



НИУ ИТМО

## ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Модальные регуляторы и наблюдатели”

Вариант 30

Выполнил:

**Александр Иванов, R3338**

Преподаватели:

**Перегудин А.А.**

**Пашенко А.В.**

Санкт-Петербург, 2025

# Содержание

<b>1. Модальный регулятор</b>	<b>3</b>
1.1. Управляемость собственных чисел . . . . .	3
1.2. Модальный регулятор . . . . .	3
1.2.1. Подбор спектра модального регулятора . . . . .	4
1.2.2. Моделирование . . . . .	6
1.2.3. Выводы . . . . .	10
<b>2. Наблюдатель полного порядка</b>	<b>10</b>
2.1. Наблюдаемость собственных чисел . . . . .	10
2.2. Наблюдатель полного порядка . . . . .	11
2.2.1. Подбор спектра нааблюдателя . . . . .	11
2.3. Моделирование . . . . .	13
2.4. Выводы . . . . .	20
<b>3. Модальное управление по выходу</b>	<b>20</b>
3.1. Система с регулятором и наблюдателем . . . . .	20
3.2. Управляемость и наблюдаемость . . . . .	21
3.3. Регулятор . . . . .	22
3.4. Наблюдатель . . . . .	22
3.5. Моделирование . . . . .	23
3.6. Выводы . . . . .	26
<b>4. Вывод</b>	<b>26</b>

# 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 1.1. Управляемость собственных чисел

Для определения управляемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (3)$$

Где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ , а  $\hat{x} = P^{-1}x$ .

$$A_j = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -2.12 & 0.71 \\ 0 & -1.41 & 0 \\ 1 & 1.41 & 0 \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.12 \\ 4.95 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Таким образом, последнее собственное число  $\lambda_3 = -3$  не является управляемым. Соответственно, система не является полностью управляемой. Но, так как данное собственное число располагается в левой полуплоскости, то есть является устойчивым, то система является стабилизируемой.

## 1.2. Модальный регулятор

Замкнем систему обратной связью с модальным регулятором  $u = -Kx$ . Тогда уравнение состояния системы примет вид:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (5)$$

Моделировать данную систему будем с помощью среды моделирования Simulink. Схема моделирования представлена на рисунке 1.

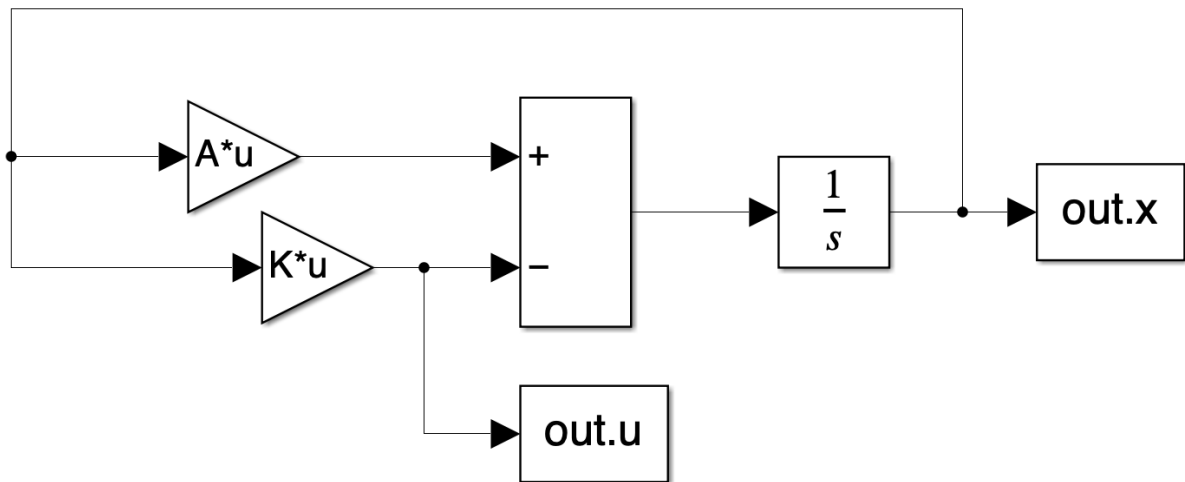


Рис. 1: Схема моделирования системы с модальным регулятором

### 1.2.1. Подбор спектра модального регулятора

Рассмотрим следующие варианты спектра модального регулятора:

1.  $\sigma_1 = \{-1, -1, -1\}$
2.  $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$
3.  $\sigma_3 = \{-1, -10, -100\}$
4.  $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$
5.  $\sigma_5 = \{-1, -1 \pm 3i\}$
6.  $\sigma_6 = \{-3, -3 \pm 9i\}$

Так как одно из собственных чисел матрицы  $A$  не является управляемым, то есть ни одно входное воздействие, а значит и ни один регулятор не может управлять данным собственным числом, то спектр замкнутой системы не может не содержать данное собственное число. Следовательно, спектры  $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$  не являются допустимыми.

Для того, чтобы проверить, может ли спектр системы, замкнутой модальным

регулятором, быть равен заданному спектру  $\sigma_i$ , нужно проверить, подобна ли матрица  $A+BK$  матрице  $\Gamma_i$  с заданным спектром  $\sigma_i$ . Матрицу  $\Gamma_i$  можно называть эталонной системой.

Для упрощения задачи подбора регулятора можно *сократить* систему, убрав из нее неуправляемые собственные числа. Для этого уберем строку и столбец в диагональной форме, соответствующие неуправляемому собственному числу  $\lambda_1 = -3$ :

$$\dot{\hat{x}}' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \hat{x}' + \begin{bmatrix} 2.12 \\ 4.95 \end{bmatrix} u \quad (6)$$

Найдем вектор управления в Жордановой форме  $K_j$  с помощью метода Аккермана (с помощью одноименной функции в Matlab) для эталонной системы  $\Gamma_i$ :

$$K_j = \begin{bmatrix} -1.06 & 2.47 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Теперь вернемся к полной системе, поставив в векторе  $K$  нулевое значение для неуправляемого собственного числа:

$$K_j = \begin{bmatrix} 0 & -1.06 & 2.47 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Вернемся к исходному базису:

$$K = K_j P^{-1} = \begin{bmatrix} 3.48 & -1 & 3.48 \end{bmatrix} \quad (9)$$

В итоге получим систему:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = \begin{bmatrix} 11.48 & 0 & 14.48 \\ 14.44 & -3 & 14.44 \\ -14.44 & 0 & -17.44 \end{bmatrix} x \quad (10)$$

Можно проверить, найдя ее собственные числа. Спектр системы:  $\sigma_2 = \{-3, -3, -3\}$ .

### 1.2.2. Моделирование

Проведем моделирование системы с модальным регулятором, спектр которого равен  $\sigma_2$  и начальными условиями  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ . Результаты моделирования представлены на рисунке 2 и 3.

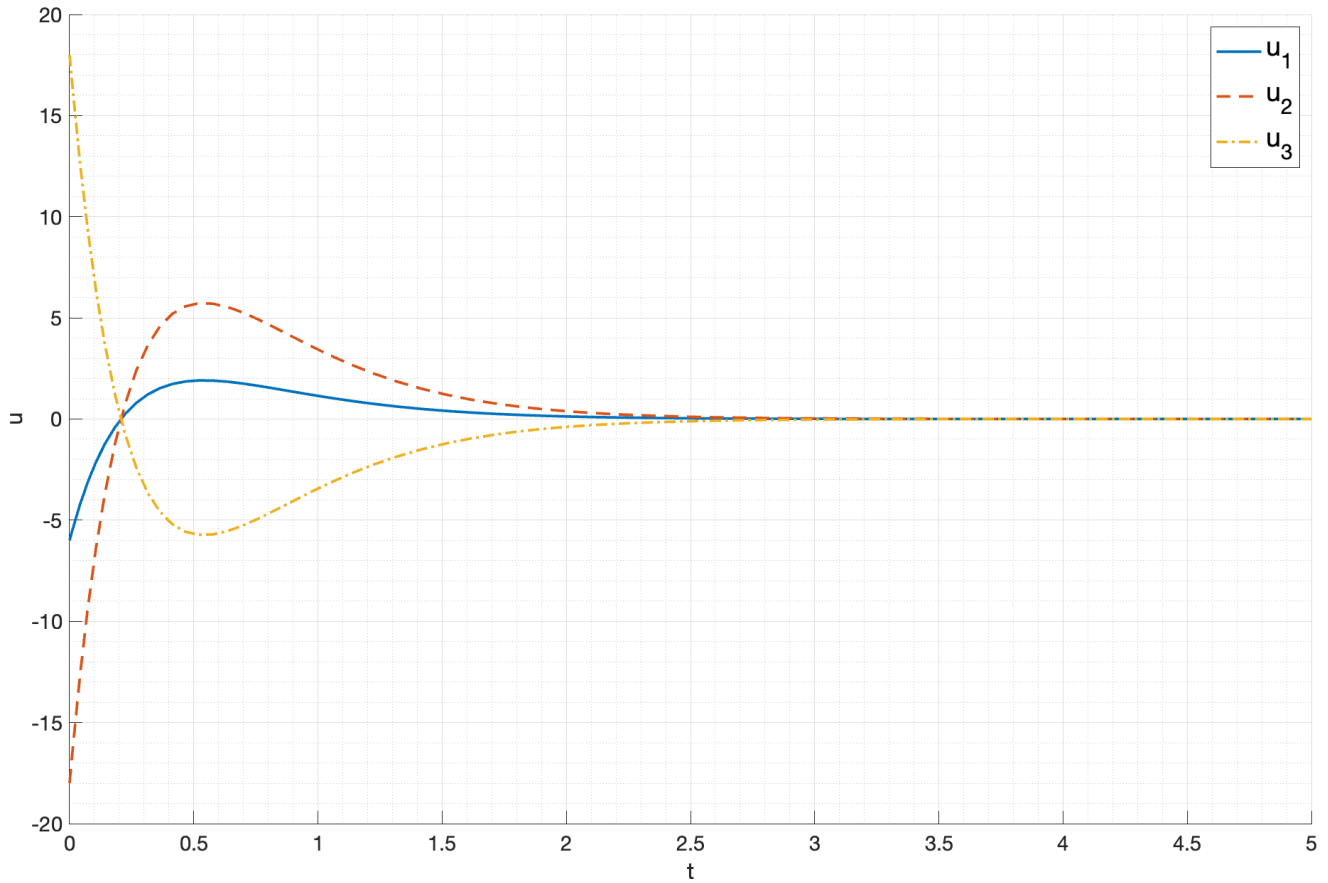


Рис. 2: Управление системы со спектром  $\sigma_2$

Аналогично найдем регулятор для спектра  $\sigma_4$ :

$$K = \begin{bmatrix} 580.28 & 275.52 & 580.28 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = \begin{bmatrix} 588.28 & 276.52 & 591.28 \\ 1744.83 & 826.55 & 1744.83 \\ -1744.83 & -829.55 & -1747.83 \end{bmatrix} x \quad (12)$$

Спектр системы:  $\sigma_4 = \{-3, -30, -300\}$ . Результаты моделирования представлены на рисунках 4 и 5.

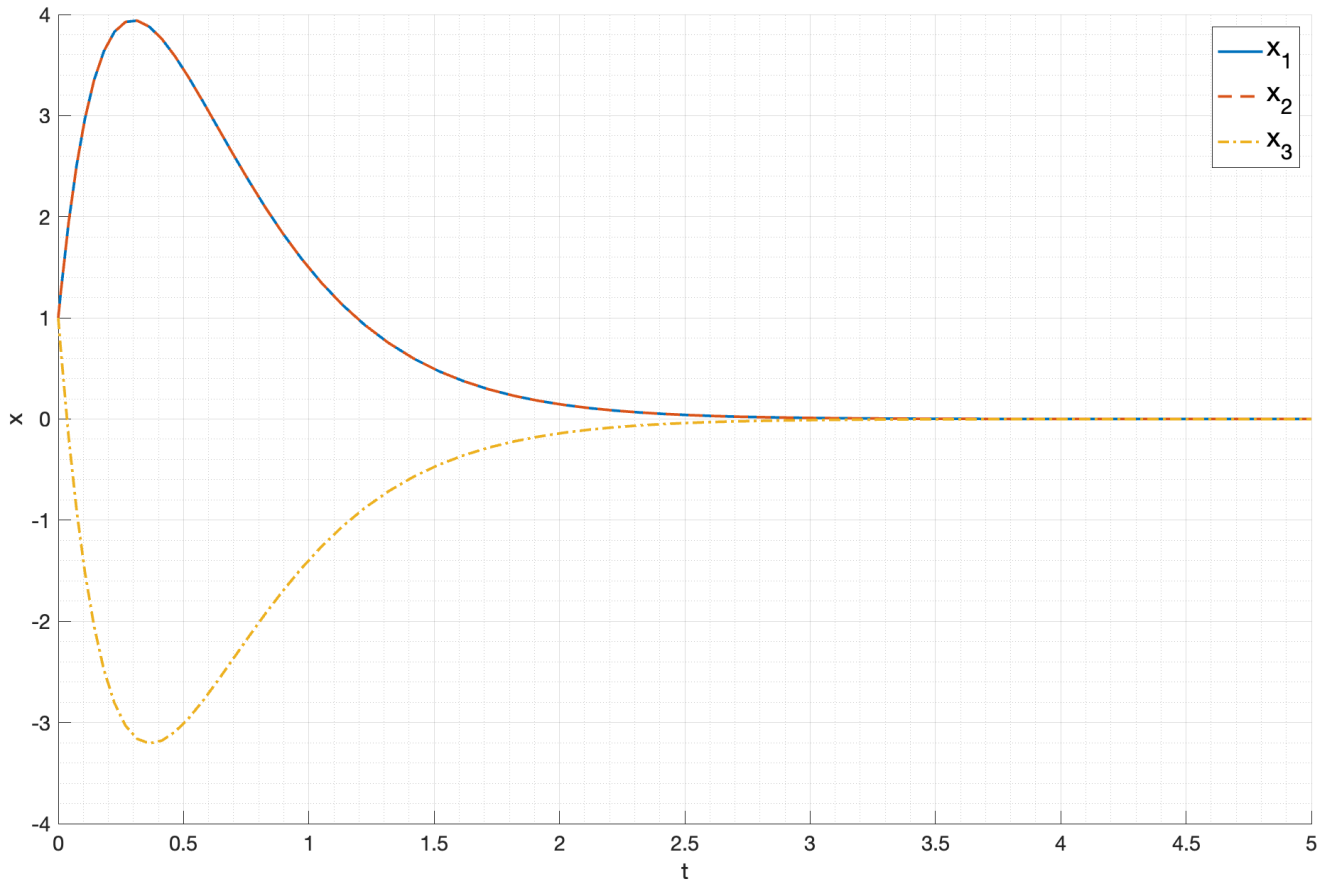


Рис. 3: Состояние системы со спектром  $\sigma_2$

И для спектра  $\sigma_6$ :

$$K = \begin{bmatrix} 7.69 & 1.79 & 7.69 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x = \begin{bmatrix} 15.69 & 2.79 & 18.69 \\ 27.07 & 5.38 & 27.07 \\ -27.07 & -8.38 & -30.07 \end{bmatrix} x \quad (14)$$

Спектр системы:  $\sigma_6 = \{-3, -3 \pm 9i\}$ . Результаты моделирования представлены на рисунках 6 и 7.

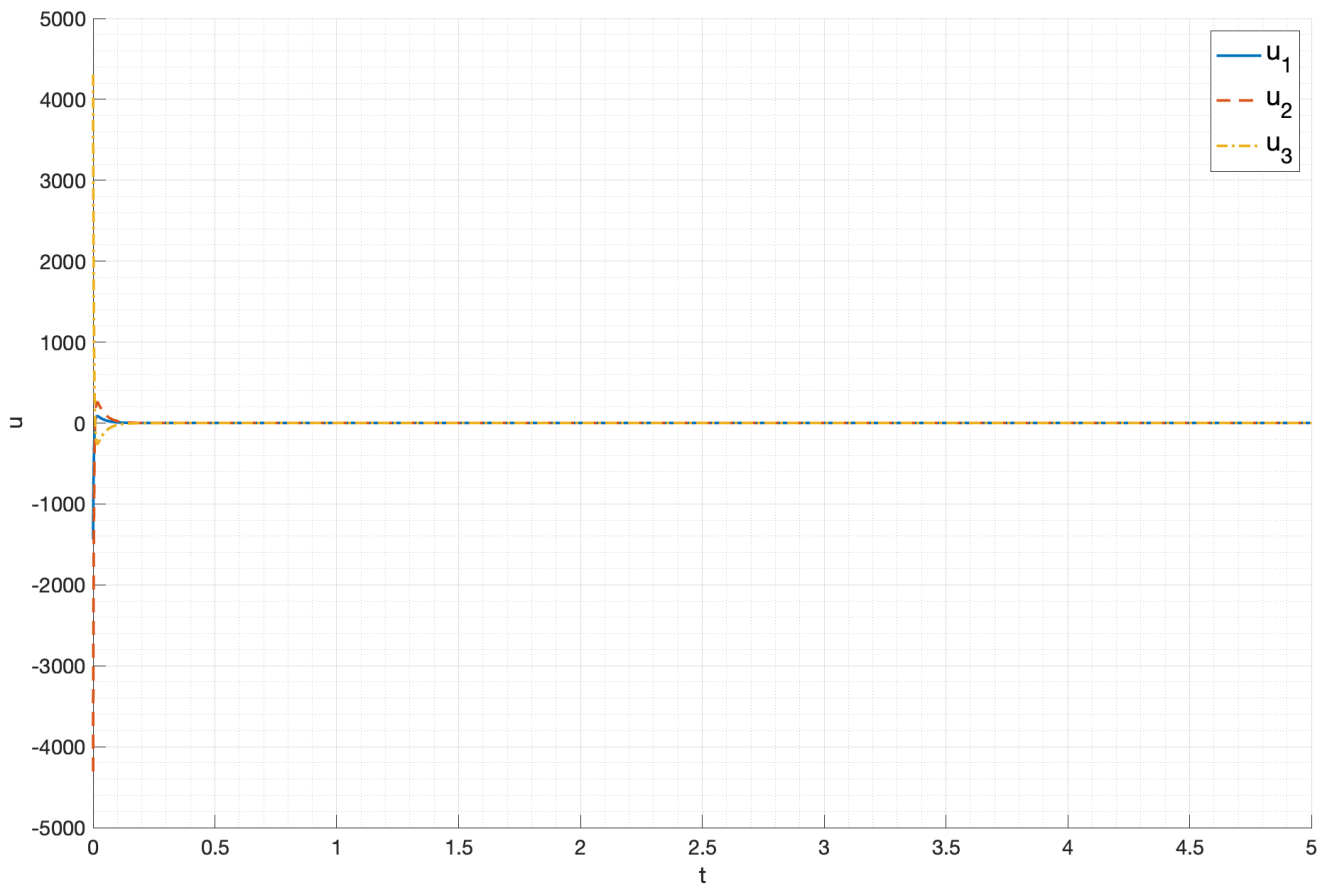


Рис. 4: Управление системы со спектром  $\sigma_4$

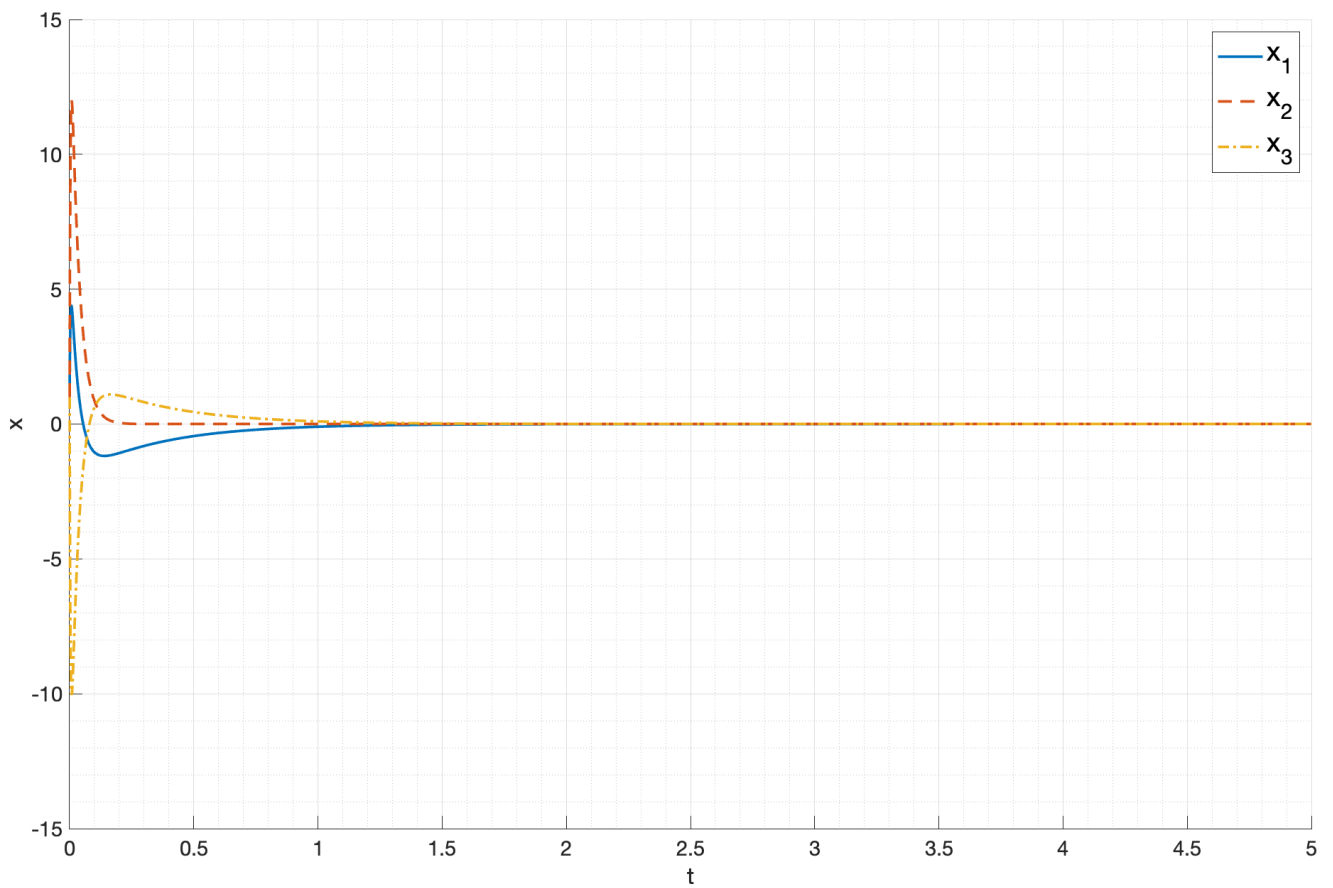


Рис. 5: Состояние системы со спектром  $\sigma_4$



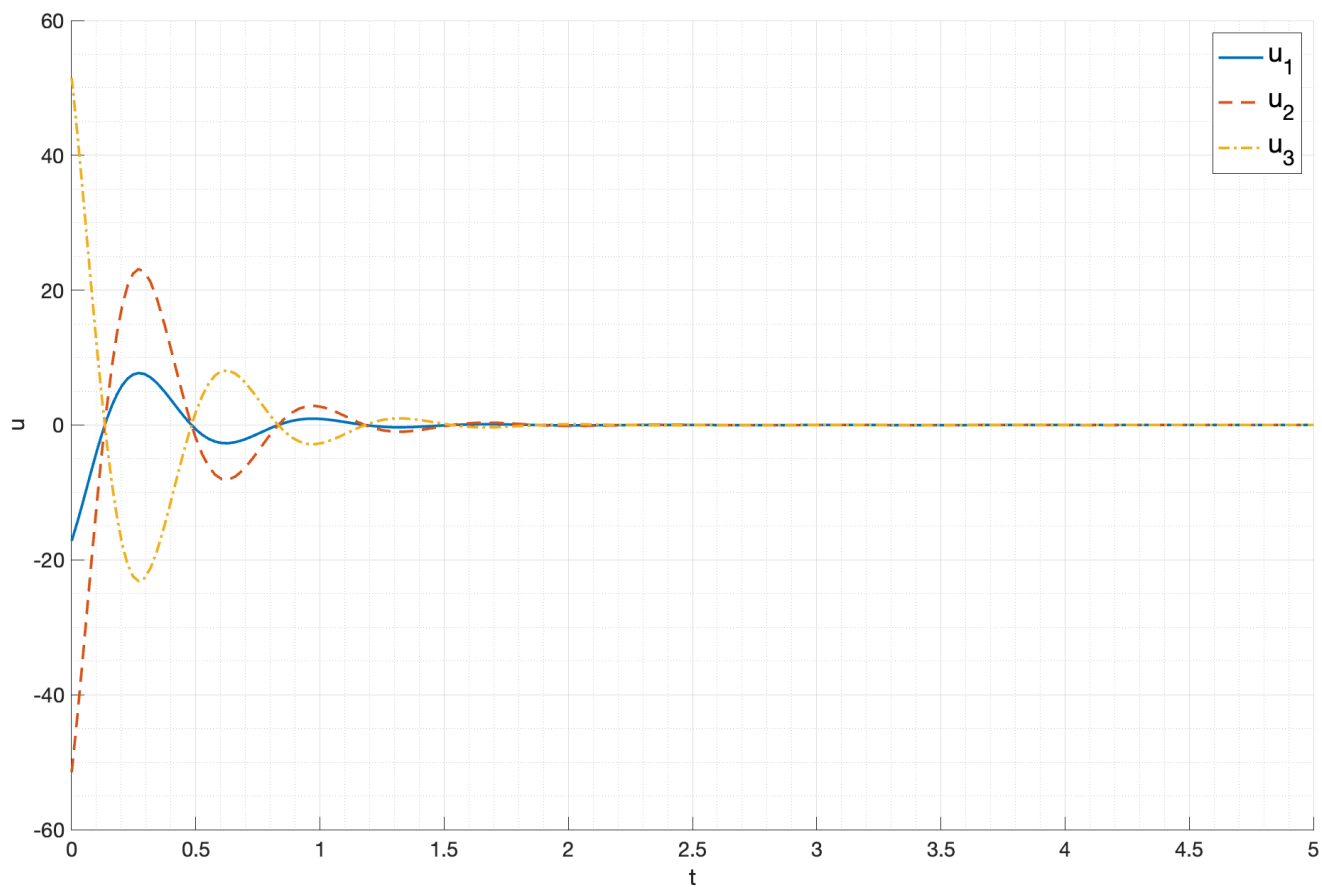


Рис. 6: Управление системы со спектром  $\sigma_6$

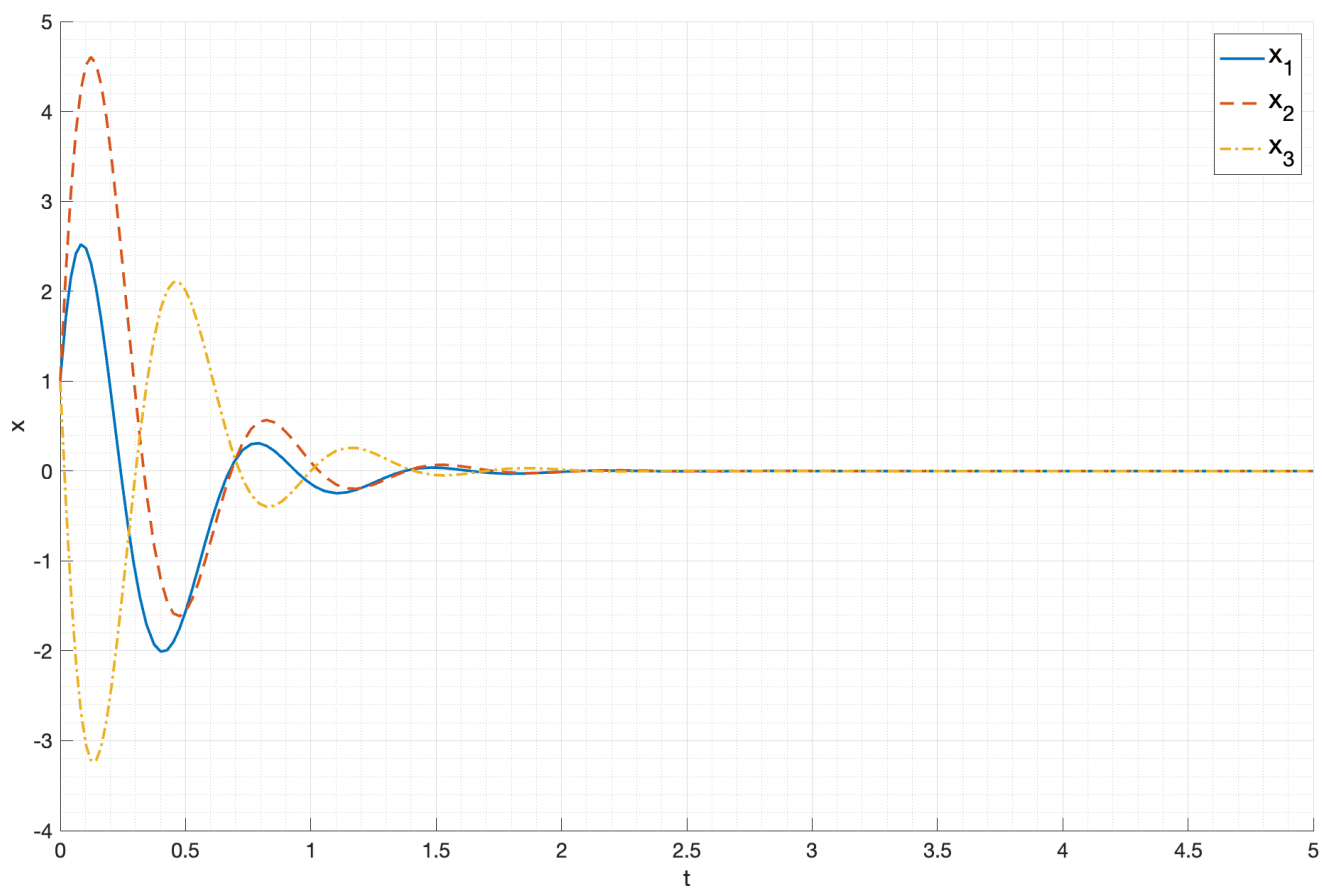


Рис. 7: Состояние системы со спектром  $\sigma_6$

### 1.2.3. Выводы

В задании было показано, что для всех достижимых спектров эталонной системы можно найти модальный регулятор. При этом, как и ожидалось на основании анализа спектра замкнутой системы, чем больше модуль собственного числа, тем быстрее система приходит в устойчивое состояние, но при этом управление становится более интенсивным. Комплексная составляющая собственного числа вносит колебательный характер в систему.

## 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{15}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & 7 \\ -64 & 25 & 14 & 12 \\ -26 & 11 & 7 & 3 \\ -48 & 18 & 14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T\tag{16}$$

### 2.1. Наблюдаемость собственных чисел

Для определения наблюдаемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= P^{-1}AP\hat{x} \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\tag{17}$$

Где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ , а  $\hat{x} = P^{-1}x$ .

$$\begin{bmatrix} -0.00 & -2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 & -3.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.05 & 1.13 & 0.14 \\ 1.74 & -0.22 & 1.84 & 0.14 \\ 0.87 & -0.11 & 0.71 & 0.00 \\ 1.41 & 0.00 & 1.41 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} -0.27 \\ -0.05 \\ 0.28 \\ -0.14 \end{bmatrix}^T\tag{18}$$

Таким образом, система является полностью наблюдаемой.

## 2.2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим наблюдатель полного порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}\tag{19}$$

И схему его моделирования в среде Simulink. Схема моделирования представлена на рисунке 8.

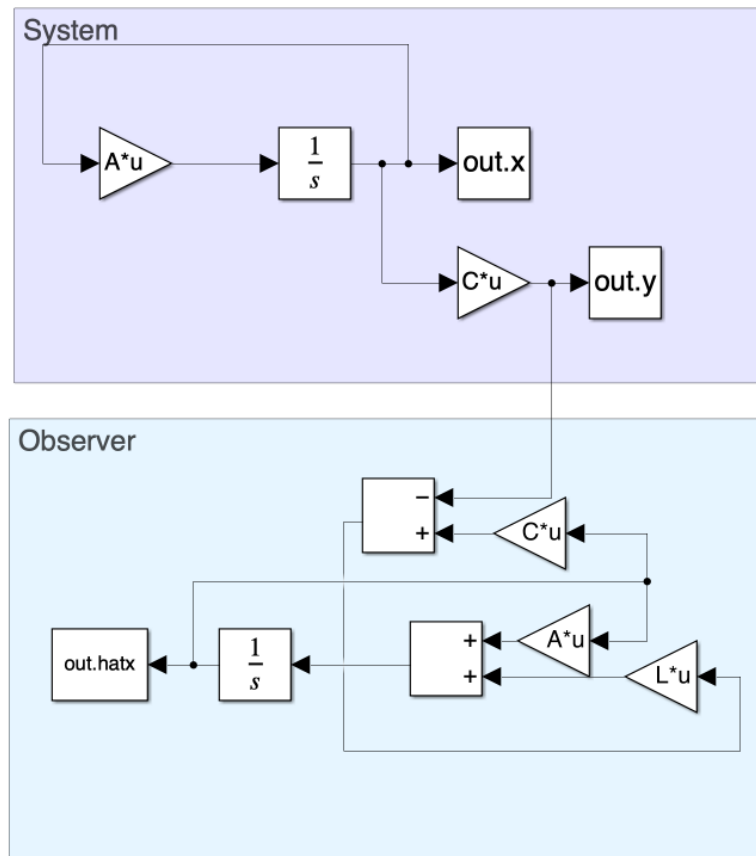


Рис. 8: Схема моделирования системы с наблюдателем полного порядка

### 2.2.1. Подбор спектра нааблюдателя

Рассмотрим следующие варианты спектра наблюдателя:

1.  $\sigma_1 = \{-1, -1, -1, -1\}$
2.  $\sigma_2 = \{-1, -10, -100, -100\}$
3.  $\sigma_3 = \{-1 \pm 2j, -1 \pm 3j\}$

Для каждого из спектров найдем вектор  $L_i$  такой, чтобы спектр наблюдателя  $\sigma(A+L_iC) = \sigma_i$ . Если такой вектор существует, то существует и матрица перехода  $V$  такая, что  $A + L_iC = V^{-1}\Gamma_iV$ , где  $\Gamma_i$  – матрица с нужным спектром. Зададимся матрицей  $\Gamma_1$  со спектром  $\sigma_1$ :

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma(\Gamma_1) = \{-1, -1, -1, -1\} \quad (20)$$

Запишем и решим уравнение Сильвестра с помощью пакета **cvx**:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 V - V A &= Y C \\ Y &= V L_1 \end{aligned} \quad (21)$$

где  $Y$  – такая матрица, чтобы пара  $(\Gamma_1, Y)$  была наблюдаемой. Решив, получим матрицу  $L$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -33.23 \\ -53.40 \\ -22.57 \\ -42.03 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Спектр системы  $A+L_1C$  при этом оказывается  $\{-1.023, -1 \pm 0.0023j, -0.997\}$ , что практически полностью совпадает с требуемым спектром.

Те же самые вычисления проведем для спектра  $\sigma_2$ :

$$L_2 = \begin{bmatrix} 161410.88 \\ 255685.22 \\ 116505.54 \\ 205662.28 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Спектр системы  $A+L_2C$  при этом оказывается  $\{-1, -10, -99.99, -100.0057\}$ , что практически полностью совпадает с требуемым спектром.

И для спектра  $\sigma_3$ :

$$L_3 = \begin{bmatrix} 11.93 \\ 16.80 \\ 7.67 \\ 13.53 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Спектр системы  $A + L_3C$  при этом оказывается полностью равен требуемому спектру  $\sigma_3$ .

Таким образом, для всех трех спектров существует такая матрица  $L$ , что спектр системы  $A + LC$  совпадает с требуемым.

## 2.3. Моделирование

Проведем моделирование каждой из систем с наблюдателем полного порядка с начальными условиями  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  для самой системы и  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$  для наблюдателя.

Результаты моделирования для первого спектра  $\sigma_1$  представлены на рисунках 9, 10, 11 (состояния системы), и 12 (ошибка наблюдателя).

Результаты моделирования для второго спектра  $\sigma_2$  представлены на рисунках 13, 14, 15 (состояния системы), и 16 (ошибка наблюдателя).

Результаты моделирования для третьего спектра  $\sigma_3$  представлены на рисунках 17, 18, 19 (состояния системы), и 20 (ошибка наблюдателя).

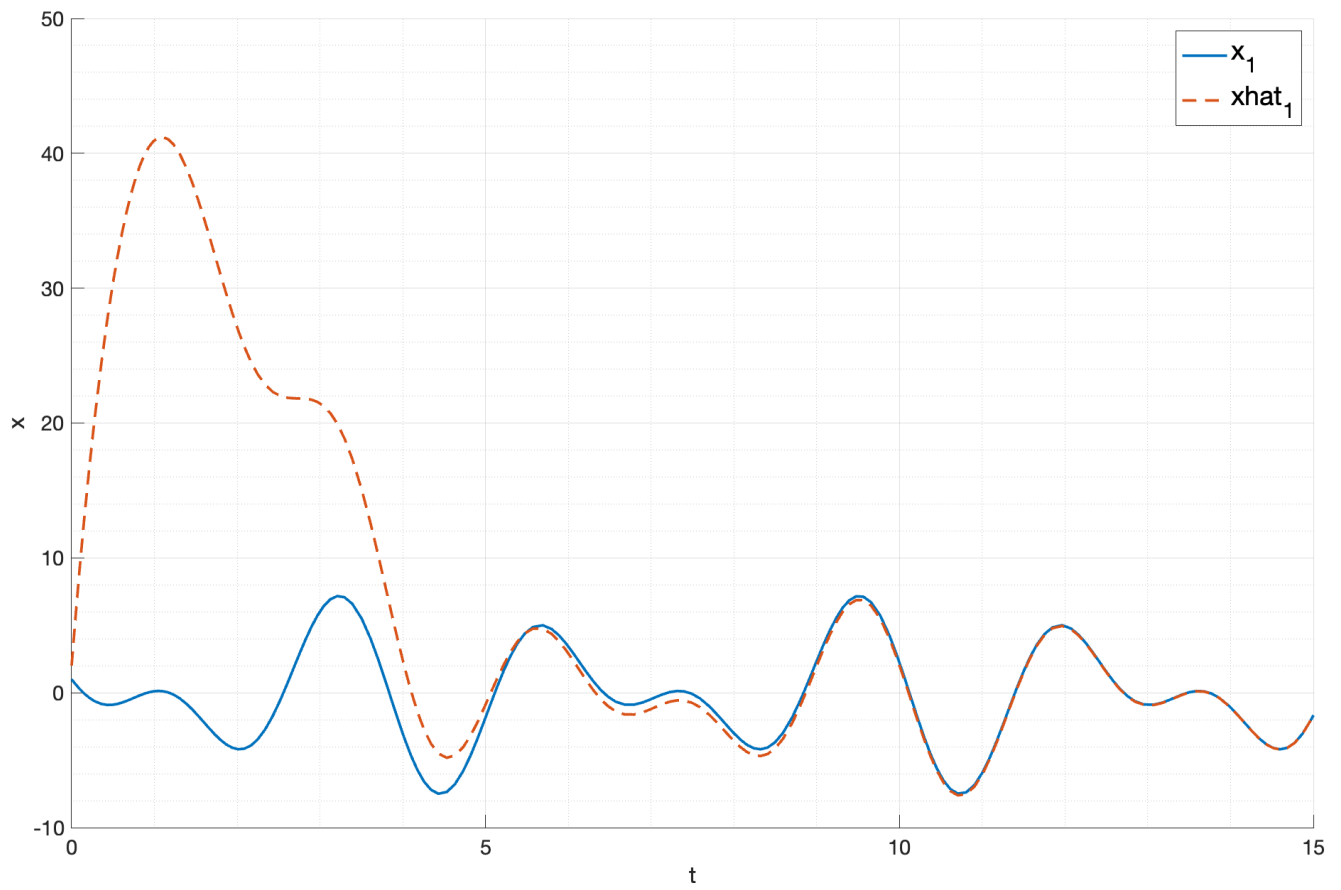


Рис. 9: Состояние системы  $x_1$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_1$

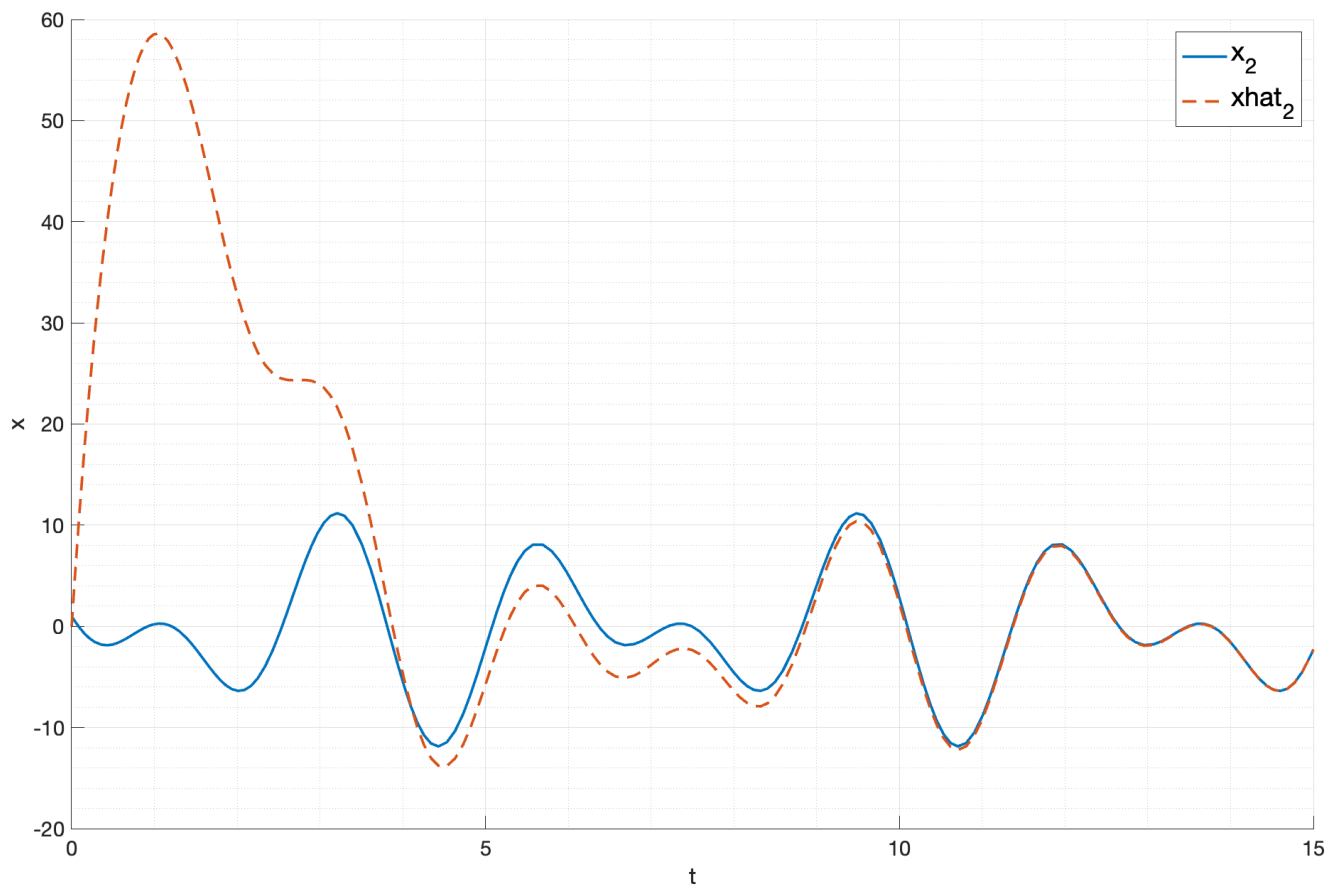


Рис. 10: Состояние системы  $x_2$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_1$

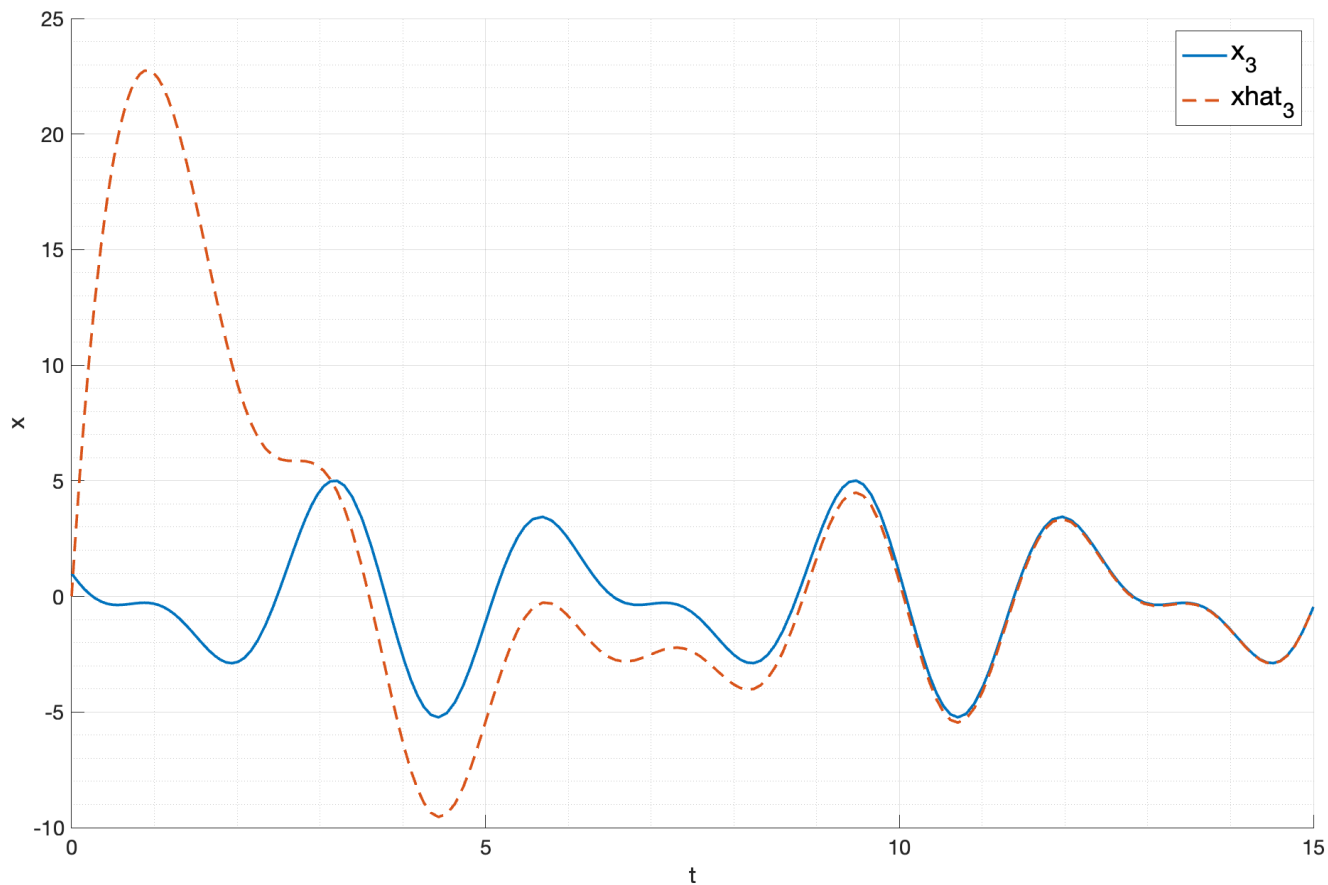


Рис. 11: Состояние системы  $x_3$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_1$

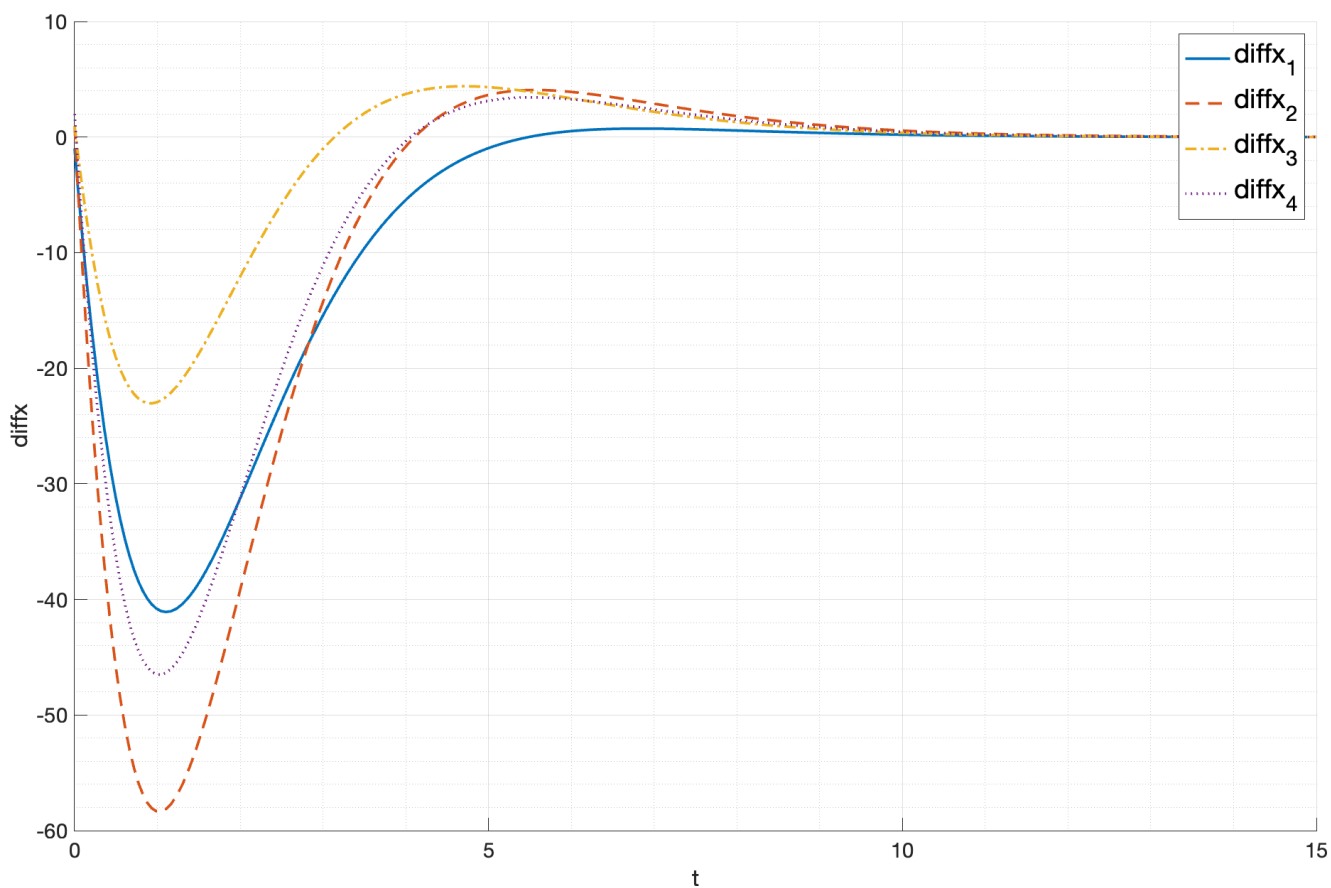


Рис. 12: Ошибка наблюдателя полного порядка для спектра  $\sigma_1$

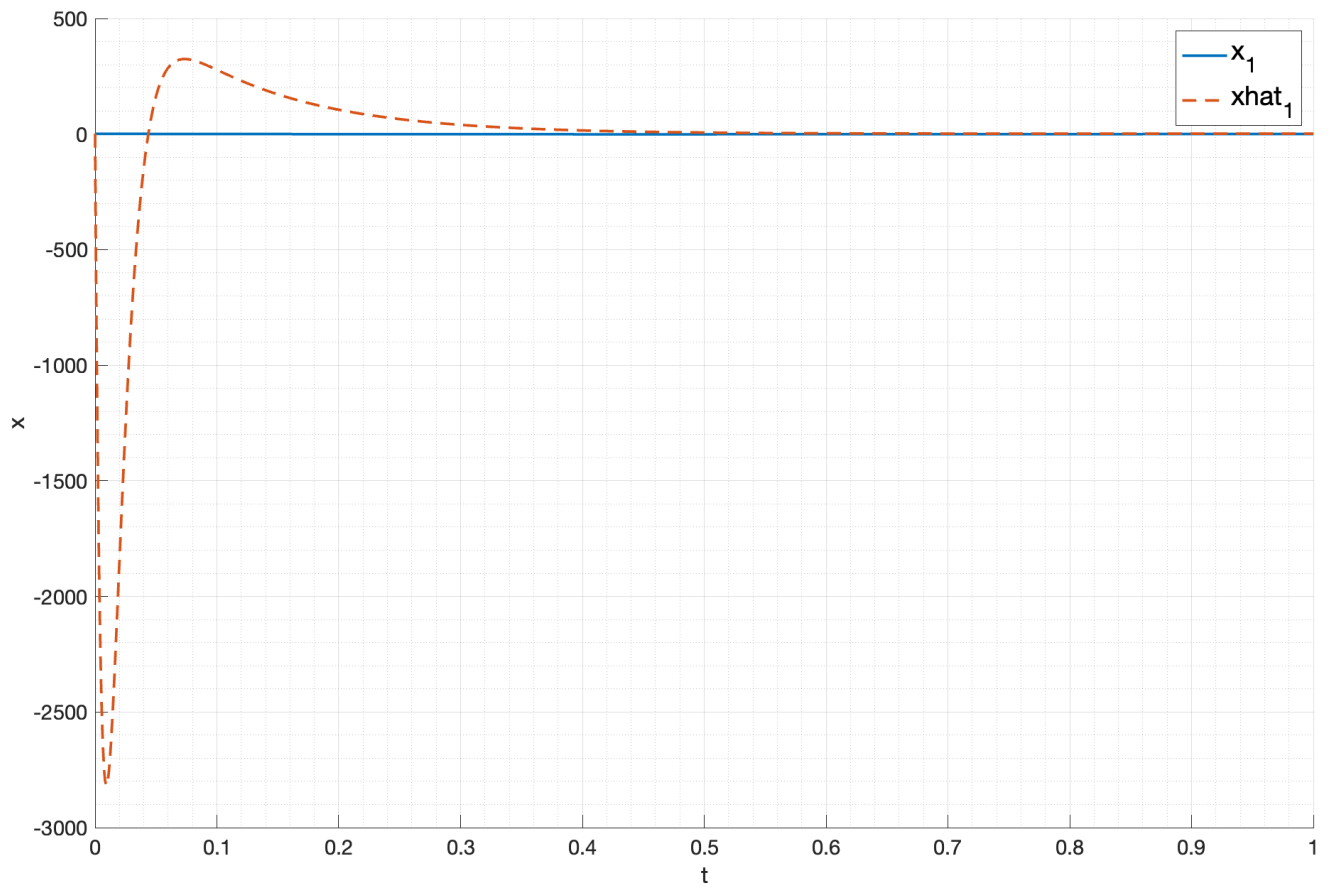


Рис. 13: Состояние системы  $x_1$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_2$

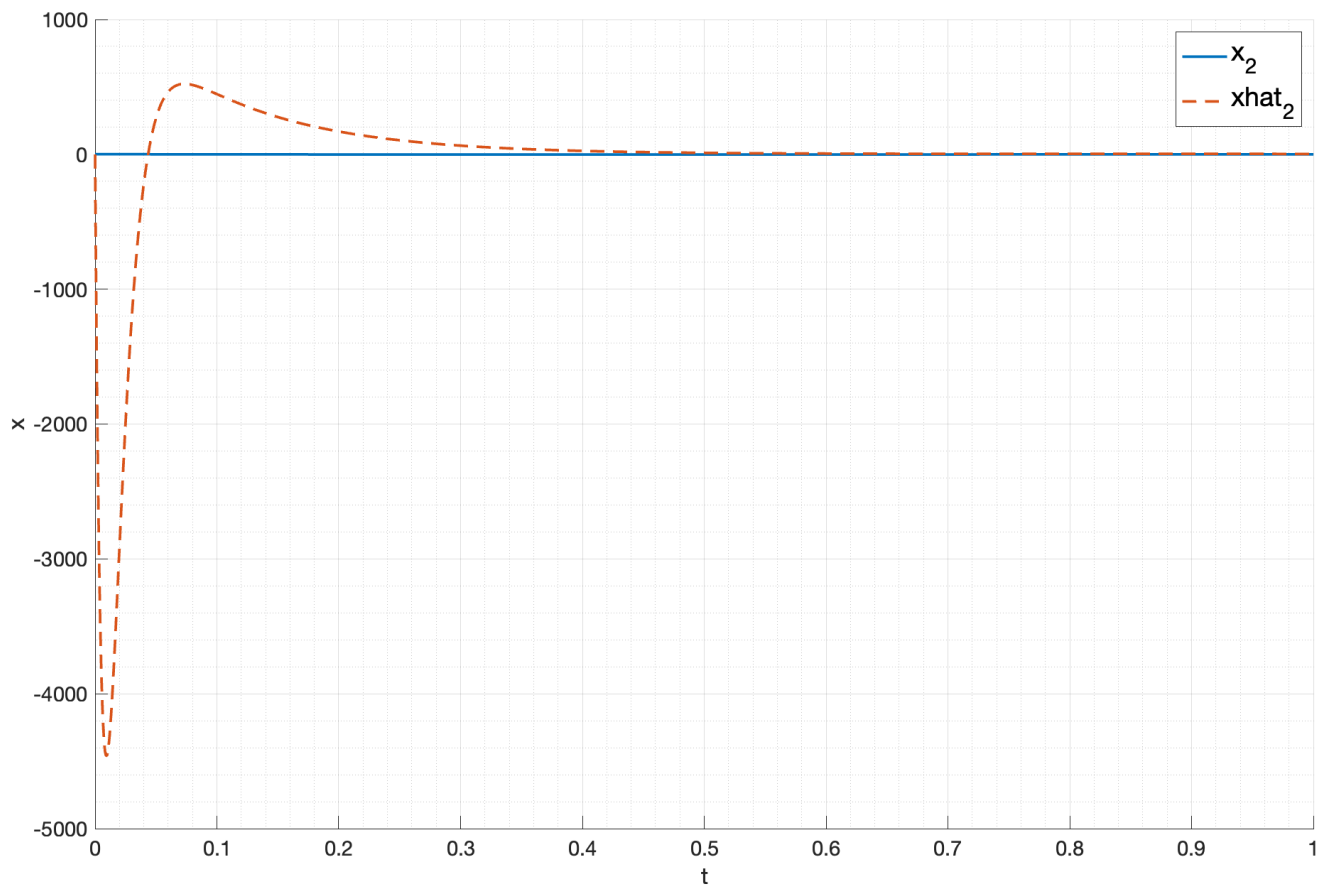


Рис. 14: Состояние системы  $x_2$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_2$



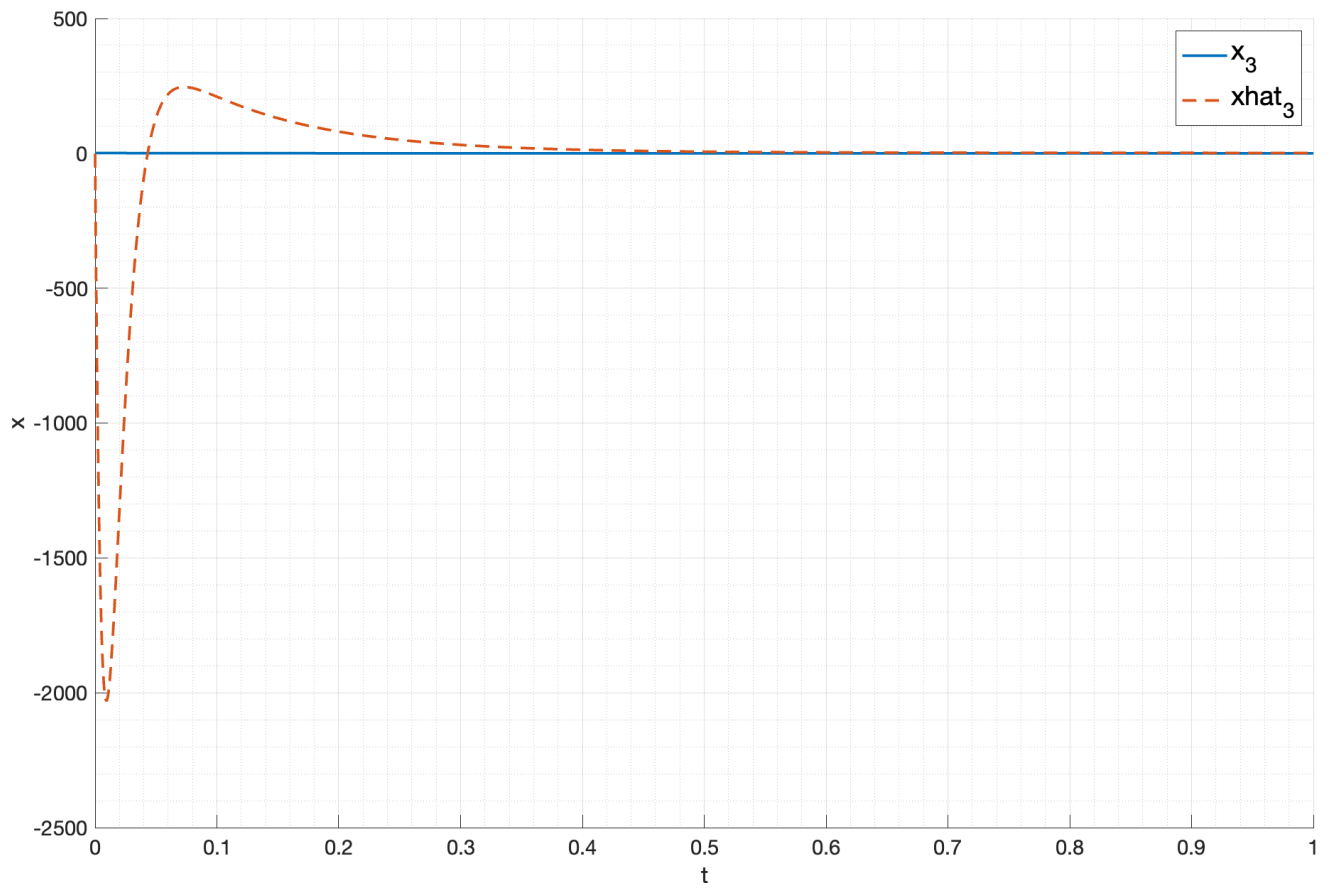


Рис. 15: Состояние системы  $x_3$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_2$

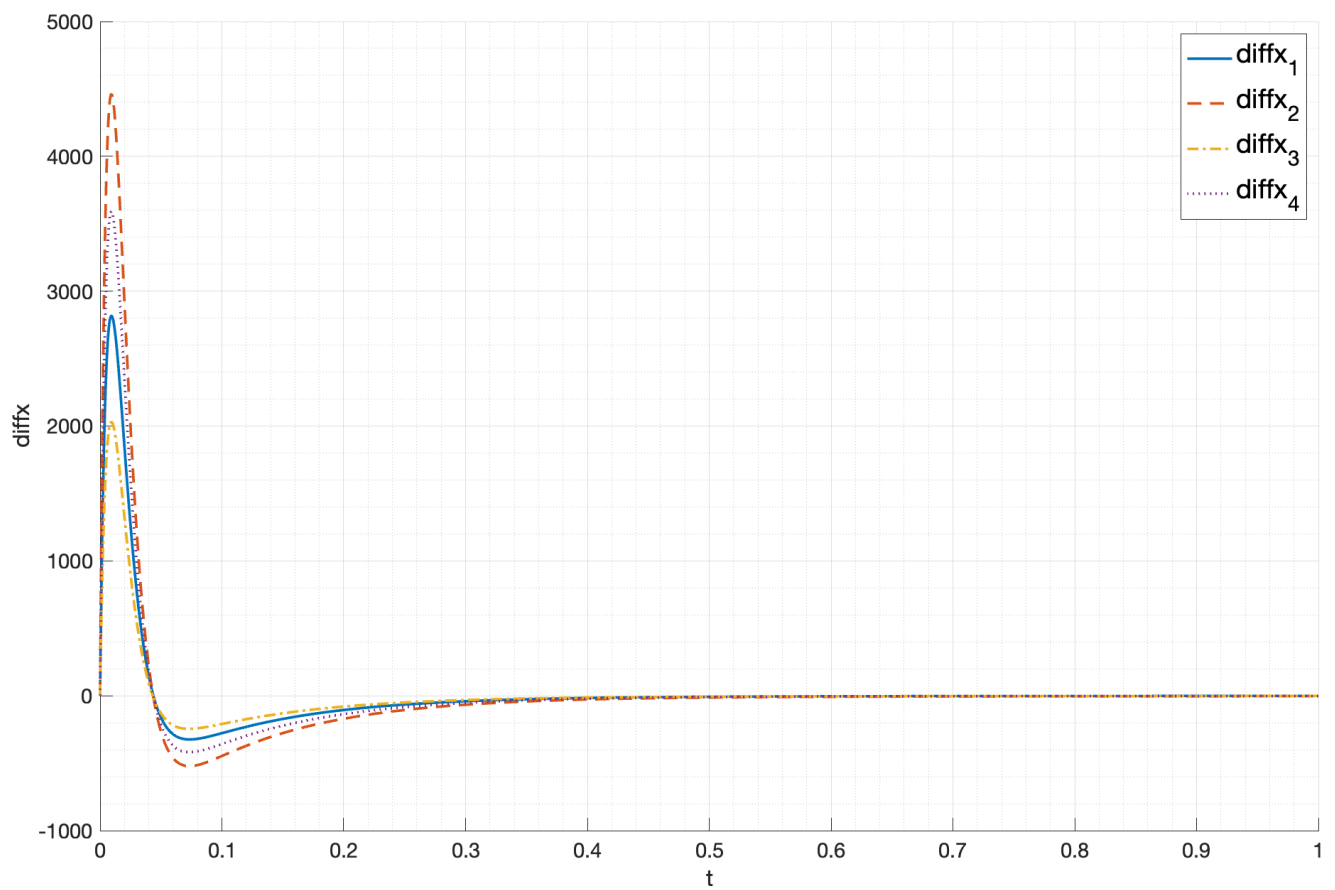


Рис. 16: Ошибка наблюдателя полного порядка для спектра  $\sigma_2$

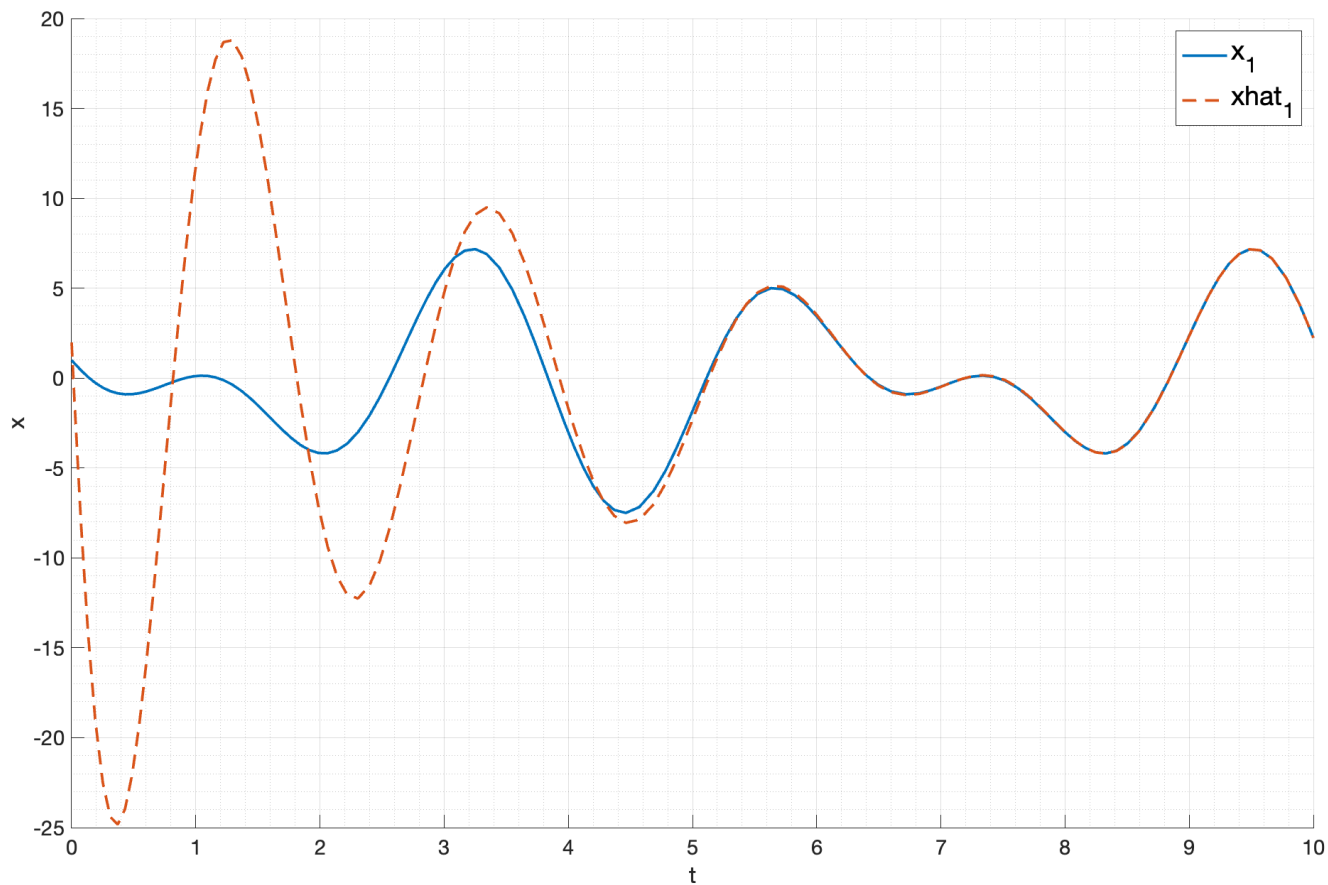


Рис. 17: Состояние системы  $x_1$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_3$

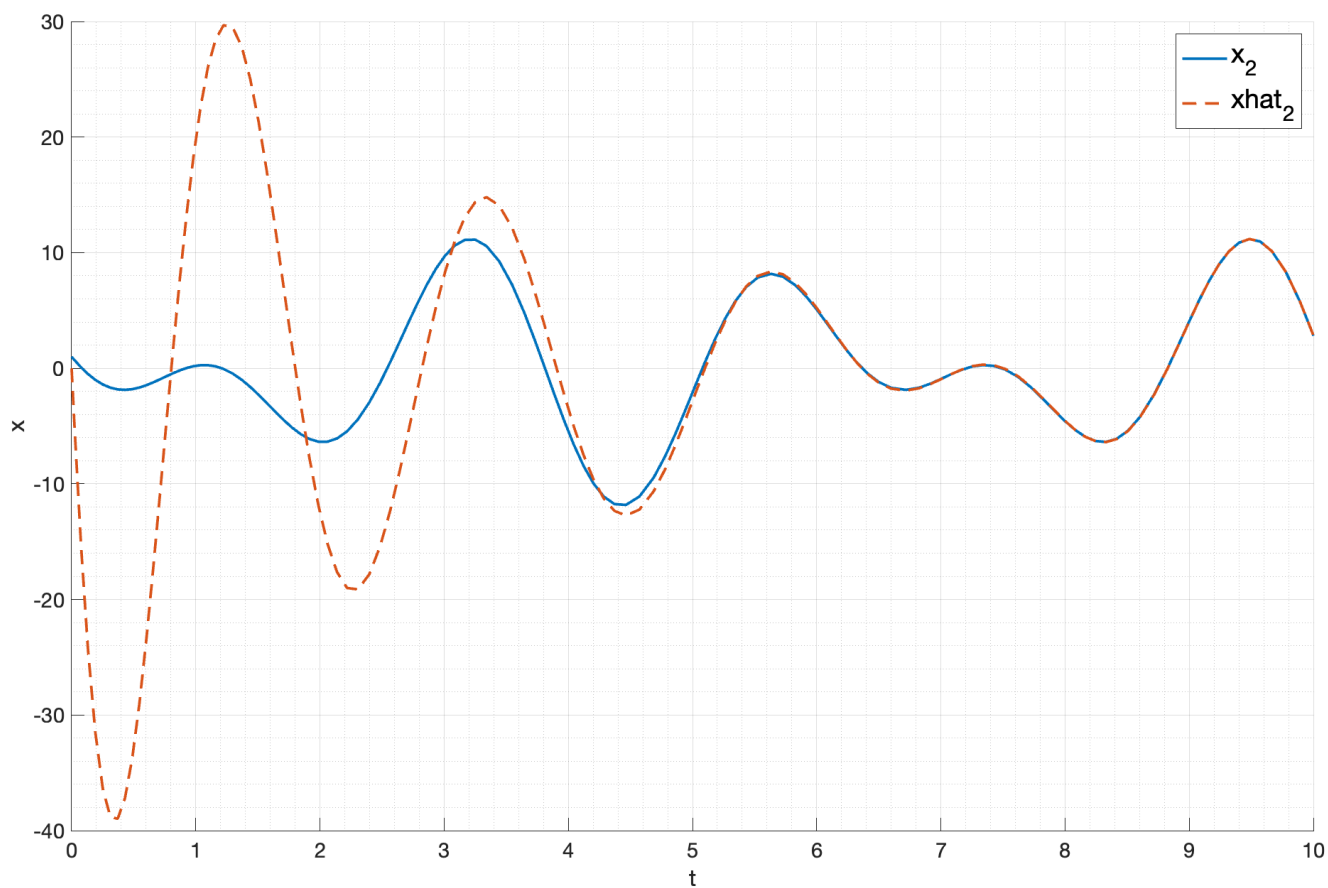


Рис. 18: Состояние системы  $x_2$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_3$

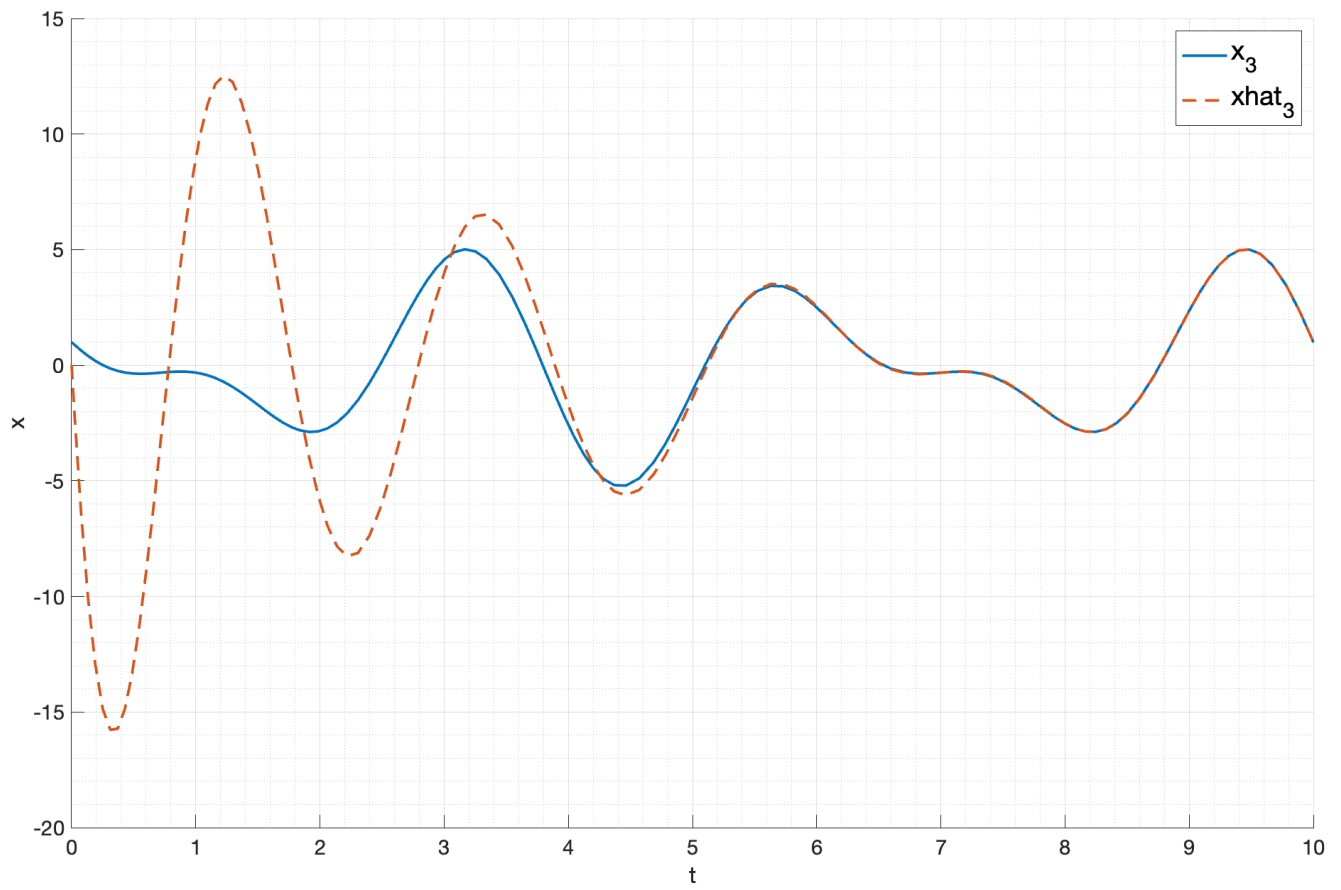


Рис. 19: Состояние системы  $x_3$  с наблюдателем полного порядка для спектра  $\sigma_3$

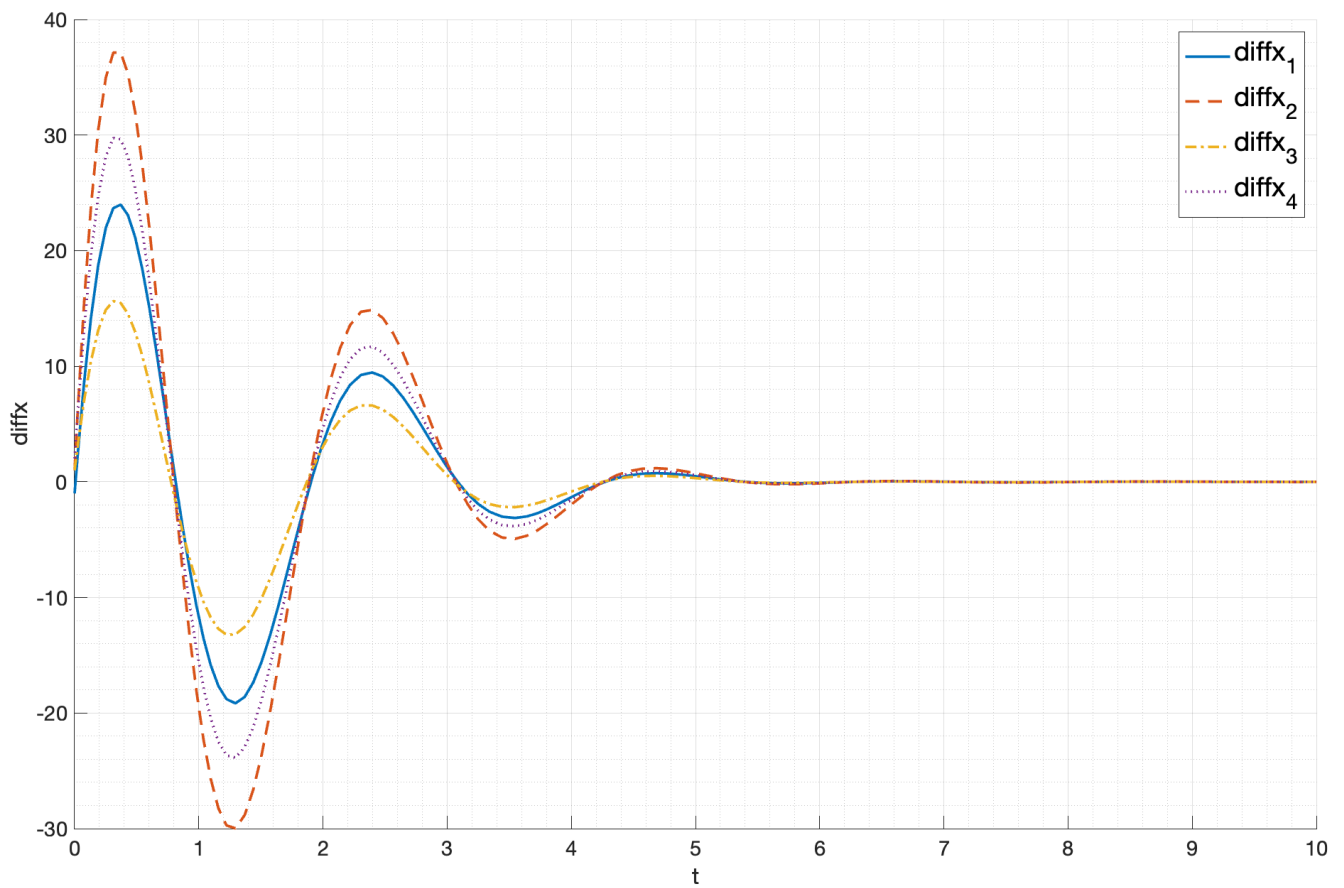


Рис. 20: Ошибка наблюдателя полного порядка для спектра  $\sigma_3$

## 2.4. Выводы

Во всех случаях коррекция наблюдателя помогла устремить ошибку к нулю. При этом, как и в прошлом задании, можно заметить закономерность. При больших значениях спектра наблюдателя ошибка устремляется к нулю быстрее, чем при малых, а при наличии комплексных собственных чисел ошибка наблюдателя приобретает колебательный характер.

## 3. Модальное управление по выходу

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (25)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ -12 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

### 3.1. Система с регулятором и наблюдателем

Рассмотрим систему с регулятором и наблюдателем:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y) \\ u &= K\hat{x} \end{aligned} \quad (27)$$

И составим ее схему моделирования (см. рисунок 21).

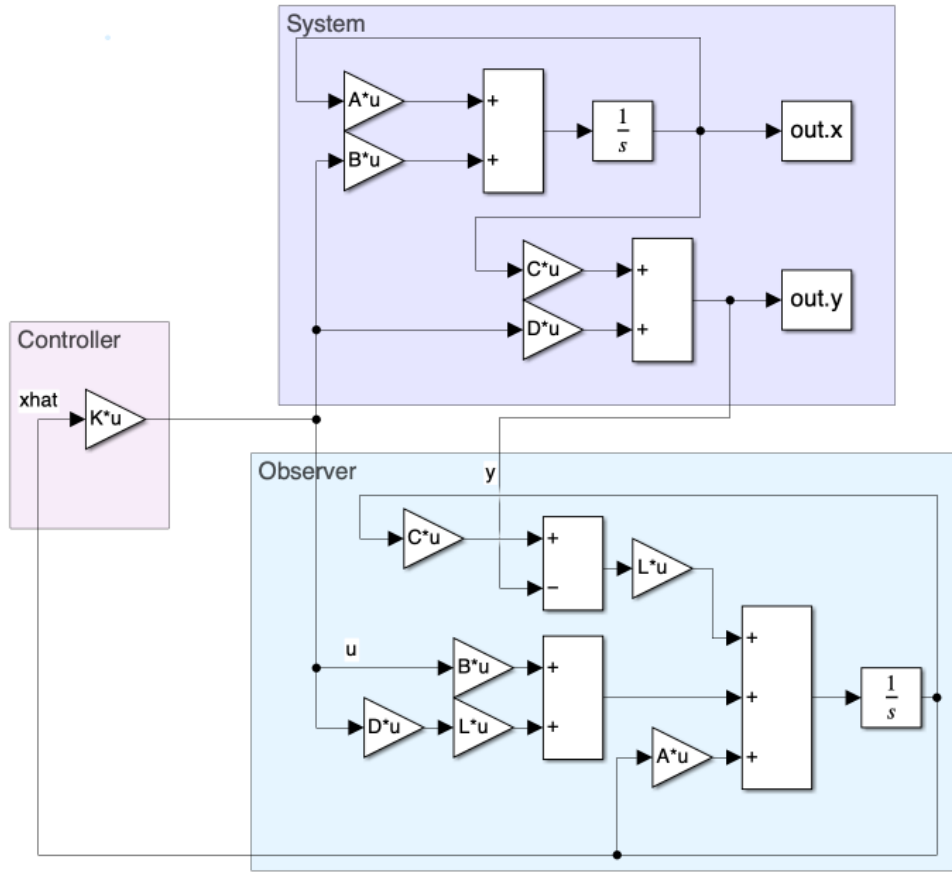


Рис. 21: Схема моделирования системы с регулятором и наблюдателем

### 3.2. Управляемость и наблюдаемость

Для определения управляемости и наблюдаемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
A_j &= \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 12.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -12.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 24.00 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 & -1.00 & 1.00 \\ -1.00 & 1.00 & -1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & -1.00 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \\
B_j &= \begin{bmatrix} 1.00 \\ 4.00 \\ -5.00 \\ 4.00 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} 0.00 & 24.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.00 & 0.00 & 0.00 & 6.00 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

Можно сделать вывод, что система является полностью управляемой, а а собственное число  $\lambda_3 = -12$  не является наблюдаемым. Соответственно, система не является полностью наблюдаемой, но, так как собственное число  $\lambda_3$  располагается в левой полуплоскости, то система является обнаруживаемой.

### 3.3. Регулятор

Выберем спектр регулятора равным  $\{-4, -1, -2, -3\}$ . Данный спектр является достижимым, так как не содержит неуправляемых собственных чисел.

Аналогично первому заданию выберем матрицу  $K$  таким образом, чтобы спектр матрицы  $A - BK$  совпадал со спектром регулятора.

$$K = \begin{bmatrix} -3.72 & -2.13 & 3.79 & -2.21 \end{bmatrix} \tag{30}$$

При этом, как и ожидалось, спектр матрицы  $A - BK$  полностью совпадает с желаемым спектром регулятора.

### 3.4. Наблюдатель

Выберем спектр наблюдателя равным  $\{-1, -2, -3, -12\}$ . Данный спектр является достижимым, так как содержит не наблюдаемое собственное число  $\lambda_3 = -12$ .

Аналогично второму заданию выберем матрицу  $L$  таким образом, чтобы спектр матрицы

$A - LC$  совпадал со спектром наблюдателя.

$$L = \begin{bmatrix} -11.24 & -11.24 \\ -9.65 & -9.65 \\ 10.66 & 10.66 \\ -9.08 & -9.08 \end{bmatrix} \quad (31)$$

При этом спектр матрицы  $A - LC$  полностью совпадает с желаемым спектром наблюдателя.

### 3.5. Моделирование

Промоделируем систему с регулятором и наблюдателем с начальными условиями  $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$  и  $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ . Результаты моделирования представлены на рисунках 22 (состояние системы) и 23 (оценка состояния системы) и 24 (управляющее воздействие). График ошибки оценки состояния представлен на рисунке 25.

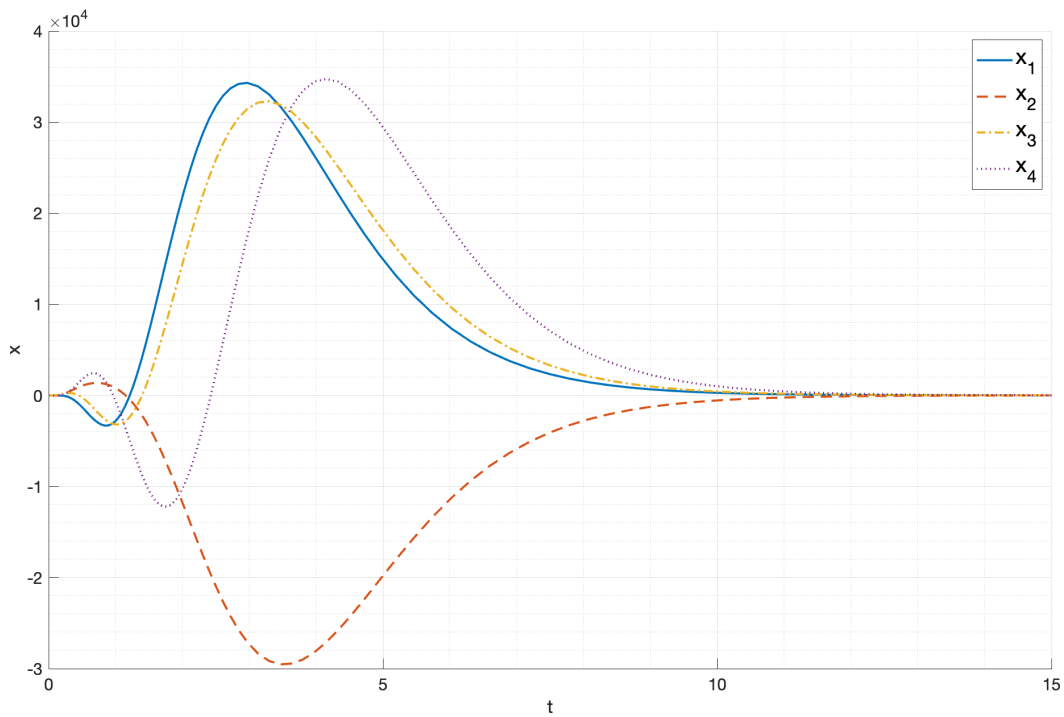


Рис. 22: Состояние системы

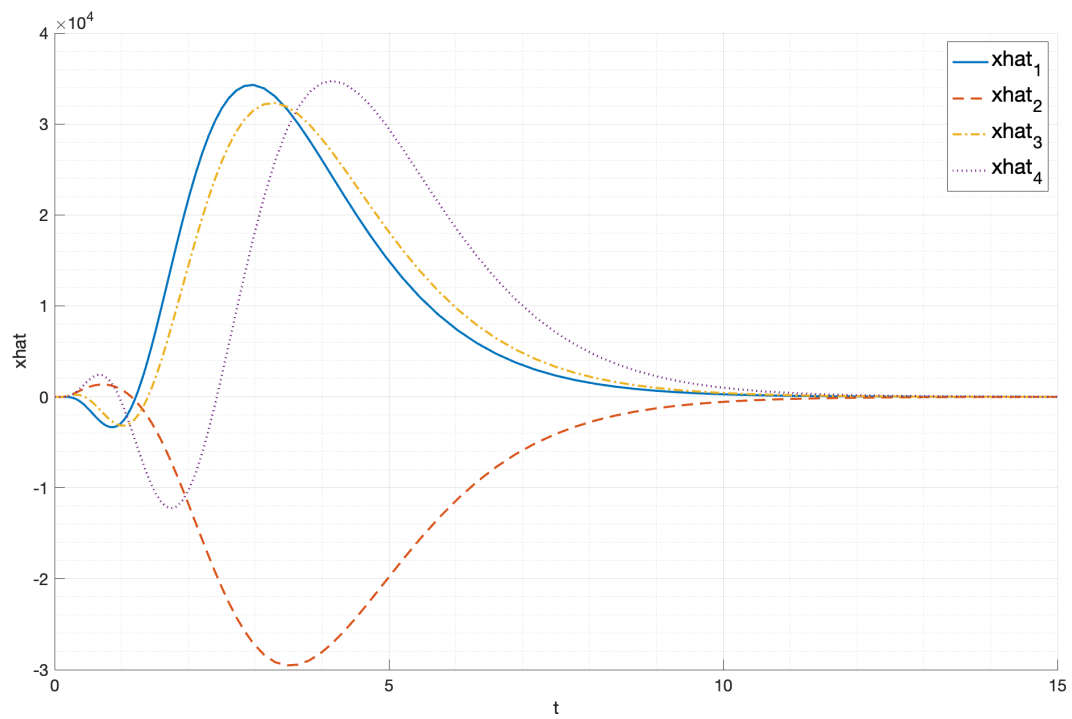


Рис. 23: Оценка состояния системы

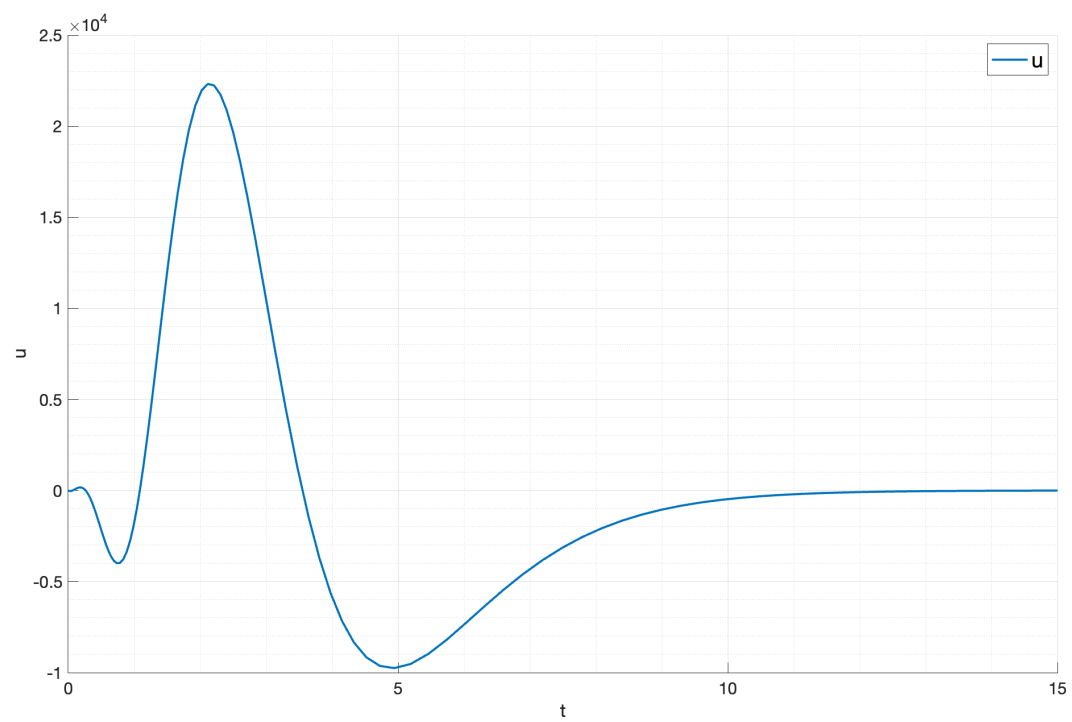


Рис. 24: Управляющее воздействие



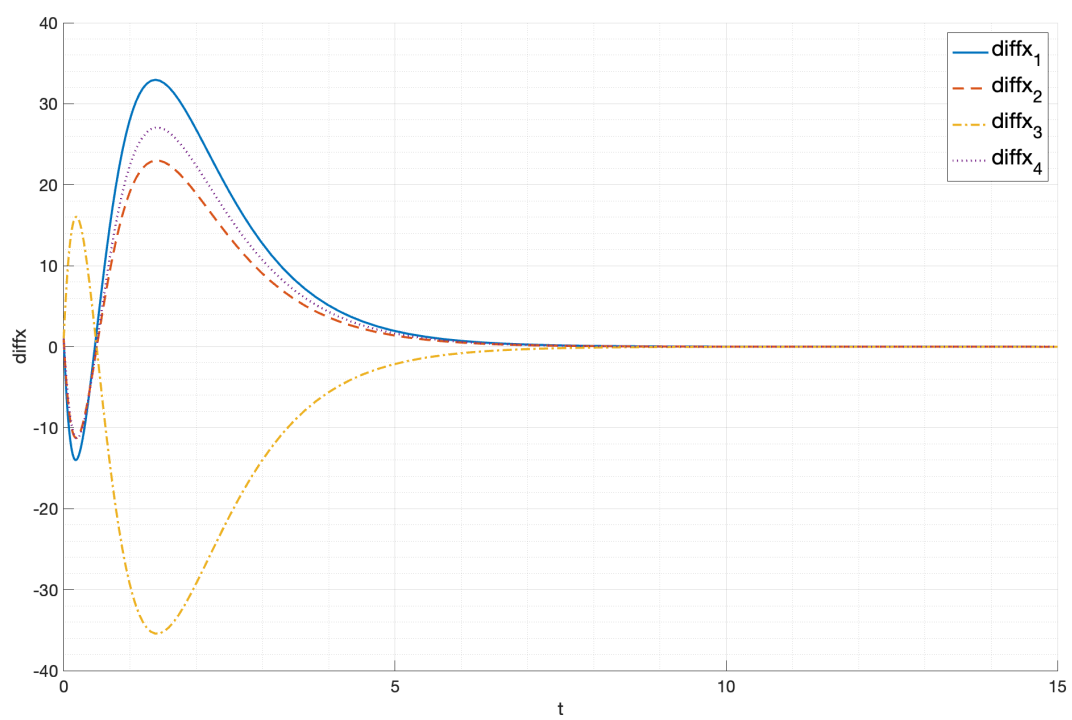


Рис. 25: Ошибка оценки состояния

### 3.6. Выводы

В результате моделирования системы с регулятором и наблюдателем можно сделать вывод, что регулятор, основанный на оценке состояния системы, позволяет управлять системой так же, как и регулятор, основанный на реальном состоянии системы. При этом, ошибка оценки состояния системы быстро сходится к нулю.

## 4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы системы с модальными регуляторами и наблюдателями. Были выбраны матрицы  $K$  и  $L$  таким образом, чтобы спектры матриц  $A - BK$  и  $A - LC$  совпадали с желаемыми спектрами регулятора и наблюдателя соответственно. Во всех случаях теоретические ожидания подтвердились результатами моделирования. В третьем задании был рассмотрен регулятор на основе оценки состояния системы наблюдателем. Данная архитектура позволяет управлять системой, не имея возможности измерить все состояния напрямую, что чаще всего является более реалистичной задачей.