



НИУ ИТМО

## ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

По дисциплине "Свободное движение, устойчивость"

“Формы представления линейных динамических систем”

Вариант 17

Выполнил:

**Александр Иванов, R3338**

Преподаватели:

**Перегудин А.А.**

**Пашенко А.В.**

Санкт-Петербург, 2024

# Содержание

<b>1. Свободное движение</b>	<b>3</b>
1.1. Определение значения коэффициентов . . . . .	3
1.2. Аналитическое решение . . . . .	4
1.3. Моделирование . . . . .	5
1.4. Анализ устойчивости систем . . . . .	5
1.5. Выводы . . . . .	10
<b>2. Область устойчивости</b>	<b>10</b>
2.1. Передаточная функция . . . . .	10
2.2. Переход от схемы к уравнению . . . . .	11
2.3. Критерий Гурвица . . . . .	12
2.4. Моделирование . . . . .	15
2.5. Вывод . . . . .	15
<b>3. Автономный генератор</b>	<b>17</b>
3.1. Вывод . . . . .	19
<b>4. Выводы</b>	<b>20</b>

# 1. Свободное движение

Рассмотрим систему, заданную дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u \quad (1)$$

Для построения структурной схемы данной системы перепишем ее в операторном виде и преобразуем выражение:

$$p^2y + a_1py + a_0y = u \quad (2)$$

$$p^2y = u - a_1py - a_0y$$

$$y = \frac{1}{p^2}u - \frac{a_1}{p}y - \frac{a_0}{p^2}y$$

$$y = \frac{1}{p^2}(u - a_1py - a_0y)$$

структурная схема приведена на рисунке 1.

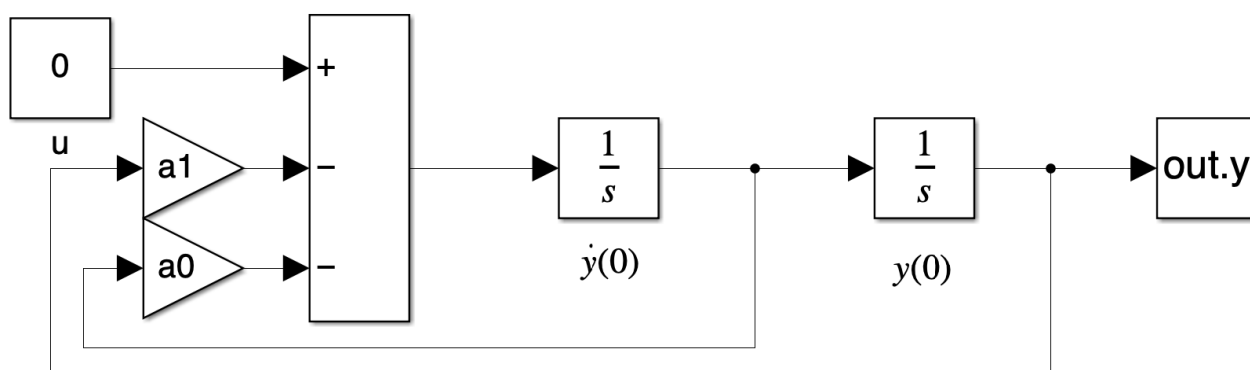


Рис. 1: Структурная схема системы

## 1.1. Определение значения коэффициентов

Так как мы рассматриваем свободное движение, то входное воздействие  $u = 0$ .

Для определения коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  из корней характеристического уравнения воспользуемся теоремой Виета:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3)$$

$$a_0 = \lambda_1\lambda_2 \quad a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (4)$$

Составим таблицу с коэффициентами для всех экспериментов:

Номер	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$a_0$	$a_1$	$c_1$	$c_2$
1	-5.5	-6	1	0	33	11.5	12	-11
2	$-2.8 + 6j$	$-2.8 - 6j$	1	0	43.84	5.6	10	0.466
3	$18j$	$-18j$	1	0	324	0	1	0
4	$0.8 + 6j$	$0.8 - 6j$	0.05	0	36.64	-1.6	0.05	-0.00666
5	5.5	6	0.05	0	33	-11.5	0.6	-0.55
6	-1.7	1.7	0	0.1	-2.89	0	-0.029	0.029

Таблица 1: Начальные условия и коэффициенты

## 1.2. Аналитическое решение

Для нахождения аналитического решения системы 1 посмотрим на корни характеристического уравнения 3: Если оба корня вещественные, то общее решение системы будет иметь вид:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

Если корни комплексно-сопряженные, то общее решение системы будет иметь вид:

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad (6)$$

где  $c$  – константы, получаемые из начальных условий путем дифференцирования и подстановки в уравнение. И  $\alpha, \beta$  – вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения.

Рассмотрим нахождение начальных условий для случая с вещественными корнями.

$$\dot{y} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ \dot{y}(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

И для случая с комплексными корнями:

$$\dot{y} = \alpha e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) + \beta e^{\alpha t} (-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)) \quad (11)$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \\ \dot{y}(0) = \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Посчитанные коэффициенты занесены в таблицу 1.

### 1.3. Моделирование

Выполним моделирование каждого из экспериментов в Matlab. Кроме того, сравним результаты моделирования с аналитическим решением. (см. рисунки 2 – 7)

Видим, что в каждом из случаев моделирование совпадает с аналитическим решением. На основании этого можно сделать вывод, что моделирование отражает динамику системы.

### 1.4. Анализ устойчивости систем

Имея графики для каждого из экспериментов, можно сделать вывод о устойчивости систем. Результаты занесены в таблицу 2.

Для того, чтобы оценить устойчивость систем аналитически, нужно рассмотреть корни характеристического уравнения. Если все вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, то система устойчива асимптотически. Если все корни отрицательны

или нулевые, при этом нет кратных корней на мнимой оси, то система устойчива по Ляпунову. Если есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью или кратные корни на мнимой оси, то система неустойчива.

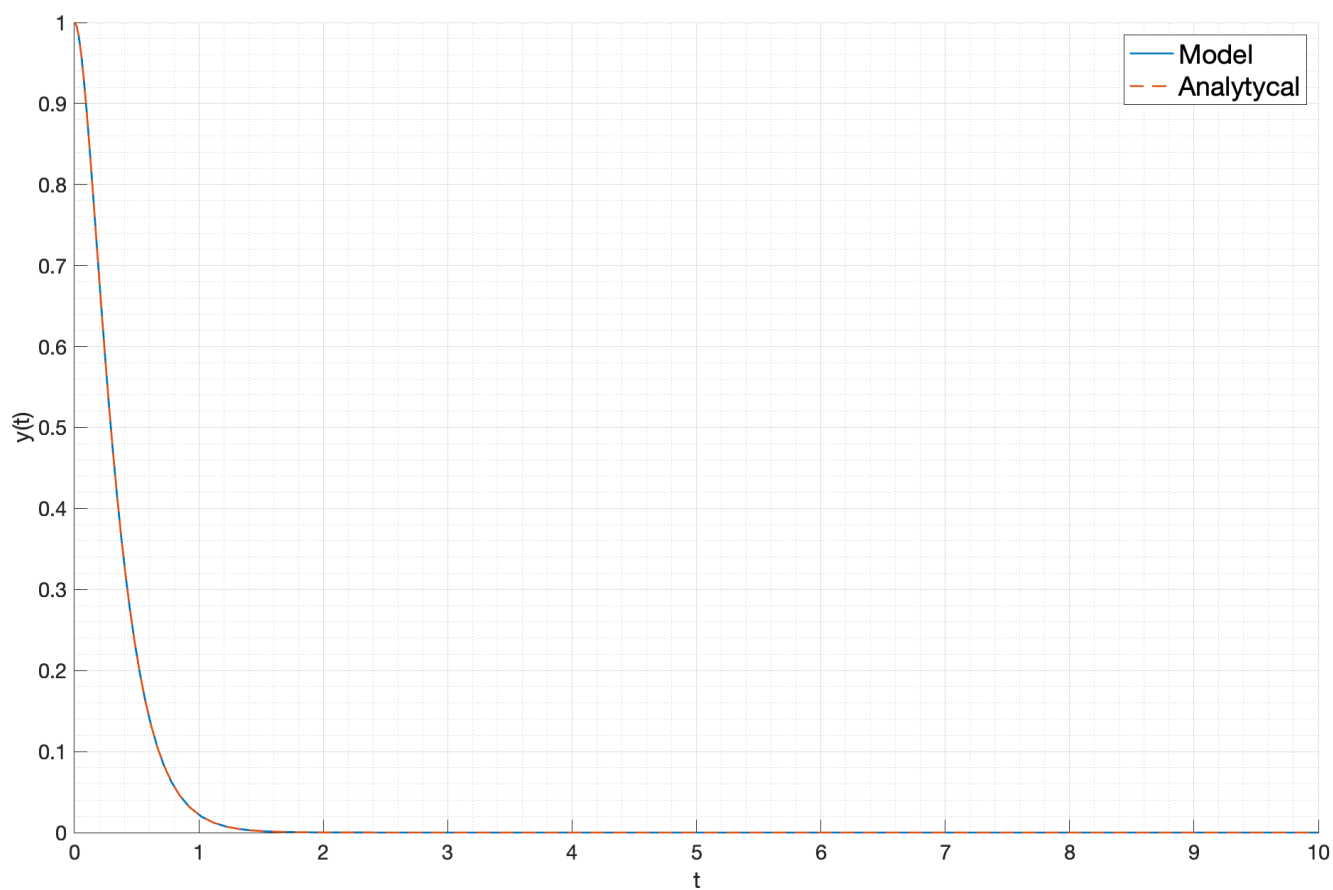


Рис. 2: График для эксперимента 1

Номер	Тип устойчивости	Характер корней
1	Устойчива асимптотически	$\forall Re(\lambda) < 0$
2	Устойчива асимптотически	$\forall Re(\lambda) < 0$
3	Граница устойчивости	$Re(\lambda) = 0, \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$
4	Неустойчива	$\exists Re(\lambda) > 0$
5	Неустойчива	$\exists Re(\lambda) > 0$
6	Неустойчива	$\exists Re(\lambda) > 0$

Таблица 2: Устойчивость систем

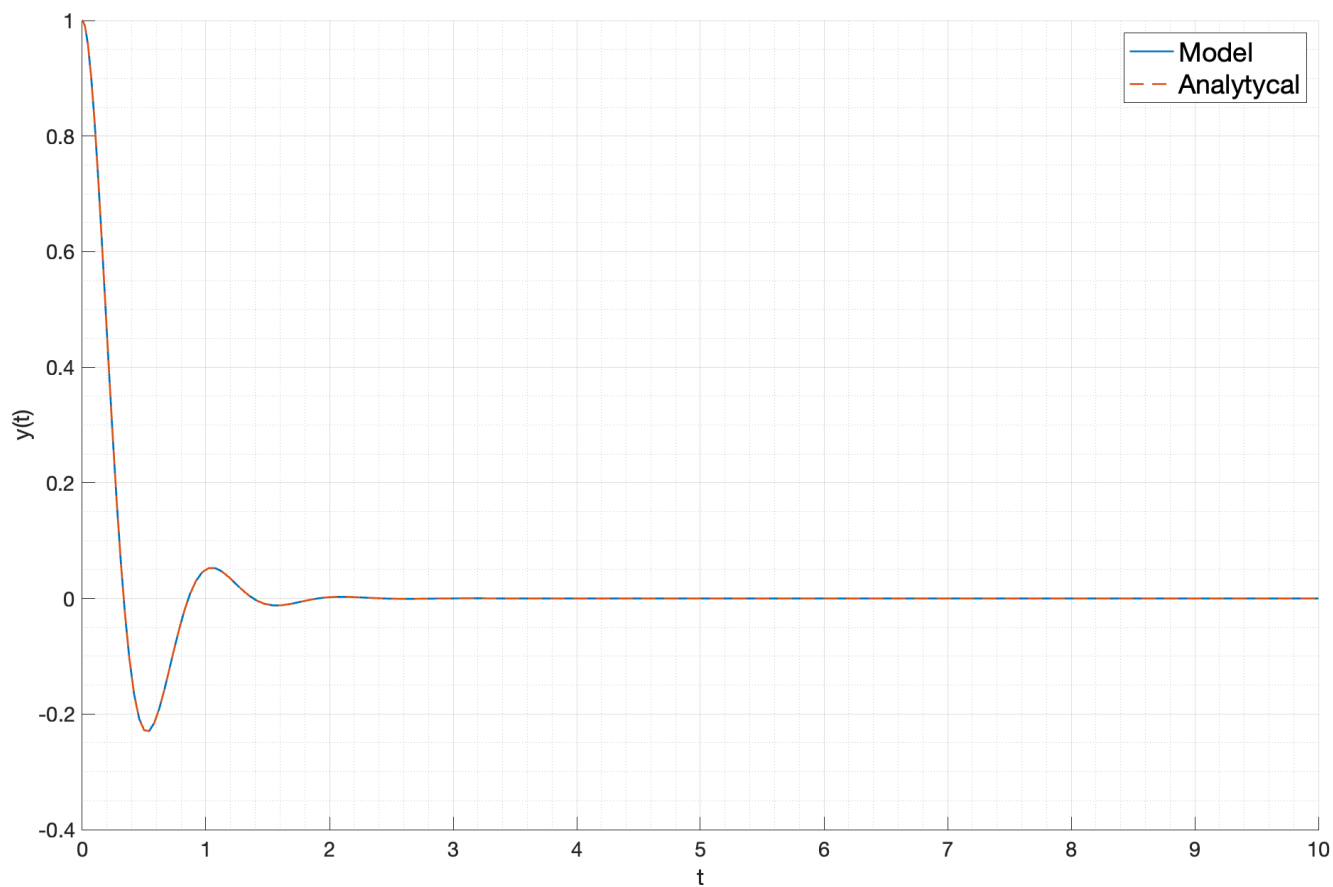


Рис. 3: График для эксперимента 2

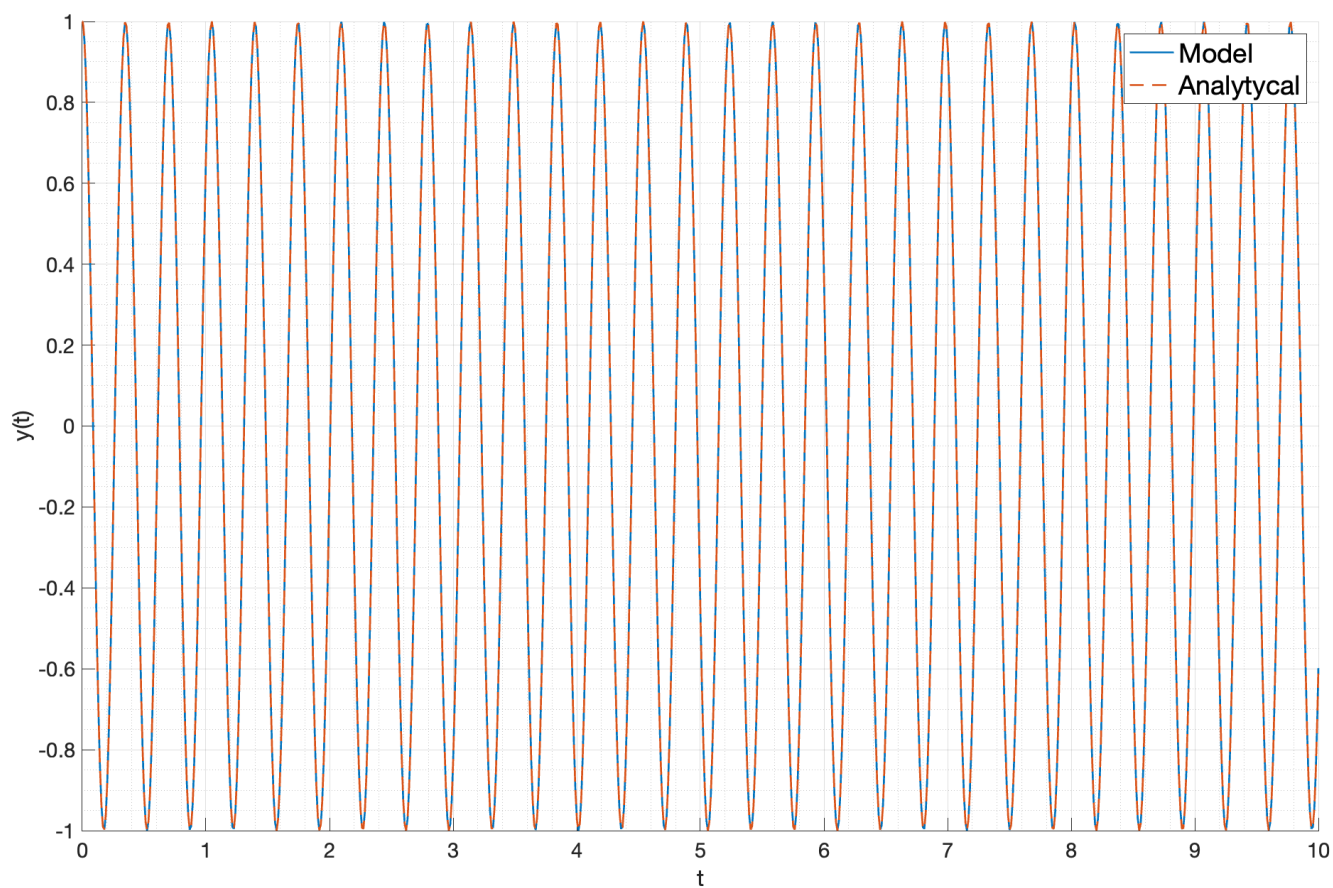


Рис. 4: График для эксперимента 3

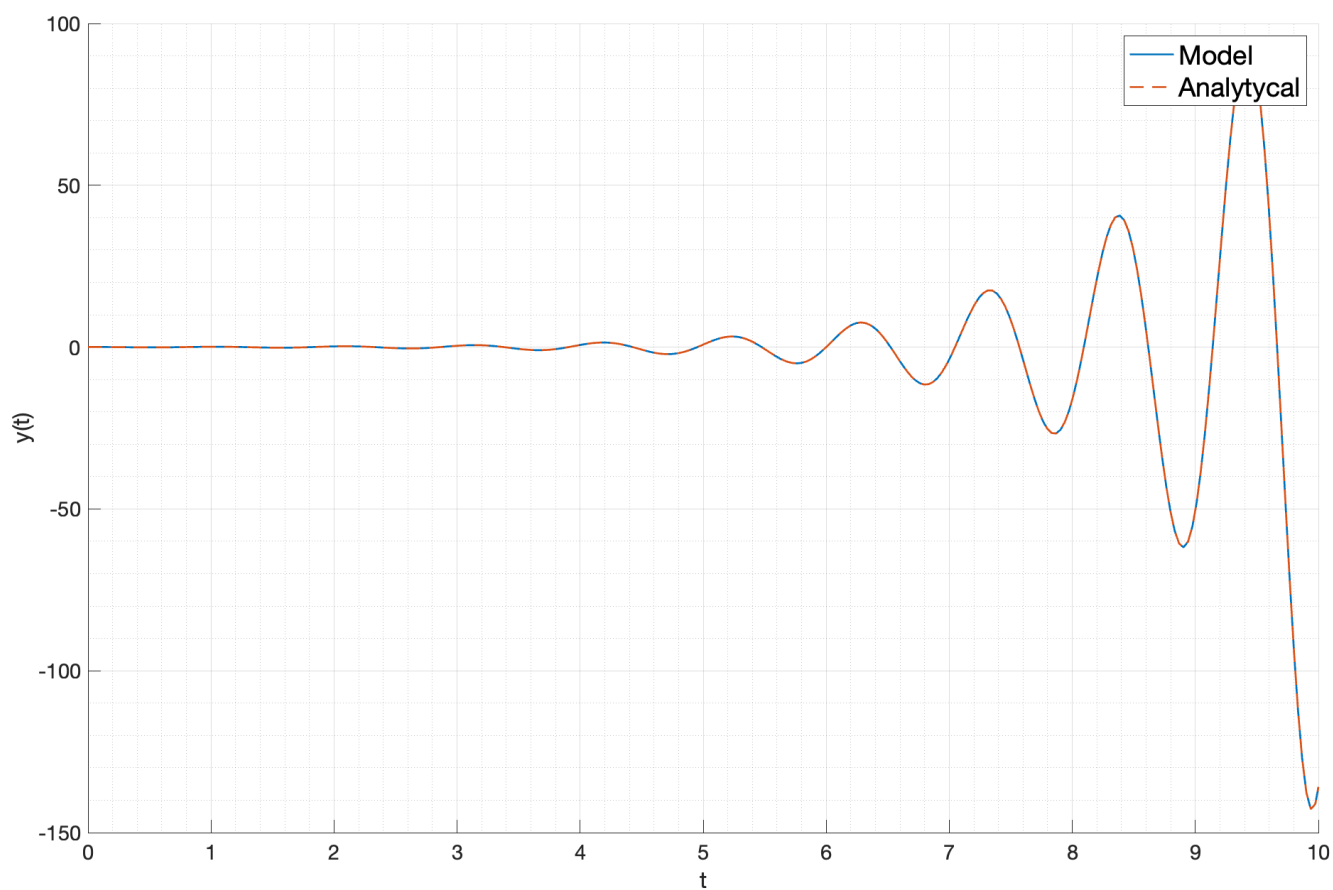


Рис. 5: График для эксперимента 4

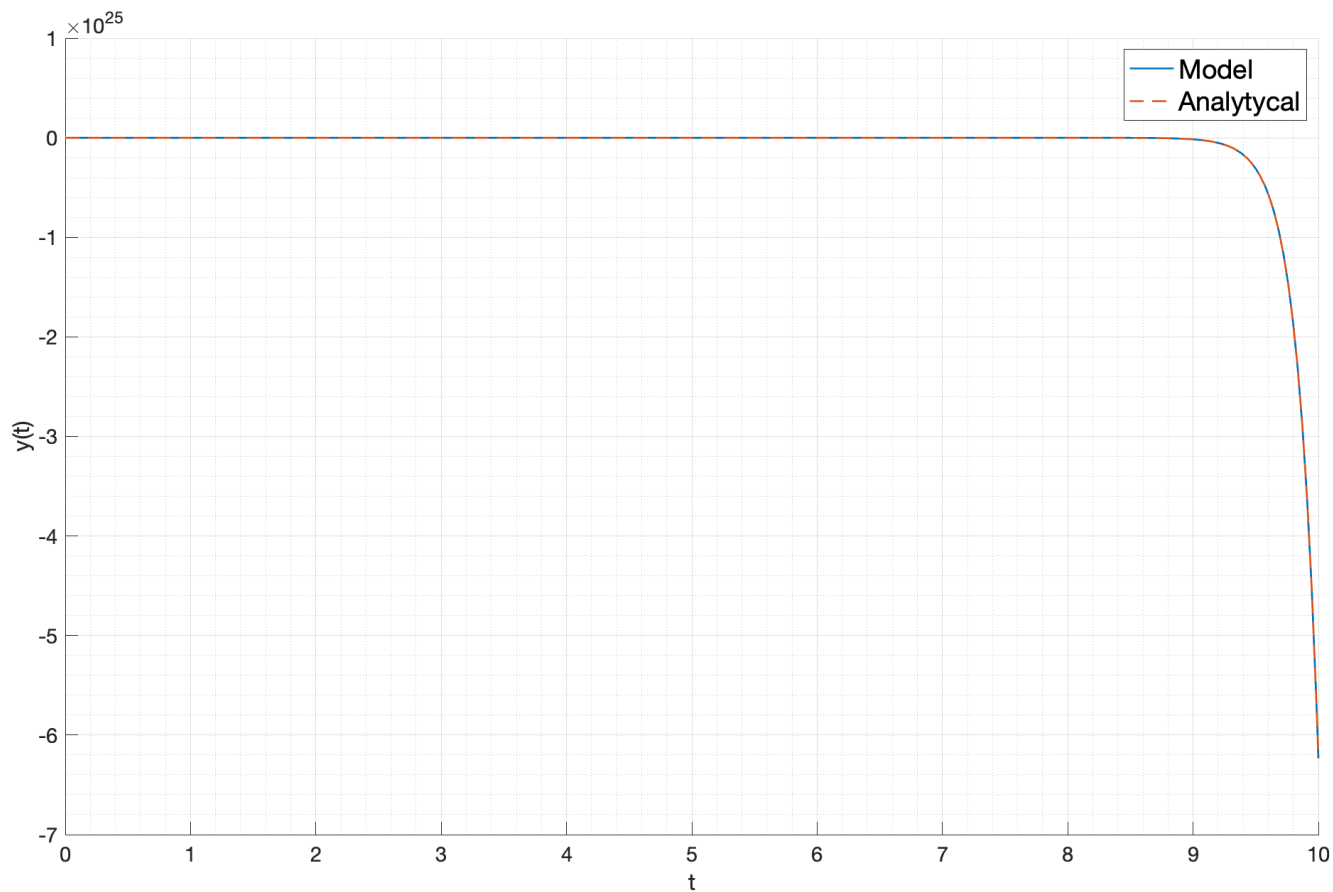


Рис. 6: График для эксперимента 5



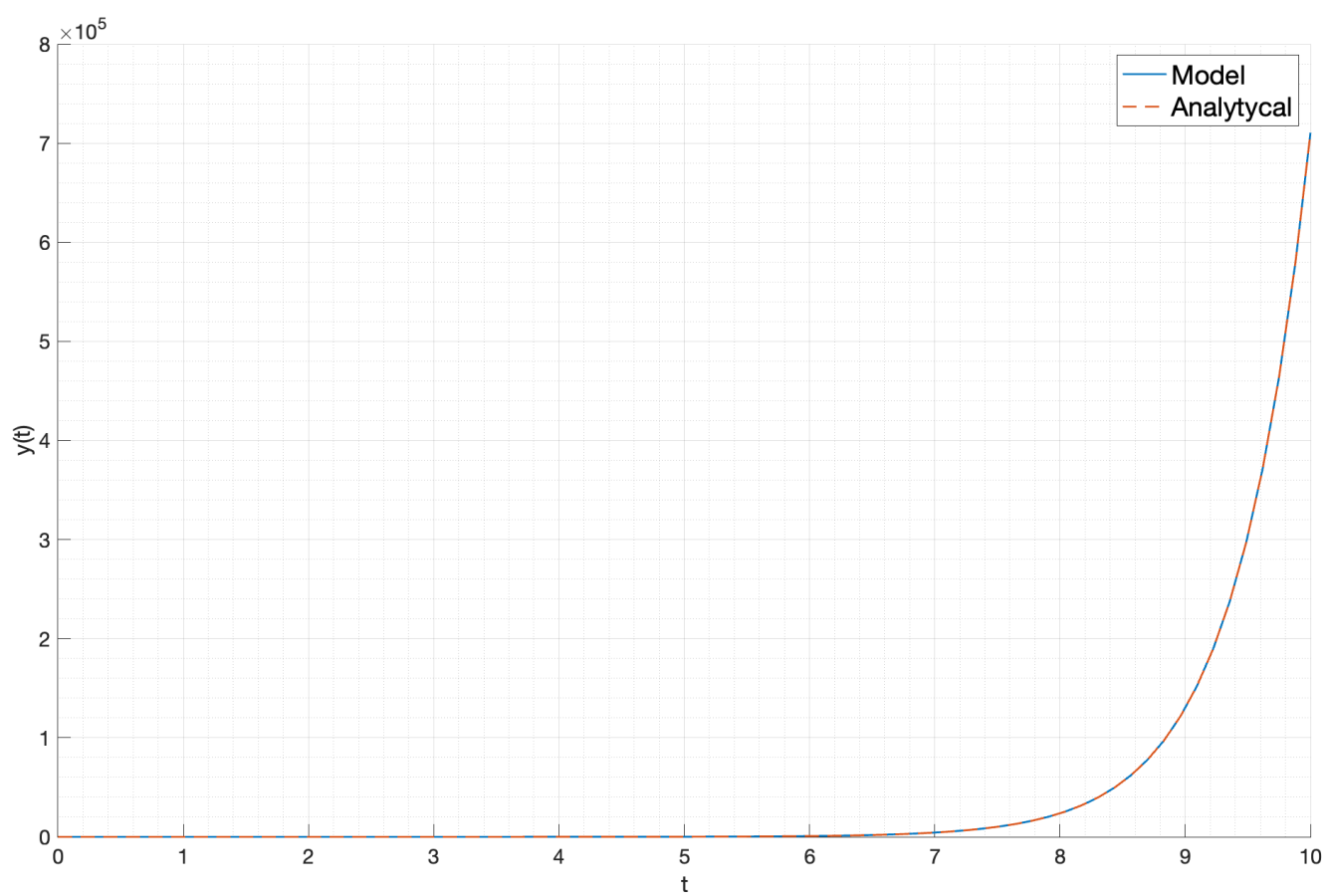


Рис. 7: График для эксперимента 6

## 1.5. Выводы

Мне удалось построить структурную схему системы, решить ее аналитически и смоделировать в Matlab Simulink для различных начальных условий и корней характеристического уравнения. Аналитическая оценка устойчивости системы совпала с результатами моделирования.

## 2. Область устойчивости

Рассмотрим структурную схему третьего порядка, представленную на рисунке 8.

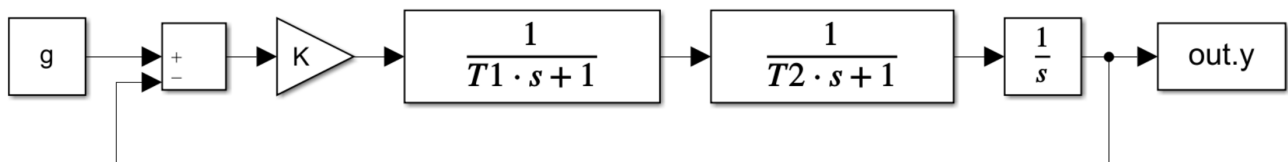


Рис. 8: Схема моделирования

### 2.1. Передаточная функция

Рассмотрим передаточную функцию  $T_{12}$ , получающуюся в результате последовательного соединения передаточных функций  $T_1$  и  $T_2$ . В таком случае передаточная функция  $T_{12}$  будет равна произведению передаточных функций  $T_1$  и  $T_2$ .

$$T_{12} = T_1 \cdot T_2 = \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p + 1} \quad (15)$$

Полюсами передаточной функции называются корни характеристического полинома ее знаменателя.

$$(T_1 \lambda + 1)(T_2 \lambda + 1) = 0 \quad (16)$$

Таким образом, решая систему уравнений, получим искомые коэффициенты  $T_1$  и  $T_2$ , при

которых полюса передаточной функции  $T_{12}$  будут соответствовать значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

$$\begin{cases} T_1\lambda_1 + 1 = 0 \\ T_2\lambda_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{-1}{\lambda_1} \\ T_2 = \frac{-1}{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{-1}{-5.5} = \frac{2}{11} \\ T_2 = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (17)$$

## 2.2. Переход от схемы к уравнению

Запишем передаточную функцию для схемы на рисунке 8:

$$W_{123}(p) = K \cdot \frac{1}{T_1p + 1} \cdot \frac{1}{T_2p + 1} \cdot \frac{1}{p} \quad (18)$$

Так как система имеет отрицательную обратную связь, то передаточная функция замкнутой системы будет равна:

$$W(p) = \frac{W_{123}}{1 + W_{123} \cdot 1} = \frac{\frac{K}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p}}{\frac{K}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p} + 1} = \frac{K}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + K} \quad (19)$$

$$y(t) = W(p)u \quad (20)$$

Запишем систему в операторном виде:

$$y = \frac{K}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + K} \cdot g$$

$$T_1T_2p^3y + (T_1 + T_2)p^2y + py + Ky = K^2g \quad (21)$$

И в виде дифференциального уравнения:

$$T_1T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2)\ddot{y} + \dot{y} + Ky = K^2g \quad (22)$$

Для определения устойчивости рассмотрим свободное движение системы, то есть  $g = 0$ .

$$T_1T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2)\ddot{y} + \dot{y} + Ky = 0 \quad (23)$$

## 2.3. Критерий Гурвица

Согласно критерию Гурвица, система находится на границе устойчивости, если  $a_n > 0$  и  $\Delta_{n-1} = 0$  а все остальные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-2}$  положительны. Где  $\Delta_i$  – угловой минор матрицы  $A$  размера  $i$ . Если все угловые миноры положительны, то система асимптотически устойчива.

$$A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  - коэффициенты дифференциального уравнения. Для уравнения третьего порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

где  $a_0, \dots, a_3$  - коэффициенты дифференциального уравнения. В нашем случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 > 0 \\ a_2 > 0 \\ \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{array} \right| > 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \\ a_0 a_1 a_2 - a_3 a_0^2 = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

Пологая  $a_3 = 1$ , можно упростить систему до:

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2 > 0 \\ a_1 a_2 = a_0 \end{cases} \quad (28)$$

для границы устойчивости и

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2 > 0 \\ a_1 a_2 > a_0 \end{cases} \quad (29)$$

для асимптотической устойчивости.

Перепишем уравнение 23 в соответствии с принятым  $a_3 = 1$ :

$$\ddot{y} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{y} + \frac{1}{T_1 T_2} y + \frac{K}{T_1 T_2} y = 0 \quad (30)$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{K}{T_1 T_2} > 0 \\ \frac{1}{T_1 T_2} > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 T_2^2} \geq \frac{K}{T_1 T_2} \end{cases} \quad (31)$$

Фиксируя  $T_2 > 0$ , получим:

$$\begin{cases} K > 0 \\ T_1 > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \geq K \end{cases} \quad (32)$$

Фиксируя  $T_1 > 0$ , получим:

$$\begin{cases} K > 0 \\ T_2 > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \geq K \end{cases} \quad (33)$$

Графики решений уравнений при вычисленных  $T_1, T_2$  (см. 17) приведены на рис. 9, 10.

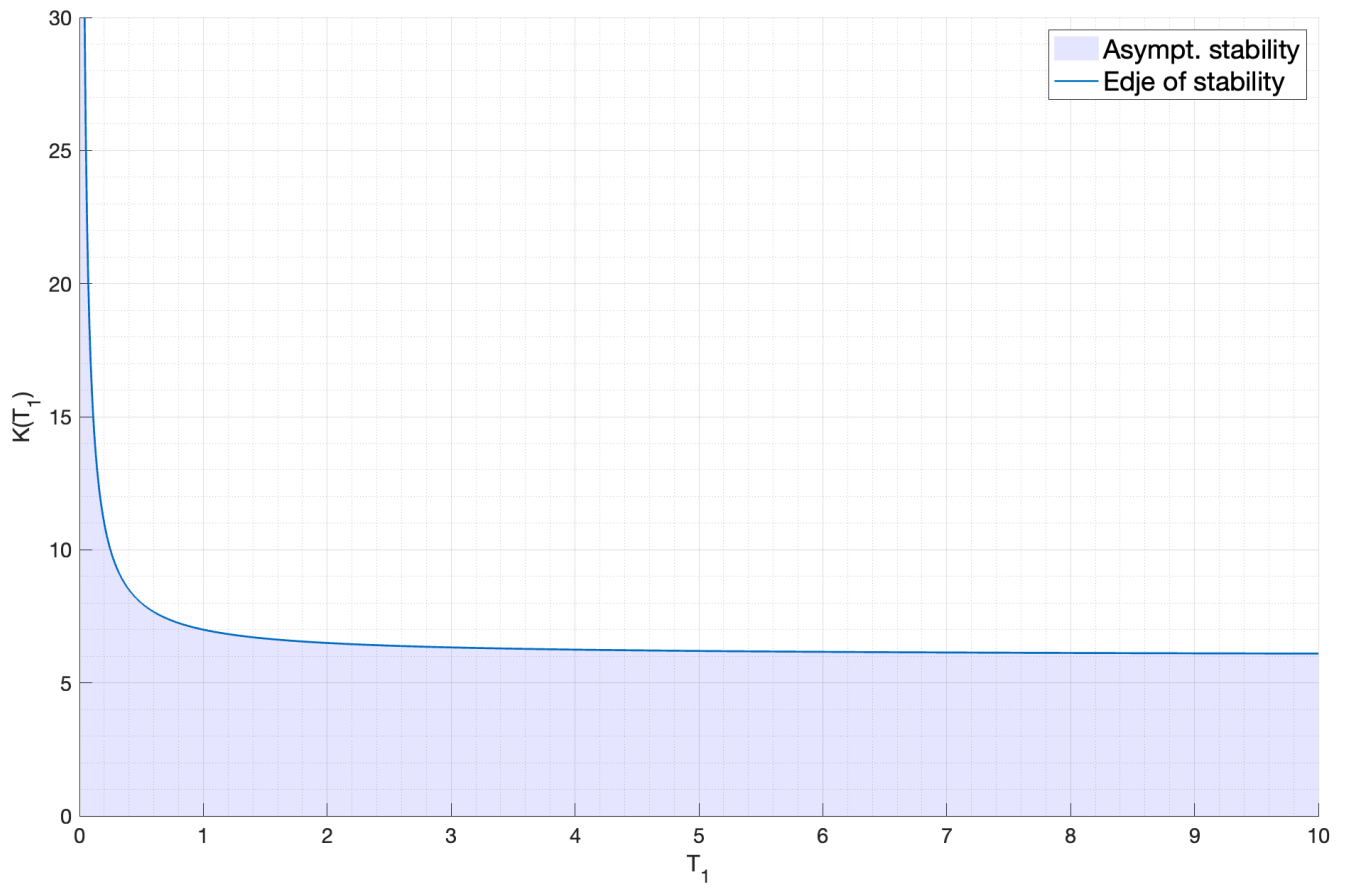


Рис. 9: Граница и область асимптотической устойчивости для  $K(T_1)$ ,  $T_2 = 2/11$

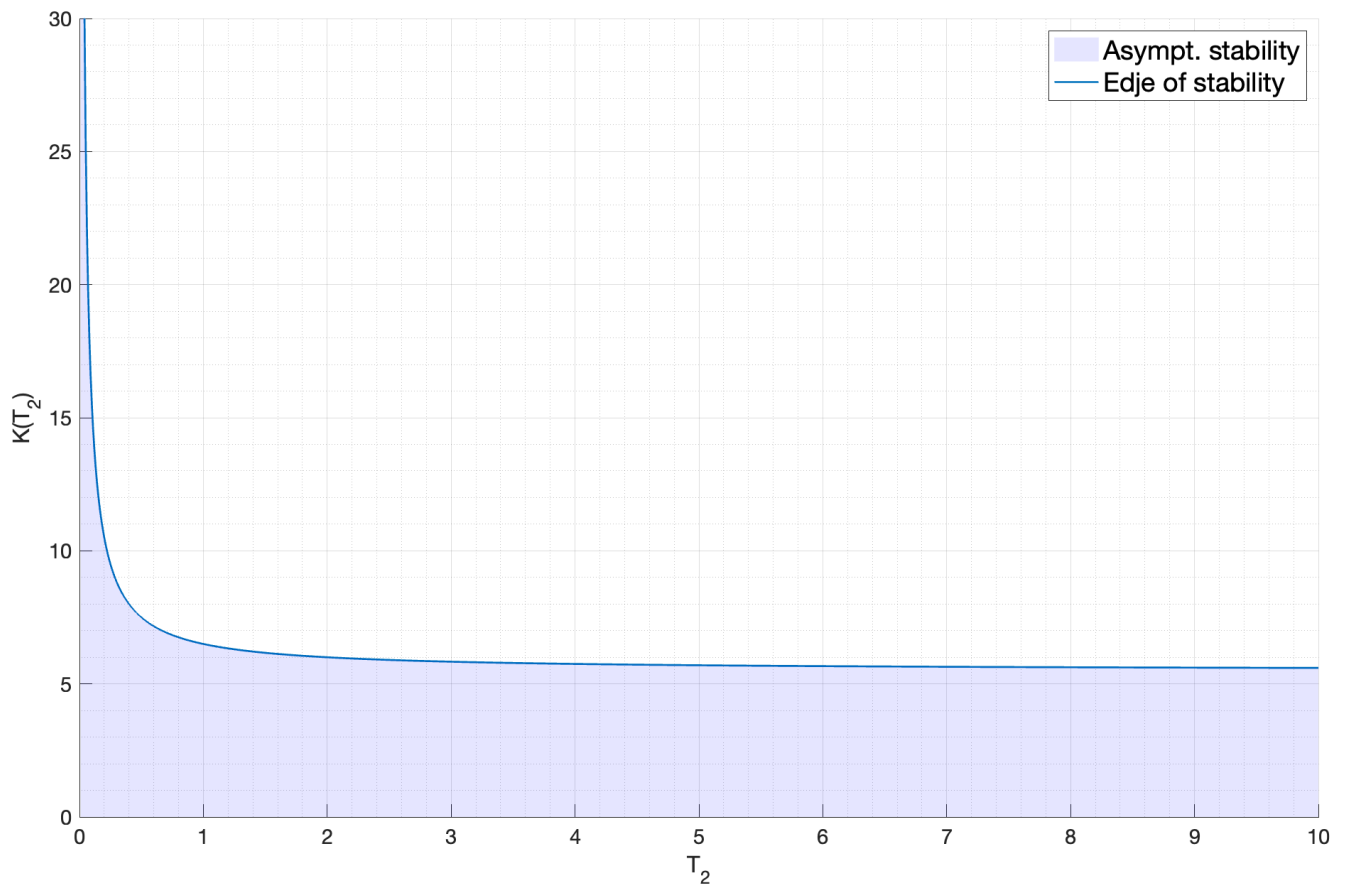


Рис. 10: Граница и область асимптотической устойчивости для  $K(T_2)$ ,  $T_1 = 1/6$

## 2.4. Моделирование

Выберем значения, которые будут соответствовать разным типам устойчивости:

- $T_1 = \frac{1}{6}$ ,  $T_2 = 1$ ,  $K = 5$  – область асимптотической устойчивости
- $T_1 = 1$ ,  $T_2 = \frac{2}{11}$ ,  $K = \frac{13}{2}$  – граница устойчивости
- $T_1 = \frac{1}{6}$ ,  $T_2 = 2$ ,  $K = 10$  – область неустойчивости

И проведем моделирование системы для каждого из случаев. Результаты моделирования приведены на рис. 11 – 13.

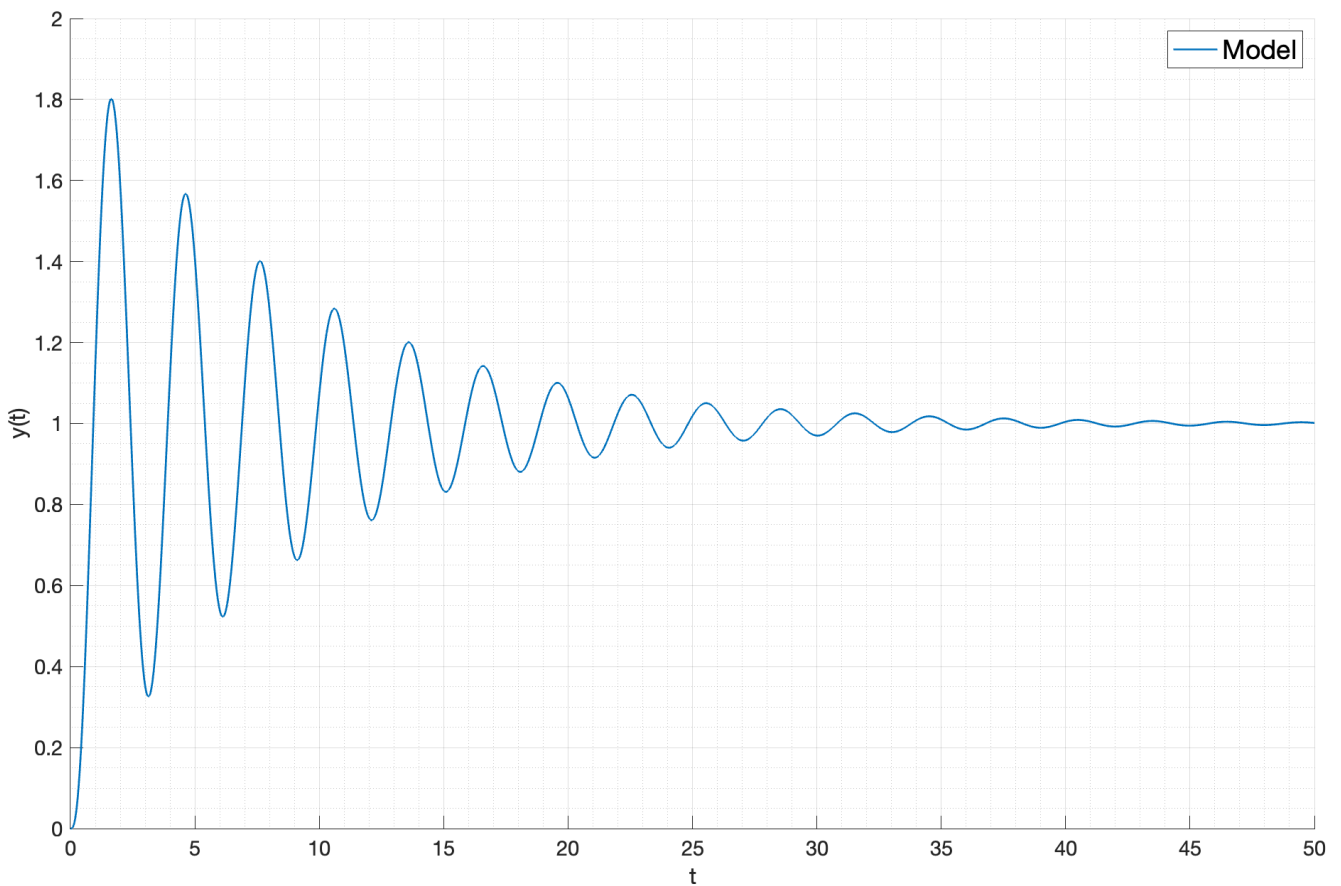


Рис. 11: Моделирование для области асимптотической устойчивости

## 2.5. Вывод

В результате моделирования системы можно сделать вывод, что полученные значения  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $K$  соответствуют теоретическим ожиданиям устойчивости системы. Это значит, что критерий Гурвица позволяет определить область устойчивости системы аналитически.

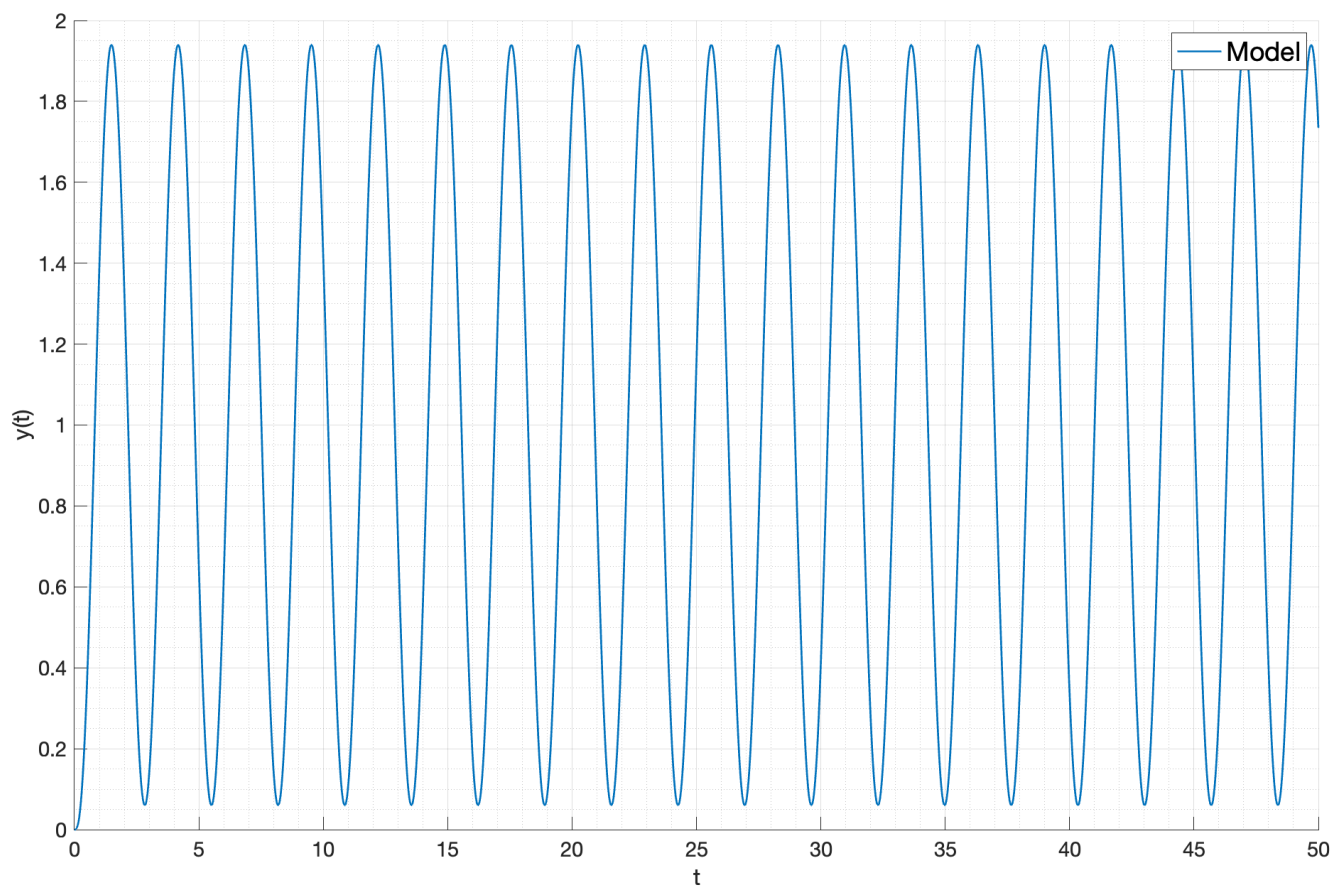


Рис. 12: Моделирование для границы устойчивости

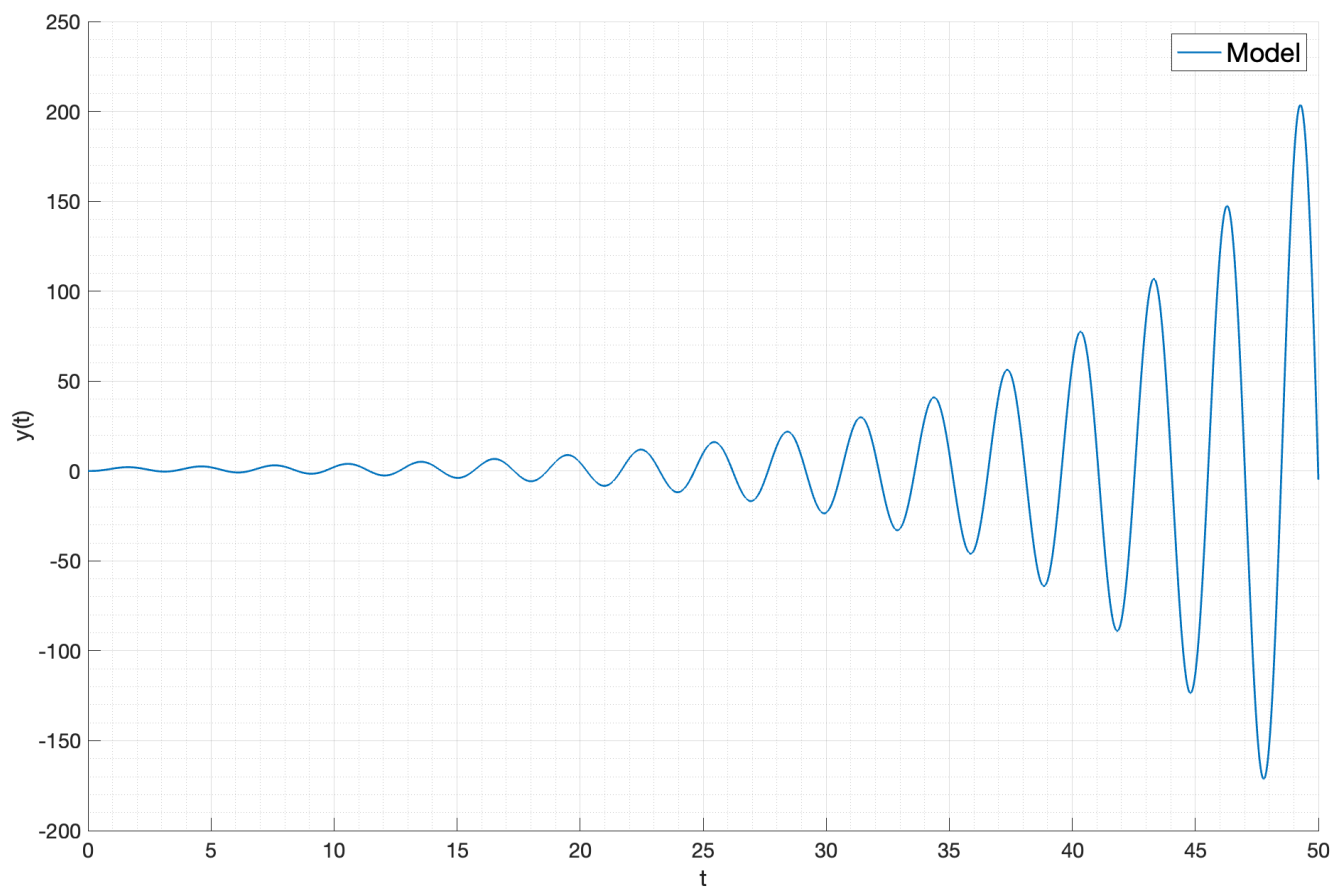


Рис. 13: Моделирование для области неустойчивости



### 3. Автономный генератор

Для того, чтобы привести систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ g(t) = Cx \end{cases} \quad (34)$$

к желаемому виду  $\cos(4t) + e^{-8t} \cos(5t)$  Представим  $g(t)$  в виде:

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{4it} + \frac{1}{2}e^{-4it} + \frac{1}{2}e^{-8+5it} + \frac{1}{2}e^{-8-5it} \quad (35)$$

Можно заметить 4 комплексные моды. Отсюда легко понять корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 4i \\ \lambda_{3,4} = -8 \pm 5i \end{cases} \quad (36)$$

Собственные числа матрицы  $A$  являются корнями характеристического уравнения. Таким образом, матрица  $A$  будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Решив первое дифференциальное уравнение из системы 34 получим:

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (38)$$

Найдем матрицу  $e^{At}$ :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) & 0 & 0 \\ -\sin(4t) & \cos(4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-8t} \cos(5t) & e^{-8t} \sin(5t) \\ 0 & 0 & -e^{-8t} \sin(5t) & e^{-8t} \cos(5t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

В соответствии со вторым уравнением из системы 34 выход  $g(t)$  будет равен:

$$g(t) = Ce^{At}x(0) \quad (40)$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) & 0 & 0 \\ -\sin(4t) & \cos(4t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-8t}\cos(5t) & e^{-8t}\sin(5t) \\ 0 & 0 & -e^{-8t}\sin(5t) & e^{-8t}\cos(5t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} c_1 \cos(4t) - c_2 \sin(4t) \\ c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t) \\ c_3 e^{-8t} \cos(5t) - c_4 e^{-8t} \sin(5t) \\ c_3 e^{-8t} \sin(5t) + c_4 e^{-8t} \cos(5t) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Для того, чтобы  $g(t)$  принял вид  $\cos(4t) + e^{-8t}\cos(5t)$ , необходимо решить систему

$$\begin{cases} c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) = 1 \\ c_3 x_3(0) + c_4 x_4(0) = 1 \\ c_1 x_2(0) - c_2 x_1(0) = 0 \\ c_3 x_4(0) - c_4 x_3(0) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Предполагая  $c_1 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 \neq 0$ , получим общее решение:

$$x(0) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{c_2} \\ 0 \\ \frac{1}{c_4} \end{cases} \quad (44)$$

Примем

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Схема автономного генератора представлена на рисунке 14. Результат моделирования представлен на рисунке 15.

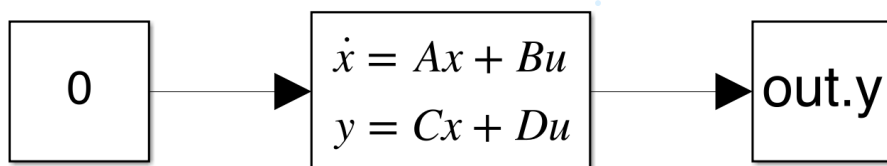


Рис. 14: Схема автономного генератора

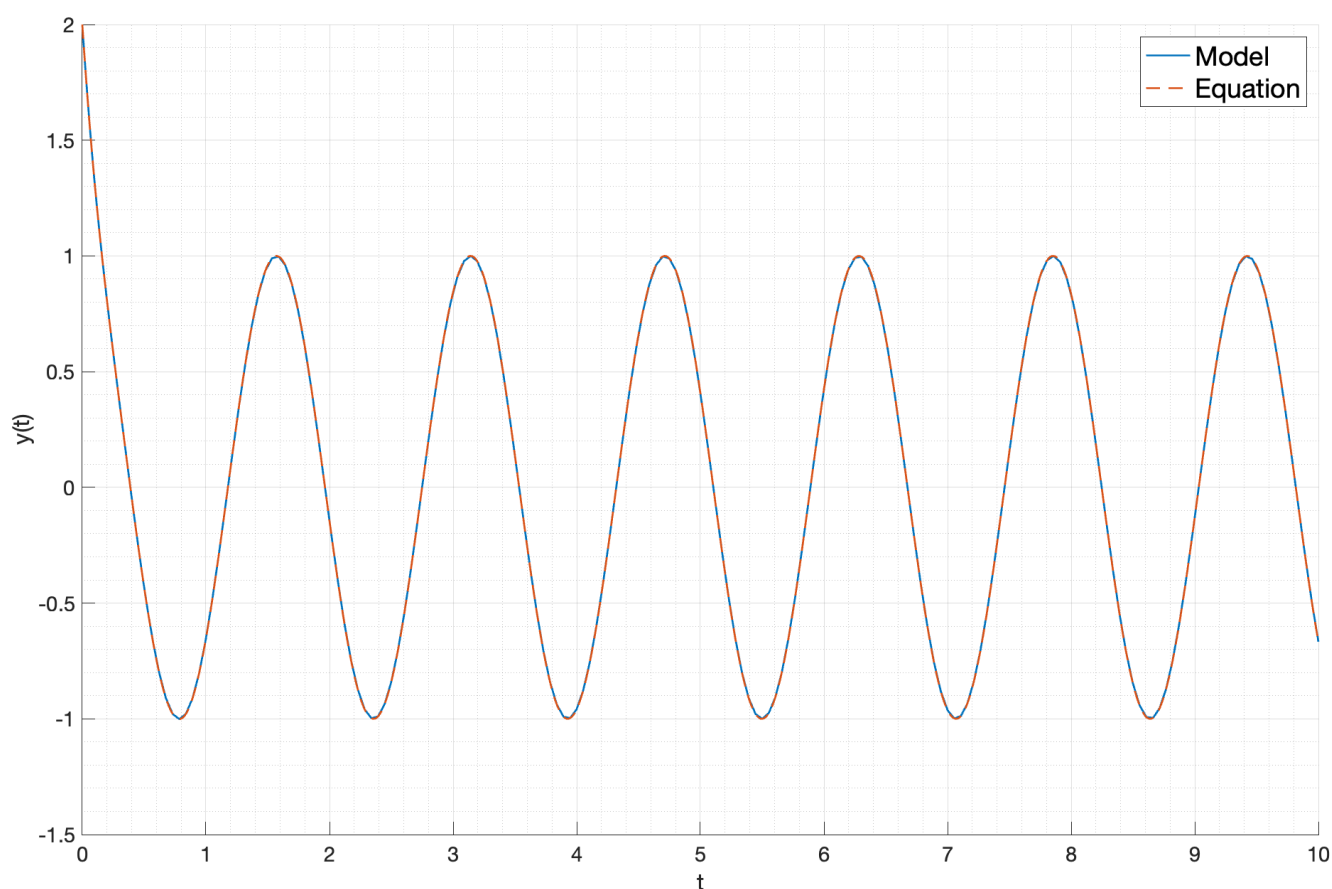


Рис. 15: Результат моделирования автономного генератора

### 3.1. Вывод

В ходе выполнения данной работы была рассмотрена система с комплексными собственными числами. Мне удалось найти такие параметры системы, при которых выход системы принимает желаемый вид. Симуляция системы в Matlab показала, что результаты моделирования совпадают с ожидаемыми. Для нахождения матрицы  $A$  были использованы

собственные числа, полученные из корней характеристического уравнения. Векторы  $C$  и  $x(0)$  были выбраны таким образом, чтобы выход системы принял желаемый вид. Можно сделать вывод о том, что корни характеристического уравнения соответствуют корням матрицы  $A$ .

## 4. Выводы

В данной работе были рассмотрены различные методы анализа и моделирования динамических систем без входного воздействия. Результаты показали, что динамику системы можно предсказать аналитически, используя корневой метод (корни характеристического уравнения). Так же, используя тот же метод, можно оценить область устойчивости системы. Последнее задание показало, что собственные числа матрицы управления системы в форме вход-состояние-выход совпадают с корнями характеристического уравнения. Используя этот факт можно осуществить управление системой, приведя ее к желаемому виду.