Logaritmos, cents y MIDI: una pista básica

Edgar Delgado Vega

29 de abril de 2022
Compilado el 12 de octubre de 2025, v.0.0.2

Resumen

Tratamos brevemente algo que tal vez te ha sido divertido: los *cents*. ¿Es el mejor nombre de la vida? Bueno, es una forma traslúcida de convertir la turbulenta relación multiplicativa de frecuencias en algo mucho más de barrio: una distancia aditiva. Al final, veremos cómo saltamos directamente a otras áreas, como los *mels*, los decibelios y las notas MIDI. No te preocupes, que esto viene tranco a tranco.

1. Una nada sobre logaritmos

El logaritmo natural $\ln(x)$ para $x > 0$ se define de forma un poco rara, pero bonita (como casi todo en matemáticas) mediante una integral:

Definición 1.1 (Logaritmo en su transformación súper integral)**.**

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\ln(x) = -\int_x^1 t^{-1}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y, en vez de ser una función aburrida, representa el área debajo de la curva $y = \frac{1}{t}$ desde 1 hasta x.

Observación 1.2. Cuidado, no te confundas, t es una variable auxiliar para integrar. El eje horizontal es x.

Y sí, también tiene propiedades clásicas, como la continuidad, la monotonicidad (si te suena a algo de control), y esa ley del producto que todo aquel interesado en morfismos de grupos alguna vez quiso:

$$\ln(xy) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \frac{1}{t}\,dt.$$

Lo que en cristiano es: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Realmente no es tan raro.

Para desarrollar nuestro microsistema, necesitaremos otras bases. Dado un número real $b > 0, b \neq 1$, el logaritmo en base b se define así:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Esto simplemente es tomar el logaritmo natural y le pones tu salsa criolla.

2. Distancia de octavas y cents

En música, la distancia entre dos frecuencias f_1 y f_2 medidas en octavas se define como:

$$\Delta(f_1, f_2) = \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\frac{f_1}{f_2}} \frac{1}{t}\, dt.$$

¿De qué se trata esto? Básicamente, es una forma de medir cuántas veces una frecuencia f_1 es más grande que f_2, pero usando logaritmos para hacerlo de forma más práctica.

La distancia en *cents* (que ya se volvió el estándar) es la octava subdividida en 1200 partes iguales:

Definición 2.1 (Los cents para tu consumo)**.**

$$\text{cents}(f_1, f_2) = 1200 \times |\Delta(f_1, f_2)|\,.$$

Y lo mejor es que los *cents* respetan lo que nuestra oreja percibe de forma mucho más directa. Mientras que nuestra percepción se basa en la *razón* $\frac{f_1}{f_2}$ y no en la diferencia $f_1 - f_2$, los *cents* nos dan una forma más intuitiva de comparar esas pequeñas distancias en frecuencias. Hilar y tejer con toda la fineza aquí será posible.

3. Generalicemos: cualquier dupla

Ya estamos con la concentración suficiente para abrir un poco más el lente de nuestro teléfono. Si definimos una unidad arbitraria de interés musical Δ_b como el valor logarítmico en base b de la razón entre dos magnitudes, tenemos:

$$\Delta_b(X_1, X_2) = \frac{1}{\ln(b)} \int_1^{\frac{X_1}{X_2}} \frac{1}{t}\, dt.$$

Y si queremos ser aún más MADs, introducimos un factor de escalamiento κ, que es simplemente cómo de finitos quieres que sean tus intervalos. Así que podemos escribir la definición que veníamos a redescubrir (en rima para que suene afín):

Definición 3.1 (La fórmula en su esplendor)**.**

$$\Delta_b^\kappa(X_1, X_2) = \frac{\kappa}{\ln(b)} \int_1^{\frac{X_1}{X_2}} \frac{1}{t}\, dt, \quad b > 0,\, b \neq 1,\, \kappa > 0.$$

Esta fórmula (3.1) es la que necesitábamos para darle paso a los ejemplos que vienen en un toque.

4. Volvamos a los ejemplos

Ahora, lo bueno: ejemplos. Si tomamos la distancia entre dos frecuencias f_1 y f_2 medida en octavas, podemos escribir fácilmente:

$$\Delta_2^{1200}(f_1, f_2) = \text{cents}(f_1, f_2).$$

Y también podemos ver algo más sabroso, como el *mel*, que se define así:

$$\Delta_{10}^{2595}(f) = \frac{2595}{\ln(10)} \int_1^{1+\frac{f}{700}} \frac{1}{t}\, dt = \mathrm{mel}(f).$$

Sí, es una forma divertida de medir la percepción del tono, y nos recuerda que no todo marcha por líneas.

Por último, en el búnker de la intensidad sonora, si tenemos I_1 en Watios por metro cuadrado, la relación en decibelios se expresa como:

$$\Delta_{10}^{10}(I_1) = \frac{10}{\ln(10)} \int_1^{\frac{I_1}{10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}} \frac{1}{t}\, dt = L_{\mathrm{dB}}.$$

Observación 4.1. Ten calma con las cosas adimensionales.

5. Ajá: ya vi el MIDI

Directo al asunto. Una fórmula práctica para calcular una nota MIDI desde una frecuencia f dada es la siguiente:

$$n(f) = 69 + 12\log_2\left(\frac{f}{440}\right).$$

Lo mejor es que también puedes reescribirlo en términos de la integral (3.1), y se ve bastante brutal:

$$\Delta_2^{12}(f, 440) + 69 = n(f) = 69 + \frac{12}{\ln 2} \int_1^{\frac{f}{440}} \frac{1}{t}\, dt.$$

Como puedes notar, solamente se le adiciona el número de nota MIDI que le toca a la frecuencia f.

¿Pero qué pasa si quieres cambiar la referencia de 440 Hz a otra frecuencia f_0? Solo debemos que mover el bote, es decir, la base f_0 en la fórmula. Entonces, la expresión se convierte en:

Definición 5.1 (El MIDI indeciso)**.**

$$\Delta_2^{12}(f, f_0) + \beta = n_\beta(f, f_0) = \beta + \frac{12}{\ln 2} \int_1^{\frac{f}{f_0}} \frac{1}{t}\, dt.$$

Tenemos nueva nota MIDI n_β que queremos asignar a la frecuencia f_0.

Ejemplo 5.2. Supongamos que queremos que la nota MIDI 60 se asigne a una frecuencia de 261,63 Hz (que es la frecuencia estándar de C4). Entonces, nos soltamos la siguiente frase:

$$n_{60}(f, 261{,}63) = 60 + \frac{12}{\ln 2} \int_1^{\frac{f}{261{,}63}} t^{-1}\, dt.$$

En palabras simples y sencillas, puedes aplicar este truco con cualquier frecuencia base que te guste para armar el tonazo.

6. La última cuerda

Si damos un paso atrás y miramos con más calma, veremos que el espacio $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, ese espacio donde todo se multiplica, se convierte en un espacio aditivo $(\mathbb{R}, +)$ gracias al sabor del *logaritmo*. Este truco es útil en varias ideas. Te lo repito: las relaciones multiplicativas se convierten en intervalos aditivos que podemos medir y comparar con un toque mucho más sencillo.

Licencia Este documento está disponible bajo la licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0, que permite su distribución con fines no comerciales, siempre que se otorgue el crédito adecuado y no se realicen obras derivadas.