definición. Sin embargo, la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ necesita un tipo especial de tratamiento: Derivación implícita.

7.1. Interpretación geométrica. Existen muchas formas de abordar el concepto de derivada. Desde un punto de vista geométrico, la derivada $\frac{d}{dx}f(x)$ es una función interpretable como la pendiente de la recta tangente evaluada en el punto $x \in \mathbb{R}$. Para mostrar este enfoque, tracemos primero una cuerda secante entre las notas Do y Si.

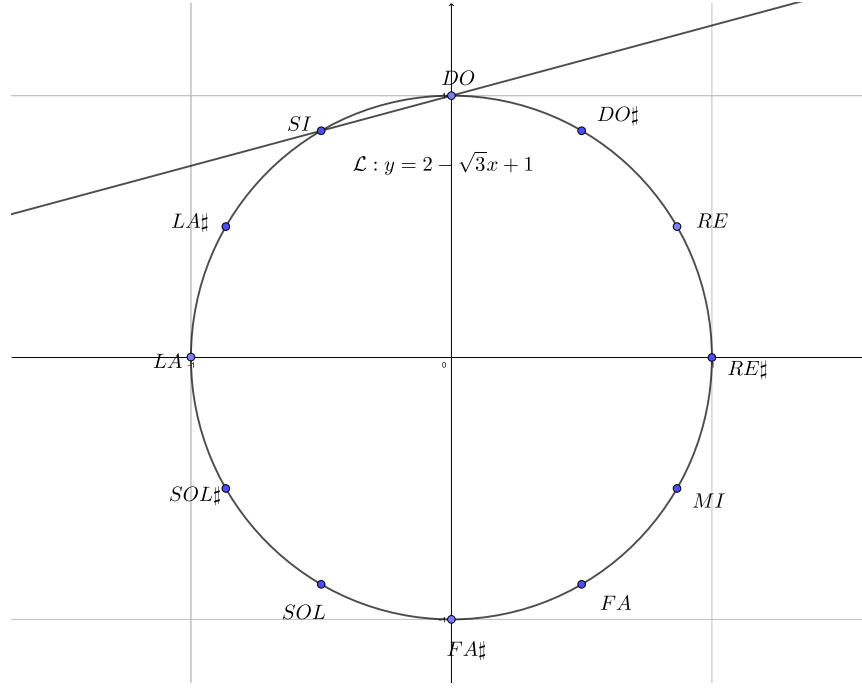


FIGURA 10. Recta secante sobre las notas DO y SI.

En la Figura (10) vemos la ecuación de la recta que cruza la nota Si y Do, $\mathcal{L} : y = 2 - \sqrt{3}x + 1$. Recordemos por geometría analítica, la ecuación explícita de una recta

$$y = mx + b,$$

y, la ecuación de la recta tangente en el punto (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

donde

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (7)$$

es la pendiente entre los puntos (notas musicales):

$$(x_0, y_0) = SI = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (x_1, y_1) = DO = (0, 1).$$

Luego, la pendiente de la recta secante entre ambos puntos (SI y DO) es

$$\mathcal{M}_{Sec} = 2 - \sqrt{3}. \quad (8)$$

En un pentagrama en clave de sol tenemos la siguiente representación:

Obsérvese que en la Figura (11) podemos pensar que existe en el pentagrama tanto una recta secante que une ambas notas como su respectiva pendiente en el plano matemático.



FIGURA 11. Pentagrama mostrando el intervalo de segunda menor entre Si y Do.

7.2. Hacia la pendiente de la recta tangente musical. El siguiente paso en la construcción de la derivada es pensar en la aproximación de la recta secante entre dos puntos hacia la recta tangente sobre uno de dichos puntos; ó, más generalmente, hacia un punto dentro del intervalo real abierto I .

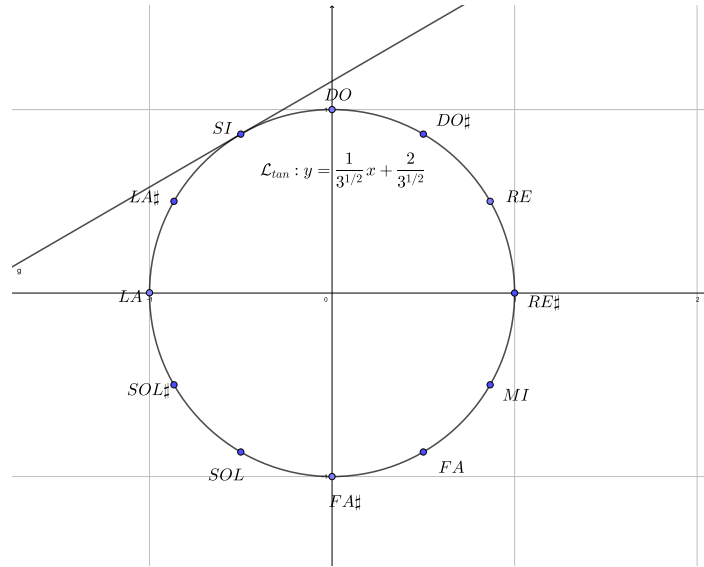


FIGURA 12. Recta tangente a la nota Si.

En la Figura (10), acercamos geoméricamente el punto DO hacia la nota SI de tal manera que la recta secante se va transformando en una recta tangente en el punto SI. Musicalmente, estamos descendiendo el tono de Do hacia el tono de Si de forma gradual y suave.

Nótese que en la Figura (12), tenemos la ecuación de la recta tangente en forma explícita

$$\mathcal{L}_{tan} : y = \frac{1}{3^{1/2}}x + \frac{2}{3^{1/2}}.$$

Mediante la derivada, específicamente el algoritmo para derivadas implícitas, resolveremos esta pregunta:

¿De qué manera calculamos la pendiente a la recta tangente en el punto (nota musical) SI?

Para responderla necesitamos la definición de derivada de una función y posteriormente, conocer el procedimiento para la derivación implícita.

Definición 5 (Derivada real [R⁺76]). *La derivada de una función real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es la función denotada (Leibniz) como $\frac{d}{dx}f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de tal forma que al evaluarse $\frac{d}{dx}f(x_0)$ para cada punto x_0 del intervalo abierto I corresponde a la pendiente m de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Es decir, la derivada se expresa como el límite del cociente*

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (9)$$

7.3. Algoritmo de diferenciación implícita. Conocida la definición de derivada en (9), podemos describir el algoritmo para calcular la pendiente en el punto SI.

El primer paso consiste en diferenciar ambos lados de la ecuación de la circunferencia unitaria y aplicar la regla de la adición

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1).$$

Luego, haciendo uso de la regla de la cadena se tiene

$$2x + 2y \frac{d}{dx} = 0.$$

Por último, la derivada es el cociente

$$2y \frac{d}{dx} = -2x,$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Comprobemos si la pendiente m de la recta que hemos hallado mediante la Definición del límite (9) coincide con la pendiente en el punto $SI = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ del gráfico en la Figura (12).

$$\mathcal{M}_{tan} = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (10)$$

7.4. Aplicación de la derivada sobre el acorde de Si menor. En la música uno de los conceptos fundamentales es el de acorde. Un acorde consiste en tres o más notas superpuestas en el pentagrama que se ejecutan simultáneamente.



FIGURA 13. Acorde de si menor (denotado Bm) tiene las notas si, re y fa sostenido. Las tres notas se ejecutan en simultáneo.

Es usual en la música representar los acordes mediante polígonos inscritos en la circunferencia. Esto se consigue trazando cuerdas entre los puntos (notas musicales). Sin embargo, este procedimiento también puede extenderse mediante la derivada

si consideramos trazar las tangentes a cada punto (acorde musical) formando un triángulo (tres notas) o polígono circunscrito (más notas) por intersección.

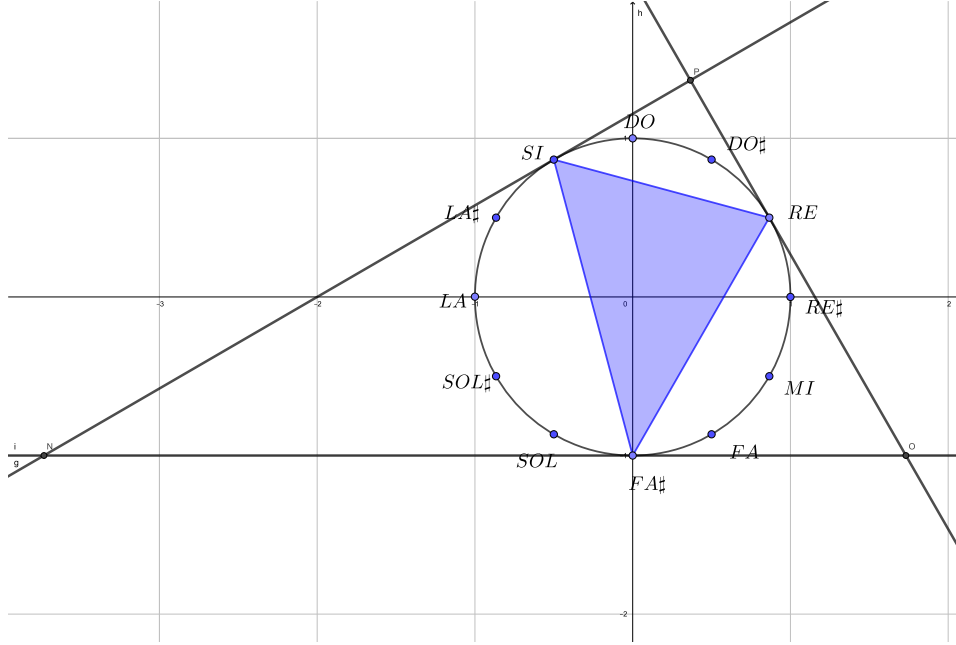


FIGURA 14. Representación del pentagrama de la Figura (13) mediante el polígono inscrito de Si menor y polígono circunscrito formado por la intersección de rectas tangentes a Si menor.

Observamos en la Figura (13) el triángulo inscrito usado para emular las rotaciones y transposiciones musicales de un acorde de tres notas.

Tenemos la ecuación de la recta tangente en el punto SI

$$\mathcal{L}_{SI} : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Dado el punto $RE = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Reemplazamos en la derivada (pendiente)

$$\mathcal{M} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Luego, sustituiamos las coordenadas de RE en la ecuación de la recta tagente

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{1}{2}\right) &= -\sqrt{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y &= -\sqrt{3}x + 2. \end{aligned}$$

Por su parte, la recta tangente que toca la nota FA # es simplemente

$$\mathcal{L}_{FA\#} : y = -1.$$

Con el triángulo circunscrito de Si menor y sus rectas tangentes podemos realizar las mismas simetrías de rotación que con el triángulo inscrito (transponer musicalmente los acordes).

8. MÚSICA DESDE LAS AGUJAS DE BUFFON

El problema de la aguja de Buffon inaugura la probabilidad geométrica a partir de la siguiente cuestión:

Si trazamos en un plano líneas paralelas entre sí separadas por una distancia d y lanzamos agujas de longitud l .

¿Qué probabilidad existe para que la aguja l cruce una de las líneas?

Sabemos que esta probabilidad puede expresarse como

$$P_{\frac{\text{agujas que cortan}}{\text{agujas totales}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\text{longitud de agujas}}{\text{distancia entre líneas}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d}.$$

La probabilidad en la fórmula se simplifica si asumimos que la longitud l de las agujas y la separación d entre líneas es la misma, es decir, $l = d$. Reescribiendo para despejar el valor de π , tenemos la aproximación

$$\pi \approx \frac{2 \cdot (\text{agujas lanzadas})}{\text{agujas que cruzan}} \quad (11)$$

Existen diversas formas de probar el Resultado 11. Uno de los métodos es mediante cálculo integral. Este enfoque se basa en un razonamiento de los ángulos α que forman las agujas (considerando una distancia τ del punto medio) respecto a las líneas más cercanas (véase [BZ84, pp. 238-239]). Para una aguja de longitud l , por heurística deducimos que la aguja forma una intersección con la línea si

$$\tau \leq \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Otro método más sofisticado es a través de integrar una distribución de probabilidad conjunta, donde las variables aleatorias son tanto la distancia entre líneas como la longitud de las agujas; cada una expresada mediante una función de densidad de probabilidad uniforme en determinado intervalo.

8.1. Aplicación musical para lanzamientos de agujas. Los métodos probabilísticos y estocásticos han sido ampliamente utilizados durante el siglo XX para componer música algorítmicamente. Un ejemplo relevante es la música estocástica basada en distribuciones de probabilidad del compositor Iannis Xenakis [Luq09].

La idea de aplicación de las agujas de Buffon a la música se basa en la siguiente modificación a las distancias:

Si la longitud de arco modela la distancia entre notas musicales. Puesto que cada lanzamiento para $d = l = 1$ produce una aproximación al número π , sin necesariamente mejorar esta aproximación incrementando el número de lanzamientos, estaríamos variando la longitud entre los arcos de la circunferencia. Por ende, también la distancia entre las notas musicales se ve afectada.

Con esta observación hecha, podemos rehacer una melodía musical cuyas distancias entre los intervalos dependan de lanzamientos de las agujas, haciendo que los intervalos presenten diversas desviaciones a la equidistancia entre las notas de la circunferencia musical.

9. CONCLUSIONES

El principal objetivo de este trabajo fue abordar los conceptos matemáticos impartidos en las sesiones del minicurso *Una Antología de Ingenios Matemáticos* para modelar el aspecto mental y abstracto de la música y sus símbolos en partitura. Así, desarrollamos la asociación entre nota y número y, posteriormente, la geometría de la circunferencia. La primera parte del trabajo trató la música desde una perspectiva discreta mediante ecuaciones en congruencias lineales, raíces de la unidad y la teoría de grafos. La segunda parte se aproximó hacia el mundo continuo mediante la integral de longitud de arco, la derivada y la probabilidad geométrica.

De esta manera, hemos mostrado cómo los conceptos musicales elementales, llámese la escala musical o el intervalo, pueden aparecer como contenido durante las clases de matemática o como ejercicios de aplicación en los libros de texto matemáticos. En sentido inverso, también observamos cómo los conceptos matemáticos pueden aparecer en las clases de música y durante el análisis musical. Si los filósofos, geómetras (véase [Pap14]) y científicos han estado interesados en la teoría musical desde hace siglos, creemos que la intersección entre música y matemática es un terreno fértil para el ingenio y el modelado matemático, así como para el análisis y la composición musical.

REFERENCIAS

- [Ami09] Emmanuel Amiot. Discrete fourier transform and bach's good temperament. *Music Theory Online*, 15(2), 2009.
- [BZ84] Shlomo Breuer and Gideon Zwas. Mathematical-educational aspects of the computation of π . *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 15(2):231–244, 1984.
- [Con21] Alain Connes. Motivic rhythms. *Journal of Mathematics and Music*, 15(1):1–16, 2021.
- [IRR90] Kenneth Ireland, Michael Ira Rosen, and Michael Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, volume 84. Springer Science & Business Media, 1990.
- [LE10] Ron Larson and Bruce H Edwards. *Calculus: Early transcendental functions*. Cengage Learning, 2010.
- [Luq09] Sergio Luque. The stochastic synthesis of iannis xenakis. *Leonardo Music Journal*, 19:77–84, 2009.
- [MMP16] Guerino Mazzola, Maria Mannone, and Yan Pang. *Cool math for hot music*. Springer, 2016.
- [Pap14] Athanase Papadopoulos. Mathematics and group theory in music. *arXiv preprint arXiv:1407.5757*, 2014.
- [R⁺76] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- [SCW20] James Stewart, Daniel K Clegg, and Saleem Watson. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning, 2020.
- [TWH⁺10] George Brinton Thomas, Maurice D Weir, Joel Hass, Christopher Heil, and Antonio Behn. *Thomas' calculus: Early transcendentals*. Pearson Boston, 2010.

15021 LIMA, PERÚ

Email address: edelve91@gmail.com