

# Logaritmos, cents y MIDI: una pista básica

Edgar Delgado Vega

29 de abril de 2022

Compilado el 13 de septiembre de 2025, v.0.0.1

## Resumen

Tratamos brevemente algo que tal vez te ha sido divertido: los *cents*. ¿Es el mejor nombre de la vida? Bueno, es una forma traslúcida de convertir la turbulenta relación multiplicativa de frecuencias en algo mucho más de barrio: una distancia aditiva. Al final, veremos cómo saltamos directamente a otras áreas, como los *mels*, los decibelios y las notas MIDI. No te preocupes, que esto viene tranco a tranco.

## 1. Una nada sobre logaritmos

El logaritmo natural  $\ln(x)$  para  $x > 0$  se define de forma un poco rara, pero bonita (como casi todo en matemáticas) mediante una integral:

**Definición 1.1** (Logaritmo en su transformación súper integral).

$$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\ln(x) = - \int_x^1 t^{-1} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

y, en vez de ser una función aburrida, representa el área debajo de la curva  $y = \frac{1}{t}$  desde 1 hasta  $x$ .

**Observación 1.2.** Cuidado, no te confundas, el eje horizontal es  $t$ , no  $x$ .

Y sí, también tiene propiedades clásicas, como la continuidad, la monotonía (si te suena a algo de control), y esa ley del producto que todo aquel interesado en morfismos de grupos alguna vez quiso:

$$\ln(xy) = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt.$$

Lo que en cristiano es:  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ . Realmente no es tan raro.

Para desarrollar nuestro microsistema, necesitaremos otras bases. Dado un número real  $b > 0, b \neq 1$ , el logaritmo en base  $b$  se define así:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)} \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Esto simplemente es tomar el logaritmo natural y le pones tu salsa criolla.

## 2. Distancia de octavas y cents

En música, la distancia entre dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  medidas en octavas se define como:

$$\Delta(f_1, f_2) = \log_2 \left( \frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\frac{f_1}{f_2}} \frac{1}{t} dt.$$

¿De qué se trata esto? Básicamente, es una forma de medir cuántas veces una frecuencia  $f_1$  es más grande que  $f_2$ , pero usando logaritmos para hacerlo de forma más práctica.

La distancia en *cents* (que ya se volvió el estándar) es la octava subdividida en 1200 partes iguales:

**Definición 2.1** (Los cents para tu consumo).

$$\text{cents}(f_1, f_2) = 1200 \times |\Delta(f_1, f_2)|.$$

Y lo mejor es que los *cents* respetan lo que nuestra oreja percibe de forma mucho más directa. Mientras que nuestra percepción se basa en la *razón*  $\frac{f_1}{f_2}$  y no en la diferencia  $f_1 - f_2$ , los *cents* nos dan una forma más intuitiva de comparar esas pequeñas distancias en frecuencias. Hilar y tejer con toda la fineza aquí será posible.

## 3. Generalizando hacia cualquier dupla

Ya estamos con la concentración suficiente para abrir un poco más el lente de nuestro teléfono. Si definimos una unidad arbitraria de interés musical  $\Delta_b$  como el valor logarítmico en base  $b$  de la razón entre dos magnitudes, tenemos:

$$\Delta_b(X_1, X_2) = \frac{1}{\ln(b)} \int_1^{\frac{X_1}{X_2}} \frac{1}{t} dt.$$

Y si queremos ser aún más MADs, introducimos un factor de escalamiento  $\kappa$ , que es simplemente cómo de finitos quieres que sean tus intervalos. Así que podemos escribir la definición que veníamos a redescubrir (en rima para que suene afín):

**Definición 3.1** (La fórmula en su esplendor).

$$\Delta_b^\kappa(X_1, X_2) = \frac{\kappa}{\ln(b)} \int_1^{\frac{X_1}{X_2}} \frac{1}{t} dt, \quad b > 0, b \neq 1, \kappa > 0.$$

Esta fórmula (3.1) es la que necesitábamos para darle paso a los ejemplos que vienen en un toque.

## 4. Volviendo a ejemplos

Ahora, lo bueno: ejemplos. Si tomamos la distancia entre dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  medida en octavas, podemos escribir fácilmente:

$$\Delta_2^{1200}(f_1, f_2) = \text{cents}(f_1, f_2).$$

Y también podemos ver algo más sabroso, como el *mel*, que se define así:

$$\Delta_{10}^{2595}(f) = \frac{2595}{\ln(10)} \int_1^{1+\frac{f}{700}} \frac{1}{t} dt = \text{mel}(f).$$

Sí, es una forma divertida de medir la percepción del tono, y nos recuerda que no todo marcha por líneas.

Por último, en el búnker de la intensidad sonora, si tenemos  $I_1$  en Watios por metro cuadrado, la relación en decibelios se expresa como:

$$\Delta_{10}^{10}(I_1) = \frac{10}{\ln(10)} \int_1^{\frac{I_1}{10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \frac{1}{t} dt = L_{\text{dB}}.$$

**Observación 4.1.** Ten calma con las cosas adimensionales.

## 5. Ajá: ya vi el MIDI

Directo al asunto. Una fórmula práctica para calcular una nota MIDI desde una frecuencia  $f$  dada es la siguiente:

$$n(f) = 69 + 12 \log_2 \left( \frac{f}{440} \right).$$

Lo mejor es que también puedes reescribirlo en términos de la integral (3.1), y se ve bastante brutal:

$$\Delta_2^{12}(f, 440) + 69 = n(f) = 69 + \frac{12}{\ln 2} \cdot \int_1^{\frac{f}{440}} \frac{1}{t} dt.$$

Como puedes notar, solamente se le adiciona el número de nota MIDI que le toca a la frecuencia  $f$ .

¿Pero qué pasa si quieres cambiar la referencia de 440 Hz a otra frecuencia  $f_0$ ? Solo debemos que mover el bote, es decir, la base  $f_0$  en la fórmula. Entonces, la expresión se convierte en:

**Definición 5.1** (El MIDI indeciso).

$$\Delta_2^{12}(f, f_0) + \beta = n_\beta(f, f_0) = \beta + \frac{12}{\ln 2} \cdot \int_1^{\frac{f}{f_0}} \frac{1}{t} dt.$$

Tenemos nueva nota MIDI  $n_\beta$  que queremos asignar a la frecuencia  $f_0$ .

**Ejemplo 5.2.** Supongamos que queremos que la nota MIDI 60 se asigne a una frecuencia de 261,63 Hz (que es la frecuencia estándar de C4). Entonces, nos soltamos la siguiente frase:

$$n_{60}(f, 261,63) = 60 + \frac{12}{\ln 2} \cdot \ln \left( \frac{f}{261,63} \right)$$

En palabras simples y sencillas, puedes aplicar este truco con cualquier frecuencia base que te guste para armar el tonazo.

## 6. La última cuerda

Si damos un paso atrás y miramos con más calma, veremos que el espacio  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ , ese espacio donde todo se multiplica, se convierte en un espacio aditivo  $(\mathbb{R}, +)$  gracias al sabor del *logaritmo*. Este truco es útil en varias ideas. Te lo repito: las relaciones multiplicativas se convierten en intervalos aditivos que podemos medir y comparar con un toque mucho más sencillo.

**Licencia** Este documento está disponible bajo la licencia Creative Commons [CC BY-NC-ND 4.0](#), que permite su distribución con fines no comerciales, siempre que se otorgue el crédito adecuado y no se realicen obras derivadas.