De Fibonacci al *Super*-nacci: tropiezo a tropiezo

Edgar Delgado Vega

5 de Enero de 2025

Compilado el 9 de agosto de 2025, v.0.0.1

Resumen

Esta nota está hecha para saltarte hasta la última parte, que es el plato fuerte, aunque tal vez te cae pesado. Hablaremos un poco más allá del Fibonacci, de los aspavientos que hace la recursión, del k-nacci con matrices, el número áureo y hasta una hipérbola en la que habitan. Y sí, como lo oyes... (no exageré, por ahí va la cosa). Esta última visión nos acerca a la teoría de curvas elípticas. Si te gusta, dale manita arriba (¿no puedes, verdad?).

Índice

1. Lo que ya sabes

Seguro que te has topado con la secuencia de Fibonacci $\mathcal{F}$ haciendo tu desayuno este fin de semana. Pues computacionalmente se le suele implementar para deslumbrarte con lo maravillosamente eficiente que es la recursión (ironía con todas las partes). Baraja las cartas que tú ya conoces:

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}(n-1) + \mathcal{F}(n-2), \tag{1}$$

donde ese n es un número entero (ojalá fuera trascendente). Recordarás, además, que hay unas condiciones iniciales, que para el Fibonacci son $\mathcal{F}(0) = 0$ y $\mathcal{F}(1) = 1$.

¿Las cambiamos ahora para que se arme el pleito? Espera un poco, lo haremos para el almuerzo. Primero, debemos notar que en Fibonacci sumamos los dos términos de antes para plasmar el siguiente. Este hecho trivial es fundamental para lo que viene en un toque.

2. ¿De dónde sacamos el Fibonacci?

El truco de magia con la secuencia de Fibonacci tiene un nombre algo culterano: una recurrencia lineal de grado n. ¿Cómo se come esto, serguro preguntas? La escena plantea una vista algorítmica:

> El valor de cada evaluación de una función f en el punto n depende de los valores anteriores.

Pero necesitamos algo de formalidad, para eso estamos aquí, habitante de la Atlántida. La forma casi general nos viene como

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} c_j a_{n-j} = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{2}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los coeficientes constantes y la secuencia depende de los n términos que ya calculaste (lo siento, pero aquí salió en rima).

Se le llama también homogénea porque no hay algún número d_n que se mande solo, sin importarle los términos anteriores. Es decir, si no le sumas ese d_n al final de nuestra Definición (1).

Así, queda claro que el Fibonacci es una secuencia de grado 2, tal y como está en la pantalla de la Fórmula (1). Y que sus coeficientes c_1 y c_2 son ambos 1 (quedó algo tullido el Fibonacci).

¿Lo llevamos un paso más allá? ¿Podemos meter tres? Sí, es muy natural extender, vamos a armarnos un juego diferente, bueno, no tanto:

$$\mathcal{F}(0) = 0, \quad \mathcal{F}(1) = 1, \quad \mathcal{F}(2) = 1. \tag{3}$$

Esta nueva secuencia se llamará el Tribonacci. Una prueba más para entender (ahora con subíndices para acoplar las cosas); con el Tetrabonacci pasa lo mismo, tiene una condición más:

$$\mathcal{F}_0 = 0, \quad \mathcal{F}_1 = 1, \quad \mathcal{F}_2 = 1, \quad \mathcal{F}_3 = 2. \tag{4}$$

Podríamos seguir por toda la eternidad y los coefiicentes seguirán igual su movida: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 1$. Cuando quieran los sacamos de su órbita.

3. Matrices donde cocinaba Fibonacci y k-nacci

Una acumulación del mundo se mueve por matrices que comen ceros y unos. Entonces, Fibonacci también podría estar metido en ese asunto. Sí, como si fuera un operador, también podemos soltar un Fibonacci expresado como una simple matriz cuadrada donde vamos a hacerle sus potencias bien bacanas y enteras:

$$M_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \tag{5}$$

Sí, aquí no se ve nada como Fibonacci. Pero preguntemos lo siguiente: ¿Qué pasa, por ejemplo, si la elevamos a la quinta de Beethoven?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Observas que en cada entrada de la matriz aparecen elementos de la secuencia. Puedes identificarlos como antes de una forma más general:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} & \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_n & \mathcal{F}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ahora sí te quedó claro. Estamos también interesados rápidamente en saber qué propiedades más penumbrosas tiene la matriz (5). Nos linealizamos y vamos a sacar los espectros. Pensemos en los autovalores. Recordemos la ecuación

$$det(M_{\mathcal{F}} - \lambda I) = 0.$$

Si le hacemos una corta manipulación tenemos la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Con una pizca de álgebra del Baldor, nos sale:

$$\lambda_\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

¿Pero qué estoy viendo? Sí, es el *golden ratio* y su versión negativa. De aquí se puede armar también la fórmula de Binet para un cálculo directo de el enésimo término (aunque hay que hacer cositas en código para que cuadre con números n gigantes).

Perfecto, pero ¿Y el Tribonacci, el Tetranacci y el k-acci, cómo se hace en matriz? Sabía que te preguntarías esto. Vamos a levantar algo de pesas.

La idea central detrás de todo es recordar que esto se trata de una secuencia recursiva. Por ende, necesitamos una matriz que accione un vector que me devuelva los términos anteriores ordenados uno a uno. Así que necesitamos la siguiente matriz generadora:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{n+1} \\ \mathcal{T}_n \\ \mathcal{T}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_n \\ \mathcal{T}_{n-1} \\ \mathcal{T}_{n-2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Lancé un dado y me dijo que debemos elevar a la potencia 5:

$$M_{\mathcal{T}}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 13 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo están metidos los términos en los componentes de la matriz? Te diré que el centro vertical es lo de menos. Solo la primera columna y la tercera columna presentan partes de la secuencia ordenada. La columna central tiene unas cuantas sumas de los términos; tampoco es que sea totalmente independiente.

Finalmente, esta ojeada nos permite definir el siguiente esqueleto matricial:

$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} + T_n & T_{n+1} \\ T_{n+1} & T_n + T_{n-1} & T_n \\ T_n & T_{n-1} + T_{n-2} & T_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Hasta aquí vamos tranquilos. Y podríamos seguir con el caso 4. Mas, queremos la generalidad. Bueno, basta de juegos. ¿Cómo hago la de n-acci definitiva?

Puedes observar que estamos sumando términos anteriores dentro de la misma estructura multiplicativa de la matriz. Así que rápidamente por inducción de la Definición dada en (2) inferimos:

$$M_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listo, nuestra bella matriz de transición (6) bastará para mover las condiciones echaditas

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-k} \end{pmatrix} \cdot M_{\mathcal{K}}.$$

al siguiente paso de baile. En ella, puedes ver que la primera fila va a sumar todos los valores anteriores para sacar el que viene. Realmente, estamos hablando de los c_k mostrados en (2).

Ahora, plantéate cómo son las relaciones entre las columnas del medio. Eso, y los *autobots* (digo, los autovalores), bajarán en la próxima parada del microbio.

4. La hipérbola oculta, menos en el cuarteto

Aquí viene la captura de pantalla, porque me dio por no usar GeoGebra, metimos Desmos:

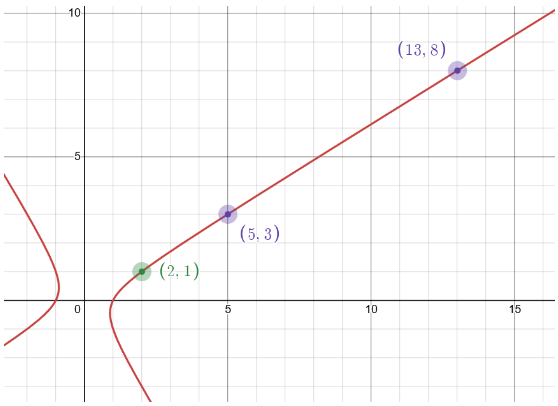

Figura 1: La hipérbola prohibida de Fibonacci.

Pasemos finalmente al terreno del plano cartesiano y de las cónicas mediante ecuaciones. La hipérbola de la Figura (1) que nos compete en este caso es:

$$\mathfrak{F} : X^2 - XY - Y^2 = 1. \tag{8}$$

Seguro observas que las coordenadas de puntos enteros que hemos marcado en la hipérbola corresponden con la secuencia de Fibonacci. Esta bella coincidencia nos permite pensar que la recurrencia lineal también habita en objetos geométricos.

Una gran campaña que se realiza en teoría de números tiene que ver con curvas de tercer grado (un gradito más que nuestra amable hipérbola de segundo): las curvas elípticas. En ellas se define una especie de suma geométrica (no en el sentido del análisis real), y aquí, también se puede hacer igual.

Presta atención a esto (el quid de la cuestión): el dibujo consiste en trazar un segmento de recta que roza ese punto $P = (2, 1)$ tangencialmente y luego crearle una paralela que pase por el punto que no hace nada, $N = (1, 0)$. Finalmente, el punto de intersección de esa nueva recta paralela a ese detergente, que diga, tangente, es el punto $Q = (5, 3)$ que vemos. Repetimos este proceso y vamos al infinito y más allá generando la secuencia de Fibonacci.

Podemos reprogramar todo lo visto hasta decir que si $\mathcal{F}_n$ es un número de Fibonacci, es un múltiplo de un solo punto.

5. ¿Qué viene ahora?

Creo que bien podría venir algo de código con Sonic Pi. Aunque hemos tocado la superficie de lo matemático, ya hemos logrado una primera mirada un toque más meticulosa del Fibonacci convencional. Nos vemos en la siguiente nota, aún falta lanzar los dados con las condiciones iniciales que no probó Vallejo.