# CONSONANCIA Y DISONANCIA EN FUX: LA FUNCIÓN DE POLARIDAD $\rho_{\triangle}$

EDGAR DELGADO VEGA

Resumen. En el método de las especies contrapuntísticas expuesto por Fux en su *Gradus ad Parnassum*, la diferencia entre consonancias y disonancias está claramente establecida. Pero surge una pregunta clave: ¿qué hace que un intervalo se considere consonante o disonante?

Basándonos en el trabajo de Mazzola y su escuela contrapuntística, la presente exposición informal reescribe la función de polaridad $\rho_{\triangle}$ como una representación de grupo. Esta función posibilita el intercambio de intervalos consonantes por disonantes y viceversa. De este modo, se facilita un análisis algebraico y sistemático en la creación de estructuras contrapuntísticas de especies.

## Índice



## 1. Introducción

¿Qué intervalos musicales se consideran consonantes y cuáles disonantes? En el modelo contrapuntístico establecido por Fux [FME65], se definen los intervalos permitidos para un contrapunto de primera especie, en el cual el cantus firmus y el discantus comparten la misma figura de duración. Estos intervalos incluyen las terceras, la quinta, las sextas y la octava. En contraposición, los intervalos disonantes comprenden las segundas, las cuartas y las séptimas.

Este esquema nos invita a formular varias preguntas sobre la naturaleza de los intervalos musicales:

- ¿Responden a fundamentos acústicos y físicos?

*Fecha*: 19 de mayo de 2025.
Versión 0.0.1.
ORCID: 0000-0002-9672-9087.

- ¿Están determinados por principios psicológicos y emocionales?
- ¿Se derivan de patrones numéricos o relaciones matemáticas?

Aunque estas cuestiones han sido ampliamente discutidas en la teoría musical, el enfoque que aquí adoptamos se basa en el modelo algebraico y geométrico propuesto por Guerino Mazzola [ea02], cuyas ideas han sido desarrolladas y ampliadas en los trabajos de [Jun10, AA11], entre otros, formando así una escuela de contrapunto de corte matemático.

En este breve artículo, nos centraremos en el concepto clave de función autocomplementaria, que nos permitirá explorar cómo las herramientas algebraicas pueden ofrecer una geometría y comprensión formal de la relación entre consonancia y disonancia.

Es importante señalar que este modelo ha sido objeto de críticas por parte de investigadores como Dmitri Tymoczko. No obstante, Mazzola [AAM11] ha defendido de manera contundente los principios fundamentales de este enfoque, enfatizando su validez en el estudio matemático de la música contrapuntística.

## 2. Consonancias (K) y Disonancias (D)

Formalicemos, de manera preliminar (aunque con un toque de humor), lo que Fux consideraba como consonancias y disonancias.

**Definición 2.1.** Asumiendo la equivalencia de octavas y la equivalencia enarmónica, el conjunto de consonancias $K$ está conformado por los intervalos

$$K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\} \subseteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

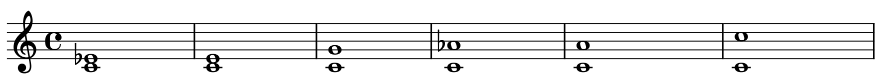

Figura 1. Intervalos consonantes. Tercera menor (3), tercera mayor (4), quinta justa (7), sexta menor (8), sexta mayor (9) y octava (0).

**Definición 2.2.** Asumiendo la equivalencia de octavas y la equivalencia enarmónica, el conjunto de disonancias $D$ está conformado por los intervalos

$$D = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\} \subseteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

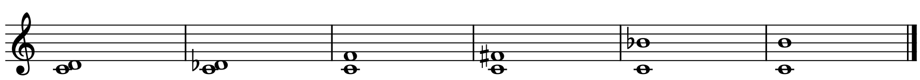

Figura 2. Intervalos disonantes. Segunda menor (1), segunda mayor (2), cuarta justa (5), cuarta aumentada o tritono (6), séptima menor (10) y séptima mayor (11).

**Observación 2.3.** Note que hemos identificado tanto los intervalos como las notas musicales con los elementos del grupo cociente $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

¿Qué distingue a un conjunto de otro? ¿Cómo transita uno hacia el otro? ¿Existe una transición armónica y estéticamente significativa entre lo consonante y lo disonante? Estas son algunas de las cuestiones fascinantes que Mazzola aborda en su modelo contrapuntístico. A continuación, exploraremos este interesante descubrimiento.

## 3. La razón de las particiones: el problema principal

Hasta ahora todo ha sido relativamente sencillo: hemos separado nuestras consonancias y disonancias según la clasificación de Fux. Al modificar ligeramente la notación para reflejar esta partición, llegamos a la expresión

$$|K| = |D| = m,$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$ lo extraemos del conjunto total $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$. De este modo, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, es decir, la misma cardinalidad.

Podríamos, de manera ingenua, definir una función simple y forzada que asignara a cada elemento de $K$ un elemento de $D$. Por ejemplo,

$$k_1 \mapsto k_1 - 1 : K \longrightarrow D,$$

si tomamos $3 \mapsto 2$. En sentido contrario, aplicaríamos la misma operación, pero usando adición, para que $2 \mapsto 3 : D \longrightarrow K$, y así sucesivamente con cada uno de los elementos.

Desde una perspectiva computacional, podríamos estudiar los casos más desfavorables (preguntándonos cuántas funciones posibles existirían) y el caso óptimo, que constituye el núcleo del modelo:

> ¿Existe una función única que realice la transición de $K$ a $D$, es decir, que mapee cada elemento de un conjunto a un único elemento del otro conjunto, y que además sea invertible, devolviendo cada elemento de $D$ a su correspondiente en $K$?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa. A continuación, abordaremos los fundamentos teóricos y la maquinaria que nos permiten llegar a esta conclusión.

## 4. La construcción del grupo afín

La función que necesitamos puede ser encapsulada en la acción de un elemento de un grupo afín. ¿Cómo interpretamos esto? Necesitamos adentraremos un poco den la teoría de grupos finitos, específicamente explorando la idea de extensiones de grupos (véase [Rot95]), para dar el siguiente paso hacia nuestro objetivo.

Recordemos que un grupo afín $\Lambda$ puede construirse como un producto semidirecto (algo más interesante que un producto directo). La construcción es la siguiente:

$$\Lambda(n, V) = V \rtimes \mathrm{GL}(n, V).$$

Aquí, como sabemos, el espacio vectorial $V$ es un módulo. Siguiendo la misma estructura aterrizada en el modelo, llegamos a la siguiente definición contextual.

**Definición 4.1.** El grupo afín $\Lambda$ es el producto semidirecto dado por la secuencia exacta corta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^1_{2m} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}^1_{2m} \rtimes \mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m}) \longrightarrow 1.$$

Es menester recordar que el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}_{2m}$, denotado como $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2m})$, es isomorfo al grupo multiplicativo de los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{2m}$, es decir,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2m}, +) \cong (\mathbb{Z}_{2m}, \times) \cong \mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m}).$$

**Observación 4.2.** Hemos escrito las operaciones correspondientes para ilustrar este isomorfismo con mayor claridad.

Desde una perspectiva geométrica, las transformaciones lineales permiten operaciones como rotaciones, escalados y distorsiones, que podrían compararse a la creación de un *riff* de música metal.

Sin embargo, al aplicar una transformación afín, no solo se realiza lo anterior, sino que también se incorpora una traslación, lo que permite mover el objeto a través del espacio, como si se desplazara por un escenario. Esta traslación, no obstante, puede hacer que el origen del espacio se pierda en el olvido.

## 5. Los elementos del grupo afín

Hasta aquí hemos hablado de los espacios, pero ahora es importante entender cómo se comportan estos elementos en su día a día. El grupo $\Lambda$ tiene una estructura similar a la del producto directo de grupos, es decir, consiste en el conjunto de pares de la forma:

$$\Lambda := \{(t, g) \mid t \in \mathbb{Z}_{2m} \text{ y } g \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m})\}.$$

Pero, ¿cómo es que constituyen un grupo de interés musical? ¿Cómo interactúan estos elementos entre sí? Tenemos la siguiente proposición que ilumina las preguntas.

**Proposición 5.1.** *El conjunto $\Lambda_{2m}$ forma un grupo bajo la operación dada por*

$$(t_1, g_1) \odot (t_2, g_2) \mapsto (t_1 + g_1 \cdot t_2, g_1 \cdot g_2) : \Lambda_{2m} \times \Lambda_{2m} \longrightarrow \Lambda_{2m},$$

*actuando el primer componente $t$ de la pareja como una traslación y el segundo componente $g$ como una transformación lineal.*

*Demostración.* La prueba es directa. Dado que la suma y el producto en $\mathbb{Z}_{2m}$ y $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m}$ son cerrados, el resultado de la operación $\odot$ es también un par $(t, g) \in \Lambda$. Para verificar la asociatividad, debemos comprobar que, para cualquier triple de elementos $(t_1, g_1)$, $(t_2, g_2)$ y $(t_3, g_3)$ en $\Lambda_{2m}$, debe cumplirse que

$$((t_1, g_1) \odot (t_2, g_2)) \odot (t_3, g_3) = (t_1, g_1) \odot ((t_2, g_2) \odot (t_3, g_3)).$$

Esta propiedad se cumple debido a que la suma en $\mathbb{Z}_{2m}$ y la multiplicación en $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m})$ son operaciones asociativas. Por lo tanto, la operación $\odot$ es asociativa. En este grupo, el elemento identidad es $(e_t, e_g) = (0, I_1) \in \Lambda$. Para cualquier $(t, g) \in \Lambda$, se cumple que $(t, g) \odot (e_t, e_g) = (t, g)$ y $(e_t, e_g) \odot (t, g) = (t, g)$. En consecuencia, $\Lambda$ tiene un elemento identidad.

Dejamos como ejercicio encontrar los inversos. Para ello, se puede utilizar la siguiente pista: para cada elemento $(t, g) \in \Lambda$, existe un elemento $(t', g') \in \Lambda$ tal que

$$(t, g) \odot (t', g') = (e_t, e_g) \quad \text{y} \quad (t', g') \odot (t, g) = (e_t, e_g).$$

□

**Observación 5.2.** La diferencia clave entre el producto directo y el producto semidirecto radica en la acción del grupo. En el caso del producto semidirecto, la acción de $\varphi_g$ no envía solo a la identidad (como ocurre en el producto directo), sino que asigna a cada $g$ un automorfismo en $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2m})$. Esto significa que la acción no es trivial, ya que involucra una interacción no solo con la estructura del grupo, sino también con el grupo de automorfismos.

Aunque la definición del grupo es amplia y completa, nuestro interés se centra solo en cómo transformar un intervalo consonante en disonante y viceversa. Por lo tanto, no necesitamos operar dentro del mismo grupo en su totalidad. Lo que necesitamos es la acción de este grupo sobre un intervalo.

Para formalizar esta idea, adaptamos ligeramente la notación para describir esta acción. Damos la siguiente definición:

**Definición 5.3.** La acción del grupo $\Lambda_{2m}$ sobre el grupo de intervalos $i$ está dada por

$$\cdot_\Lambda : \Lambda_{2m} \times \mathbb{Z}_{2m} \longrightarrow \mathbb{Z}_{2m}, \quad (t, g) \cdot_\Lambda (i) \mapsto t + g \cdot i.$$

**Ejemplo 5.4.** Consideremos el caso $m = 6$ para el grupo $\Lambda_{2m}$. Tomemos el elemento $(3, 7)$ y accionemos sobre el intervalo consonante $i = 8$. Entonces,

$$(3, 7) \cdot_\Lambda 8 = 3 + 7 \cdot 8 \equiv 11 \pmod{12}.$$

Dejamos el ejercicio de verificar que esta acción es una biyección si mandamos el intervalo resultante de regreso.

## 6. El teorema de representación de la polaridad

Aunque operar directamente con los elementos del grupo $\Lambda_{2m}$ es útil, también resulta conveniente pensar en una representación del grupo. En este caso, lo que tenemos en mente es enviar el grupo $\Lambda_{2m}$ hacia un conjunto de matrices de la forma:

$$\rho : \Lambda_{2m} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_{2m}).$$

El mapeo hacia matrices es bastante directo si consideramos el espacio de coordenadas homogéneas. Por separado, podemos encarnar el grupo de traslaciones mediante la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $t$ es el valor de la traslación.

Por otro lado, el grupo de elementos invertibles que realizan el escalado queda representado de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $g$ es el factor de escalamiento.

La magia de la composición de estas dos transformaciones se ve reflejada en la multiplicación de matrices, que da como resultado:

$$T \circ G = \begin{pmatrix} g & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definición 6.1.** La representación $\rho_\Lambda$ es el homomorfismo de grupos definido por

$$\rho_\Lambda : \Lambda_{2m} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_{2m}), \quad (t, g) \mapsto \begin{pmatrix} g & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $g \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}_{2m})$ y $t \in \mathbb{Z}_{2m}$.

Es inmediato que la Definición 6.1 cumple el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.** *La representación $\rho_\Lambda$ es isomorfa al grupo $\Lambda_{2m}$.*

*Demostración.* Como definimos más arriba, la operación en $\Lambda_{2m}$ está dada por

$$(t_1, g_1) \odot (t_2, g_2) = (t_1 + g_1 \cdot t_2, g_1 \cdot g_2).$$

Queremos demostrar que la representación $\rho_\Lambda$ preserva esta estructura de grupo, es decir, que

$$\rho_\Lambda((t_1, g_1) \odot (t_2, g_2)) = \rho_\Lambda(t_1, g_1) \cdot \rho_\Lambda(t_2, g_2).$$

Calculemos primero la representación del producto:

$$\rho_\Lambda((t_1, g_1) \odot (t_2, g_2)) = \rho_\Lambda(t_1 + g_1 \cdot t_2, g_1 \cdot g_2) = \begin{pmatrix} g_1 \cdot g_2 & t_1 + g_1 \cdot t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, operemos el producto de las representaciones de los elementos por separado:

$$\rho_\Lambda(t_1, g_1) \cdot \rho_\Lambda(t_2, g_2) = \begin{pmatrix} g_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \cdot g_2 & g_1 \cdot t_2 + t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $g_1 \cdot t_2 + t_1 = t_1 + g_1 \cdot t_2$, concluimos que

$$\rho_\Lambda((t_1, g_1) \odot (t_2, g_2)) = \rho_\Lambda(t_1, g_1) \cdot \rho_\Lambda(t_2, g_2).$$

Esto demuestra que $\rho_\Lambda$ es un homomorfismo. Falta ahora probar la inyectividad y la sobreyectividad.

Para mostrar que $\rho_\Lambda$ es inyectiva, supongamos que $\rho_\Lambda(t, g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esto implica que $g = 1$ y $t = 0$, es decir, $(t, g) = (0, 1)$. Por lo tanto, $\rho_\Lambda$ es inyectiva.

Dado que para cualquier matriz $\begin{pmatrix} g & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_{2m})$, existe un elemento $(t, g) \in \Lambda_{2m}$ tal que:

$$\rho_\Lambda(t, g) = \begin{pmatrix} g & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

concluimos que $\rho_\Lambda$ es sobreyectiva.

Por último, puesto que $\rho_\Lambda$ es un homomorfismo, inyectivo y sobreyectivo, hemos probado que $\rho_\Lambda$ es un isomorfismo entre $\Lambda_{2m}$ y su imagen, que es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_{2m})$. $\square$

**Observación 6.3.** Nota que el isomorfismo es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_{2m})$ generado por $\rho_\Lambda$.

Este resultado muestra cómo, al combinar una traslación con un escalado, obtenemos una transformación afín que actúa sobre las coordenadas homogéneas, como se verá en la siguiente sección.

## 7. Las matrices de polaridad

Para que la representación $\rho_\Lambda$ opere con nuestros intervalos, necesitamos una última transformación.

**Definición 7.1.** Sea $i$ un intervalo cualquiera. El embebido afín $\iota$ en el espacio proyectivo unidimensional se define como el mapeo

$$i \mapsto (i : 1) \colon \mathbb{Z}_{2m} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_{2m}),$$

donde $i \in \mathbb{Z}_{2m}$ y $(i : 1)$ denota el punto en la línea proyectiva correspondiente.

Finalmente, retomemos la pregunta principal: ¿Qué matriz encapsula la consonancia y disonancia en el contrapunto Fuxiano? Emulando análogamente la notación de [Jun10] para la representación, obtenemos la siguiente definición.

**Definición 7.2.** Sea $(i : 1)$ un intervalo cualquiera. La función de polaridad Fuxiana está definida por la acción matricial

$$\rho_\triangle \colon \rho(\Lambda_{12}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_{12}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_{12}), \qquad \left( \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 2 + 5 \cdot i \\ 1 \end{pmatrix},$$

que envía intervalos de la partición $K$ en intervalos de la partición $D$ y viceversa.

La función $\rho_\triangle$, es fundamental para establecer lo que se llama un **dicotomía fuerte**. También conocida como función autocomplementaria, su **unicidad** permite dividir claramente los intervalos en dos categorías bien definidas.

**Ejemplo 7.3.** Tomemos como ejemplo el intervalo de sexta menor $i = 8$. Aplicamos la función de polaridad $\rho_\triangle$ usando la matriz definida anteriormente. La acción de la matriz sobre el vector $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí, hemos pasado del conjunto de intervalos consonantes $K$ (donde $i = 8$) al conjunto de intervalos disonantes $D$ (donde $i = 6$), un intervalo disonante según el contrapunto de Fux.

**Ejemplo 7.4.** Ahora, tomemos el intervalo resultante del ejemplo anterior, $i = 6$. Aplicamos nuevamente la función de polaridad representada $\rho_\triangle$. En este caso, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como vemos, hemos regresado al intervalo inicial, $i = 8$, lo que muestra que hemos hecho el camino de retorno de $D$ a $K$. La acción de la función de polaridad $\rho_\triangle$ es reversible: transforma un intervalo consonante en disonante y, al aplicar la misma transformación, regresa al intervalo consonante original.

## 8. Nuevas perspectivas compositivas

Es probable que ya te estés preguntando: ¿Existen otras funciones de polaridad que puedan ofrecer una visión distinta sobre la relación entre consonancia y disonancia?

La respuesta es afirmativa. De hecho, en el caso de la escala cromática, podemos identificar cinco tipos diferentes más de funciones $\rho_\triangle$, cada una con sus propias características y comportamientos. Por supuesto, los conjuntos $K$ y $D$ estarán formados por intervalos distintos para cada tipo de función de polaridad, lo que abre una gama de interpretaciones sonoras.

Siguiendo procedimientos compositivos similares, es posible aplicar $\rho_\triangle$ para crear contrapuntos de primera especie en estos universos alternativos. Tal como se expone en [Jun10], se puede transitar entre ellos, cruzando las fronteras entre lo consonante y lo disonante en su forma convencional, e incluso adentrarse en mundos microtonales [AA11].

## Referencias


[AA11] Octavio A. Agustín-Aquino. *Extensiones Microtonales de Contrapunto (English Version)*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.

[AAM11] Octavio A. Agustín-Aquino and Guerino Mazzola. On D. Tymoczko's critique of Mazzola's counterpoint theory. In Octavio A. Agustín-Aquino and Emilio Lluis-Puebla, editors, *Memoirs of the Fourth International Seminar on Mathematical Music Theory*, pages 43–48. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2011.

[ea02] Guerino Mazzola et al. *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[FME65] Johann J. Fux, Alfred Mann, and John Edmunds. *The Study of Counterpoint from Johann Joseph Fux's Gradus ad Parnassum*. W. W. Norton, New York, 1965.

[Jun10] Julien Junod. *Counterpoint Worlds and Morphisms: A Graph-Theoretical Approach and Its Implementation on the Rubato Composer Software*. PhD thesis, University of Zurich, 2010.

[Rot95] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 4 edition, 1995.