



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Регуляторы с заданной степенью устойчивости”

Вариант 30

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Модальный регулятор	3
1.1. Управляемость собственных чисел	3
1.2. Степень устойчивости	3
1.3. Синтез регулятора	4
1.3.1. Матричное неравенство Ляпунова	4
1.3.2. Матричное неравенство Ляпунова с минимизацией управления	8
1.3.3. Матричное уравнение Риккати	12
1.4. Выводы	19
2. Управление по выходу с заданной степенью устойчивости	19
2.1. Управляемость и наблюдаемость	20
2.2. Степень устойчивости	20
2.3. Синтез регулятора и наблюдателя	20
2.4. Моделирование	22
2.5. Выводы	36

1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.1. Управляемость собственных чисел

Для определения управляемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (3)$$

Где P – матрица собственных векторов матрицы A , а $\hat{x} = P^{-1}x$.

$$A_j = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -2.12 & 0.71 \\ 0 & -1.41 & 0 \\ 1 & 1.41 & 0 \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.12 \\ 4.95 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Таким образом, последнее собственное число $\lambda_3 = -3$ не является управляемым. Соответственно, система не является полностью управляемой. Но, так как данное собственное число располагается в левой полуплоскости, то есть является устойчивым, то система является стабилизируемой.

1.2. Степень устойчивости

Так как собственное число $\lambda_3 = -3$ не является управляемым, то добиться степени устойчивости $\alpha > 3$ не удастся, так как регулятор не сможем его вывести в устойчивую область. При этом любое значение устойчивости $\alpha \leq 3$ является достижимым.

1.3. Синтез регулятора

Будем рассматривать два значения степени устойчивости: $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = 1$, первое из которых является предельным значением, а второе – достижимым. Синтезируем регулятор вида $u = Kx$, который обеспечивает устойчивость системы с заданной степенью устойчивости α .

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, представлена на рисунке 1.

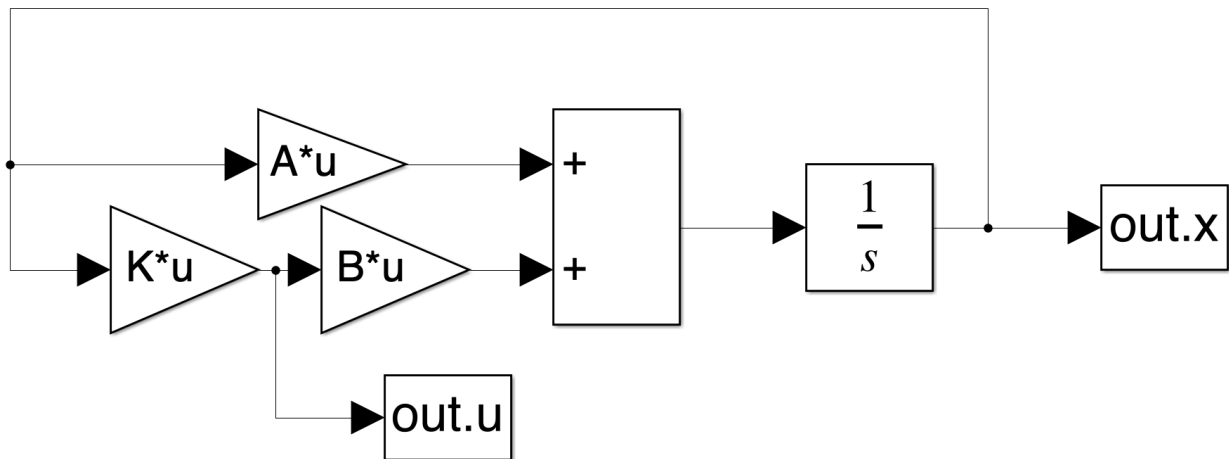


Рис. 1: Схема моделирования системы с регулятором

1.3.1. Матричное неравенство Ляпунова

Рассмотрим матричное неравенство Ляпунова для регулятора:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}, \quad P \succ 0 \quad (5)$$

Для решения данного неравенства воспользуемся пакетом `cvx` в MATLAB.

Получаем матрицы регулятора для $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = 1$:

$$K_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} -17.49 & -1.51 & -14.88 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$K_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} -10.83 & -1.32 & -10.95 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Проверим спектры систем, замкнутых данными регуляторами. Для этого найдем собственные числа матрицы $\sigma_i = A + BK_{\alpha_i}$ для каждого из регуляторов.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -9.30 + 10.44j \\ -9.30 - 10.44j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} -7.02 + 6.91j \\ -7.02 - 6.91j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Видим, что степень устойчивости обеих систем получилась равной 3, что удовлетворяет заданным степеням устойчивости. При этом, остальные, более удаленные от мнимой оси собственные числа меньше при большей заданной степени устойчивости, но в обоих случаях не являются максимально возможными с сохранением поставленных условий.

Проведем моделирование систем, замкнутых регуляторами K_{α_1} и K_{α_2} , при начальном состоянии $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$. Результаты моделирования представлены на рисунках 2 и 3 (графики состояния и управления соответственно) для первого регулятора и на рисунках 4 и 5 (графики состояния и управления соответственно) для второго регулятора.

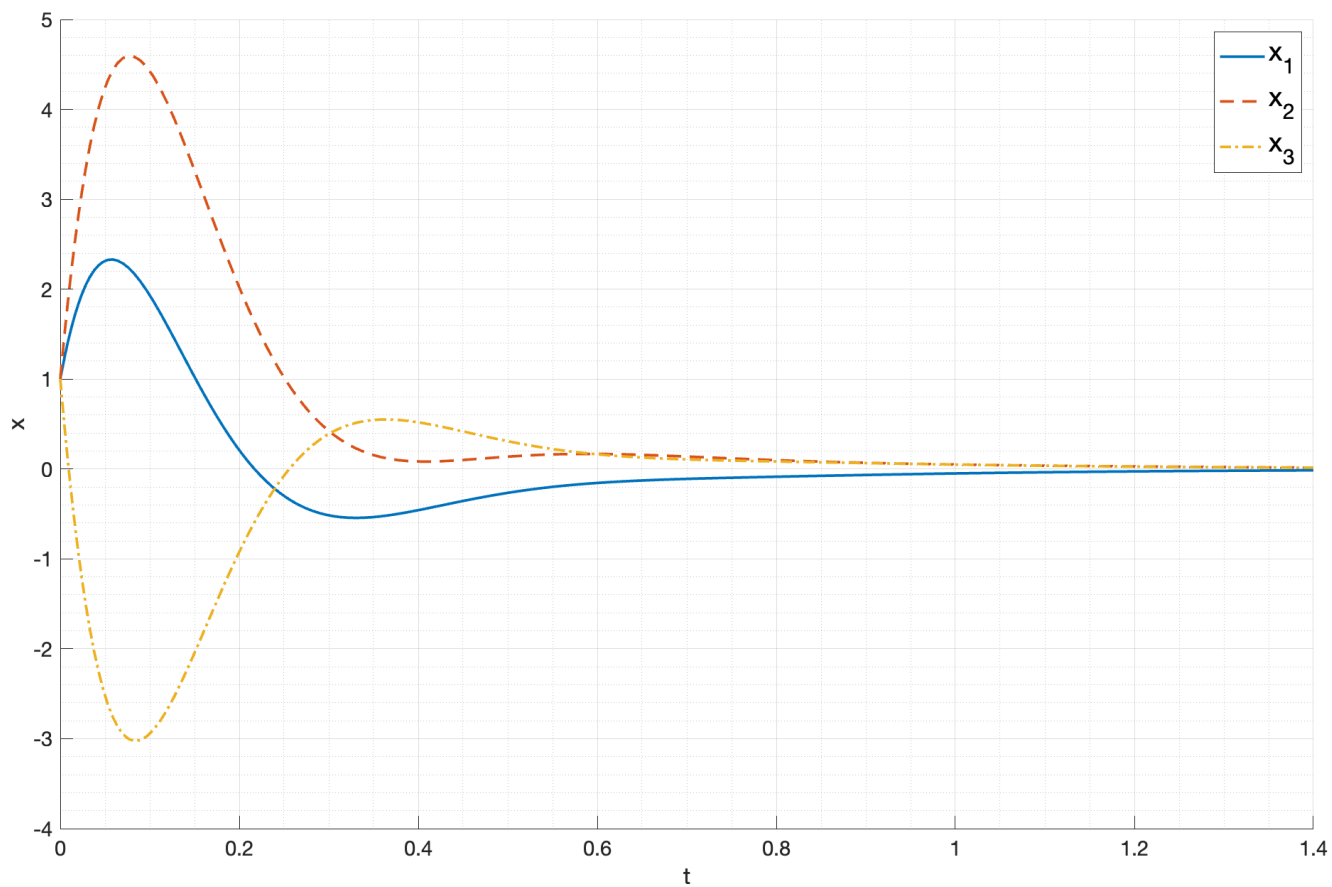


Рис. 2: График состояния системы с регулятором K_{α_1}

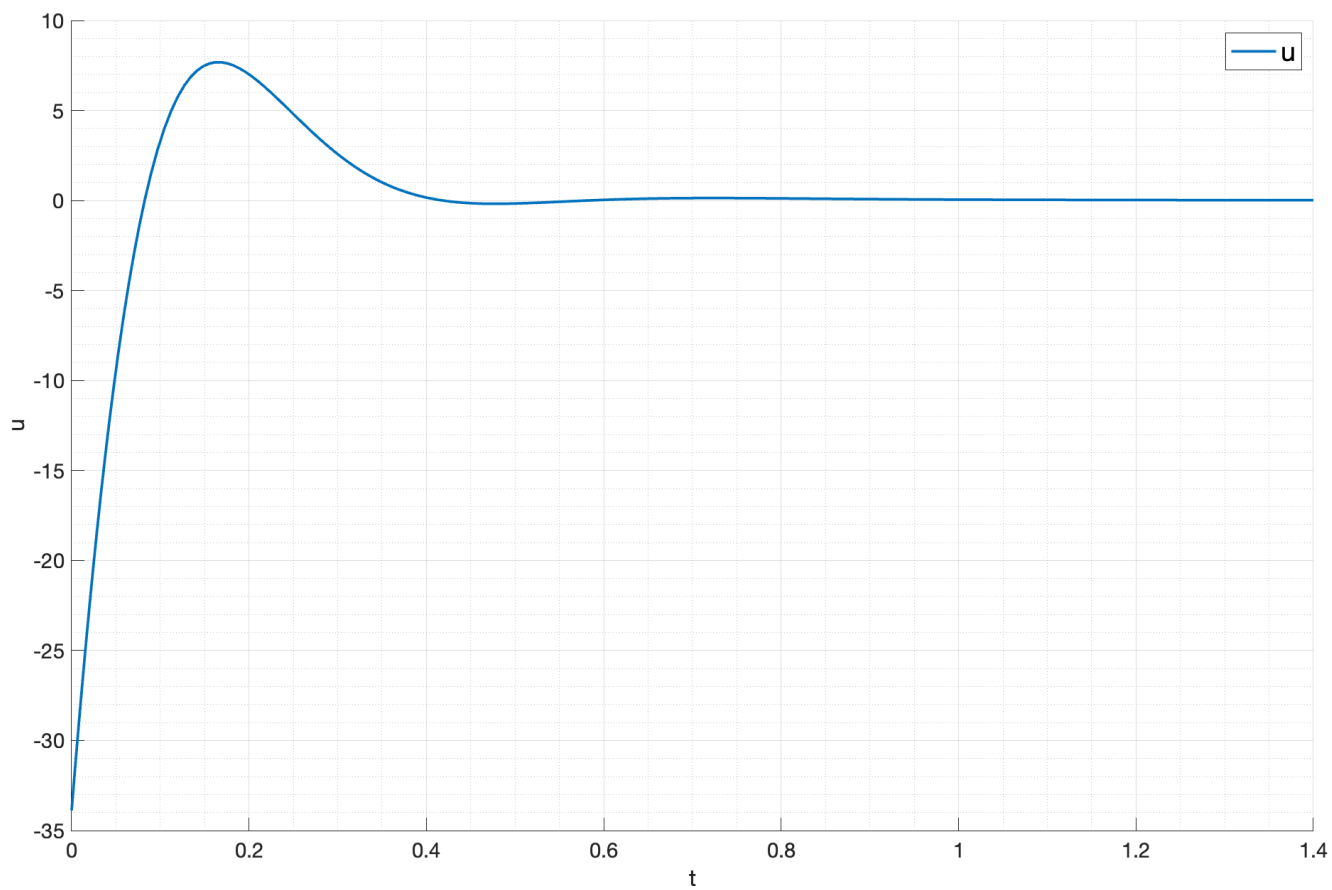


Рис. 3: График управления системой с регулятором K_{α_1}

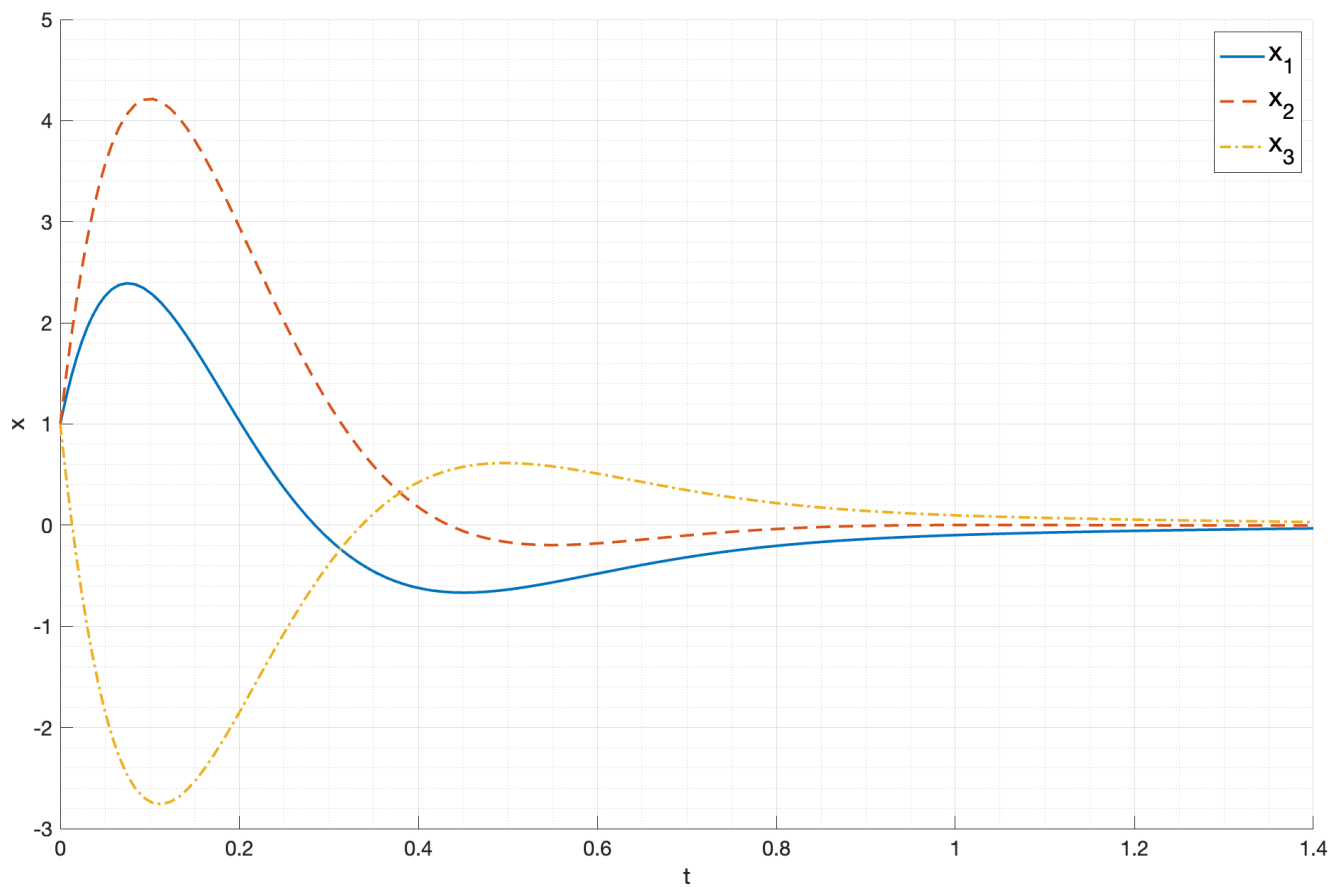


Рис. 4: График состояния системы с регулятором K_{α_2}

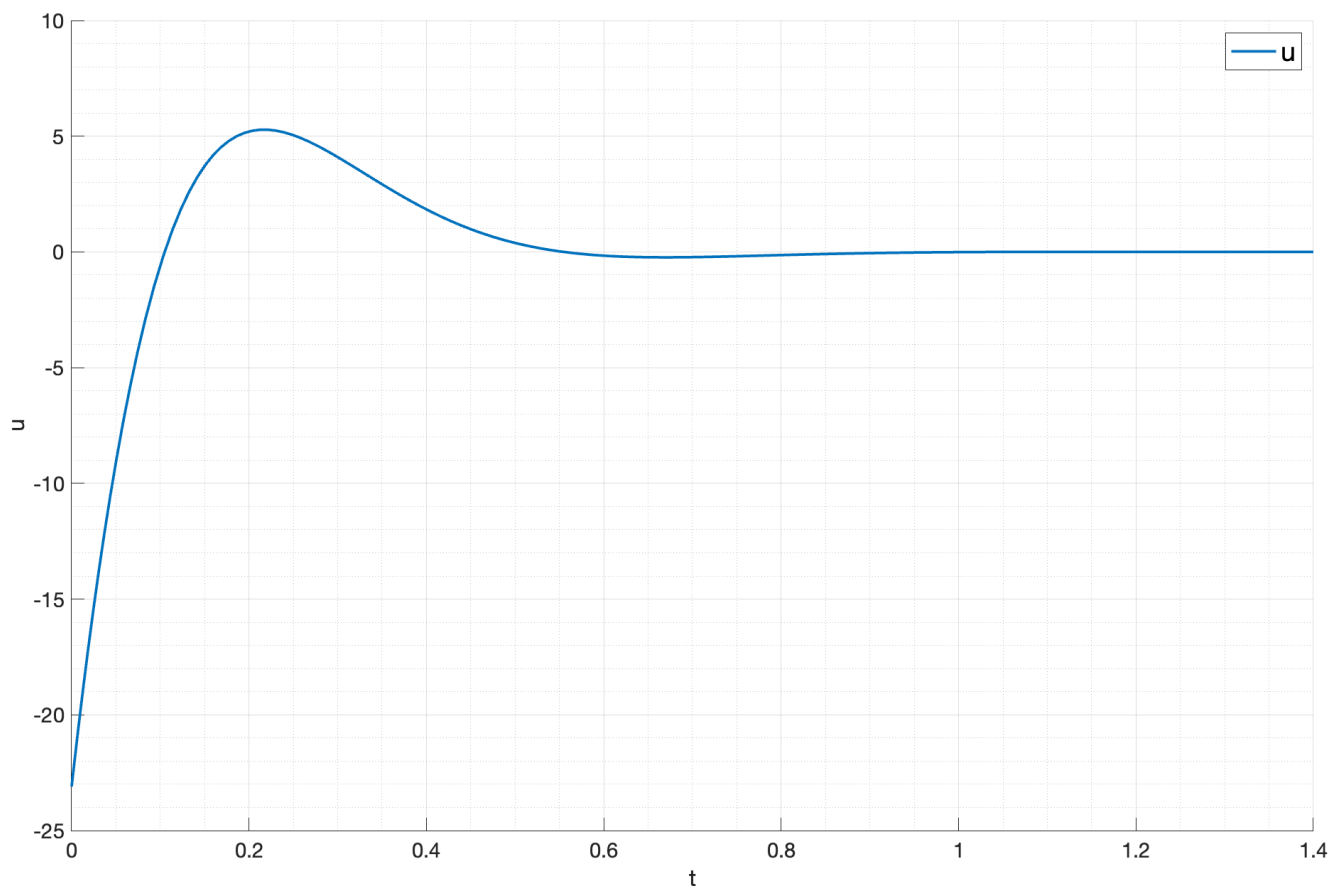


Рис. 5: График управления системой с регулятором K_{α_2}

1.3.2. Матричное неравенство Ляпунова с минимизацией управления

Рассмотрим такую же задачу нахождения регулятора H , обеспечивающего заданную степень устойчивости системы, но теперь добавим условие минимальности управления. Неравенства в данном случае будут следующими:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad H = YP^{-1}, \quad P \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x(0)^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (10)$$

где μ – ограничение на управление $\mu \geq \|u(t)\|_2$.

Минимизируя μ при заданной степени устойчивости α и начальном состоянии $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, получаем следующие матрицы регуляторов:

$$H_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} -4.45 & 0.37 & -4.44 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} -2.18 & 0.55 & -2.18 \end{bmatrix} \quad (12)$$

И спектры систем, замкнутых данными регуляторами:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -3.00 + 4.29j \\ -3.00 - 4.29j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} -1.00 + 3.02j \\ -1.00 - 3.02j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (14)$$

В данном случае, в отличие от прошлого, степень устойчивости систем, замкнутых регулятором с оптимизацией управления, в точности равна заданной степени устойчивости.

При этом, в ходе расчетов, были получены значения ограничения на управление μ_1 и μ_2 соответственно:

$$\mu_1 = 11.974878 \quad \mu_2 = 5.126559 \quad (15)$$

Ожидаемо, с более строгими ограничениями на степень сходимости, ограничение на управление системы становится слабее.

Проведем моделирование систем, замкнутых регуляторами H_{α_1} и H_{α_2} , при начальном состоянии $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Результаты моделирования представлены на рисунках 6 и 7 (графики состояния и управления соответственно) для первого регулятора и на рисунках 8 и 9 (графики состояния и управления соответственно) для второго регулятора.

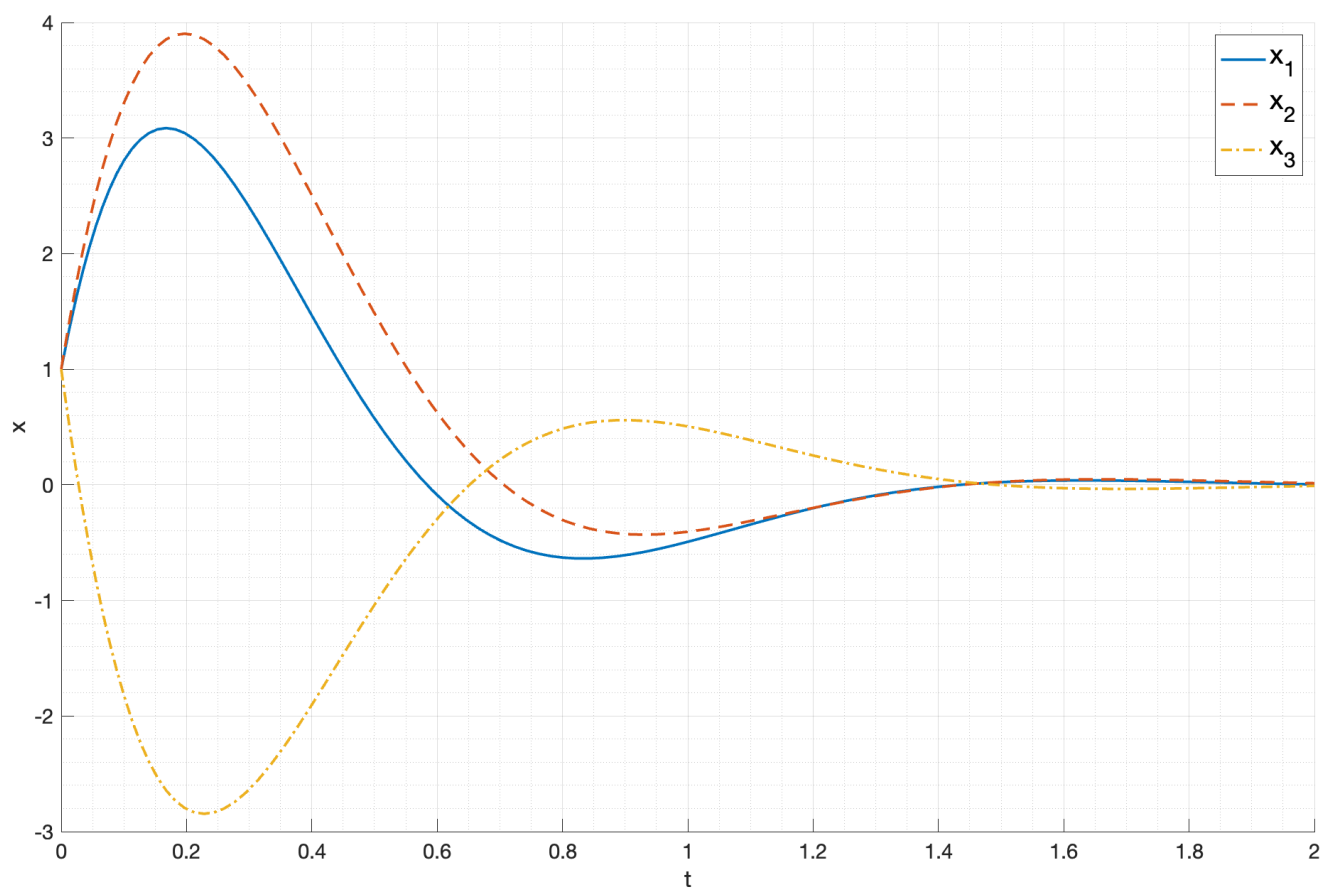


Рис. 6: График состояния системы с регулятором H_{α_1}

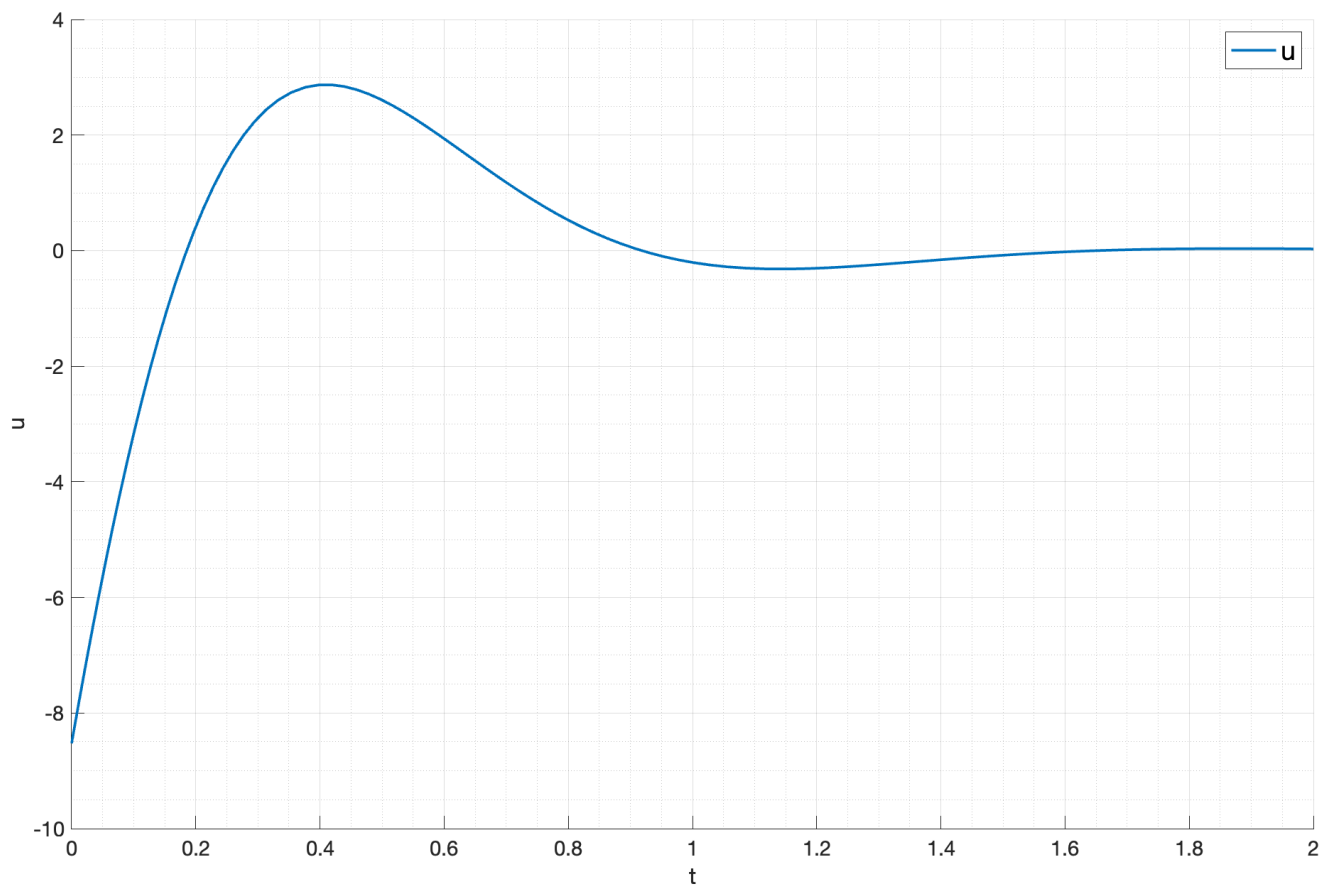


Рис. 7: График управления системой с регулятором H_{α_1}

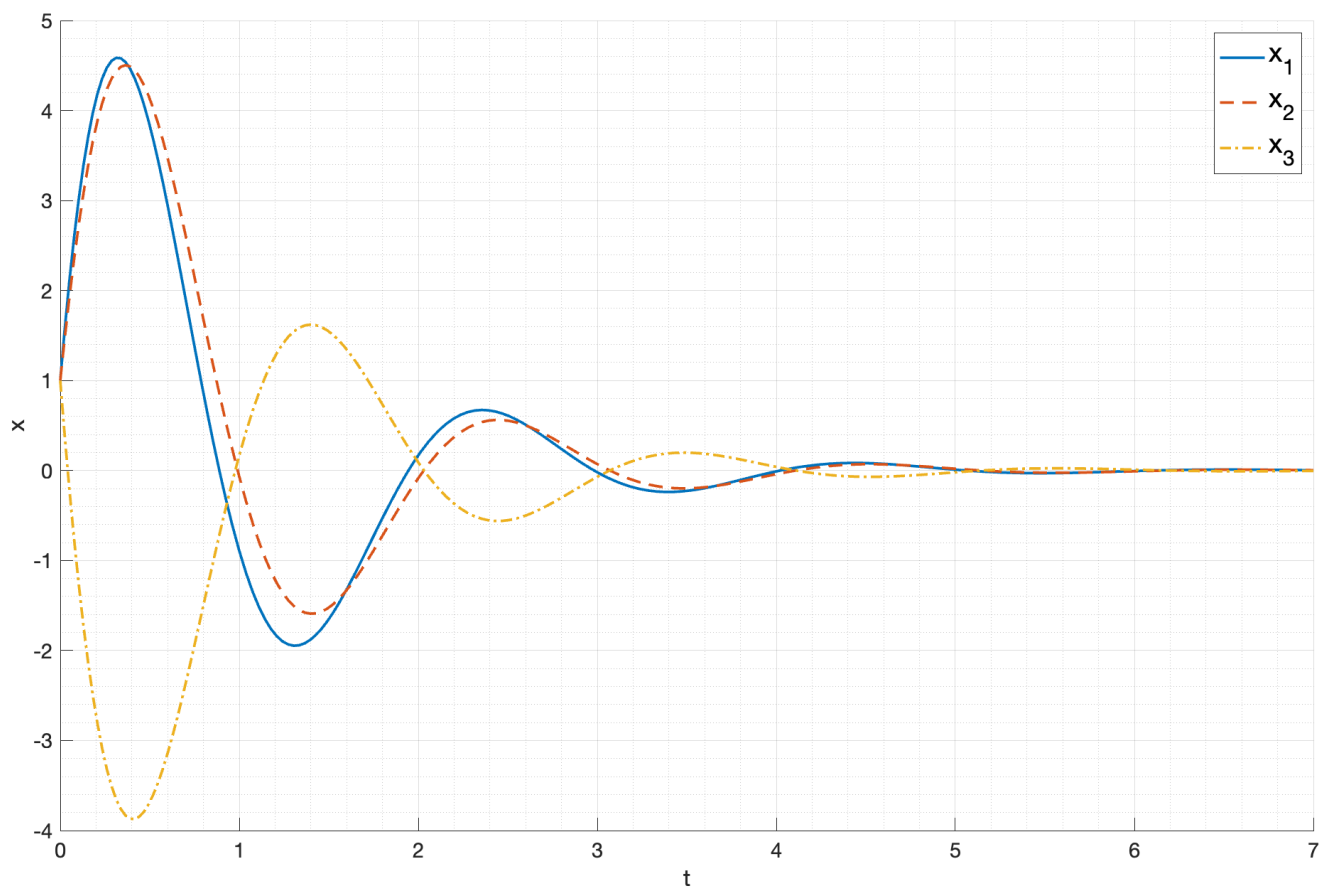


Рис. 8: График состояния системы с регулятором H_{α_2}

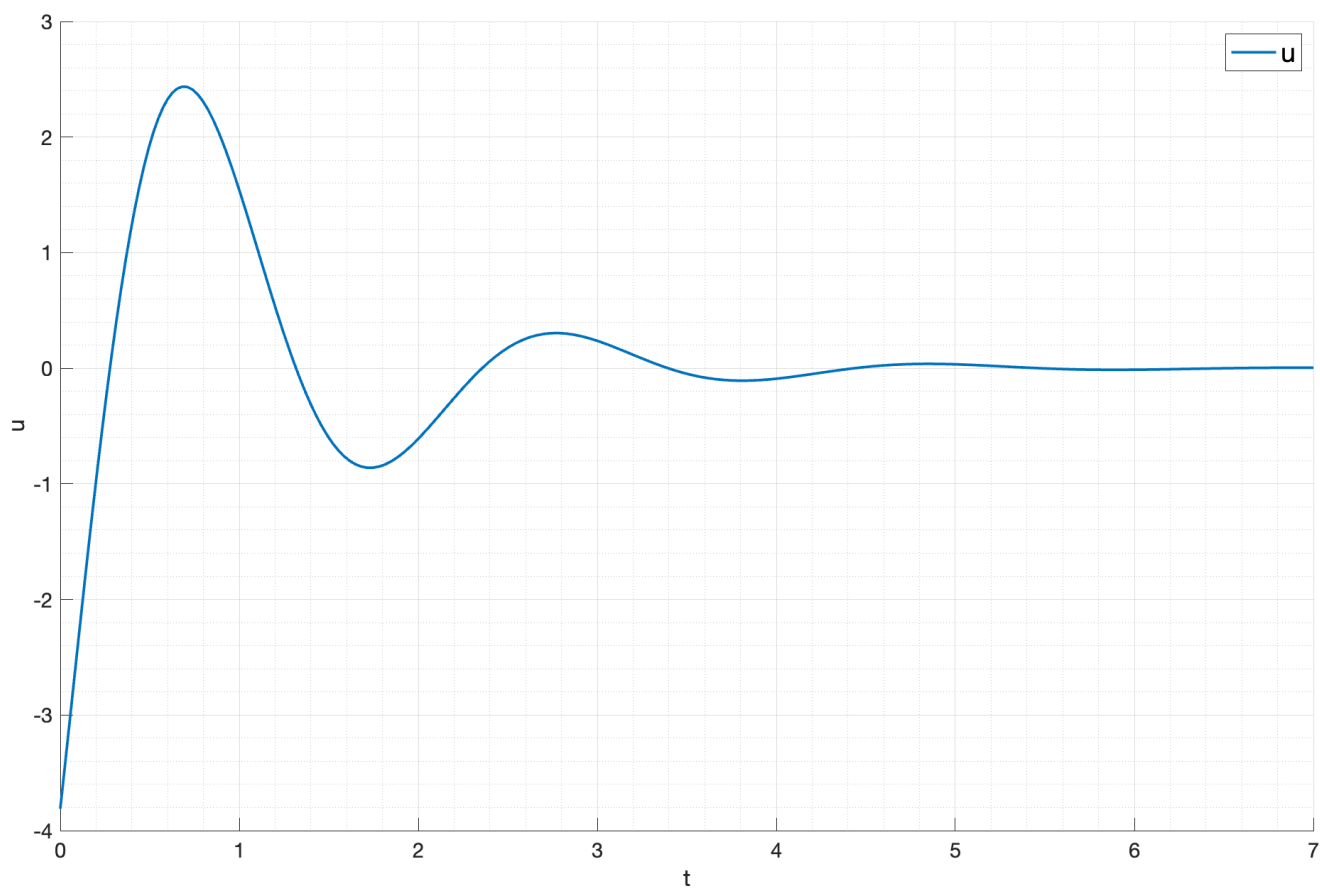


Рис. 9: График управления системой с регулятором H_{α_2}

Вследствие того, что степень устойчивости системы, замкнутой регулятором H_{α_1} , больше, чем у системы, замкнутой регулятором K_{α_1} , состояния системы с регулятором H_{α_1} сходятся быстрее, чем с регулятором K_{α_1} . При этом, управление системой с регулятором H_{α_1} также меньше, чем с регулятором K_{α_1} . Можно заметить, что в обоих случаях управление по модулю не превосходит μ_1 и μ_2 соответственно, что говорит о том, что полученные теоретически ограничения на управление выполняются.

1.3.3. Матричное уравнение Риккати

Теперь рассмотрим синтез регулятора с помощью матричного уравнения Риккати при $v = 2$ и $R = 1$.

$$A^T P + P A + Q - v P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad K = -R^{-1} B^T P \quad (16)$$

Решение данного уравнения также будет получено с помощью функции `icare` в MATLAB.

Найдем матрицы регуляторов K_3 , K_4 для $\alpha_1 = 3$ для $Q = I$ и $Q = 0$ соответственно.

$$K_3 = \begin{bmatrix} -7.54 & -0.06 & -6.79 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3.77 & -0.09 & -3.39 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Спектры систем, замкнутых данными регуляторами:

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} -4.31 + 7.14j \\ -4.31 - 7.14j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} -2.99 + 5.38j \\ -2.99 - 5.38j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (20)$$

В первом случае, при $Q = I$, степень устойчивости двух управляемых собственных чисел системы оказывается больше заданной степени устойчивости $\alpha_1 = 3$. Во втором случае, при $Q = 0$, степень устойчивости двух управляемых собственных чисел системы оказывается равной заданной степени устойчивости $\alpha_1 = 3$.

Проведем моделирование систем, замкнутых регуляторами K_3 и K_4 , при начальном состоянии $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Результаты моделирования представлены на рисунках 10 и 11 (графики состояния и управления соответственно) для первого регулятора и на рисунках 12 и 13 (графики состояния и управления соответственно) для второго регулятора.

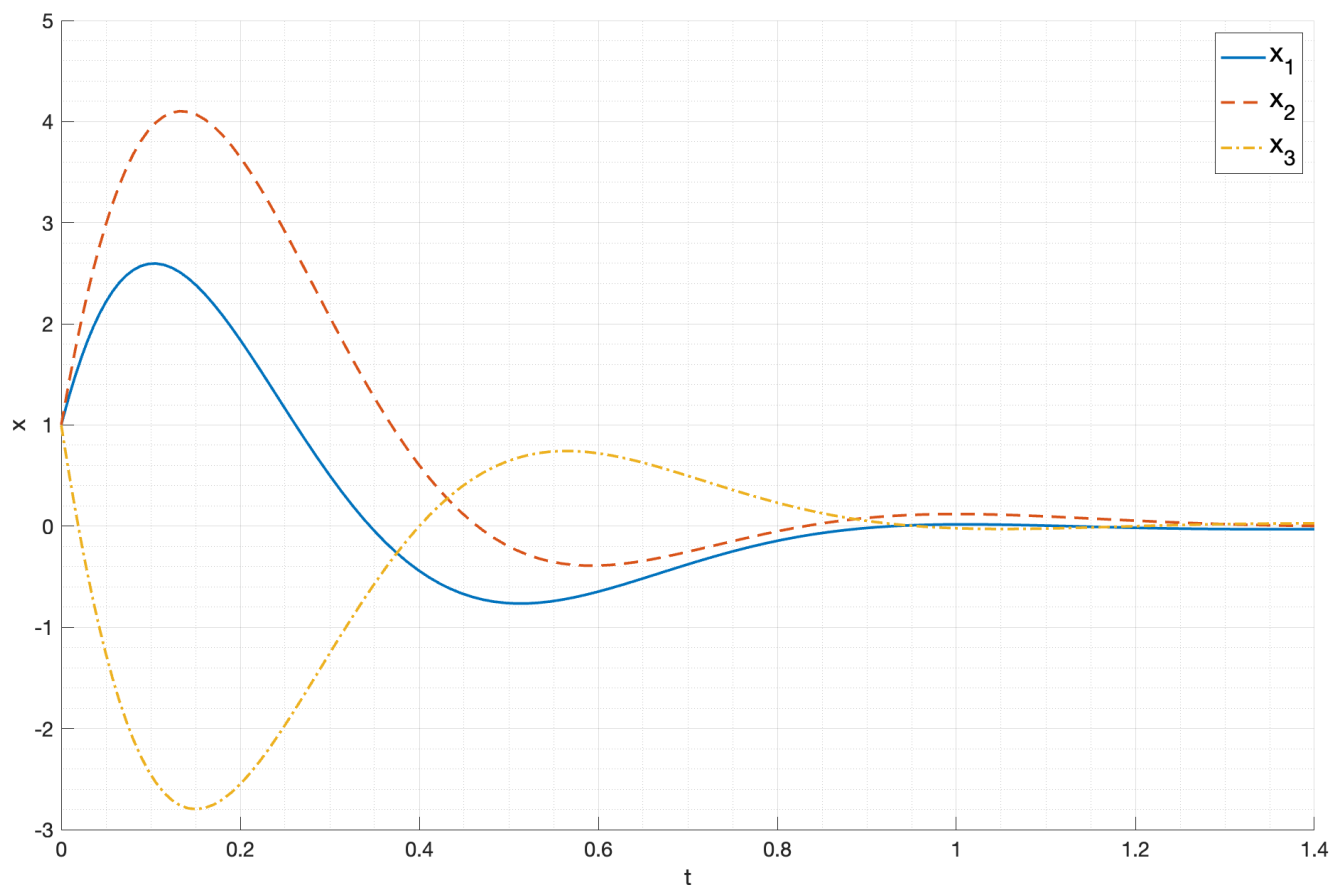


Рис. 10: График состояния системы с регулятором K_3

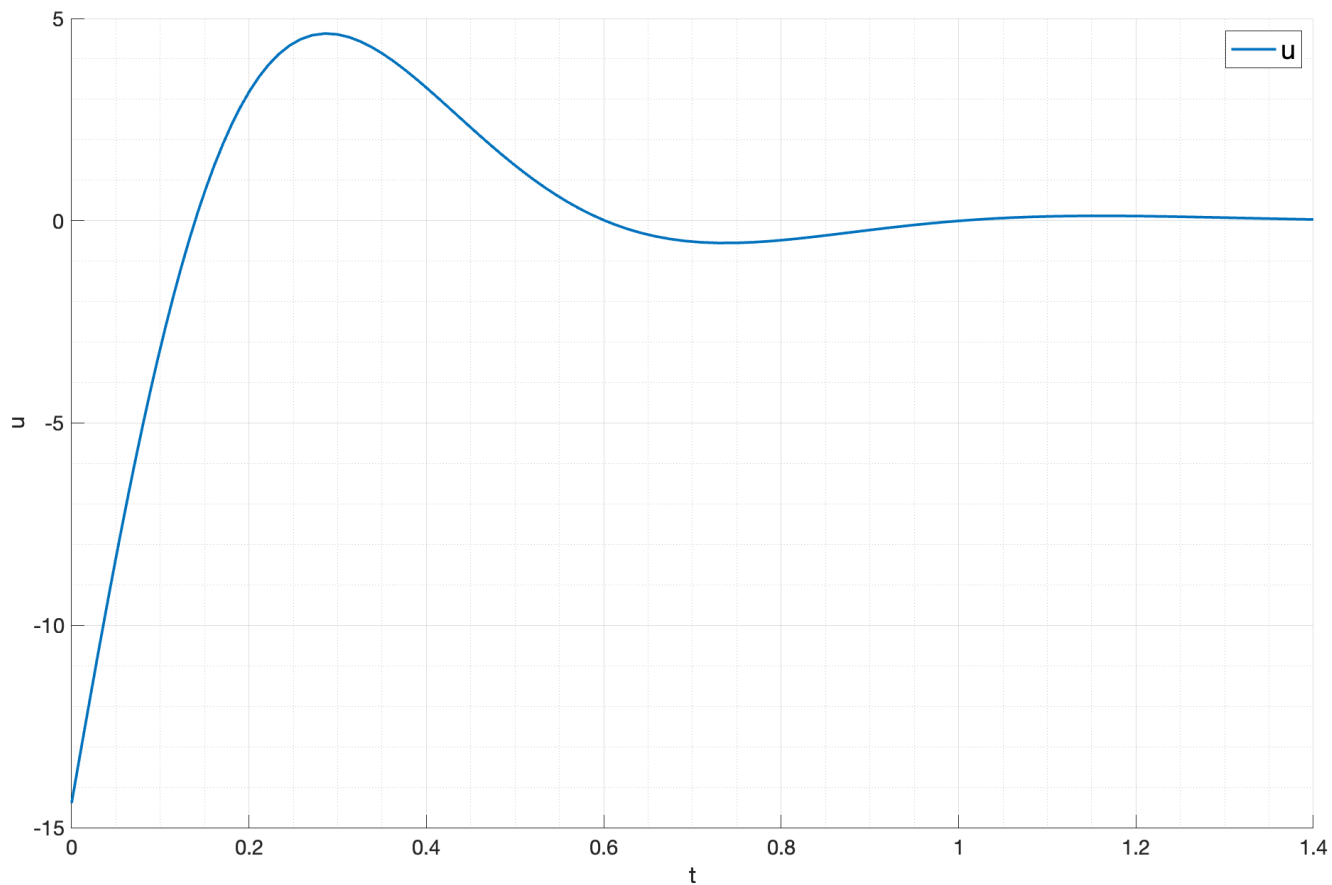


Рис. 11: График управления системой с регулятором K_3

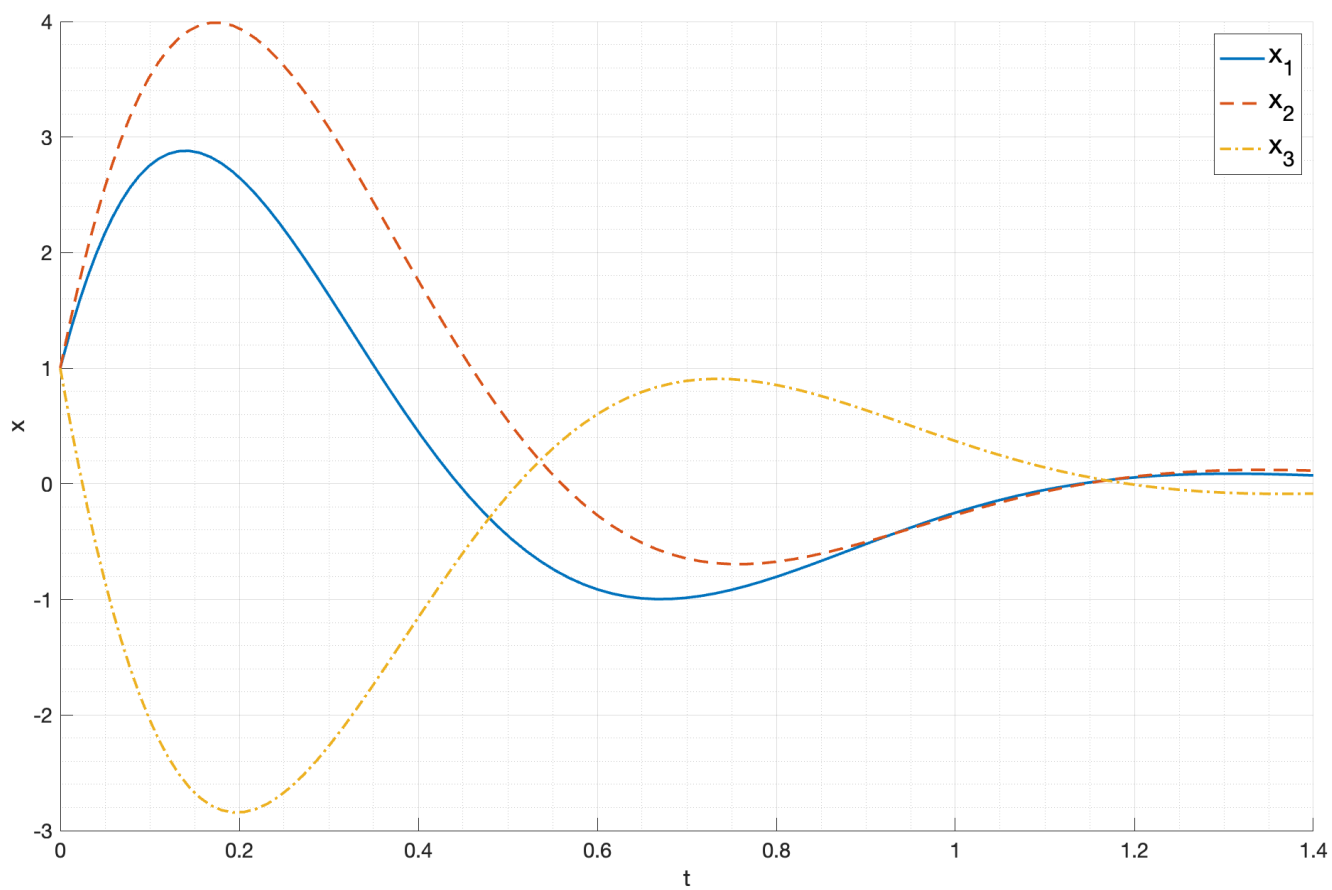


Рис. 12: График состояния системы с регулятором K_4

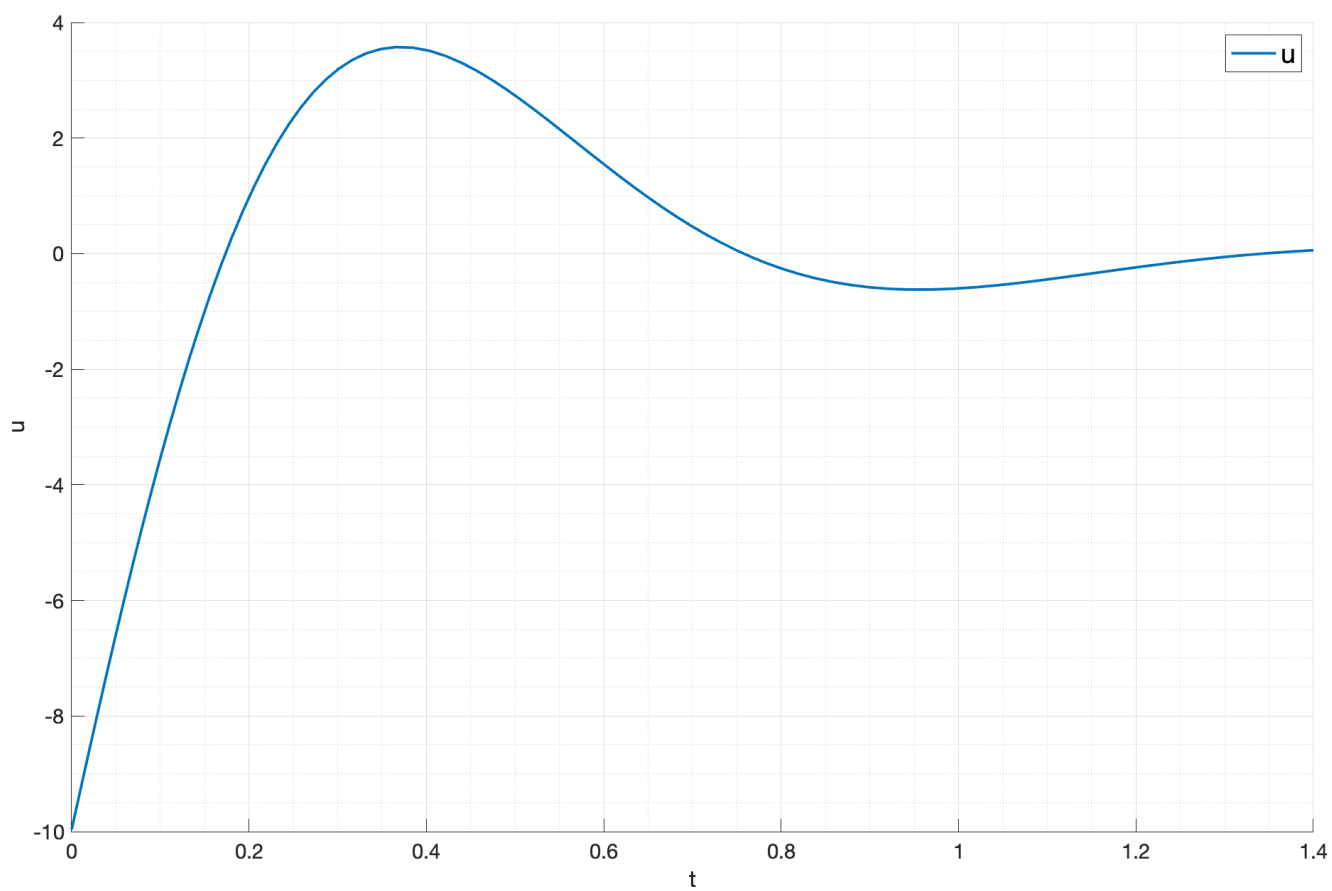


Рис. 13: График управления системой с регулятором K_4

Те же действия повторим для второго спектра и регуляторов K_5 , K_6 для $\alpha_2 = 1$ для $Q = I$ и $Q = 0$ соответственно.

$$K_5 = \begin{bmatrix} -5.01 & 0.29 & -4.55 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -2.37 & 0.41 & -2.37 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Спектры систем, замкнутых данными регуляторами:

$$\sigma_5 = \begin{bmatrix} -2.76 + 5.82j \\ -2.76 - 5.82j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\sigma_6 = \begin{bmatrix} -0.99 + 3.60j \\ -0.99 - 3.60j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Как и в случае с регуляторами K_3 и K_4 , в первом случае, при $Q = I$, степень устойчивости двух управляемых собственных чисел системы оказывается больше заданной степени устойчивости $\alpha_2 = 1$. Во втором случае, при $Q = 0$, степень устойчивости двух управляемых собственных чисел системы оказывается равной заданной степени устойчивости $\alpha_2 = 1$.

Проведем моделирование систем, замкнутых регуляторами K_5 и K_6 , при начальном состоянии $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Результаты моделирования представлены на рисунках 14 и 15 (графики состояния и управления соответственно) для первого регулятора и на рисунках 16 и 17 (графики состояния и управления соответственно) для второго регулятора.

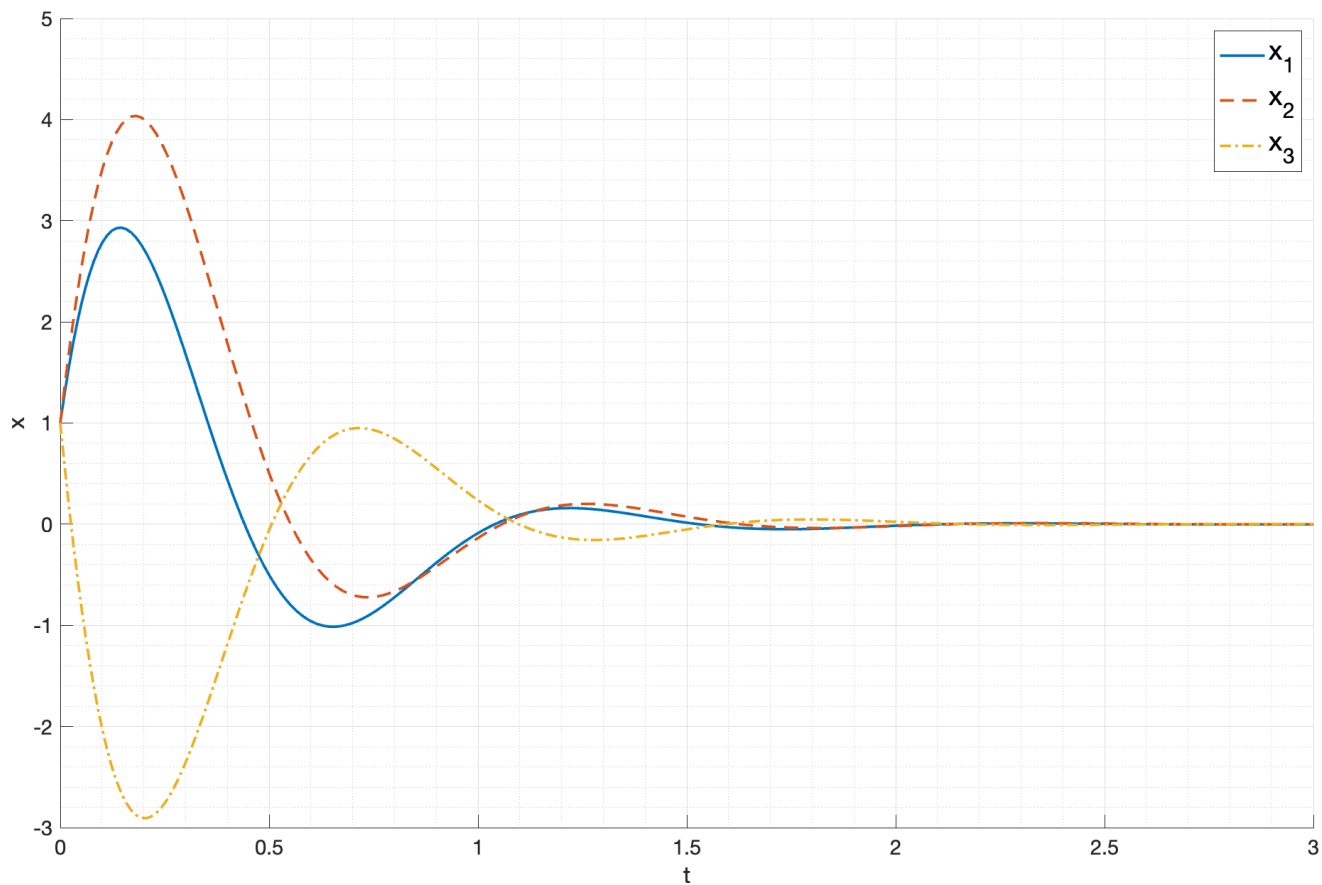


Рис. 14: График состояния системы с регулятором K_5

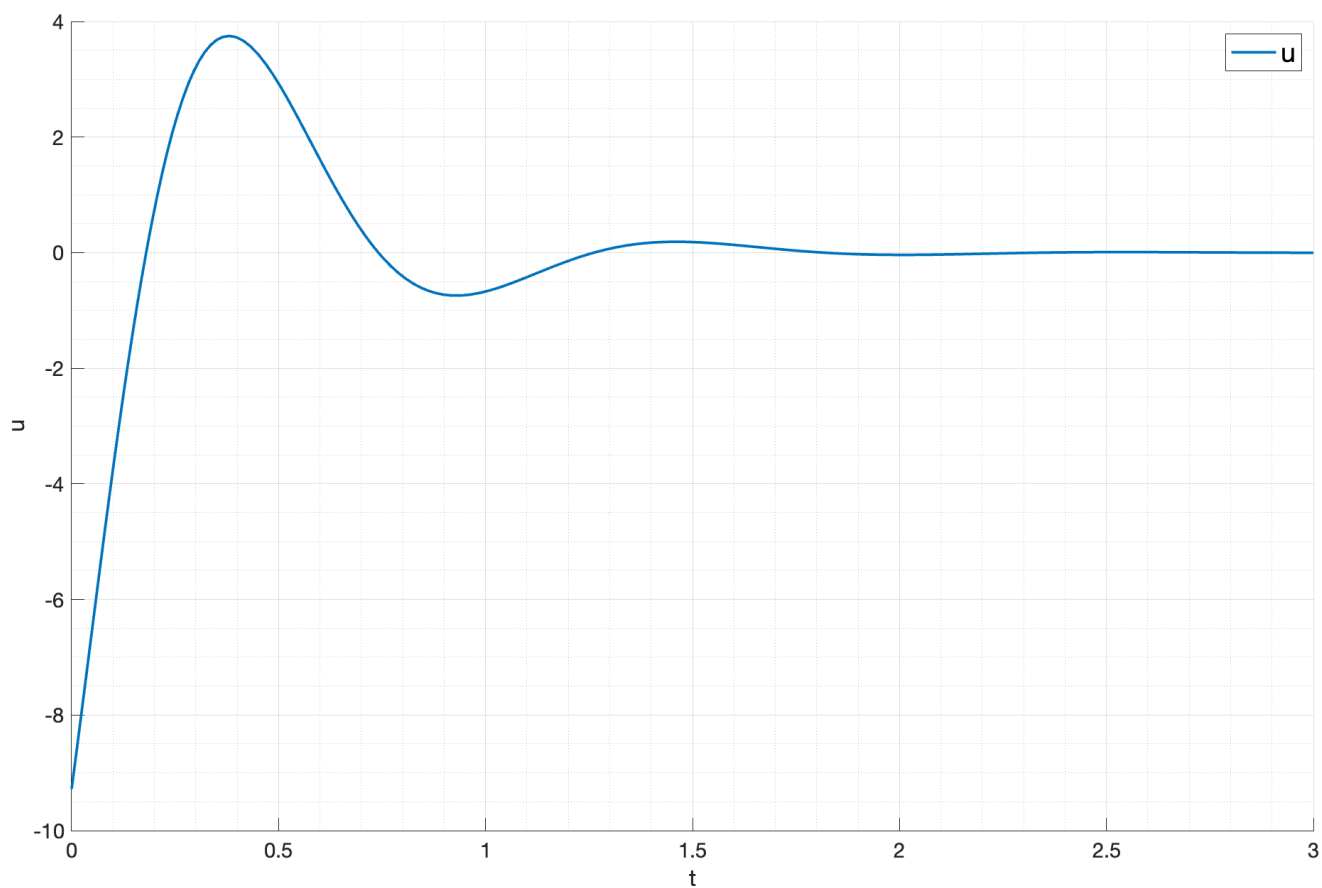


Рис. 15: График управления системой с регулятором K_5

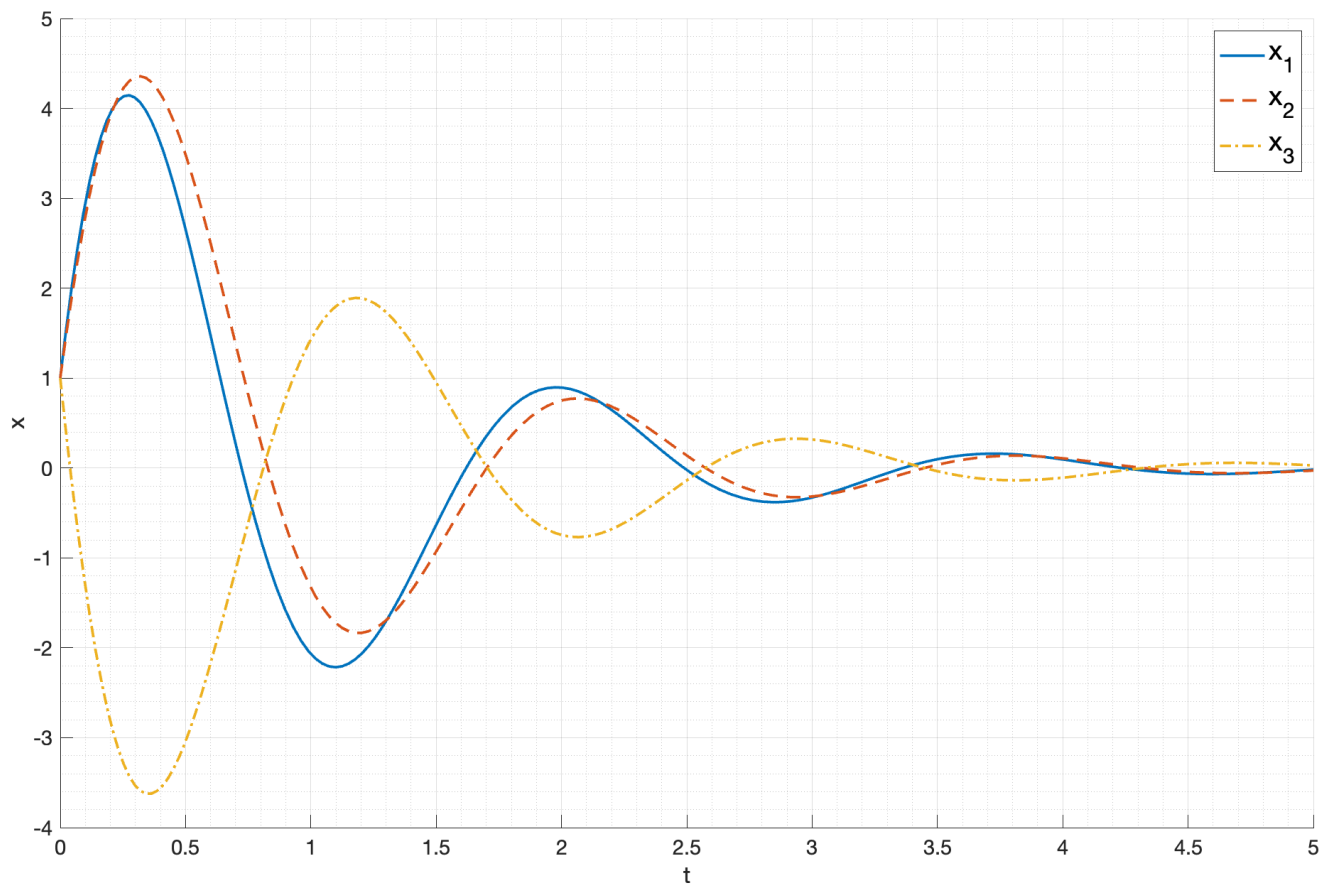


Рис. 16: График состояния системы с регулятором K_6

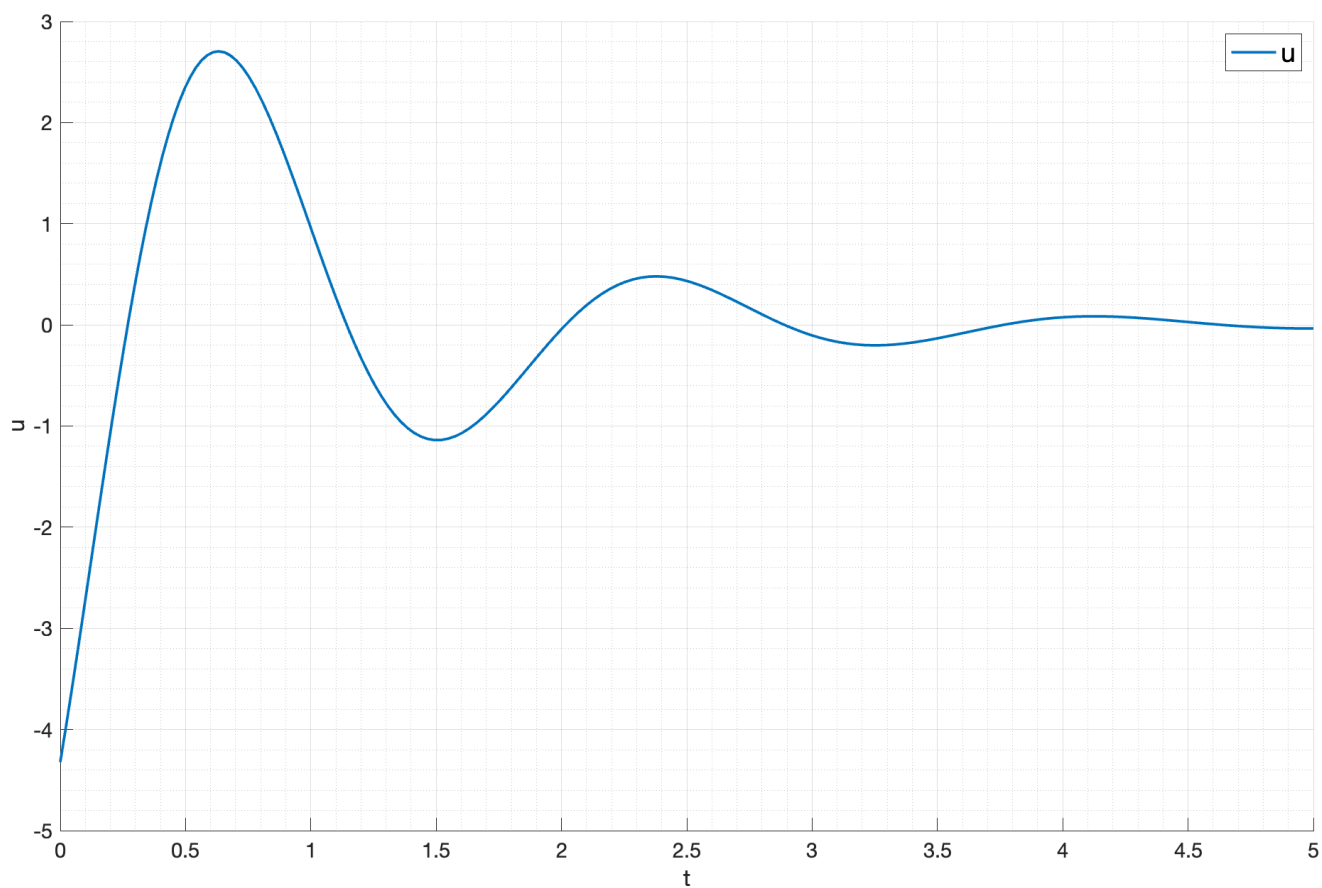


Рис. 17: График управления системой с регулятором K_6

Так же, как и в случае с регуляторами, полученными методом решения матричного неравенства Ляпунова, можно говорить о том, что чем больше заданная степень устойчивости, тем быстрее система сходится к нулю, но при этом управление системы становится больше по модулю.

При использовании $Q = 0$ в матричном уравнении Риккати, получились регуляторы, обеспечивающие заданную степень устойчивости, но не превосходящую ее (кроме неуправляемых собственных чисел). Таким образом, можно говорить о том, что использование матричного уравнения Риккати делает управление системы оптимальным.

1.4. Выводы

В ходе рассмотрения регуляторов, обеспечивающих заданную степень устойчивости системы, было получено несколько регуляторов, все из которых удовлетворяют заданным условиям. Но, некоторые из них, без условия минимизации управления, обеспечивают степень устойчивости больше заданной. Введение условия минимизации управления позволяет добиться оптимального управления системы, то есть минимального управления, обеспечивающего заданную степень устойчивости системы.

2. Управление по выходу с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (25)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ -12 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

2.1. Управляемость и наблюдаемость

Для определения управляемости и наблюдаемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (27)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 12.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -12.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 24.00 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 & -1.00 & 1.00 \\ -1.00 & 1.00 & -1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & -1.00 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad (28)$$
$$B_j = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 4.00 \\ -5.00 \\ 4.00 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} 0.00 & 24.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.00 & 0.00 & 0.00 & 6.00 \end{bmatrix}$$

Можно сделать вывод, что система является полностью управляемой, а собственное число $\lambda_3 = -12$ не является наблюдаемым. Соответственно, система не является полностью наблюдаемой, но, так как собственное число λ_3 располагается в левой полуплоскости, то система является обнаруживаемой.

2.2. Степень устойчивости

Так как все собственные числа системы являются управляемые, то степень устойчивости регулятора может быть любой. Однако собственное число $\lambda_3 = -12$ не является наблюдаемым, поэтому степень устойчивости наблюдателя не может быть больше 12.

2.3. Синтез регулятора и наблюдателя

Выберем степень устойчивости регулятора и наблюдателя равными $\alpha_1 = 12$ и $\alpha_2 = 1$.

С помощью решение матричного неравенства Ляпунова с оптимизаций управления найдем

две матрицы K_1 и K_2 регуляторов, которые обеспечивают желаемую степень устойчивости α_1 и α_2 соответственно.

Метод решения матричного неравенства Ляпунова с оптимизацией управления рассмотрен с предыдущем пункте.

В результате получаем:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -36.29 & 5.88 & 19.69 & -10.73 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -8.38 & -2.07 & 7.79 & -2.66 \end{bmatrix} \quad (30)$$

И соответствующие им спектры замкнутых систем:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -12.00 + 25.49j \\ -12.00 - 25.49j \\ -12.00 + 0.83j \\ -12.00 - 0.83j \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} -1.00 + 18.40j \\ -1.00 - 18.40j \\ -11.99 \\ -1.00 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Степень устойчивости полученных систем соответствуют выбранным значениям $\alpha_1 = 12$ и $\alpha_2 = 1$.

Прделаем аналогичные действия для нахождения матрицы наблюдателя L_1 и L_2 , которые

обеспечивают желаемую степень устойчивости α_1 и α_2 соответственно.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.18 & -8.00 \\ -1.18 & -13.27 \\ -1.18 & 13.27 \\ -1.18 & -8.00 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.66 & -4.33 \\ -0.66 & -4.58 \\ -0.66 & 4.58 \\ -0.66 & -4.33 \end{bmatrix} \quad (34)$$

И соответствующие им спектры наблюдателя:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} -12.00 + 15.35j \\ -12.00 - 15.35j \\ -16.31 \\ -12.00 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} -12.00 \\ -1.00 + 4.11j \\ -1.00 - 4.11j \\ -3.90 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Степень устойчивости полученных систем соответствуют выбранным значениям $\alpha_1 = 12$ и $\alpha_2 = 1$.

2.4. Моделирование

Схема моделирования системы представлена на рисунке 18.

Рассмотрим несколько вариантов систем с разными комбинациями регуляторов и наблюдателей, среди которых

- K_1 и $L_1 - 12, 12$
- K_1 и $L_2 - 12, 1$

- K_2 и $L_1 - 1, 12$
- K_2 и $L_2 - 1, 1$

значения после тире соответствуют степени устойчивости регулятора и наблюдателя.

Таким образом, будут рассмотрены четыре системы, которые будут отличаться только матрицами регулятора и наблюдателя. При этом среди них будет две системы, в которых степень устойчивости регулятора и наблюдателя равны, а также две системы, в которых степень устойчивости регулятора и наблюдателя различны, в одной из которых степень устойчивости регулятора больше степени устойчивости наблюдателя, а в другой наоборот.

Проведем моделирование описанных систем. В качестве начальных условий для системы выберем $x_0 = [1, 1, 1, 1]^T$, для наблюдателя $\hat{x}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$.

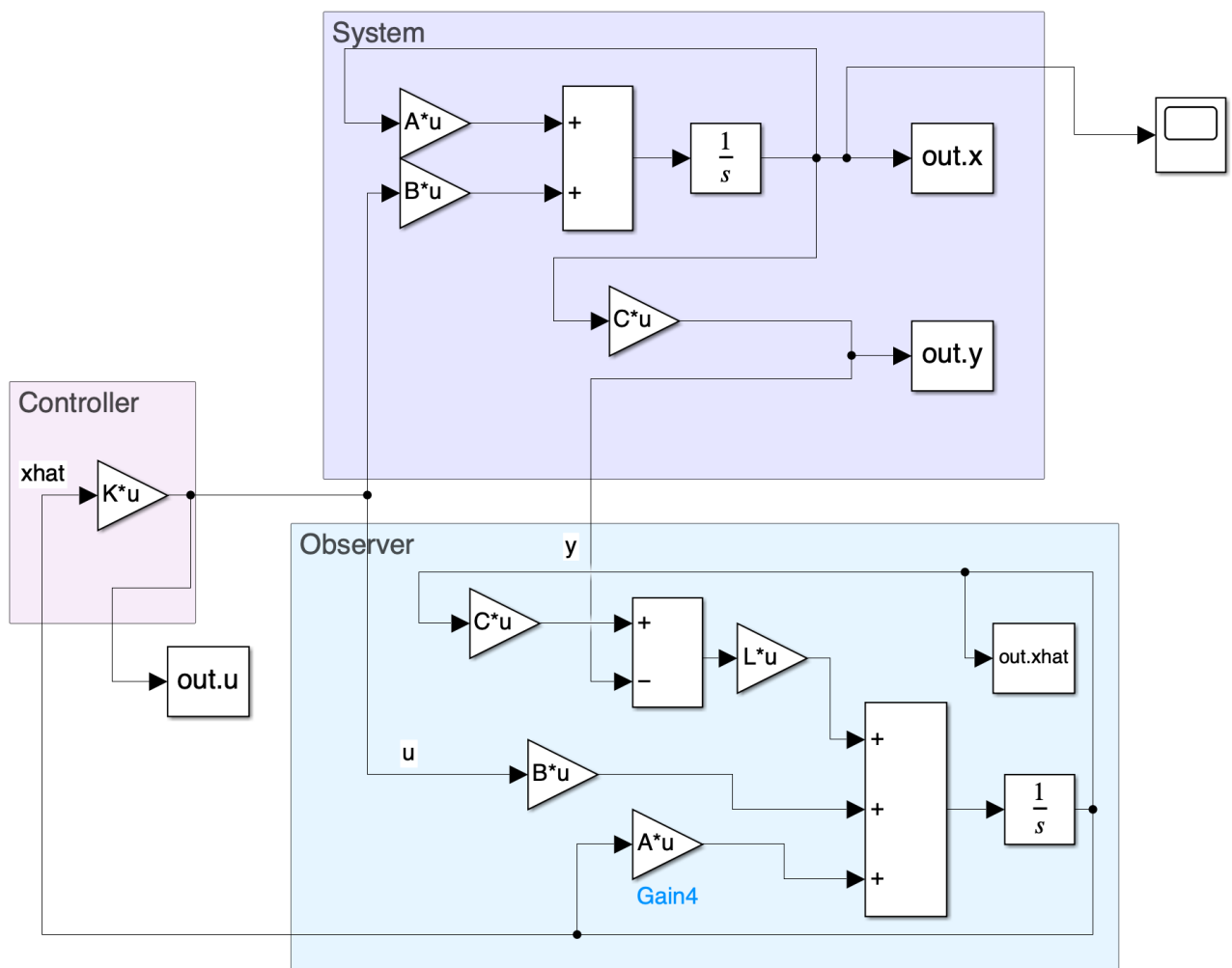


Рис. 18: Схема моделирования системы

Для регулятора K_1 и наблюдателя L_1 результаты моделирования представлены на рисунках 19 (состояние системы), 20 (ошибка наблюдения), 21 (управляющее воздействие) и 22 (состояние системы и ее оценка).

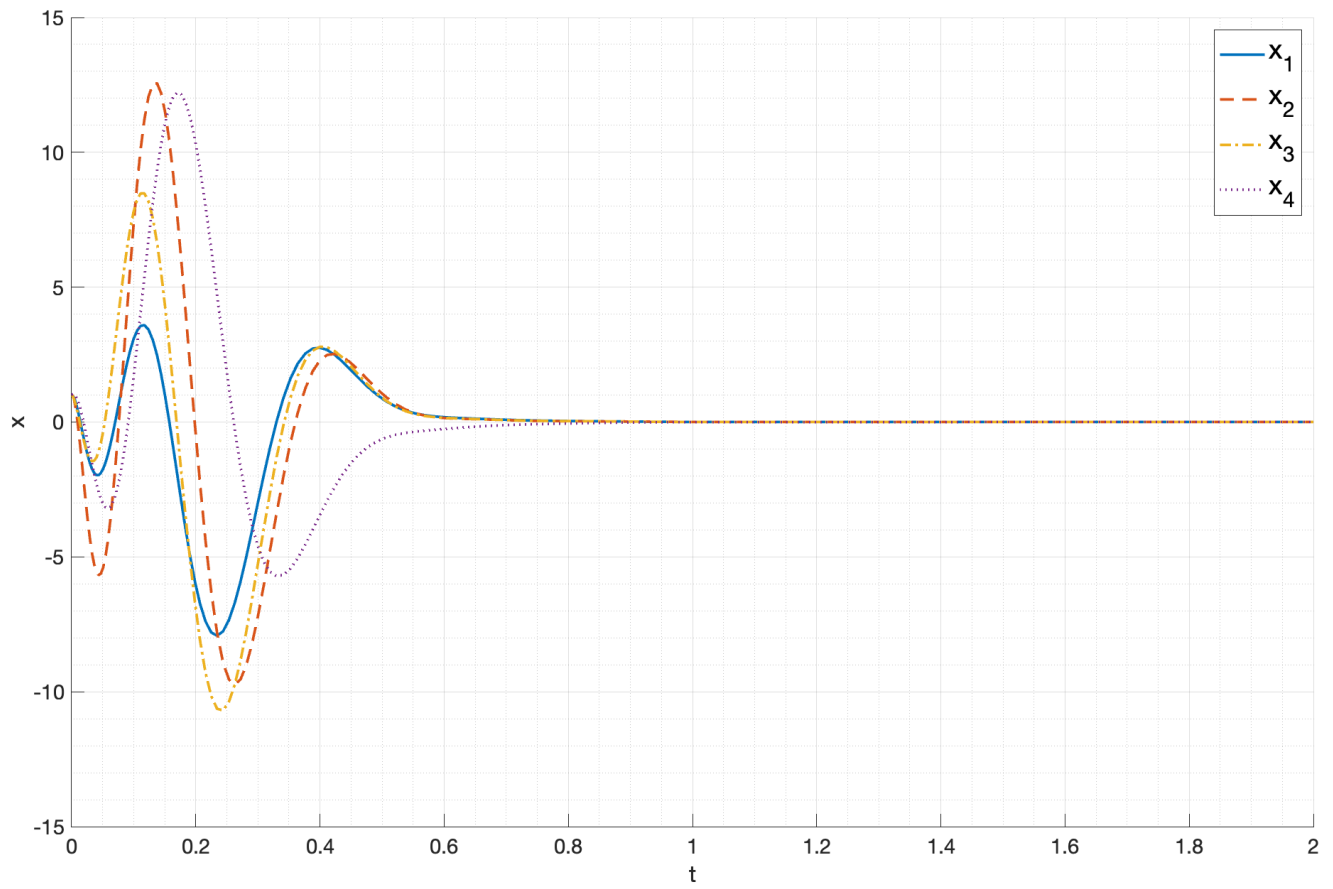


Рис. 19: Состояние системы K_1 и L_1

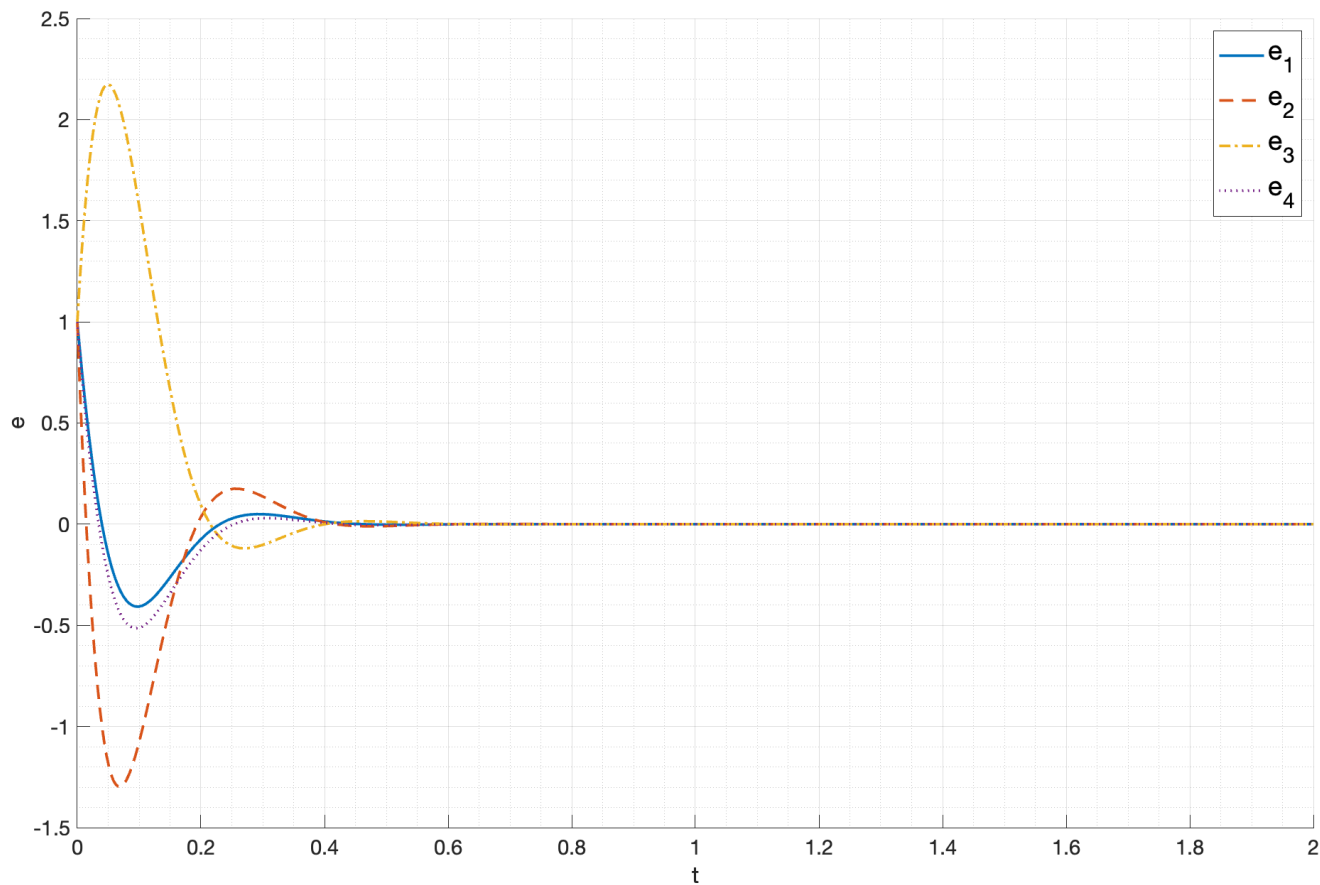


Рис. 20: Ошибка наблюдения K_1 и L_1

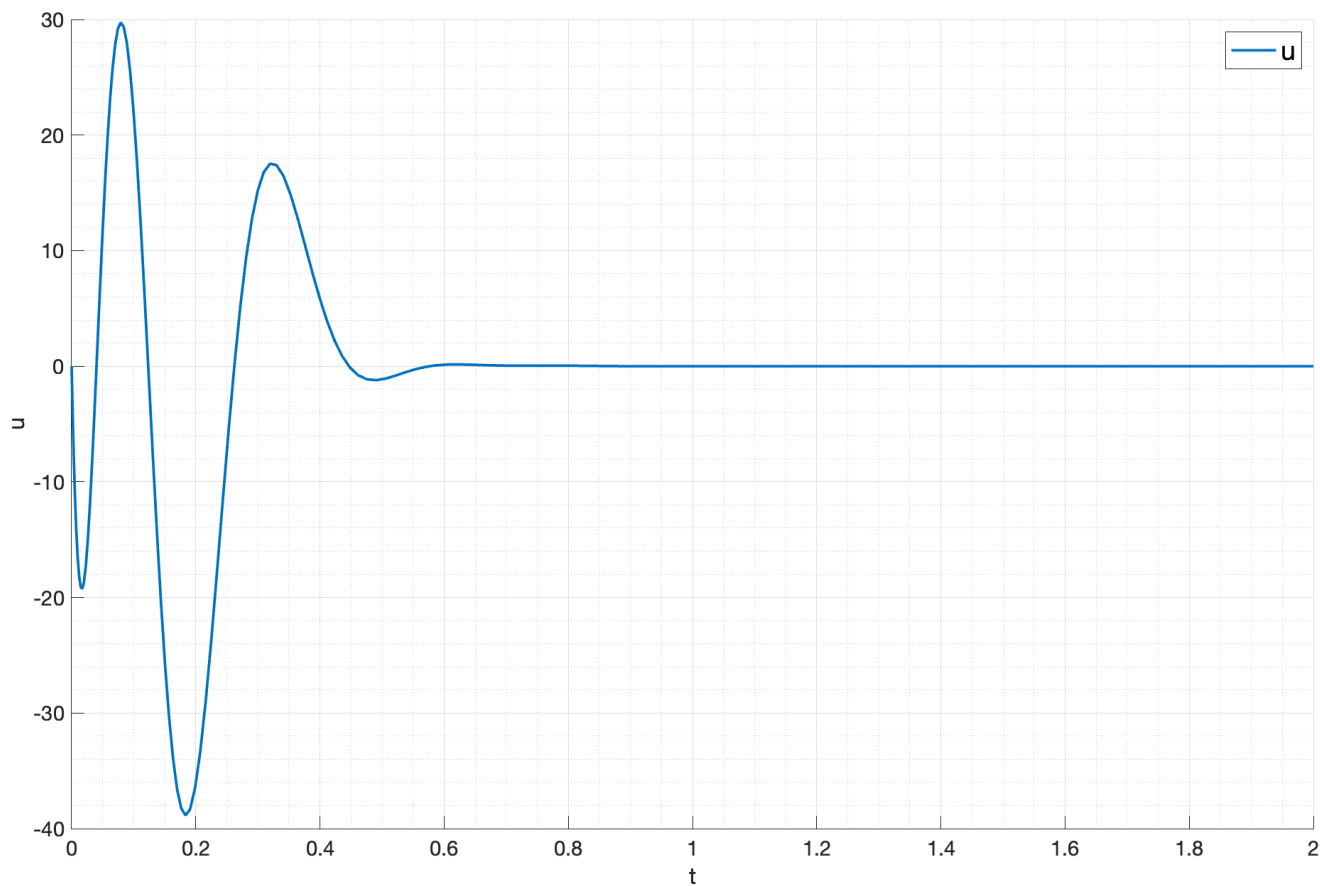


Рис. 21: Управляющее воздействие K_1 и L_1

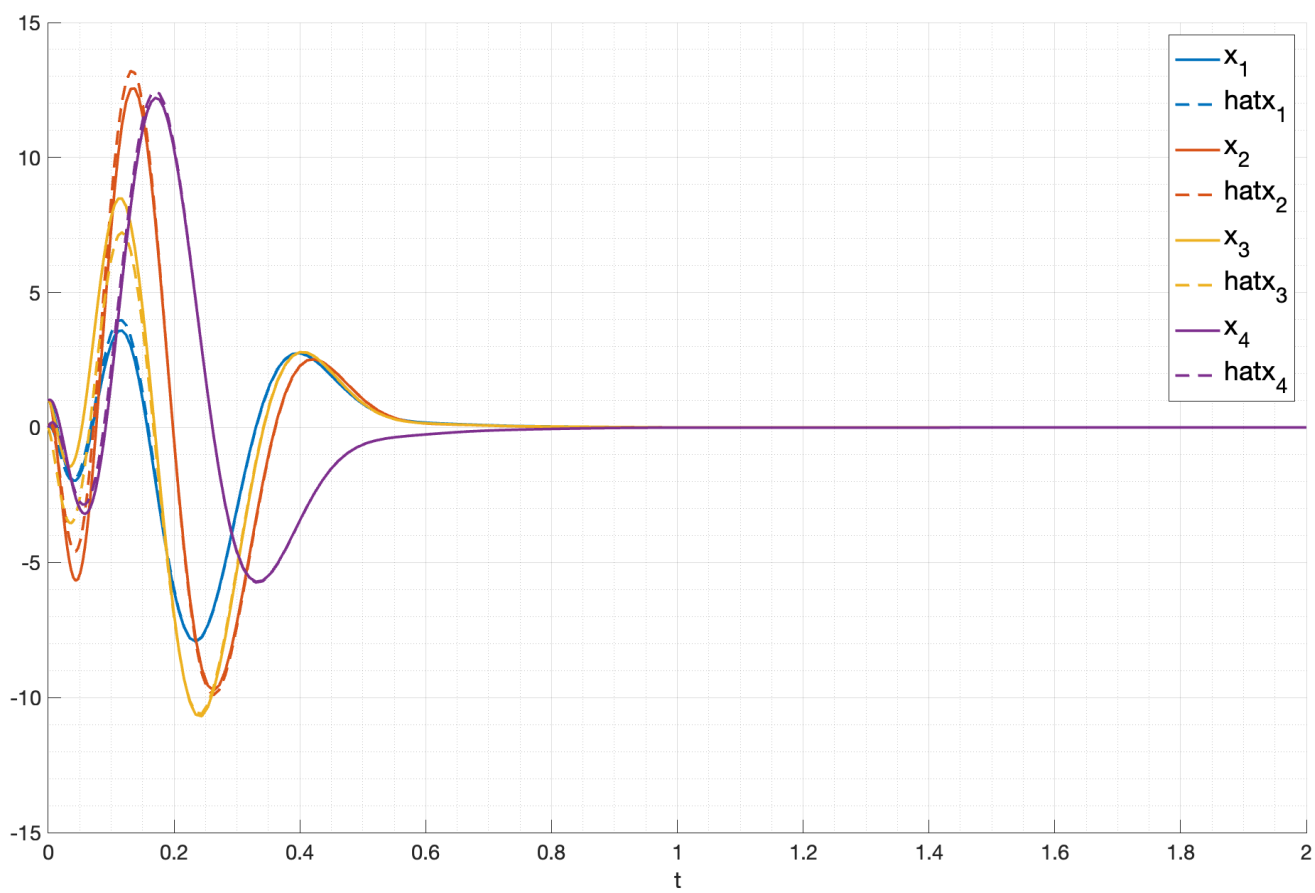


Рис. 22: Состояние системы и ее оценка K_1 и L_1

Для регулятора K_1 и наблюдателя L_2 результаты моделирования представлены на рисунках 23 (состояние системы), 24 (ошибка наблюдения), 25 (управляющее воздействие) и 26 (состояние системы и ее оценка).

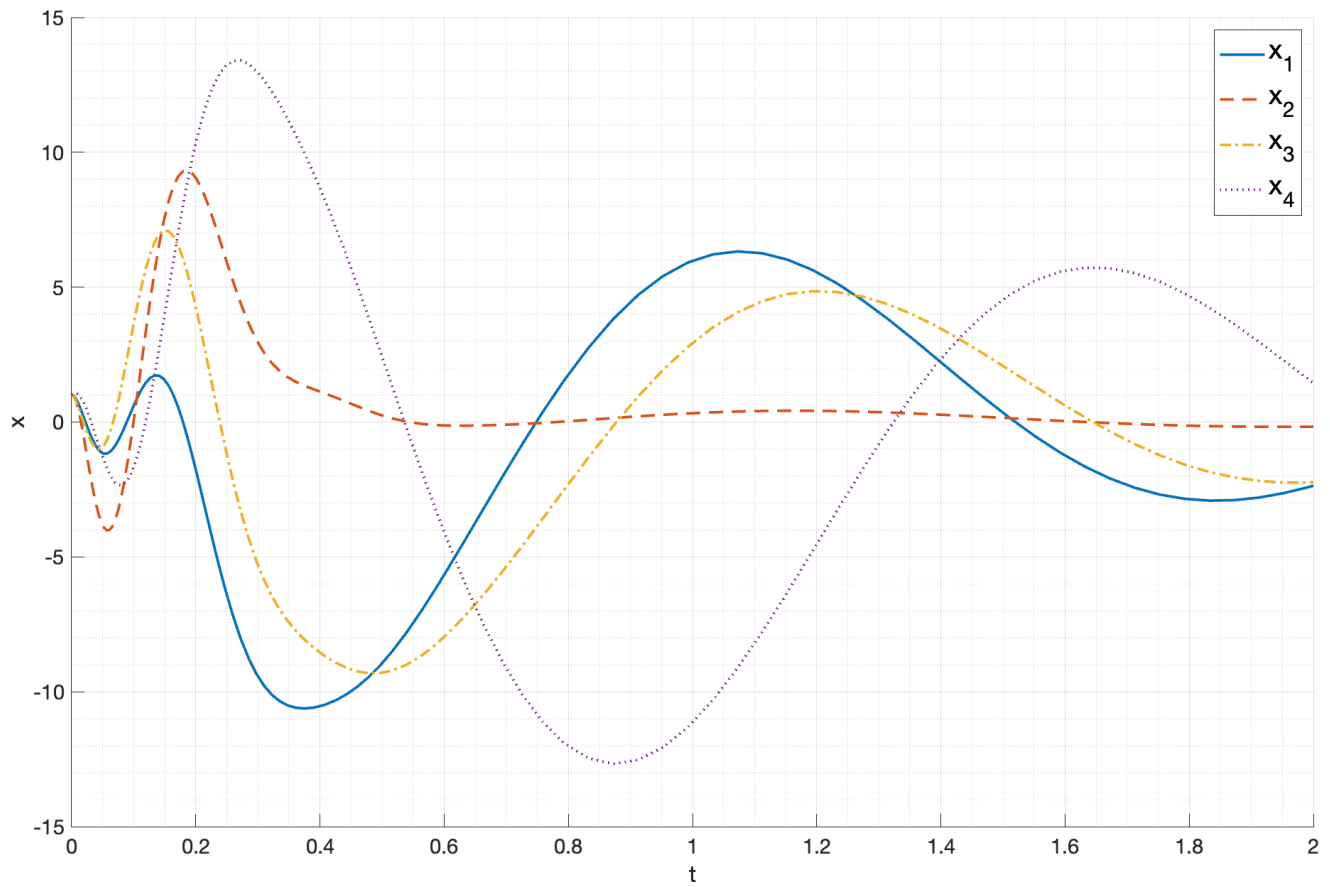


Рис. 23: Состояние системы K_1 и L_2

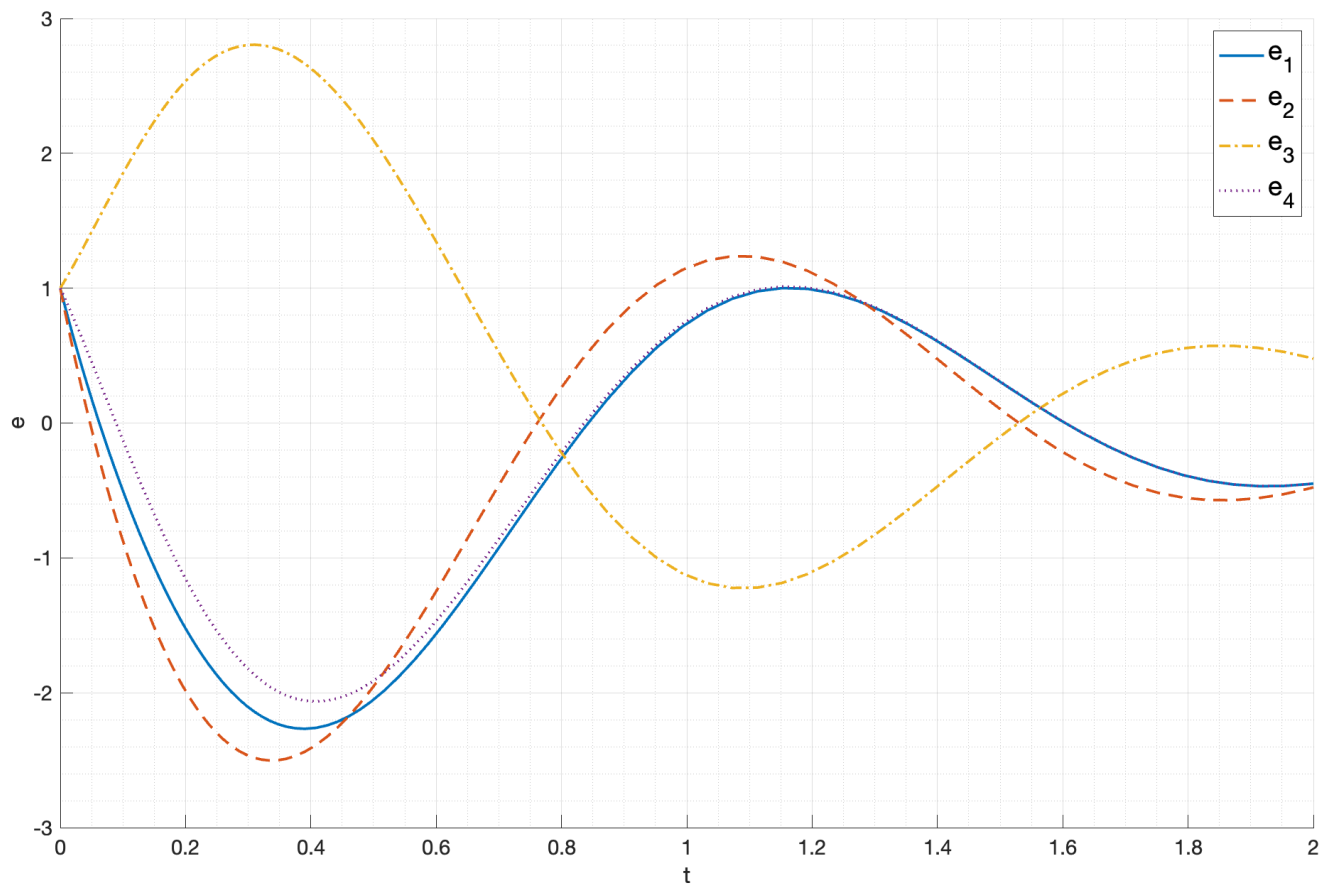


Рис. 24: Ошибка наблюдения K_1 и L_2

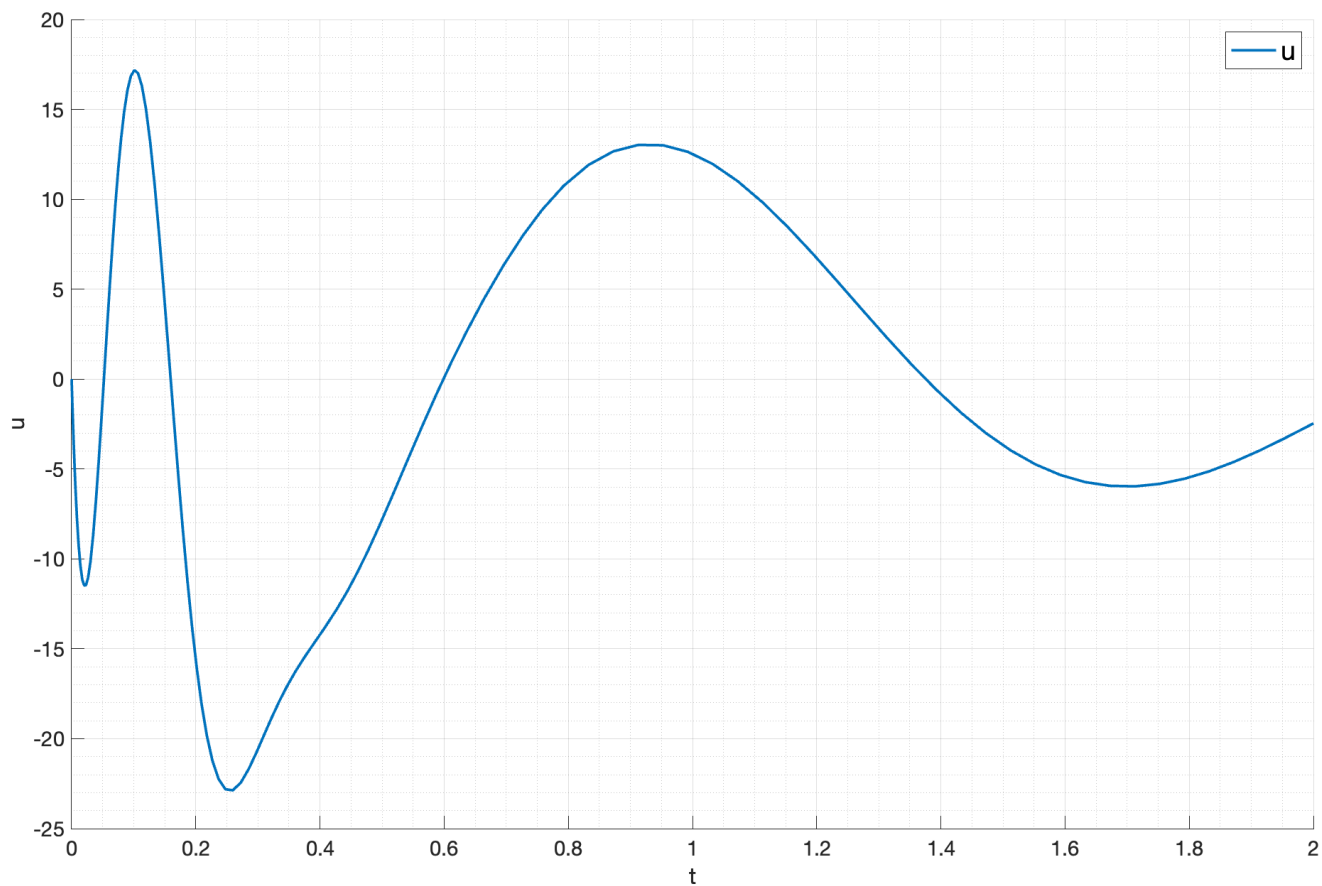


Рис. 25: Управляющее воздействие K_1 и L_2

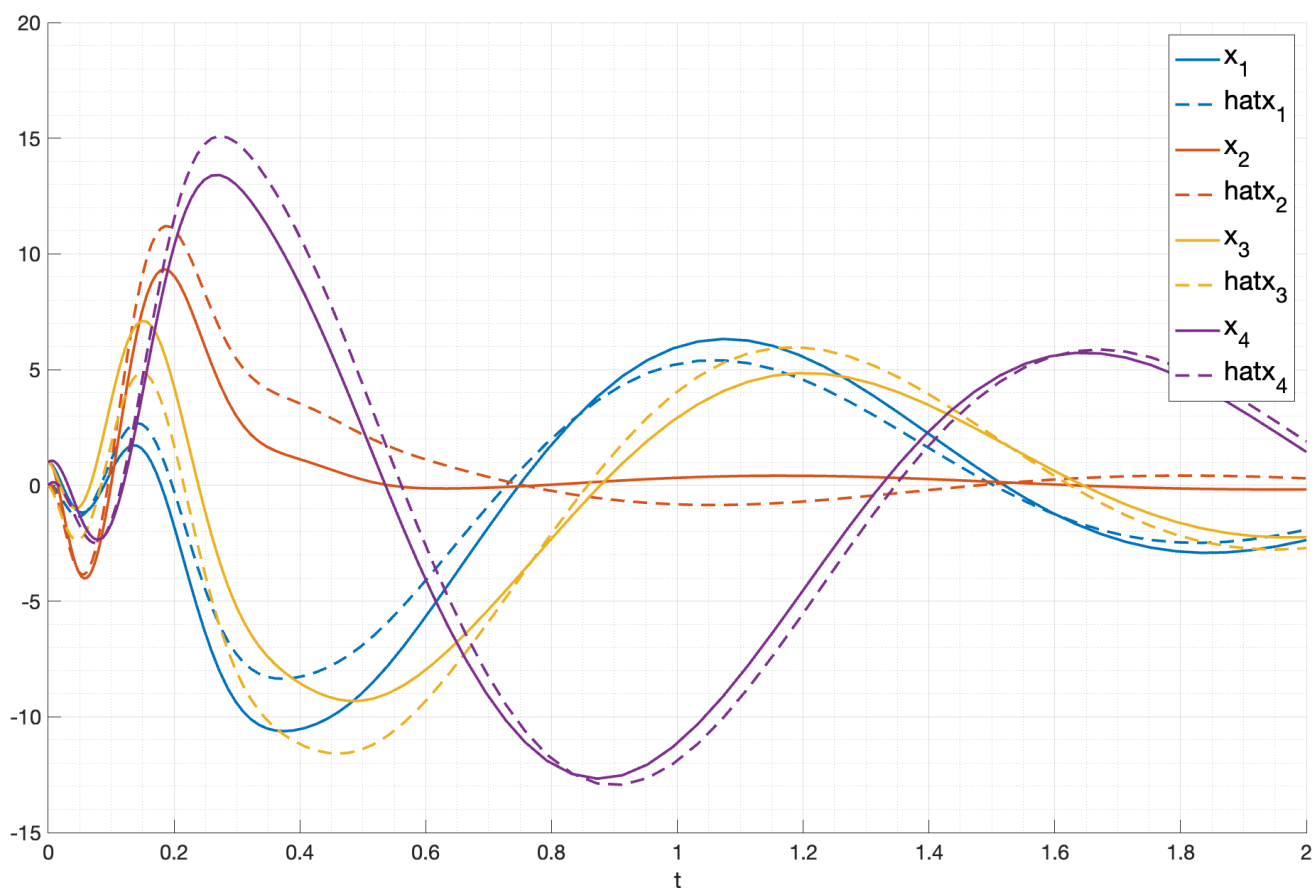


Рис. 26: Состояние системы и ее оценка K_1 и L_2

Для регулятора K_2 и наблюдателя L_1 результаты моделирования представлены на рисунках 27 (состояние системы), 28 (ошибка наблюдения), 29 (управляющее воздействие) и 30 (состояние системы и ее оценка).

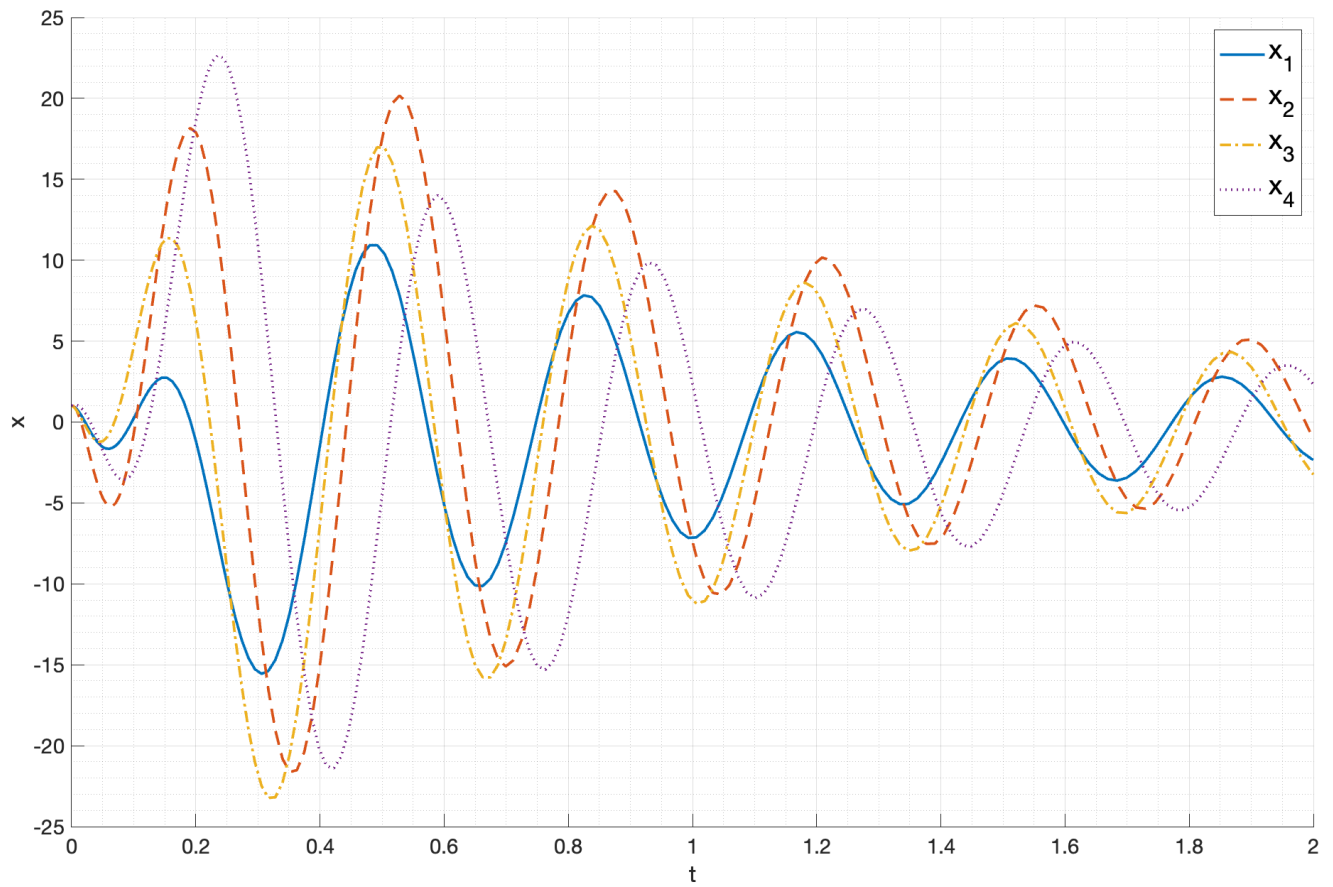


Рис. 27: Состояние системы K_2 и L_1

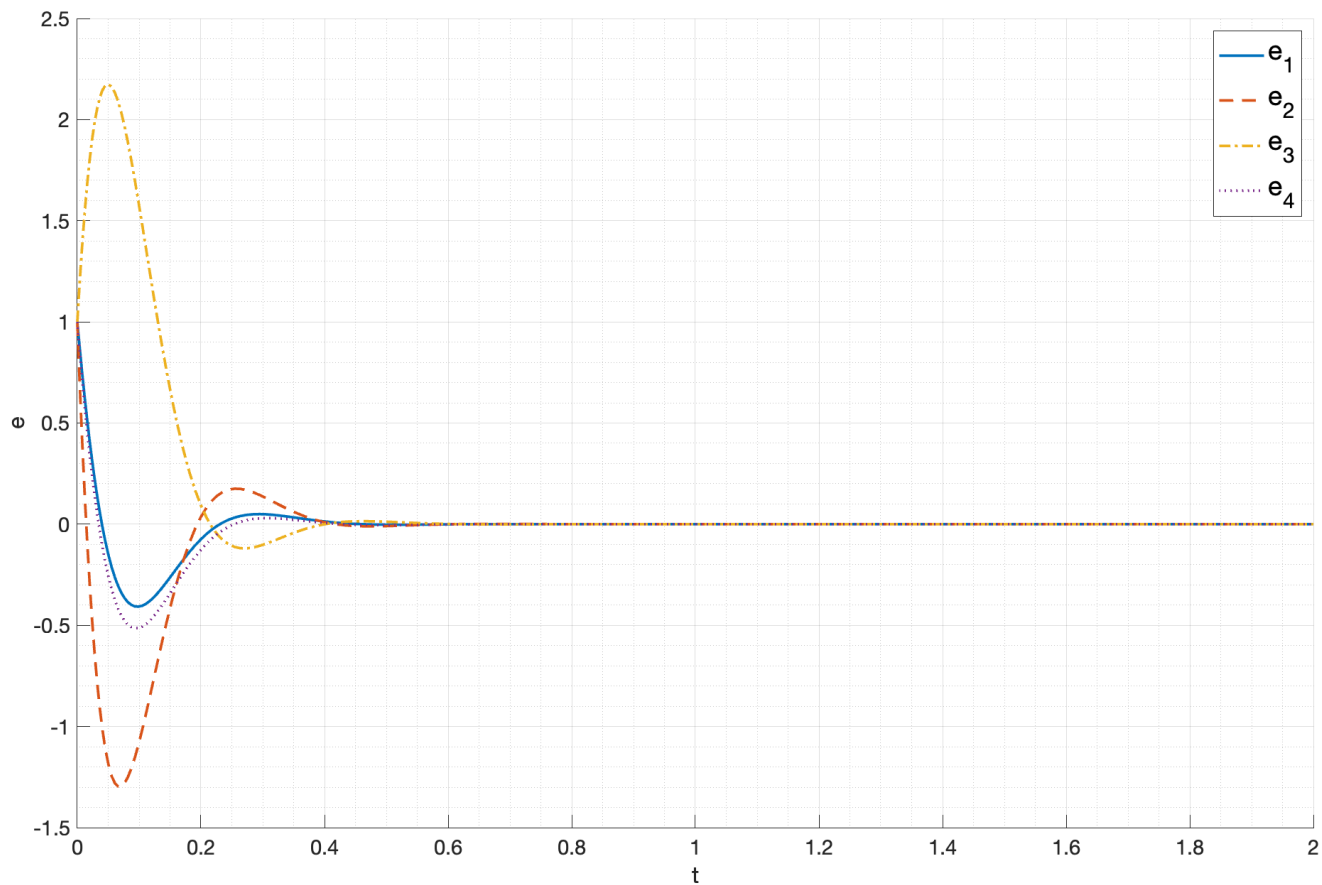


Рис. 28: Ошибка наблюдения K_2 и L_1

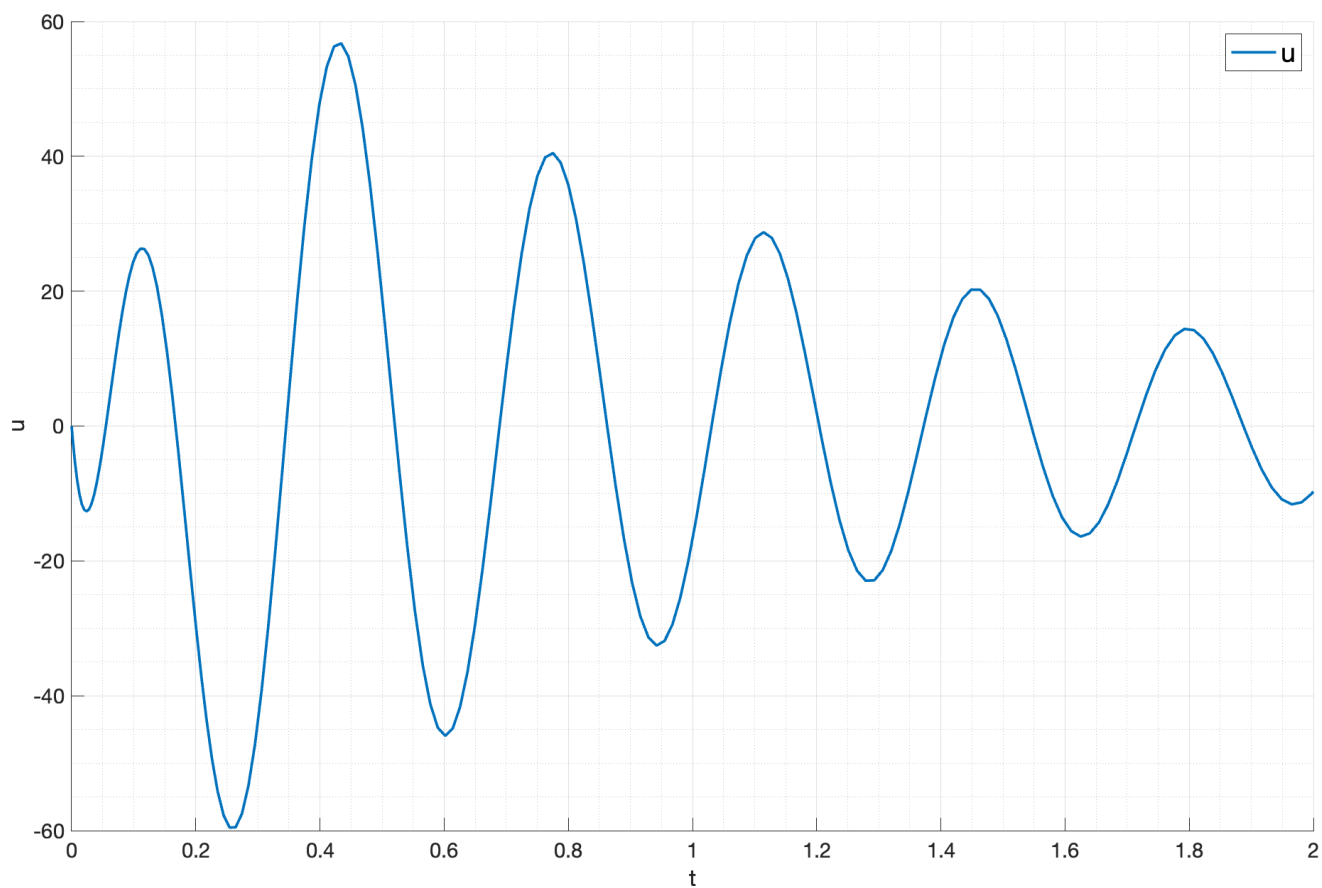


Рис. 29: Управляющее воздействие K_2 и L_1

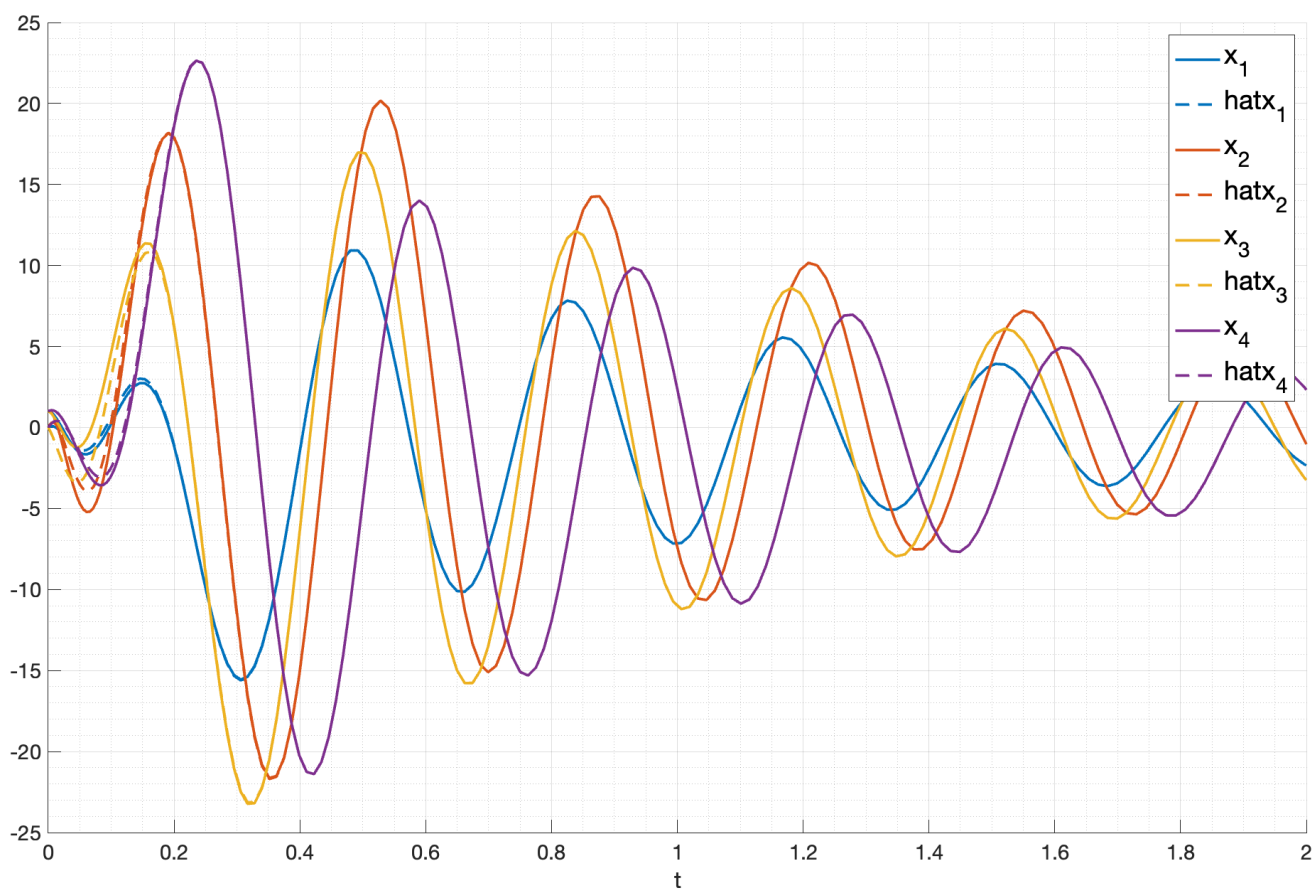


Рис. 30: Состояние системы и ее оценка K_2 и L_1

Для регулятора K_2 и наблюдателя L_2 результаты моделирования представлены на рисунках 31 (состояние системы), 32 (ошибка наблюдения), 33 (управляющее воздействие) и 34 (состояние системы и ее оценка).

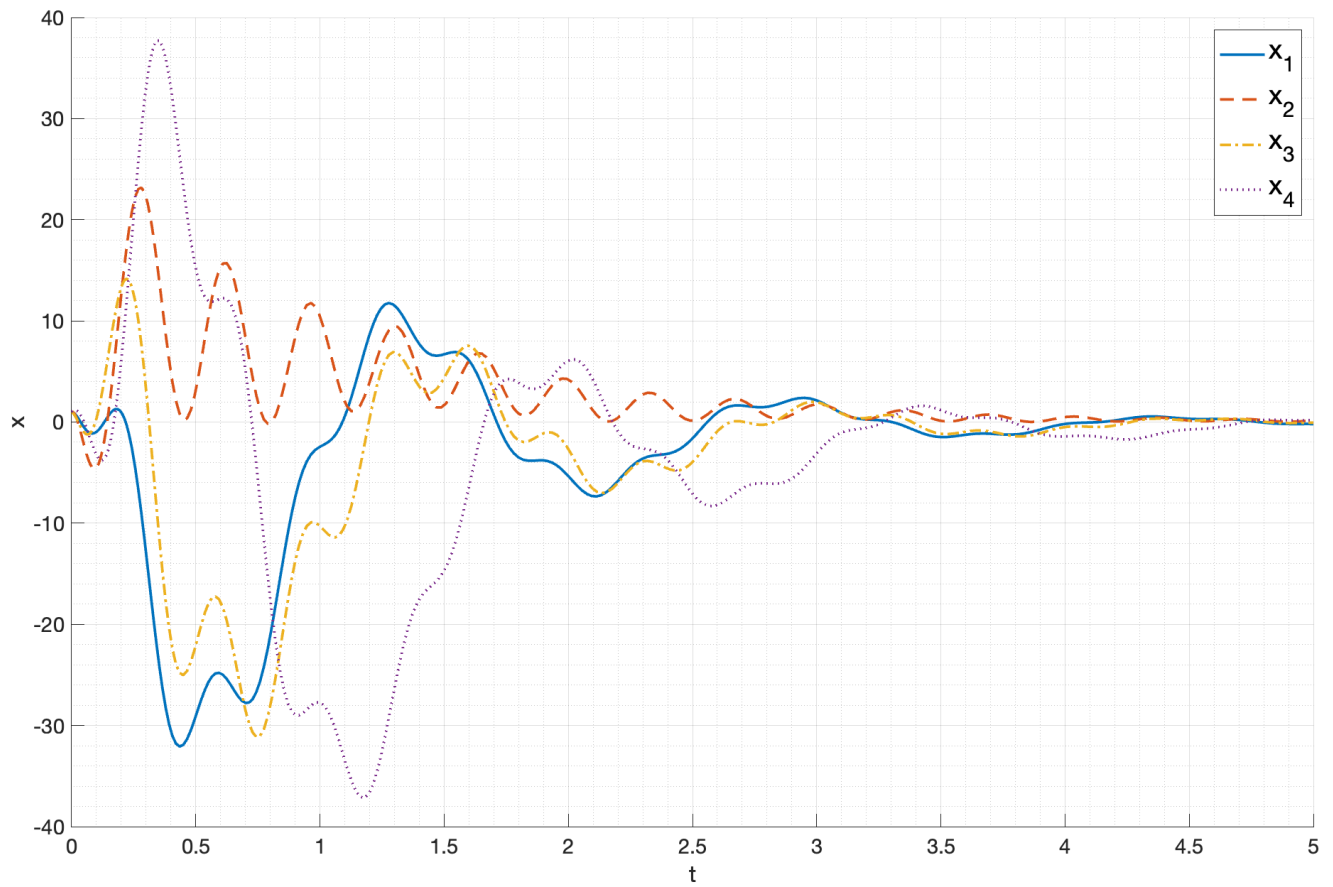


Рис. 31: Состояние системы K_2 и L_2

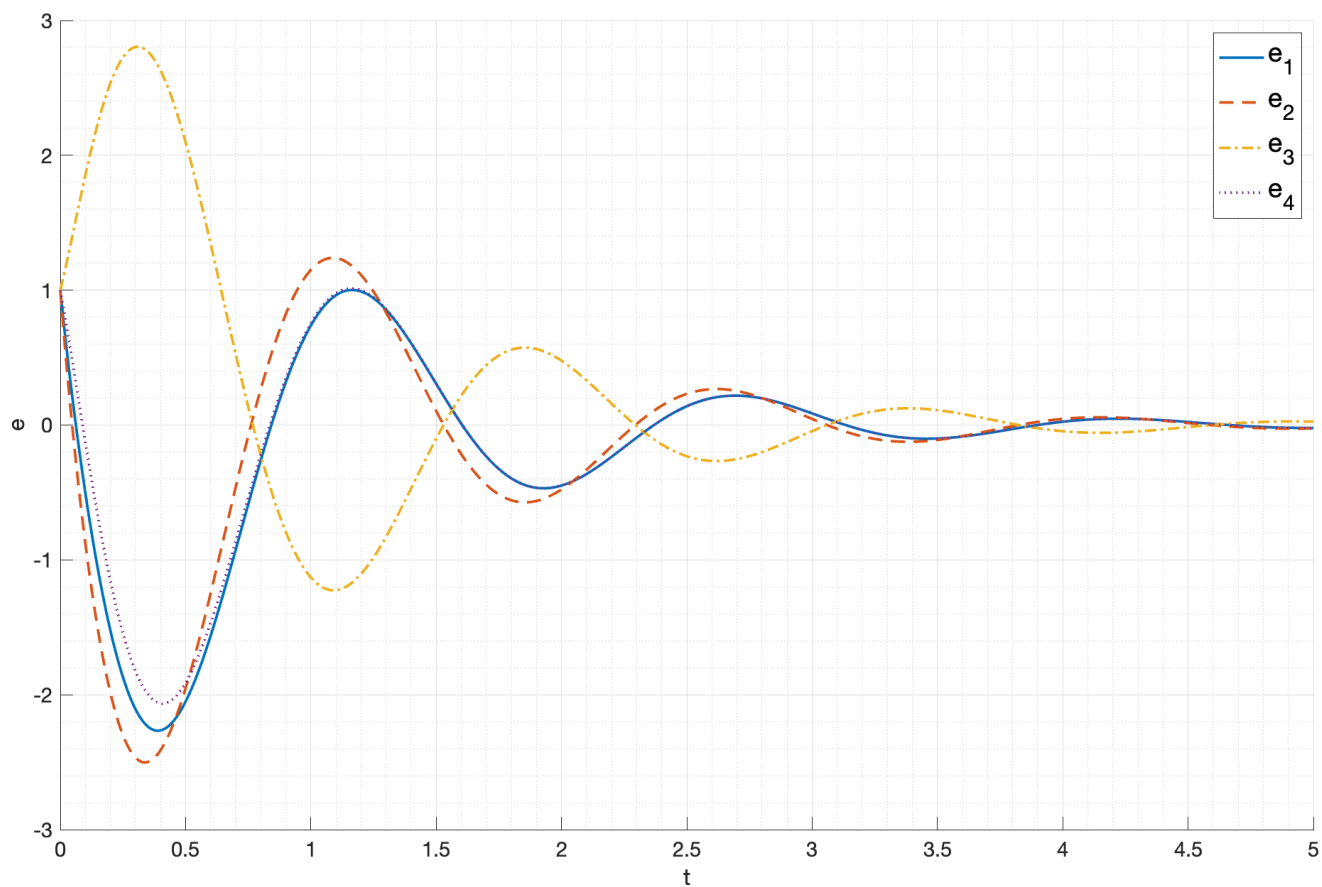


Рис. 32: Ошибка наблюдения K_2 и L_2

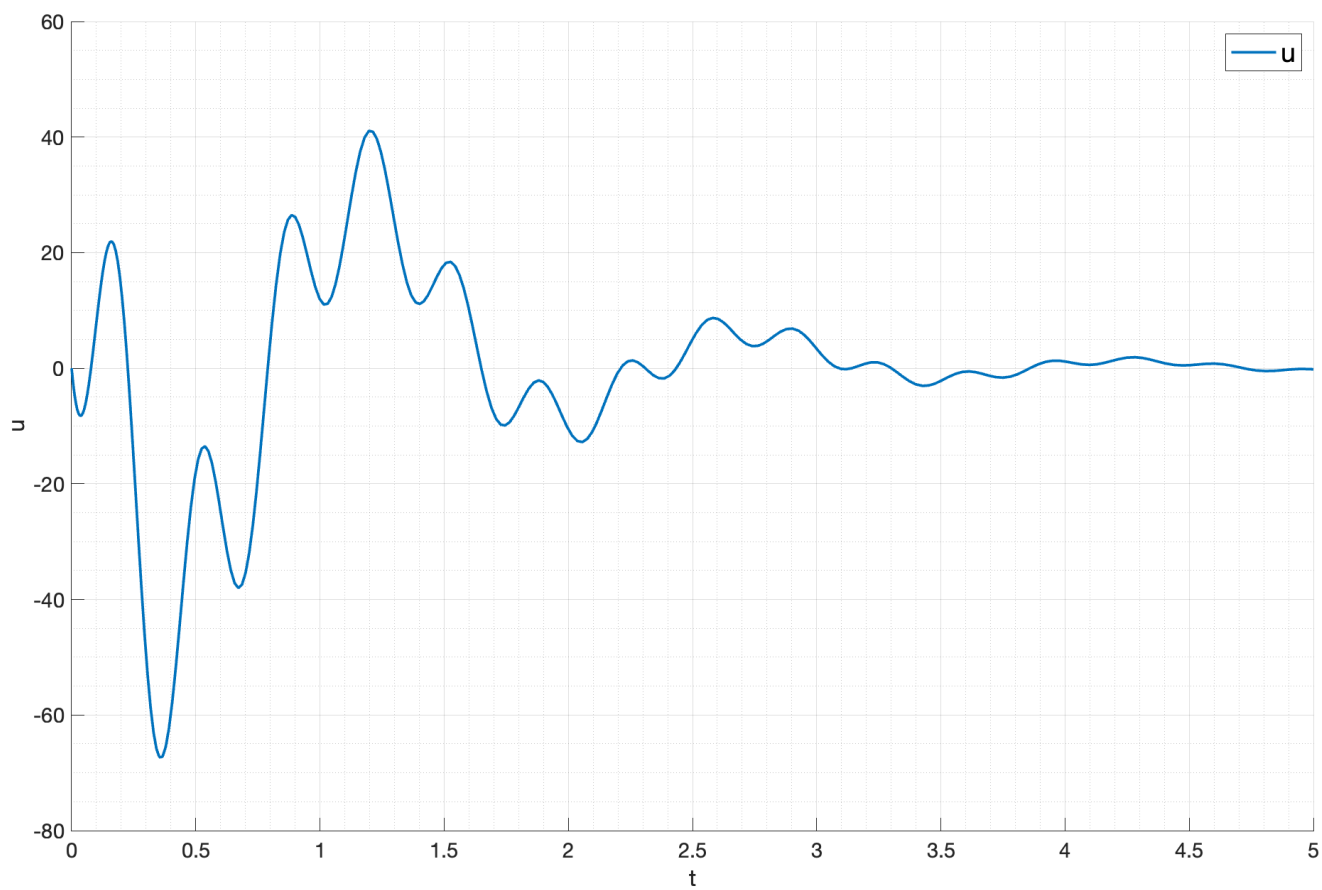


Рис. 33: Управляющее воздействие K_2 и L_2

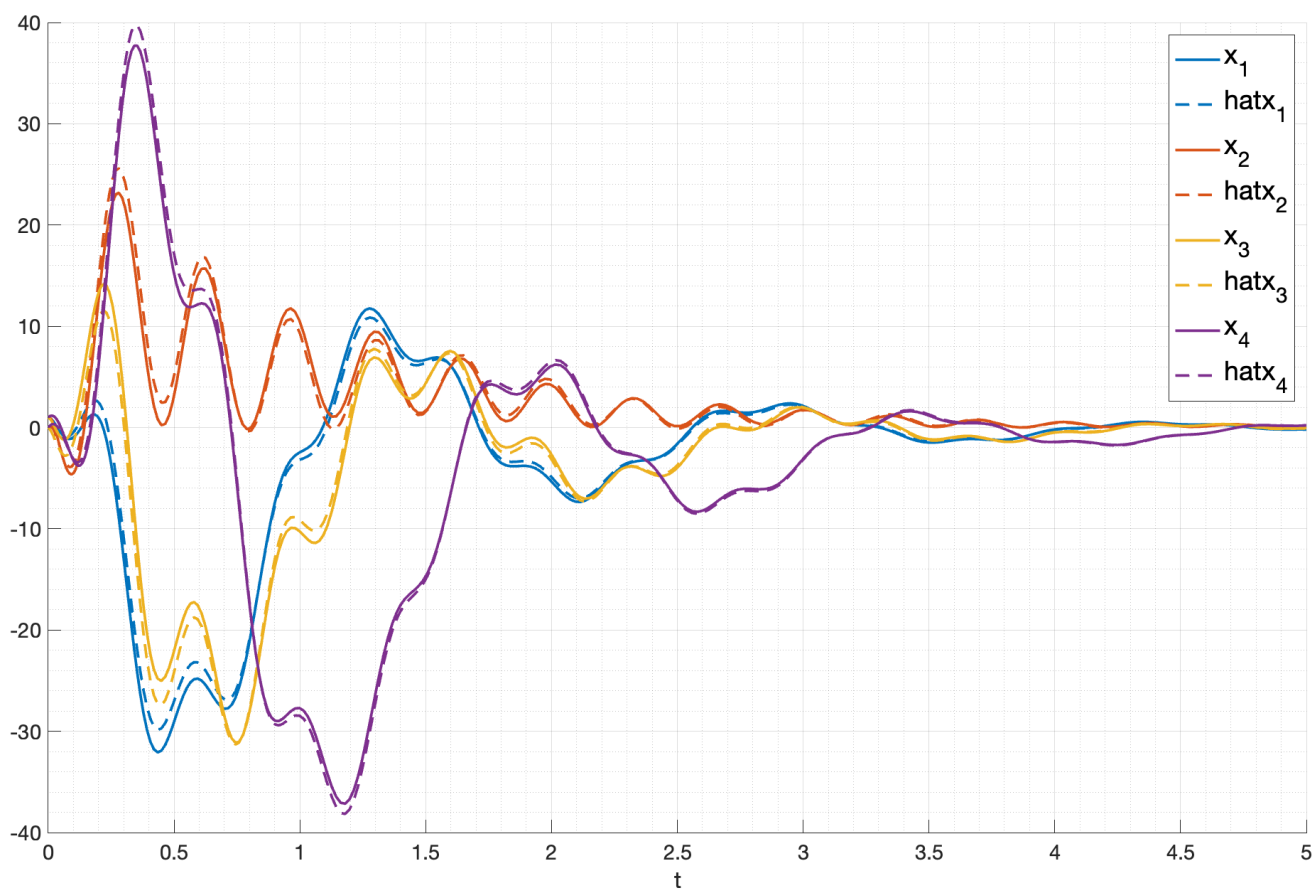


Рис. 34: Состояние системы и ее оценка K_2 и L_2

2.5. Выводы

Сравнивая системы с различными регуляторами и наблюдателями, обеспечивающих разные спектры и степени устойчивости соответственно, можно сделать следующие выводы: Чем больше степень устойчивости регулятора, тем быстрее состояние системы стремится к нулю, при этом необходимо большее управляющее воздействие. Чем больше степень устойчивости наблюдателя, тем быстрее ошибка наблюдения стремится к нулю.

Сравнивая системы с одинаковыми регуляторами, но разными наблюдателями, можно заметить, что при увеличении степени устойчивости наблюдателя, состояние системы стремится к нулю быстрее. При *слабом* наблюдении регулятор не может быстро реагировать на изменения состояния системы, так как ошибка наблюдения стремится к нулю медленно.

Сравнивая системы с одинаковыми наблюдателями, но разными регуляторами, можно заметить, что при увеличении степени устойчивости регулятора, состояние системы стремится к нулю быстрее, чего и следовало ожидать. При этом, при *сильном* наблюдении, например, как в случае K_2 и L_1 , ошибка наблюдения сходится к нулю очень быстро, но состояние системы не может быстро стремиться к нулю, так как регулятор обладает недостаточной степенью устойчивости.

Таким образом, можно сделать вывод, что время сходимости системы зависит от степени устойчивости регулятора и наблюдателя, а также от их соотношения.

P.S. *Раздельные* графики состояния системы и ее оценки не приведены намерено, так как *общие* графики достаточно наглядны, а включать в отчет еще 16 графиков мне не кажется целесообразным.