Matrices que no se ven como matrices

Edgar Delgado Vega

9 de Setiembre de 2025
Compilado el 2 de enero de 2026, v.0.0.1

Resumen

Una visión de cóndor del concepto de matriz. Desde Bourbaki hacia un valor propio que se quedó jato y despertó en el 2026.

Índice

1. Introducción

¿Qué pasaría si, en el fondo, las matrices no tuvieran la forma de una matriz? Esta pregunta puede sonar paradójica; después de todo, ¿no es el arreglo rectangular la propia definición de lo que es una matriz? Pero esta identificación entre el concepto y la representación es precisamente lo que puede limitar nuestra comprensión y nuestro *flow* real cuando improvisemos con este objeto.

Cuando pensamos en las matrices como necesariamente arreglos rectangulares de números, confundimos una estructura matemática con una forma particular de visualizarla. Aquí quiero jugarte cómo liberar a Willy y a las matrices de su forma tabular. Esto nos lleva a otras preguntas de amanecida sobre la misma noción de lo que es una matriz.

2. Matrices familiares

Cuando nos encontramos por primera vez con las matrices, típicamente aparecen con esta pinta familiar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Veremos muchos más ejemplos similares para ganar confianza. Lo que haremos después de este ejercicio repetido será identificar la noción de matriz con un arreglo en forma geométrica rectangular de los números con los que hemos trabajado toda la vida.

Posteriormente comenzamos a realizar la adición clásica, componente a componente, culminando en la multiplicación, que se vuelve una chanfaina. Mucho se ha dicho sobre el por qué se multiplica: que son transformaciones lineales, etc., un sinfín de cosas discutidas en foros y en otros lugares.

Sin embargo, quiero hablar de ciertos puntos que observo cuando tengo una matriz frente a mí, o mejor dicho, cuando reconozco que lo que tengo frente a mí no necesariamente tiene que verse como matriz para serlo.

3. Bourbaki en pro de la abstracción

Mi primer recurso es el colectivo Bourbaki. La definición que dan de una matriz es general y sirve como punto de partida para seleccionar las rimas. La citaré aquí con notación más convencional, dada la cantidad de horas de álgebra lineal que seguro tienes acumuladas.

Tenemos dos conjuntos I, J. Lo recalco aquí: son dos conjuntos. La primera definición semiformal es que una matriz $\mathfrak{M}$ es una colección de números (lo ampliaremos en un momento) que están ordenados por el producto cartesiano $I \times J$.

Por ejemplo, si $I = 1, 2$ y $J = a, b$, nuestra matriz es

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{1,a} & m_{1,b} \\ m_{2,a} & m_{2,b} \end{pmatrix}$$

Podemos ver que los elementos están agrupados según

$$I \times J = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

Seguro que te preguntas por qué aparecen a y b, no solo números. Bueno, porque en realidad se trata de cualquier conjunto (acabo de ponerlo más arriba). Los índices pueden ser cualquier cosa, siempre que sean distinguibles entre sí.

Una vez que sabemos esto, nos preguntamos al toque si los números del primer ejemplo de matriz $\{2, 4, 5, 7\}$ también pertenecen a un conjunto. De hecho, llamaremos a este conjunto A, que puede consistir en números o cualquier otra vaina que se te ocurra imaginar.

Al respecto, lo más común, por cercanía con las aplicaciones en ingeniería y física, el conjunto A suele ser $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}_p$ (los p-adicos), por nombrar algunos. Pero A puede ser mucho más extraño. Pueden ser matrices de matrices, o cosas que vemos con funciones reales f en cálculo, como la matriz Hessiana:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Aquí, A consiste en operadores diferenciales, es decir, funciones actuando sobre funciones.

4. El salón de las matrices

Tenemos ya el sencillo para el menú. Vemos que una matriz involucra tres conjuntos trabajando juntos (salió con rima consonante). Esta es la perspectiva Bourbakista, a la cual me adhiero porque es el lonche pivote.

Definición 4.1. Una matriz es una función de la forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} : I \times J &\to A \\ (i,j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Es decir, a cada par ordenado de índices $(i,j) \in I \times J$, asociamos cualquier familia de elementos a_{ij} del conjunto A. Esto les resulta más familiar. Esto es lo que Bourbaki presenta como una matriz de tipo (I, J) sobre A. También damos nombres para su clasificación: I para filas y J para columnas.

5. 1,000 km en la dirección correcta

Continuemos con una discusión amena luego de año nuevo. Comenzaré con un par de preguntas. ¿Por qué ambos conjuntos suelen ser finitos? Te suelto una razón computacional: las matrices infinitas requieren un manejo cuidadoso de la convergencia y la sumatoria. Curiosamente, en los lenguajes de programación, para acceder a un elemento del conjunto A en la dúctil estructura de datos llamada arreglo usamos un índice.

```
  // Acceder al elemento en la fila i, columna j
const element = matrix[i][j];
```

De alguna manera, esta idea computacional captura algo esencial: una matriz es fundamentalmente sobre direccionabilidad, sobre ser capaz de señalar ubicaciones específicas en un espacio estructurado. Es considerablemente más simple que la visión poética de pensar en las matrices como esa forma rectangular, como un objeto geométrico.

Así, aunque muchas cosas prácticas ocurren en pequeños intervalos (¿qué tan pequeños son 3 millones?) de $(1,p)$ y $(1,q)$, donde $p,q \in \mathbb{N}$ (como mencionó Bourbaki), es muy chévere pensar en una matriz como algo disperso sobre una hoja de papel, una verdadera sopa de números, pero con sus índices debidamente asociados y escritos junto a ella.

La segunda discusión que podrías iniciar pasadas un par de horas de año nuevo es si puede el conjunto I ser infinito y el conjunto J finito. Matemáticamente, sí.

Tales matrices aparecen naturalmente en la teoría de operadores y en el análisis funcional. Pero, tus amigos ya comenzaron a hablar de otras cosas.

> Un vector abstracto en $\mathbb{R}^N$ podría ser una línea torcidísima, extendiéndose a través de diferentes paredes y pisos de una casa, con sus componentes esparcidos por todas partes, siempre y cuando los índices i, j los mantengan bajo control.

6. Potencialidad en el espacio de matrices

Antes de pasar a quedarnos dormidos en esta última sección, quítate tus lentes amarillos, porque tendré voz reflexiva de año nuevo a las 7 de la mañana. ¿Está bien?

La matriz, determinada por pares ordenados, me recuerda a la potencialidad geométrica del conocido plano cartesiano. Es decir, en él se abre un mundo que permite ejecutar o imaginar diferentes procedimientos propios de la geometría.

Así, por ejemplo, hablamos de la transposición de una matriz (intercambiando índices), de matrices simétricas (donde el orden no importa), de matrices cuadradas (dimensiones iguales), de matrices triangulares (donde una mitad desaparece en nulidad), de matrices diagonizables, de matrices invertibles y así sucesivamente.

Esta concretización y aparente simplificación de la notación de matrices crea una especie de taxonomía de matrices que aparece por analogía con los procesos geométricos. Cada concepto extrae su significado de cómo cruzamos el espacio de índices $I \times J$. Es decir, algo especial sucede aquí:

> El orden habilita diferentes geometrías y determina propiedades aritméticas, físicas y novedosas para el conjunto base A de interés.

Por ejemplo, una matriz simétrica, que posee varias propiedades espectrales hermosas, debe simplemente satisfacer una condición de intercambio de orden, el primero va segundo y viceversa:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Esta condición de intercambio de índices impone una restricción fundamental. La transformación debe verse igual, ya sea que la leamos como (i, j) o como (j, i). Esta invariancia bajo permutación de índices, una propiedad puramente geométrica de cómo navegamos $I \times J$, se refleja en consecuencias espectrales.

Los eigenvalores λ_s se vuelven reales no por ninguna propiedad de los números en sí, sino porque la simetría de la estructura de índices prohíbe ciertos comportamientos espectrales. Cada restricción geométrica sobre los índices produce una firma espectral, una aritmética característica que no existiría sin la estructura subyacente de orden.

7. Feliz año nuevo

Hasta aquí dejamos este aguadito que tomamos para revivir la noción de matriz. Mándale saludos al mar.