Micrófonos de Gauß y tablas de multiplicar

Edgar Delgado Vega

13 de agosto de 2025
Compilado el 26 de agosto de 2025, v.0.0.1

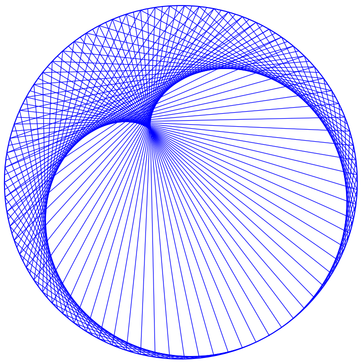

Figura 1: Cardiode en la aritmética de Gauß.

Índice

1. Preludio: la yunza cardiode

Comenzamos directo con la yunza: las cardioides son un caso especial de epicicloides, que a su vez son un tipo de epitrocoide. Hay muchas formas de construirlas, pero este día las veremos bajo la aritmética de los reflejos de los baldes de agua.

Espera un toque, primero un pantallazo del contexto clásico: una cicloide es la curva que traza un punto en el borde de una rueda que gira sin resbalar, como cuando juegas a encantados girando en círculo.

Ahora bien, si esa rueda gira no sobre una línea recta, sino sobre otra circunferencia del mismo radio, el punto dibuja una cardioide, una figura con forma de corazonada cuando te perdiste en Gamarra. Si le das click con cariño al sitio de MathCurve, verás que fue estudiada por Rømer (1674), Vaumesle (1678), La Hire (1708), y finalmente bautizada por Castillon (1741), quien le dio su nombre del griego *kardia* = corazón. Por ende, esta figura tiene todo el *flow* del amor. Matemáticamente, si θ es el ángulo de giro, la cardioide se puede escribir en coordenadas polares como:

$$\rho(\theta) = a(1 - \cos\theta) -$$

No la derivaremos, eso es maximalmente conocido. Nosotros vamos por un lado subrepticio: multiplicaciones, relojes y un ají criollo de álgebra modular.

2. Amigos, fiestas y congruencias

Imagina que tienes un grupote de amigos, al cual llamaremos A, y quieres juntar a esos amigos en pequeñas manchitas donde todos se lleven chévere, como en tu tono *vip*.

Para hacer esto, usamos lo que en matemáticas se llama una relación de equivalencia, que es como una regla que dice cuándo dos amigos son los *bf*. Esta regla, que llamaremos $\sim$, cumple tres cosas que hacen que la manchita funque.

Primero, cada amigo es su propio mejor causa, o sea, nadie se queda fuera, cada quien es amigo de sí mismo. Con algo de símbolos:

$$\forall a \in A, \quad a \sim a. \tag{1}$$

Luego, la amistad es recíproca: si tú eres amigo de alguien, esa persona también es amiga tuya.

$$\forall a, b \in A, \quad a \sim b \implies b \sim a. \tag{2}$$

Y por último, la amistad se contagia. Si tú eres amigo de alguien, y esa persona es amiga de otro más, entonces tú también eres amigo de ese tercero. Así la manchita pasa la voz:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \sim b \wedge b \sim c) \implies a \sim c. \tag{3}$$

Ahora, vamos al quid de la cuestión: aritmética modular, o como me gusta llamarla, los relojes matemáticos. Definimos una relación, que parece un igual con una línea encima, desarrollada por Gauß en sus *Disquisitiones arithmeticae*. Esta relación, que escribimos como $\equiv$, se define en los enteros $\mathbb{Z}$ así:

Definición 2.1. Sea un entero positivo $n > 1$.

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \iff \quad n \mid (a-b),$$

es decir, a y b son equivalentes módulo n si, al dividirlos entre n, dejan el mismo residuo r.

Vamos a ver que esta relación cumple con lo que pedimos para ser una relación de equivalencia, las tres premisas para una buena reu que vimos hace un momento más arriba.

Demostración. Primero, reflexividad (1): para cualquier $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a - a = 0$, y como n divide a 0, entonces

$$a \equiv a \pmod{n}.$$

Luego, simetría (2): si $a \equiv b \pmod{n}$, quiere decir que $n \mid (a-b)$, y entonces también $n \mid (b-a)$ porque $b - a = -(a-b)$. Por lo tanto,

$$a \equiv b \pmod{n} \implies b \equiv a \pmod{n}.$$

Finalmente, transitividad (3): si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $n \mid (a-b)$ y $n \mid (b-c)$. Sumando estas divisiones,

$$n \mid (a-b) + (b-c) \implies n \mid (a-c),$$

lo que implica $a \equiv c \pmod{n}$. □

Es poquito lo que se dice, pero un montón lo que se verifica. La relación de congruencia módulo n es una relación de equivalencia que divide a los enteros en *boxes*. Para cada número $x \in \mathbb{Z}$, su clase de equivalencia se escribe como

$$[a]_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\},$$

que significa el conjunto de todos los enteros x que dejan el mismo residuo que a al dividir entre n.

Cada manchita es como un grupo exclusivo de números que comparten el mismo residuo al dividir por n. Aquí están los relojes a punto de fallar.

3. El algoritmo de la yunza

¿Y para qué vimos todo este floro de relación de equivalencia y tanta vaina? Pues mira, las tablas de multiplicar junto con un pequeño algoritmo que traza cuerdas en la circunferencia van a crear esas curvas rodadizas que tanto nos gustan.

El patrón cardioide es como la estrella del evento en micrófonos de condensador sin flujo, o sea, la forma en que captan el sonido. Aquí vamos a explicar la fórmula matemática que describe la curva, y también por qué le metemos una división entre 2 para que se despierte a las 8 a tomar su aguadito el domingo.

> El truco tiene su toque poético, cortesía de un bellísimo y detallado relato que puedes leer de Rogelio Pérez Buendía.

Necesitamos dos platos sustanciales para nuestro almuerzo.

Tomemos la sopa. Basta con escoger un reloj de H horas. Luego, elegimos una tabla de multiplicar. En general, trabajar con tablas de multiplicar tiene dos ingredientes: el número de la tabla, que llamaremos T, y todos los valores del 1 al número de horas, que denotaremos como

$$x = \{1, 2, \ldots, H\}.$$

Definición 3.1. Describimos las tablas de multiplicar T como las congruencias gaussianas

$$Tx \equiv y \pmod{H}. \tag{4}$$

Toca el segundo que esta vez fuerte para cuando hace frío. La construcción geométrica es muy simple, como verás.

Definición 3.2 (Algoritmo geométrico)**.** En una circunferencia de H horas, trazaremos una cuerda de acero entre x y la y, es decir, $C = \overline{xy}$ para alguna tabla de multiplicar T.

Ejemplo 3.3. Tomemos $T = 2$ y un reloj de $H = 7$ horas. Entonces:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 = 2 &\equiv 2 \pmod{7} \\ 2 \cdot 2 = 4 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 2 \cdot 3 = 6 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 2 \cdot 4 = 8 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 2 \cdot 5 = 10 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 2 \cdot 6 = 12 &\equiv 5 \pmod{7} \\ 2 \cdot 7 = 14 &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Ahora trazamos cuerdas entre cada par (x, y). Cada línea conecta el número x con su imagen $y = Tx \mod H$ sobre la circunferencia. La curva rueda de forma mágica (sin que la veas). Mira el seudotangram.

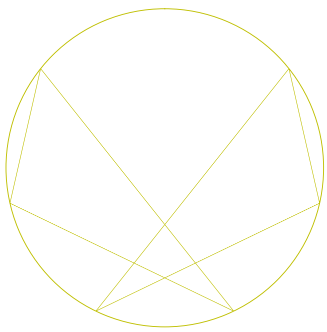

Figura 2: Ejemplo de la tabla del 2 sobre un $H = 7$ en la ronda de Gauß.

4. Micrófonos clásicos

Veamos qué pasa cuando el número de horas H del reloj empieza a prolongarse. Las tablas de multiplicar suelen pensarse simplemente como una lista lineal de cuentas: 1 por 2, 2 por 2, 3 por 2... pero, ¿por qué no hacerlas bailar alrededor de la yunza un rato? Habrá que dibujar los pasos, saltarlos y girar alrededor del árbol de los H baldes.

Cada número se convierte en un punto en la clepsidra imposible, y al multiplicarlo, tiramos una cuerda hasta el lugar donde sube la mano su múltiplo. El resultado son formas verdaderamente hermosas, llenas de simetrías que parecen una buena coreo de la aritmética.

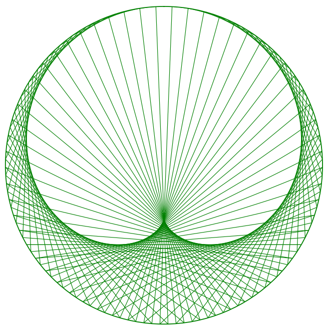

Figura 3: Tabla del 2 con Gauß con algo de rotación.

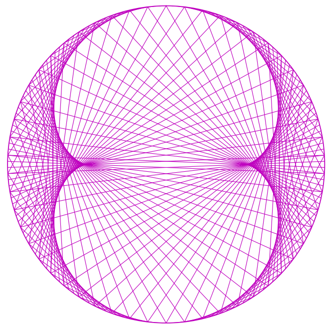

Figura 4: Tabla del 3 con Gauß.

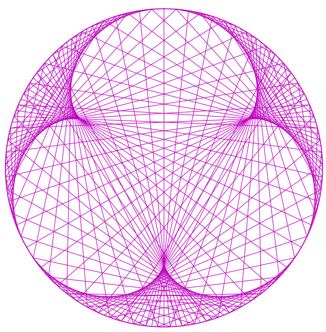

Figura 5: Tabla del 4 con Gauß.

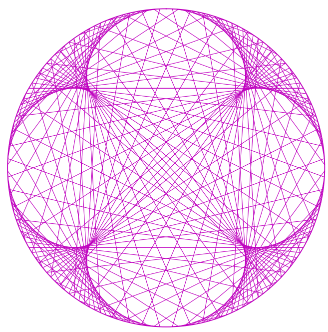

Figura 6: Tabla del 5 con Gauß.

Las tablas de multiplicar también pueden explorarse de otra manera: con curvas, dibujos, simetrías, colores, formas que se repiten y se transforman. Vamos más allá de memorizar números: también memorizamos imágenes mientras jugamos con ellas, mientras las vemos moverse.

Entonces, las tablas también son una especie de geometría viva. ¿Qué pasa si variamos T o H? Sí, cambian los patrones. Pueden aparecer estrellas, pétalos, remolinos. Otra formita de multiplicar.

Observación 4.1. Te toca a ti trazar la tabla del 11.

5. El árbol de rayos dobles, triples y cuádruples

Prosigamos con más posibilidades. Por ejemplo, si $T = H$, lo que observamos es una especie de árbol enraizado que emana desde un solo punto: todas las cuerdas nacen desde la clase $[0]_H$.

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &\equiv 0 \pmod 7 & 7 \cdot 5 &\equiv 0 \pmod 7 \\ 7 \cdot 2 &\equiv 0 \pmod 7 & 7 \cdot 6 &\equiv 0 \pmod 7 \\ 7 \cdot 3 &\equiv 0 \pmod 7 & 7 \cdot 7 &\equiv 0 \pmod 7 \\ 7 \cdot 4 &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

Todo cae en el mismo sitio, como si cada rama volviera al tronco. Ahora, si tomamos $T = \frac{H}{2}$, lo que aparece es un árbol de doble rayo: dos nodos raíz, como polos opuestos. En este caso, las clases $[0]_H$ y $[\frac{H}{2}]_H$ se ubican en el norte y el sur del reloj. Cada número va hacia uno u otro, como si hubiera dos soles atrayendo.

¿Y si pensamos en triples, cuádruples o más? Si tomamos un número $n \in \mathbb{Z}$ tal que $T = \frac{H}{n}$, entonces el patrón se expande: tendremos n nodos raíz distribuidos simétricamente en la circunferencia. Para $n = 4$, los puntos raíz aparecen en el norte, sur, este y oeste. Y así sucesivamente: seis raíces para hexágonos, ocho para octágonos. ¿Ñas tablas también son brújulas aritméticas lanzando rayos en todas direcciones?

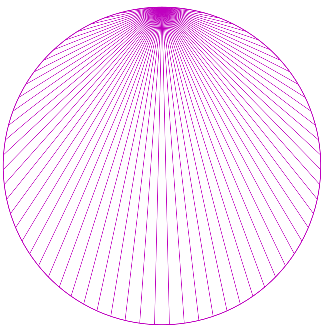

Figura 7: Árbol bajo la aritmética modular de Gauß.

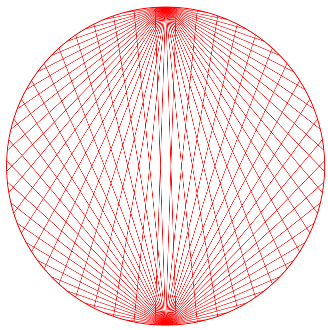

Figura 8: Árbol de doble raíz bajo la aritmética modular de Gauß.

Proposición 5.1. *Sea $H, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \mid H$ y $T = \frac{H}{n}$. Entonces, el grafo resultante presenta n nodos raíz, correspondientes a las clases de equivalencia*

$$[0]_H, \left[\frac{H}{n}\right]_H, \left[2 \cdot \frac{H}{n}\right]_H, \ldots, \left[(n-1) \cdot \frac{H}{n}\right]_H.$$

Desde cada uno de estos nodos salen rayos que conectan con las demás clases según la multiplicación por T.

5.1. El retorno a sí mismo

Ahora veamos qué ocurre si la tabla es justo una unidad más que el número de horas del reloj. Es decir, si $T = H + 1$. Tomemos $H = 7$, entonces $T = 8$:

$$\begin{array}{llllll} 8 \cdot 1 & \equiv 1 & \pmod{7} & 8 \cdot 5 & \equiv 5 & \pmod{7} \\ 8 \cdot 2 & \equiv 2 & \pmod{7} & 8 \cdot 6 & \equiv 6 & \pmod{7} \\ 8 \cdot 3 & \equiv 3 & \pmod{7} & 8 \cdot 7 & \equiv 0 & \pmod{7} \\ 8 \cdot 4 & \equiv 4 & \pmod{7} & & & \end{array}$$

Cada número vuelve a sí mismo, como si se reflejara en un espejo aritmético. Las cuerdas conectan el mismo punto consigo mismo, y no vemos enlaces entre diferentes números.

Proposición 5.2. *Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $T = nH + 1$, entonces cada número x cumple*

$$T \cdot x \equiv x \pmod{H}.$$

5.2. Los inversos

Si tomamos $T = 2H - 1$, nos topamos con un fenómeno de los primeros días con el cuaderno triple renglón. El dictado dice:

$$\begin{array}{llllll} 13 \cdot 1 & \equiv 6 & \pmod{7} & 13 \cdot 5 & \equiv 2 & \pmod{7} \\ 13 \cdot 2 & \equiv 5 & \pmod{7} & 13 \cdot 6 & \equiv 1 & \pmod{7} \\ 13 \cdot 3 & \equiv 4 & \pmod{7} & 13 \cdot 7 & \equiv 0 & \pmod{7} \\ 13 \cdot 4 & \equiv 3 & \pmod{7} & & & \end{array}$$

Aquí las multiplicaciones parecen hacer un baile espejo: cada número se conecta con su inverso multiplicativo, o dicho de otro modo, con su gemelo opuesto en la circunferencia de Gaß.

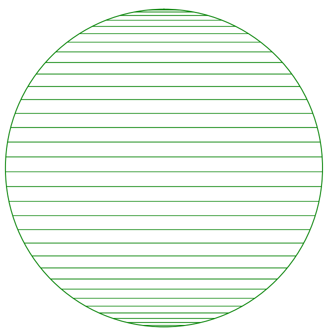

Figura 9: Inversos bajo la aritmética modular de Gauß.

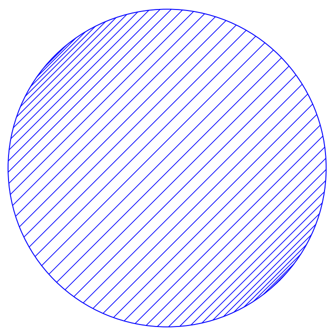

Figura 10: Inversos con rotación en el mundo de Gauß.

Proposición 5.3. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si elegimos una tabla $T = nH - 1$, el patrón que emerge es un grafo que conecta cada número con su inverso multiplicativo. Matemáticamente, esto pasa porque*

$$T \cdot x \equiv -x \pmod{H}.$$

6. El doble más dos o menos dos

Imaginemos que tenemos una fórmula especial que se convierte en un radar:

$$Tx \equiv y \pmod{2T+2} \tag{5}$$

Obtendremos un grafo a manera de cuadrícula rectangular para buscar las esferas del Dragón.

Ejemplo 6.1. Aquí te suelto las respuestas numéricas para $T = 30$:

30, 60, 28, 58, 26, 56, 24, 54, 22, 52, 20, 50, 18, 48, 16, 46, 14, 44, 12, 42, 10, 40, 8, 38, 6, 36, 4, 34, 2, 32

Ahora, si cambiamos un signo para que nadie se de cuenta y usamos la siguiente congruencia:

$$Tx \equiv y \pmod{2T-2} \tag{6}$$

Ejemplo 6.2. Ahora toma la secuencia en el caso numérico $T = 51$:

51, 2, 53, 4, 55, 6, 57, 8, 59, 10, 61, 12, 63, 14, 65, 16, 67, 18, 69, 20, 71, 22, 73, 24, 75, 26, 77, 28, 79, 30, 81, 32, 83, 34, 85, 36, 87, 38, 89, 40, 91, 42, 93, 44, 95, 46, 97, 48, 99, 50, 1

¿Algo más complejo, verdad?

Generaemos un ojo al centro con rayos que se despliegan hacia todos los rincones del plano.

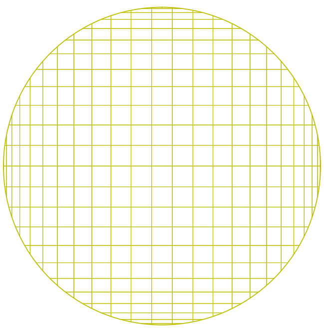

Figura 11: Horas como doble y suma de dos T.

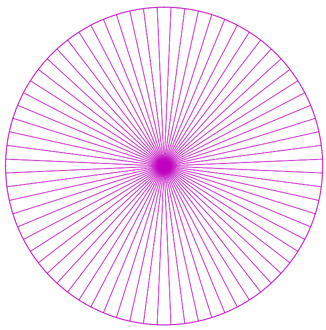

Figura 12: El ojo central que emana rayos.

7. El triple y su más o menos 3

Cuando tomamos la ecuación:

$$Tx \equiv y \pmod{3T+3} \tag{7}$$

aparecerá un grafo en forma de una retícula triangular que nos recuerda las figuras que forman tu baraja con diamantes. Cuanto mayor sea T, más complejas y hermosas se forman pequeñas figuras romboidales que hacen que el gráfico se convierta en un tapiz geométrico que se despliega como tu avión de papel.

Este es el tipo de truco ocurre cuando multiplicamos y movemos un solo número en la rueda de Gauß.

¿El radar de las esferas del Dragón era triangular?

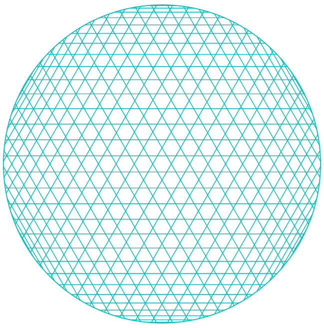

Figura 13: Retícula triangular: $H = 3T + 3$.

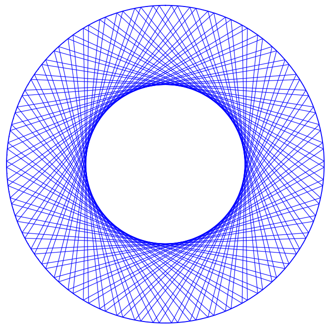

Figura 14: Un aro de llanta: $H = 3T - 3$.

Ahora, si cambiamos el signo y trabajamos con:

$$Tx \equiv y \pmod{3T - 3} \tag{8}$$

Sale una figura muy chévere. Con la resta $3T - 3$, aparece un ánulo (sí, como el aro de una llanta de tu deportivo del 70). La diferencia aquí es que las conexiones aún muestran la trayectoria triangular pero forman una especie de anillo, donde el centro es vacuidad pura.

¿Esto nos te recuerda un momento a la geometría en variable compleja, si trazamos los arcos sin dejar caer el lápiz sobre los puntos numéricos? Sea $a \in \mathbb{C}$ un punto fijo en el plano complejo, y sean $r, R \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r < R$. Entonces, definimos el anillo abierto, dígase también corona circular abierta (a lo MAD), centrado en a y de radios r y R como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(a; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

O sea, estamos hablando de todos los puntos complejos cuya distancia al centro de Lima a está entre r y R, pero *sin tocar los bordes*. Escapamos de los círculos de radio r o R; esta es la zona libre de parqueo. Aunque en nuestro caso, podemos también hacer la dona cerrada. Como quieras ver la topología.

8. Mixtura de Tablas y Horas

Veamos ahora qué vuelta con esta ecuación:

$$Tx \equiv y \pmod{2T - 3} \tag{9}$$

Además, algo curioso pasa con la relación entre H y T:

$$H = 2T - 3 = 3T - 2,$$

Ahora que ya hemos combinado varios patrones, es la hora de coleccionar nuestro álbum que llamaremos bestiario modular. Existe toda una zoología visual que tal vez espera ser nombrada, sin duda, mucho mejor que aquí.

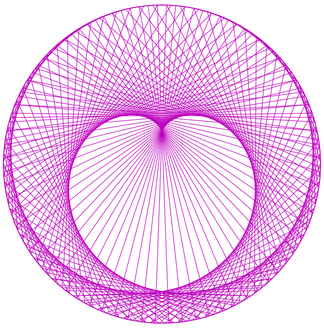

Figura 15: Corazón valiente: $H = 3T - 2$.

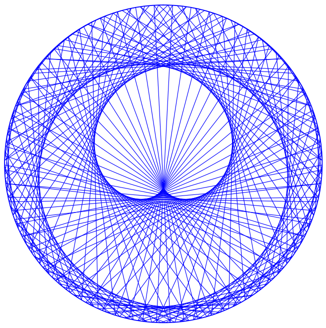

Figura 16: Corazón valiente invertido: $H = 3T - 4$.

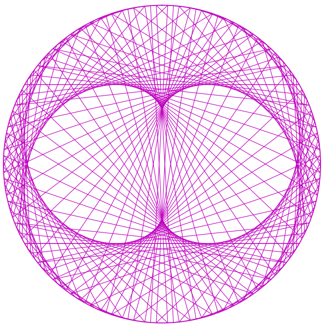

Figura 17: Doble ojo: $H = 2T - 4$.

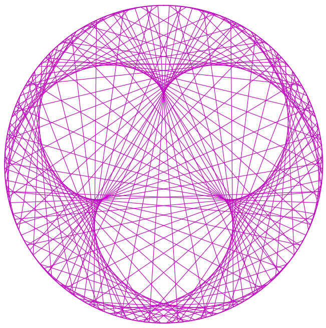

Figura 18: Trébol inverso: $H = 2T - 5$.

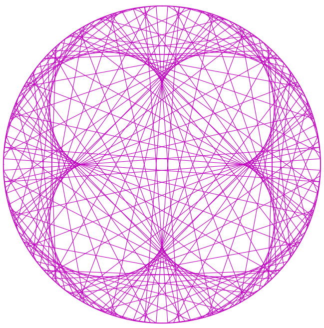

Figura 19: M mariposa: $H = 2T - 6$.

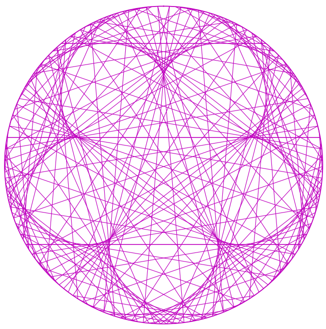

Figura 20: Flor de 5 pétalos: $H = 2T - 7$.

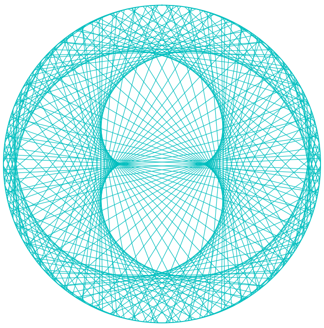

Figura 21: Nefroide vertical interno $H = 3T - 5$.

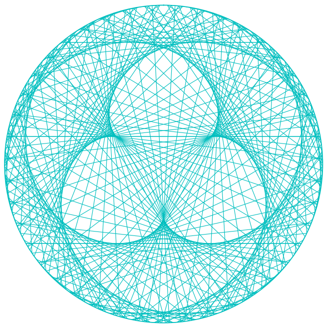

Figura 22: Trébol interno $H = 3T - 6$.

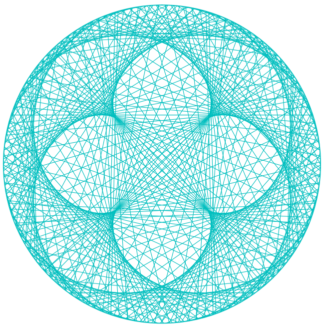

Figura 23: Flor de 4 hojas interna $H = 3T - 7$.

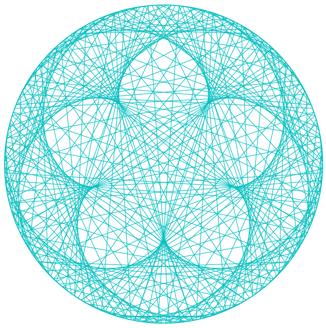

Figura 24: Flor de 5 hojas interna $H = 3T - 8$.

9. Las ruedas

Por el momento, agregaremos un par de menjungues numéricos más. Cuando hacemos $H = 4T - 4$, obtenemos un rueda de vehículo. En general, se obtienen figuras circulares anidadas de este estilo cuando

$$Tx \equiv y \pmod{n(T-1)}, \quad \text{donde } n \geq 4. \tag{10}$$

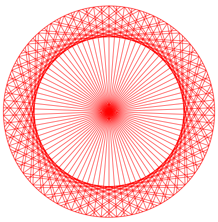

Figura 25: Rueda con T par, $H = 4T - 4$.

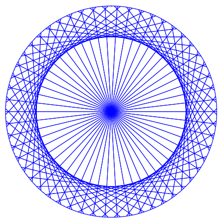

Figura 26: Rueda con T impar, $H = 4T - 4$.

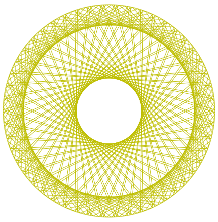

Figura 27: Rueda con $T = 51$, $H = 5T - 5$.

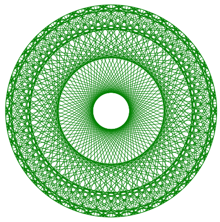

Figura 28: Rueda con $T = 43$, $H = 9T - 9$.

10. Las tablas en movimiento

Si quieres ver cómo se arma el tono en tiempo real, métete al toque al *site* de Mathias Lengler. Escoges tu tabla y cambias el número de horas como si fueras un DJ.