Astroides y el parque de Magdalena del Mar en GeoGebra

Edgar Delgado Vega

Compilado el 09 de Mayo de 2025

Resumen

¿Creíste que jamás caminarías sobre unas ecuaciones paramétricas en tu vida? En esta breve cronología te cuento cómo una caminata cotidiana por una plaza en un distrito limeño me llevó a encontrar una expresión tangible de las matemáticas clásicas.

Figura 1: Fotografía del parque de Magdalena del Mar.

Crónica de hace un año

6:00 pm

Fuimos un rato al parque Túpac Amaru, el que está en Magdalena del Mar. Justo coincidimos con una feria, con música, comida y ese desorden gustoso que solo una plaza llena puede ofrecer.

6:10 pm

Propuse que diéramos unas vueltas por el parque, conversando de lo que fuera, sin rumbo fijo. Pero mientras caminábamos, algo me hizo frenar en seco: las veredas no eran comunes y corrientes. Tenían curvas tan precisas que parecían salidas directamente de una ecuación paramétrica.

6:20 pm

De pronto, me vino a la mente el nombre de esa curva: el **astroide**. Mientras seguía caminando sobre ese lugar geométrico trazado en concreto del Perú, se me ocurrió que tal vez no estaba solo. Podría formar parte de un conjunto mayor de curvas planas, como si la plaza fuera un pequeño museo al aire libre de geometría clásica.

6:30 pm

¿De dónde surge un astroide? Pensé en la estela que deja un punto P de un círculo que rueda a lo largo de una línea fija L (la directriz). Esta curva, conocida técnicamente como **trocoide**, es ampliamente utilizada en el diseño de engranajes.

En ese instante, como si fuera un encuentro geométrico, me llegaron las distintas clasificaciones de estas curvas:

- Si el punto P está en la circunferencia será llamada cicloide normal o cicloide común.
- Si el punto P está dentro del círculo, se llamará trocoide *curtate* (contraída).
- Si el punto P está fuera del círculo, se llamará trocoide *prolate* (extendida).

Sí, bastan tres condiciones para establecer un nombre más preciso a la curva.

Sigamos. Si el radio del círculo es r, y pensamos en P como la distancia del centro hacia el punto fijo, entonces tendremos las ecuaciones paramétricas:

$$x(\varphi) = r\varphi - P\sin\varphi$$
$$y(\varphi) = r - P\cos\varphi$$

En nuestro caso, $r = P$.

¿Qué curioso que un punto cambie tantas cosas? Así de lindas son las matemáticas.

6:40 pm

Mi mente, siempre inquieta, me llevó a una nueva reflexión:

> Si rodamos sobre una línea L, ¿por qué no rodar sobre cualquier otra figura, sobre cualquier otra curva plana? ¿Qué pasaría si no nos limitáramos a la simpleza de la recta? Después de todo, las matemáticas no tienen límites.

Una idea bastante natural es pensar que, en lugar de hacer rodar un círculo sobre una línea, ahora tenemos un círculo rodante que gira sobre otro *círculo base estacionario*. La estela de este giro producirá una nueva curva.

Una vez más, se abre una clasificación, pero esta vez, pensando en si el círculo generatriz rueda por fuera o por dentro del círculo base inmóvil.

- Si rueda por fuera, le llamaremos **epicicloide**.
- Si rueda por dentro, le pondremos de nombre **hipocicloide**.

6:55 pm

Otra vez me siento incómodo con una clasificación incompleta. El simple hecho de que existan epicicloide e hipocicloide me hace regresar a la clasificación de rodar sobre la línea. ¿Y si P es mayor o menor al radio r de este círculo rodante? Sí, efectivamente, también hay más opciones:

- **Epitrocoide** (círculo generatriz fuera del círculo estacionario)
  - Epicicloide contraída (P dentro del generador)
  - Epicicloide extendida (P fuera del generador)
- **Hipotrocoide** (círculo generatriz dentro del círculo estacionario)
  - Hipocicloide contraída (P dentro del generador)
  - Hipocicloide extendida (P fuera del generador)

Y hay una posibilidad más, algo más exótica: la *pericicloide*, donde la que rueda ahora es estacionaria (los radios cambian papeles), pero esa la dejaremos de lado por ahora.

7:10 pm: hora de las ecuaciones paramétricas

Ahora sí, estamos listos para conocer al astroide y sus ecuaciones. Desde un punto de vista puramente visual e intuitivo, un astroide se asemeja a una *estrella inflada de cuatro puntas*. En este contexto, el término más preciso para referirse a esas puntas es **cúspides**.

Pues armemos un astroide simple, con cúspides de longitud 1 respecto al origen:

$$x(\varphi) = \sin^3(\varphi)$$
$$y(\varphi) = \cos^3(\varphi),$$

donde

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

En ese rato, me habría encantado sacar lápiz y papel ahí mismo en la plaza. Pero no me quedó más remedio que aguantarme la emoción matemática hasta llegar al estudio.

10:00 pm

Ya en casa, vamos a echar mano de Geogebra para graficar el astroide del parque con las ecuaciones paramétricas de más arriba.

Lo único que agregaremos para darle un toque de dinamismo es un *control deslizante*. Lo llamaremos φ, para que la figura se mueva mientras exploramos la curva.

Te juego el codiguillo

```
varphi = 2 pi
Curva(sen^3(u), cos^3(u), u, 0, varphi)
```

Agregamos algo de color y listo, ahí está nuestro astroide. Con el control deslizante φ en acción, la figura cobra vida, mostrando su ritmo.

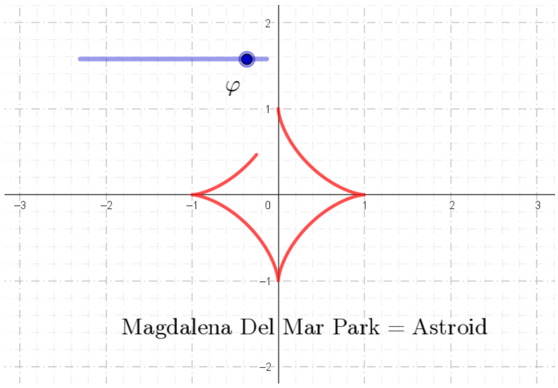

Figura 2: Astroide en GeoGebra.

Ahora, al compararla con la foto panorámica del parque de Magdalena del Mar, la conexión entre la geometría y el paisaje se vuelve interesante. Tenemos un juego entre lo físico y lo abstracto.

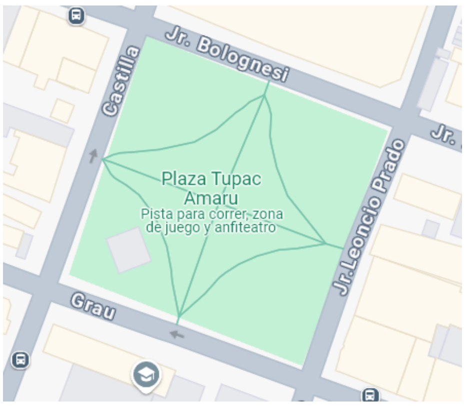

Figura 3: Mapa del parque de Magdalena del Mar.

¿Coincidencia?

Estás haciendo hora, conversando, y de pronto ves una forma que te parece conocida, algo que te causa extrañeza y ya estás pensando en ecuaciones. La matemática tiene esa finta de aparecer cuando menos te lo esperas.

A veces uno cree que ya dejó esos temas en el cole o en la U, pero no, te caen cuando estás con una mazamorra en la mano y música criolla de fondo en algunos puestos. Te quedas preguntando: ¿Esto es trocoide o astroide?