Carpintería al máximo detalle: los dientes de Fourier

Edgar Delgado Vega

15 de agosto de 2025 | Compilado el 16 de agosto de 2025, v.0.0.1

1. Las 4 maderas

El borde dentado de esa bestia mecánica de la Figura (1) tiene un detalle tan rítmico que se deja traducir en papel pautado, en una función periódica.

Figura 1: Estrella de 11 puntas: 4 maderas, técnica Yaki Sugui. *Máximo Detalle*.

¿Y qué es una función periódica, seguro te preguntas? Citemos la definición del noble libro de Terence Tao, *Analysis II*:

Definición 1.1 (Mutación de [Tao16, Definición 5.1.1])**.** Pensemos primero en T como un número real estrictamente mayor que cero, es decir, $T \in \mathbb{R}_{>0}$.

Nuestro cuento es que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de ayer si tiene periodo T, si se tiene que

$$f(t+T) = f(t),$$

donde t es una variable de contra contratiempo de un compás.

Entonces, ¿cuál función tiene su jama con T y queda nuevamente igual? Entre muchas, tal vez las más conocidas son las funciones trigonométricas de los reales amigos. Observa a la popular:

$$f(t) = \alpha \sin\left(2\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau\right)^2 f_0 t + \varphi\right) + \kappa. \tag{1}$$

Espera, ¿también has metido la campana integrada de Gauß? ¿Por qué tanta bondad, te preguntarás?

Primero, olvidemos lo de arriba y abajo de κ. Aquí lo bonito es que (1) puede verse como solución a una ecuación diferencial lineal de segundo orden (esto está sale cañón con la caligrafía calculística de Leibniz):

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left(2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \right)^2 f_0 \right)^2 f(t) = 0.$$

Observación 1.2. Tengo algo de fijación con el número 2, por ser un dado que tira verdadero y falso. Ahora lo verás en las ecuaciones que están por llegar.

Otra manera de pensar la función periódica seno es mediante su expansión en series de potencias. En otras palabras, mediante la representación analítica de la función exponencial en los complejos $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tenemos raudamente:

$$\sin(z) = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{N!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-iz)^N}{N!}}{2i}. \tag{2}$$

Observación 1.3. Los complejos no se llevan bien con los "mayores" y "menores": no tienen orden total como los reales. Acá todo es giro y magnitud, no se puede decir quién es "más grande". ¡Muy complejo para eso!

Si restringimos la ecuación (2) al mundo real nutrido de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ([Tao16, véase Capítulo 4, p.94]), nos queda esta forma así de sencilla y conocida:

$$\sin(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N t^{2N+1}}{\Gamma(2N+2)} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + \text{Ya tú sabes.}$$

¿Linda, no? Sí, porque de esta nos va a salir bastante la forma para la serie de Fourier. Metí una función Gamma $\Gamma(z)$, porque Artin no está mirando. Cómo canta entre líneas la convergencia absoluta. Entonces, ya que tenemos en mente la función seno, esta repetición es justo lo que necesita la matemática de toque real para entrar a tallar. Bueno, ya casi vamos prendiendo nuestra sierra circular. Vamos a tomarle una foto a sus dientes con esta cámara de 2 megapíxeles.

2. La onda diente de sierra: una función con filo

¿Qué pasa si le hacemos lupa al perfil de los dientes? Vemos que sube en diagonal, como el alfil (o como si trepara una pendiente en patineta) y luego cae de golpe, como en el salto del fraile. Voilà: tenemos una onda diente de sierra.

Te comparto el pantallazo:

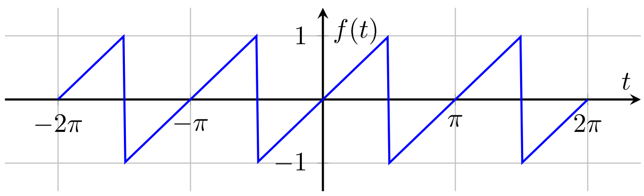

Figura 2: Centrada y con periodo 2π.

¿Ya, pero y Fourier? Estamos recién en el lonche. Bajaba en 5, me dijo.

3. ¿Qué es una serie de Fourier? (Spoiler: sin L^2)

Las Series de Fourier también forman parte de la sierra (ya verás en un rato). Ellas convierten cualquier función periódica en un cerrito de aserrín (usa tu máscara para que que dé tos). Opera así:

> Cualquier función periódica (aunque esté puntiaguda y discontinua) puede escribirse como suma infinita de funciones senoidales.

Esta cita no es puro floro. Es teoría y práctica (bueno, con sus trucos). Pongámosle nombre. Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T, su serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{N=1}^{\infty} \left(a_N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi N t}{T}\right)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} + b_N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi N t}{T}\right)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \right).$$

donde los coeficientes a_N y b_N se calculan con integrales que, créeme, no vamos a detallar hoy porque esto es carpintería matemática. El N es el N-enésimo armónico. ¿Te suena a tu perfeccionado etiquetado romano?

¿Bella? Demasiado. Diablo, qué difícil me la pusiste. Seguro saltaste cuando viste esto: $\frac{2\pi}{T}$, es la frecuencia angular (guárdala en tu glosario para la sobremesa).

La idea central de la carpintería al máximo detalle es que, con suficientes senos y cosenos, imitemos casi cualquier onda periódica.

4. Carpintería conceptual

Agárrate que ahora viene la carpintería conceptual, porque ya estamos a un punto de entrar a tajar la madera de PaloDiablo. Recordemos un poco sobre líneas. Pongámonos algo serios. Si desconsideramos una función $f(t)$ definida en el intervalo $[-T, T]$, con $f(t) = -1$ en $t = -T$ y $f(t) = 1$ justo en $t = T$, entonces una posible forma lineal es:

$$f(t) = \frac{t}{T}, \quad -T \leq t \leq T.$$

Definición 4.1 (Diente de Fourier)**.** Llegó tu hora, la onda diente de sierra de periodo T y tamaño de dientazo (la amplitud, pues) α, entra a escena así:

$$f(t) = \alpha \frac{2}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau\right)^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \sin\left(2\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau\right)^2 N f_0 t\right) + \kappa, \quad (3)$$

donde $f_0 = \frac{1}{T}$ es la frecuencia fundamental con que te deja el micro cuando está correteando.

Y sí, lo que acabas de ver es una serie de Fourier de la onda: aproximamos la forma diente de sierra usando los armónicos N de la onda seno, todos múltiplos enteros de la frecuencia base. ¿Esto converge o corta? Las dos, por supuesto.

Es interesante notar que una constante κ puede desplazar verticalmente la señal para que comience a la altura que desees; por ejemplo, $\kappa = \frac{\alpha}{2}$ permite que la onda suba desde 0 hasta α. En suma (valga la sumatoria), cada nuevo término afila mejor el diente.

Basta con unos pocos términos para obtener una forma ya muy parecida a la diente de sierra ideal. Si $\alpha > 0$, la pendiente va cuesta arriba; si $\alpha < 0$, la pendiente se invierte y te caes.

Finalmente, el intervalo simétrico natural de definición te camina así:

$$t \in \left(-\frac{1}{2f_0}, \frac{1}{2f_0}\right).$$

Observación 4.2. Seguro, habrás visto en (3) una cuestión con la potencia N y el signo. Es directo ver que $-\frac{2}{\pi}(-1)^N = \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \cdot (-1)^N = \frac{2}{\pi}(-1)^{N+1}$.

Por último, en una compu generalmente se trabaja con un número finito de términos (por razones de optimización, o se quema tu Pentium I).

5. La versión de los hermanos Gibb+s

¿Cuál tema recuerdas de los Bee Gees para que no te salga un paso disco?

A veces, queremos evitar truncar la serie infinita. Es decir, buscamos representar la función completa sin cortes, sin limitarla a los primeros términos. Porque, cuando la función f es discontinua, al afilar nuestra sierra circular, sus dientes hacen pequeños saltos antes y después del escalón, pasándose un poquito. Ese fenómeno es conocido como el fenómeno Gibb+s.

Hay una alternativa muy simple de evaluar para tu Lentium. Claro, hay que soltar cosas: se pierde cierta analiticidad, y en aplicaciones como el audio digital, también puede haber efectos dominantes secundarios. Pero si lo que buscas es evitar ese brinquito clásico que arruina tus bordes afilados en la aproximación, tal vez esta versión sin los Gibb+s sea justo lo que necesitas para la acción.

Definición 5.1. Lancemos a girar la forma exacta de la onda diente de sierra periódica con período T, dada por:

$$f(t) = \alpha\left(\frac{t}{T} - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right), \tag{4}$$

Aquí, el rango de la función es $[0, \alpha)$. Pero es muy probable que quieras tener esta onda centrada, es decir, que oscile como la onda seno, desde $-\alpha$ hasta α.

Pues hagamos lo siguiente. Primero, incrementamos el rango a $[0, 2\alpha)$, simplemente multiplicando por 2. Luego, aplicamos un desplazamiento hacia abajo con $-\alpha$. Así, la nueva función queda:

$$f(t) = 2\alpha\left(\frac{t}{T} - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) - \alpha.$$

Ah, antes que se me pase, esta función tiene una propiedad bastante bonita: es impar. Justo como una de esas medias que te pusiste sin darte cuenta que no cuadraba con la otra. Vamos a demostrarlo.

Demostración. Queremos demostrar que (4) centrada es una función impar, es decir, que:

$$f(-t) = -f(t)$$

Floreamos de otra manera para probar esta jugada $f(t) = 2\alpha\left(\frac{t}{T} - \left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor\right) - \alpha = 2\alpha\left\{\frac{t}{T}\right\} - \alpha$. Nos basamos en la propiedad de bailar hasta el piso en retroceso lunar:

$$\operatorname{frac}\left(\frac{-t}{T}\right) = \left\{\frac{-t}{T}\right\} = 1 - \left\{\frac{t}{T}\right\} = 1 - \operatorname{frac}\left(\frac{t}{T}\right).$$

La última línea es:

$$f(-t) = 2\alpha\left(1 - \left\{\frac{t}{T}\right\}\right) - \alpha = 2\alpha - 2\alpha\left\{\frac{t}{T}\right\} - \alpha = \alpha - 2\alpha\left\{\frac{t}{T}\right\} = -f(t).$$

Por ende, $f(t)$ es impar y ya está. □

Observación 5.2. Ojo con algo tan simple como si una función es par o impar; es el germen de la Transformada de Fourier a las 4am en la disco. Véase, por ejemplo, el bello introito [Tao09, p.1].

6. Cierre con viruta

Mucho quedó fuera de la madera, pero es lo que hay por hoy, con sus dientitos tan simétricos, puede modelarse como una onda periódica, descomponerse con series infinitas y analizarse como si fuera una *circulatio* matemática.

Proposición 6.1. *Envolver por el arco de una hoja circular la siguiente serie de Fourier,*

$$f(t) \approx \alpha\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{8\pi}{T}t\right) + \cdots\right]$$

como si se tratara de un radio, esto sería un simbodián, hará que se transforme en una sierra circular. Cada término de la serie forma un diente: estás cortando la madera con símbolos.

Demostración. Demuéstralo por el taller, con carpintería al *Máximo Detalle*. □

Figura 3: Para que contruyas tu Robot versificador machadiano a la luz de unas velas. *Máximo Detalle.*

Referencias

[Tao09] Terence Tao. Fourier transform. https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/fourier.pdf, 2009. Accedido: 2025-08-16.

[Tao16] Terence Tao. *Analysis II.* Springer Science+Business Media Singapore and Hindustan Book Agency, Singapore; New Delhi, 3ª edition, 2016.