



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Управляемость и наблюдаемость”

Вариант 30

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Исследование управляемости	3
1.1. Управляемость системы	3
1.1.1. Матрица управляемости	3
1.1.2. Управляемость собственных значений	3
1.1.3. Диагональная форма системы	4
1.2. Грамиан управляемости	5
1.3. Управление системой	5
2. Управляемое подпространство	7
2.1. Управляемость системы	7
2.1.1. Матрица управляемости	7
2.1.2. Управляемость собственных значений	7
2.1.3. Диагональная форма системы	8
2.2. Грамиан управляемости	8
2.3. Управляемое подпространство	9
2.4. Управление системой	9

1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$, где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

1.1. Управляемость системы

1.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости $U = [B, AB, A^2B]$:

$$U = \left[\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right] \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 3 \quad (4)$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то система является полностью управляемой согласно критерию Калмана.

1.1.2. Управляемость собственных значений

Найдем спектр матрицы A :

$$\sigma(A) = \{-3, -1 - 2j, -1 + 2j\} \quad (5)$$

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$ и определим ее ранг:

1. $\lambda_1 = -3$: $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_1) = 3$, собственное значение управляемо.
2. $\lambda_2 = -1 - 2j$: $H_2 = \begin{bmatrix} 6 + 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 + 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 + 2j & 7 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_2) = 3$, собственное значение управляемо.
3. $\lambda_3 = -1 + 2j$: $H_3 = \begin{bmatrix} 6 - 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 - 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 - 2j & 7 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_3) = 3$, собственное значение управляемо.

Так как выше было показано, что система является полностью управляемой, то каждое собственное значение матрицы A является управляемым.

1.1.3. Диагональная форма системы

Найдем диагональную форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (6)$$

Где P – матрица собственных векторов матрицы A . Найдем собственные векторы матрицы A :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 - j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Тогда матрица P :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 + j & -3 - j \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Система преобразуется к виду:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5-5j}{4} \\ \frac{5+5j}{4} \end{bmatrix} u \quad (9)$$

Так как все элементы $P^{-1}B$ не равны нулю, то система является полностью управляемой, каждая мода системы управляема.

1.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости $P(t_1)$:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (10)$$

Вычислим грамиан управляемости для $t_1 = 3$ с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 18.12 & 10.97 & -11.64 \\ 10.97 & 7.48 & -8.48 \\ -11.64 & -8.48 & 10.14 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1.3. Управление системой

Найдем управление $u(t)$, которое будет переводить систему из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$.

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (12)$$

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 1 изображено управление системой. На рисунке 2 изображено состояние системы.

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.

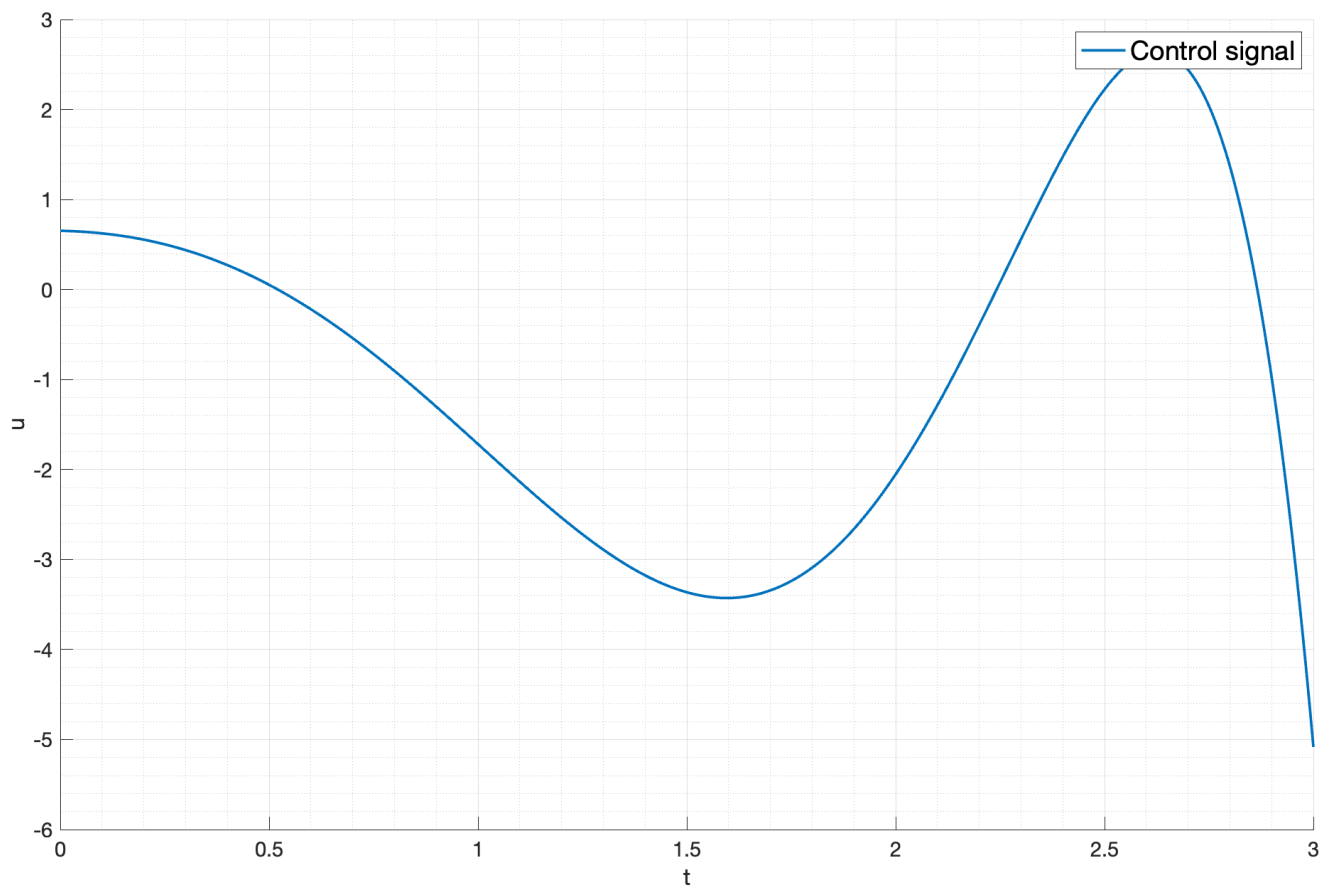


Рис. 1: Управление системой

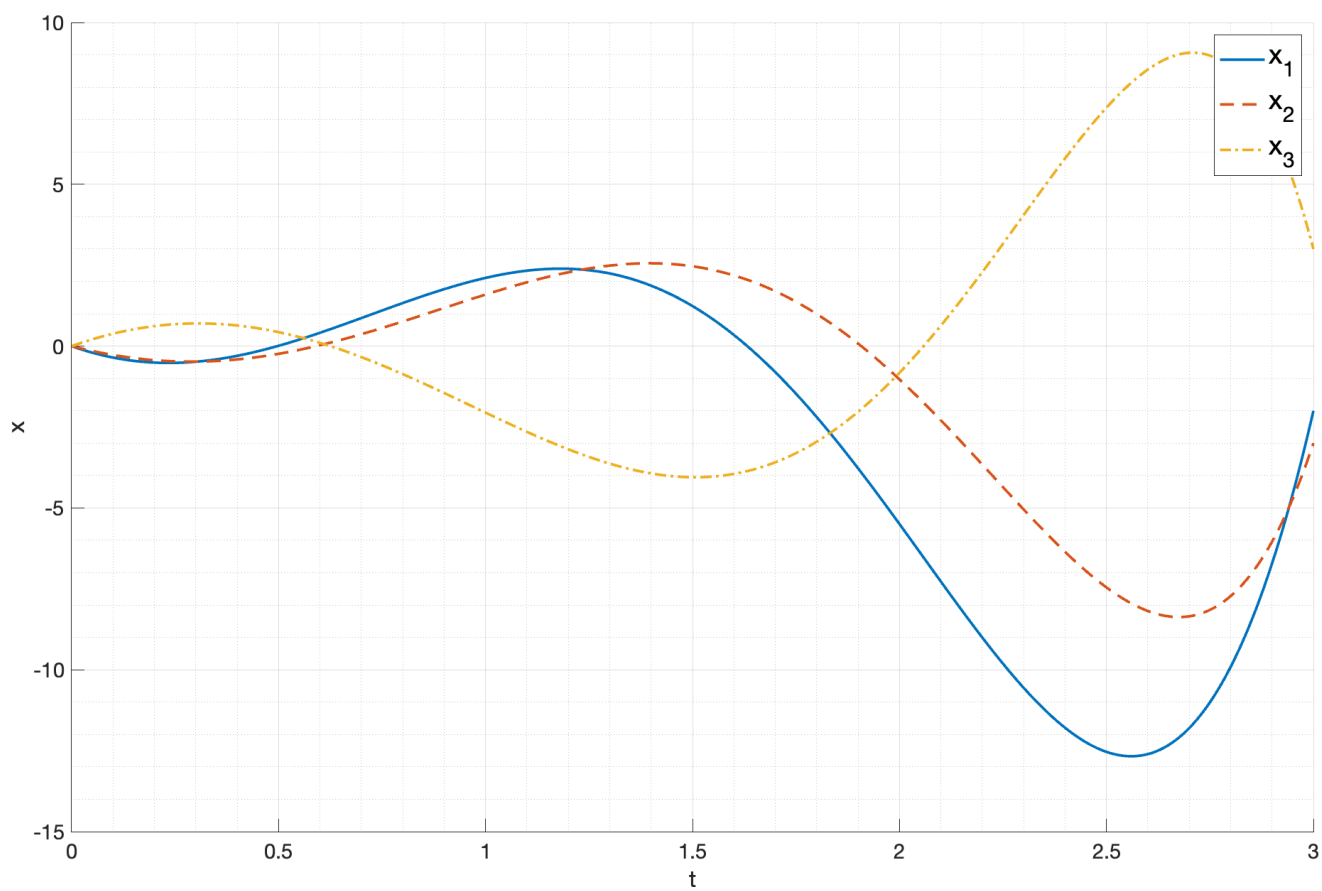


Рис. 2: Состояние системы

2. Управляемое подпространство

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$, где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

2.1. Управляемость системы

2.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости $U = [B, AB, A^2B]$:

$$U = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \quad (14)$$

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 2 \quad (16)$$

Так как ранг матрицы управляемости меньше размерности матрицы A , система не является полностью управляемой.

2.1.2. Управляемость собственных значений

Определим управляемость собственных значений матрицы A . Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$ и определим ее ранг:

1. $\lambda_1 = -3$: $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_1) = 2$, собственное значение не управляемо.
2. $\lambda_2 = -1-2j$: $H_2 = \begin{bmatrix} 6+2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2+2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6+2j & 3 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_2) = 3$, собственное значение управляемо.
3. $\lambda_3 = -1+2j$: $H_3 = \begin{bmatrix} 6-2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2-2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6-2j & 3 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(H_3) = 3$, собственное значение управляемо.

2.1.3. Диагональная форма системы

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3-7j}{4} \\ \frac{3+7j}{4} \end{bmatrix} u \quad (17)$$

Первое число в векторе $P^{-1}B$ равно нулю, значит, что первое состояние системы не является управляемым. Результаты совпали с результатами, полученными при анализе управляемости собственных значений через матрицу Хаутуса.

2.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости $P(t_1)$:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (18)$$

Вычислим грамиан управляемости для $t_1 = 3$ с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 26.65 & 13.37 & -13.37 \\ 13.37 & 8.28 & -8.28 \\ -13.37 & -8.28 & 8.28 \end{bmatrix} \quad (19)$$

2.3. Управляемое подпространство

Выясним, принадлежат ли точки x'_1 и x''_1 управляемому подпространству:

$$x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x''_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Для этого можно записать расширенную матрицу управляемости U' и найти ранг этой матрицы:

$$U' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -2 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{rank}(U') = 2 \quad (22)$$

$$U'' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -3 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{rank}(U'') = 3 \quad (24)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что точка x'_1 принадлежит управляемому подпространству, а точка x''_1 не принадлежит. В дальнейшем будем обозначать x'_1 как x_1 .

2.4. Управление системой

Найдем управление $u(t)$, которое будет переводить систему из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$.

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (25)$$

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 1 изображено управление системой. На рисунке 2 изображено состояние системы.

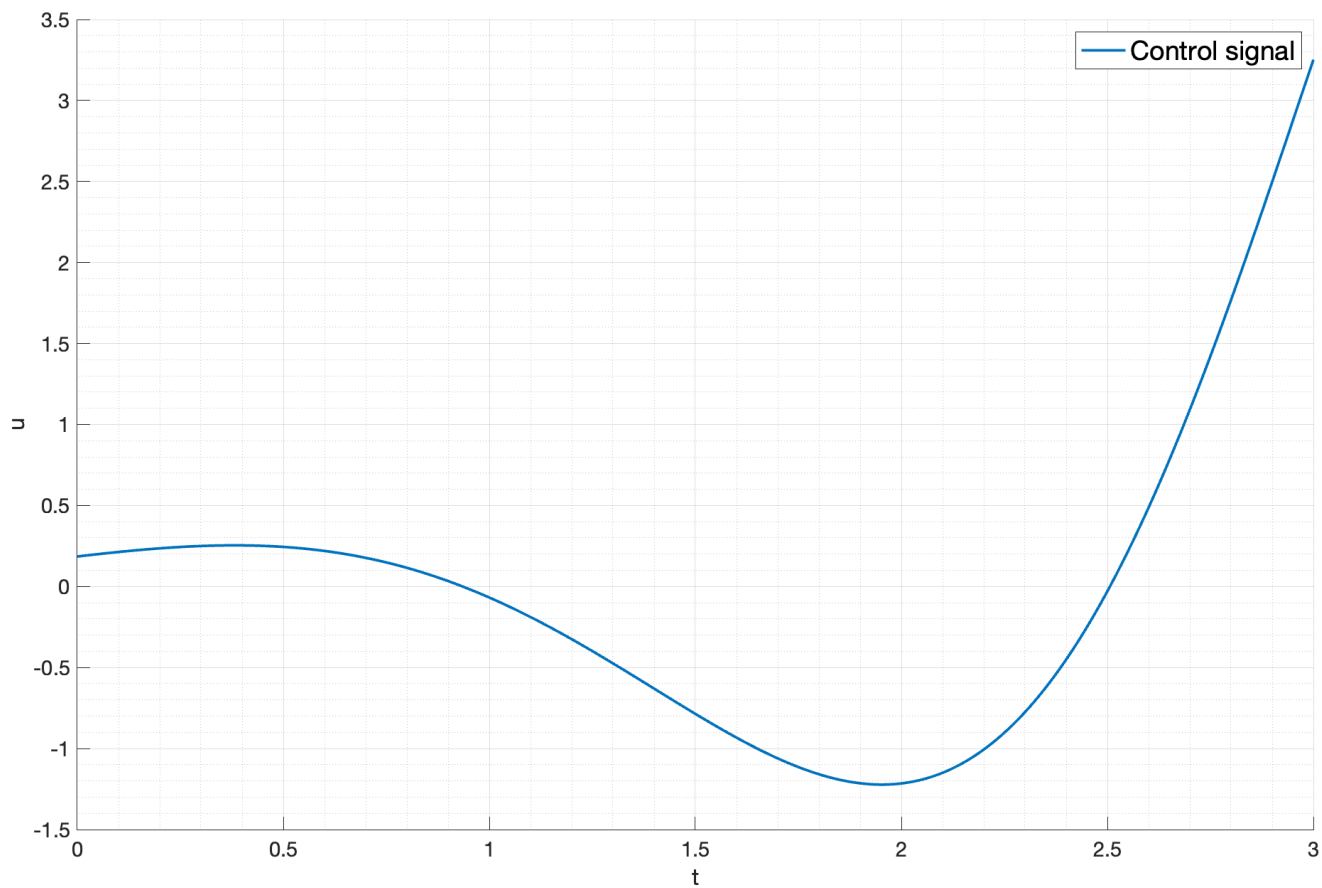


Рис. 3: Управление системой

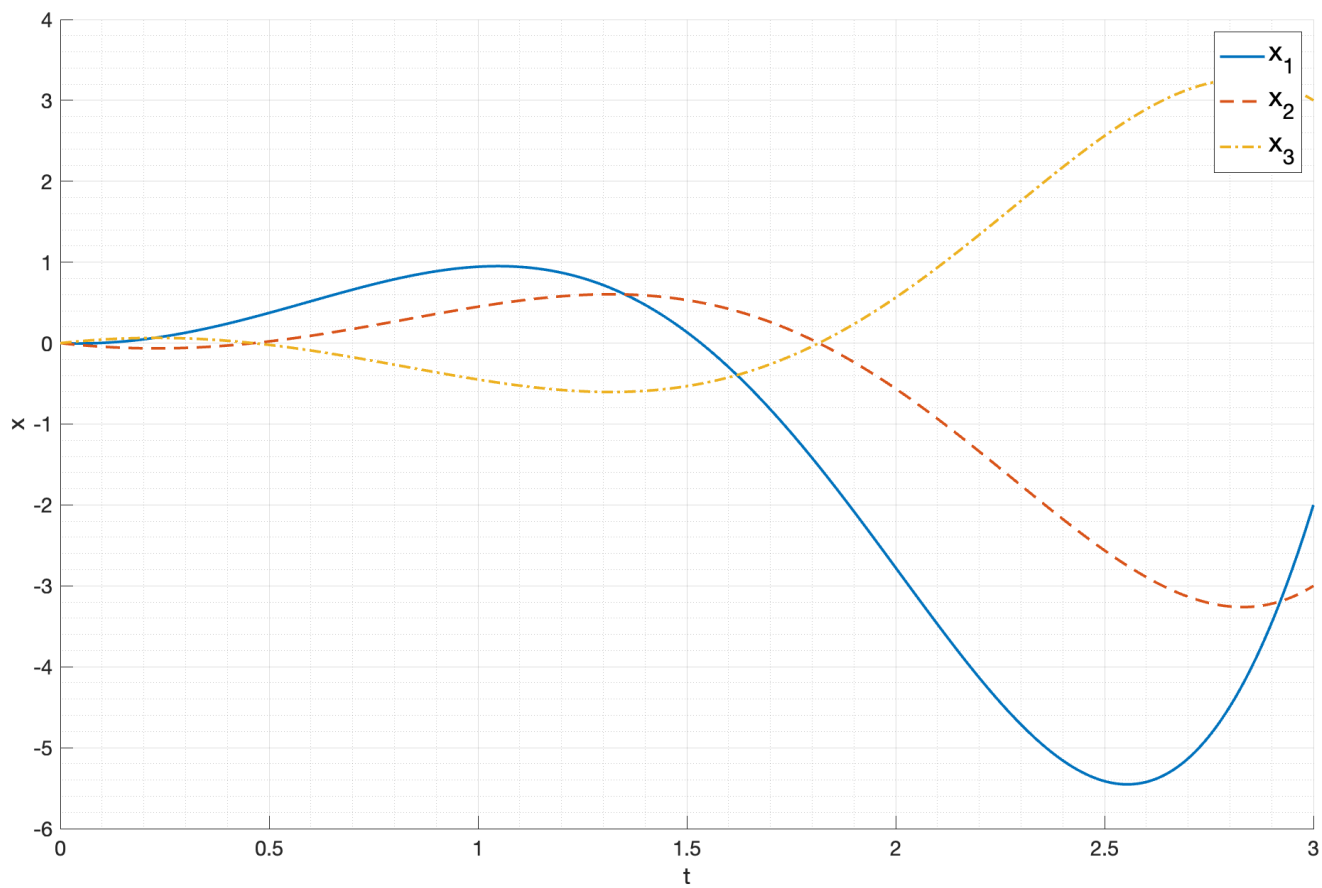


Рис. 4: Состояние системы

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.