НИУ ИТМО

Отчет по курсовому проекту

По дисциплине "Теория автоматического управления"

“Стабализация перевернутого маятника”

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Физическая модель маятника

Рассмотрим систему, состоящую из тележки массой M, движущейся по горизонтальной оси, и маятника с равномерно распределенной массой m и длиной l_{pend}, закрепленного на шарнире на тележке. Примем за x координату тележки, а за θ угол отклонения маятника от вертикали.

1.1. Уравнения движения

Используем законы Лагранжа для записи уравнений движения системы.

Так как кинетическая и потенциальная зависят от центра масс тележки и маятника, введем в рассмотрение расстояние l от точки подвеса маятника до его центра масс. При этом $l = l_{\text{pend}}/2$ для равномерно распределенной массы маятника.

Напишем уравнения для координат центра масс маятника x_m и y_m и продифференцировав их по времени, получим скорости центра масс маятника:

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta, \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, \\ v_y = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

Общая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергии маятника и кинетической энергии тележки:

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$U = mgl\cos\theta \tag{3}$$

Записывая функция Лагранжа $L = T - U$, получаем:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \tag{4}$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \tfrac{\partial L}{\partial x} = Q_x, \\ &\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \tfrac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \end{aligned} \tag{5}$$

где Q_x и Q_θ – обобщенные силы, действующие на тележку и маятник соответственно. В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = Q_x, \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta = Q_\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) представляет собой уравнения баланса сил, приложенных к тележке и моментов, действующих на маятник.

Запишем этм уравнения разрешив их относительно высших производных. Заметим, что вторые производные входят в эти уравнения линейно. С учетом этого приведем уравнения к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & M+m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl\sin\theta + Q_\theta \\ ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x \end{bmatrix} \tag{7}$$

Убедимся в существовании и единственности решения системы:

$$D = ml^2(M+m) - m^2l^2\cos^2\theta = ml^2(M+m-m\cos^2\theta) > 0 \tag{8}$$

Решая систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\Delta_{\ddot{x}} = \begin{vmatrix} mgl\sin\theta + Q_\theta & ml\cos\theta \\ ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x & M+m \end{vmatrix} = (mgl\sin\theta + Q_\theta)(M+m) - ml\cos\theta(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) \tag{9}$$

$$\Delta_{\ddot{\theta}} = \begin{vmatrix} ml^2 & mgl\sin\theta + Q_\theta \\ ml\cos\theta & ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x \end{vmatrix} = ml^2(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) - ml\cos\theta(mgl\sin\theta + Q_\theta) \tag{10}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(mgl\sin\theta + Q_\theta)(M+m) - ml\cos\theta(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{ml^2(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) - ml\cos\theta(mgl\sin\theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} \end{cases} \tag{11}$$

Можно записать систему в пространстве состояний X в форме Коши:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(mgl\sin\theta + Q_\theta)(M+m) - ml\cos\theta(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{ml^2(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) - ml\cos\theta(mgl\sin\theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Измеряемым выходом системы будет считать вектор Y, состоящий из координат тележки и угла отклонения маятника от вертикали:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \tag{13}$$

1.2. Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы в отсутствие внешних сил ($Q_x = Q_\theta = 0$). Для этого приравняем к нулю правые части уравнений движения, решим систему уравнений:

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \frac{(mgl\sin\theta + Q_\theta)(M+m) - ml\cos\theta(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} = 0 \\ \frac{ml^2(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) - ml\cos\theta(mgl\sin\theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m\cos^2\theta)} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Упростив, получаем:

$$\begin{cases} \sin\theta(g(M+m) - \cos\theta(ml)) = 0 \\ \sin\theta(ml - \cos\theta g) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \tag{16}$$

Таким образом, точки равновесия системы определяются углом отклонения маятника от вертикали $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что соответствует наивысшему и наинизшему положению маятника соответственно, что сходится с ожидаемым результатом.

1.3. Линейная модель

Для дальнейшего анализа системы ее необходимо линеаризовать. Линеаризацию необходимо проводить в точках равновесия системы, которые были найдены в предыдущем пункте, в противном случае отклонения линейной модели от реальной системы будут велики. Линеаризуем систему в точке равновесия $\theta = 0$ и $x = 0$, используя то, что $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$, $x^{n+1} \approx 0, n \in N$ при малых x.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{lQ_x - mgl\theta - Q_\theta}{lM} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(g\theta + Q_\theta)(M+m) - Q_x}{lM} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dfy = Cx \tag{18}$$