



НИУ ИТМО

## Отчет по курсовому проекту

По дисциплине "Теория автоматического управления"

"Стабилизация перевернутого маятника"

Выполнил:

Александр Иванов, Р3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025



# **Содержание**

<b>1. Физическая модель маятника</b>	<b>3</b>
1.1. Уравнения движения . . . . .	3
1.2. Точки равновесия . . . . .	6
1.3. Линейная модель . . . . .	6
<b>2. Анализ математический модели</b>	<b>7</b>
2.1. Устойчивость системы . . . . .	7
2.1.1. Управляемость системы . . . . .	9
2.1.2. Наблюдаемость системы . . . . .	9
2.1.3. Итоги анализа . . . . .	10
2.2. Передаточные функции . . . . .	10
2.3. Моделирование систем . . . . .	12
2.3.1. Итоги моделирования . . . . .	17
<b>3. Модальное управление</b>	<b>18</b>
3.1. Модальный регулятор . . . . .	18
3.2. Исследование устойчивости при различных начальных условиях . . . . .	22
3.3. Исследование переходного процесса . . . . .	23
3.4. Наблюдатель полного порядка . . . . .	29
3.5. Наблюдатель пониженного порядка . . . . .	35
3.6. Регулятор по выходу . . . . .	42
3.7. Выводы . . . . .	44

# 1. Физическая модель маятника

Рассмотрим систему, состоящую из тележки массой  $M$ , движущейся по горизонтальной оси, и маятника с равномерно распределенной массой  $m$  и длиной  $l$ , закрепленного на шарнире на тележке. Примем за  $x$  координату тележки, а за  $\theta$  угол отклонения маятника от вертикали. Схема системы представлена на рисунке 1.

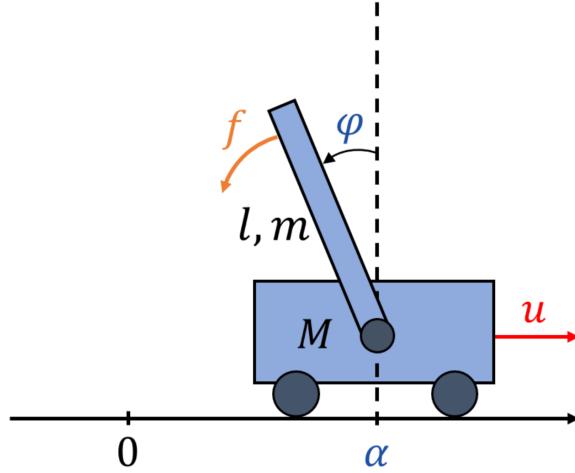


Рис. 1: Схема маятника на тележке

## 1.1. Уравнения движения

Используем законы Лагранжа для записи уравнений движения системы.

Так как кинетическая и потенциальная зависят от центра масс тележки и маятника, введем в рассмотрение расстояние  $l_{\text{com}}$  от точки подвеса маятника до его центра масс. При этом  $l_{\text{com}} = l/2$  для равномерно распределенной массы маятника. В дальнейшем будем использовать  $l$  для обозначения расстояния от точки подвеса до центра масс маятника.

Напишем уравнения для координат центра масс маятника  $x_m$  и  $y_m$  и продифференцировав их по времени, получим скорости центра масс маятника:

$$\begin{cases} x_m = x - l \sin \theta, \\ y_m = l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} - l \dot{\theta} \cos \theta, \\ v_y = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Общая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергии маятника и кинетической энергии тележки:

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$U = mgl \cos \theta \quad (3)$$

Записывая функция Лагранжа  $L = T - U$ , получаем:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (4)$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Q_x$  и  $Q_\theta$  – обобщенные силы, действующие на тележку и маятник соответственно. В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = Q_x, \\ ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = Q_\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) представляет собой уравнения баланса сил, приложенных к тележке и моментов, действующих на маятник.

Запишем эти уравнения разрешив их относительно высших производных. Заметим, что вторые производные входят в эти уравнения линейно. С учетом этого приведем уравнения к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} M+m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \\ mgl \sin \theta + Q_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Убедимся в существовании и единственности решения системы:

$$D = ml^2(M+m) - m^2l^2 \cos^2 \theta = ml^2(M+m - m \cos^2 \theta) > 0 \quad (8)$$

Решая систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\Delta_{\ddot{x}} = \begin{vmatrix} -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x & -ml \cos \theta \\ mg l \sin \theta + Q_\theta & ml^2 \end{vmatrix} = ml^2(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) + ml \cos \theta(mg l \sin \theta + Q_\theta) \quad (9)$$

$$\Delta_{\ddot{\theta}} = \begin{vmatrix} (M+m) & -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \\ -ml \cos \theta & mg l \sin \theta + Q_\theta \end{vmatrix} = (mg l \sin \theta + Q_\theta)(M+m) + ml \cos \theta(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) \quad (10)$$

В итоге получается систему дифференциальных уравнений, описывающих ускорение тележки и угловое ускорение маятника:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{ml^2(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) + ml \cos \theta(mg l \sin \theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mg l \sin \theta + Q_\theta)(M+m) + ml \cos \theta(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} \end{cases} \quad (11)$$

Можно записать систему в пространстве состояний  $X$  в форме Коши:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{ml^2(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) + ml \cos \theta(mg l \sin \theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(mg l \sin \theta + Q_\theta)(M+m) + ml \cos \theta(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

где  $X$  – вектор состояния системы, состоящий из координат тележки  $x$ , скорости тележки  $\dot{x}$ , угла отклонения маятника от вертикали  $\theta$  и угловой скорости маятника  $\dot{\theta}$ .

Измеряемым выходом системы будет считать вектор  $Y$ , состоящий из координат тележки и угла отклонения маятника от вертикали:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (13)$$

## 1.2. Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы в отсутствие внешних сил ( $Q_x = Q_\theta = 0$ ). Для этого приравняем к нулю правые части уравнений движения, решим систему уравнений:

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \frac{ml^2(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) + ml \cos \theta(mgl \sin \theta + Q_\theta)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} = 0 \\ \frac{(mgl \sin \theta + Q_\theta)(M+m) + ml \cos \theta(-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2(M+m-m \cos^2 \theta)} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Упростив, получаем:

$$\begin{cases} \sin \theta(g(M+m) + ml \cos \theta) = 0 \\ \sin \theta(ml + g \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi n, n \in Z \quad (16)$$

Существует бесконечное множество точек на окружности, которые соответствуют равновесию системы, будем рассматривать только точки в пределах  $[0, 2\pi]$ , что соответствует одному обороту маятника. Таким образом, точки равновесия системы определяются углом отклонения маятника от вертикали  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , что соответствует наивысшему и наизнешнему положению маятника соответственно, что сходится с ожидаемым результатом.

## 1.3. Линейная модель

Для дальнейшего анализа системы ее необходимо линеаризовать. Линеаризацию необходимо проводить в точках равновесия системы, которые были найдены в предыдущем пункте, в противном случае отклонения линейной модели от реальной системы будут велики. Линеаризуем систему в точке равновесия  $\theta = 0$  и  $x = 0$ , используя то, что  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1$ ,  $x^{n+1} \approx 0$ ,  $n \in N$  при малых  $x$ .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{lQ_x + mgl\theta + Q_\theta}{lM} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(g\theta + \frac{Q_\theta}{ml})(M+m) + Q_x}{lM} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Запишем систему в матричном виде, принимая за управление обобщенную силу, приложенную на каретку, а за внешнее внешнее возмущение обобщенную силу, приложенную на маятник  $u = Q_x, f = Q_\theta$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{lM} \end{bmatrix} \times Q_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix} \times Q_\theta \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрицы системы примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{lM} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 2. Анализ математический модели

### 2.1. Устойчивость системы

Для дальнейшего анализа системы выберем случайным образом параметры системы:

$$M = 255.169, \quad m = 8.328, \quad l = 0.769 \quad (21)$$

Подставив эти значения в матрицы системы (18), получаем:

$$A = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 26.34 & 0.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0039 \\ 0.0000 \\ 0.0102 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.010 \\ 0.000 \\ 0.838 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Проведем анализ полученныйй системы. Для этого, в первую очередь, найдем собственные числа матрицы  $A$ .

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 5.13 \\ -5.13 \end{bmatrix} \quad (23)$$

В матрице системы есть два нулевых собственных числа, один отрицательный (устойчивый) и один положительный (неустойчивый). Наличие хотя бы одного положительного собственного числа говорит о том, что система неустойчива. При этом наличие двух нулевых собственных чисел свидетельствует о колебательной природе системы.

Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.01 \\ 0.19 \\ 0.98 \end{bmatrix}^T, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.01 \\ -0.19 \\ 0.98 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

Собственные векторы линейной системы показывают, в каких *направлениях* двигаются отдельные моды системы. Так, первый два вектора, соответствующие нулевым собственным числам, показывают, что система может иметь различные линейные координаты вдоль оси  $x$ , при этом не изменяя угол отклонения маятника, его скорость. В то время как третий и четвертый векторы показывают, что изменение скорости тележки, угла отклонения маятника и его угловой скорости будут действовать друг на друга.

### 2.1.1. Управляемость системы

Найдем матрицу управляемости системы  $U$  и определим ее ранг.

$$U = [B, AB, A^2B, A^3B] \quad (25)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0039 & 0.0000 & 0.0033 \\ 0.0039 & 0.0000 & 0.0033 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0102 & 0.0000 & 0.2684 \\ 0.0102 & 0.0000 & 0.2684 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(U) = 4 \quad (26)$$

Поскольку ранг матрицы управляемости равен количеству переменных системы, то система является полностью управляемой. Поскольку система является полностью управляемой, то нет необходимости проверять управляемость каждого собственного числа по отдельности.

### 2.1.2. Наблюдаемость системы

Найдем матрицу наблюдаемости системы  $W$  и определим ее ранг.

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3202 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 26.3392 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3202 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 26.3392 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(W) = 4 \quad (28)$$

Поскольку ранг матрицы наблюдаемости равен количеству переменных системы, то система является полностью наблюдаемой, так же пропустим этап проверки наблюдаемости каждого собственного числа по отдельности.

### 2.1.3. Итоги анализа

В ходе анализа линеаризованной около верхней точки равновесия системы было установлено, что система является неустойчивой из-за наличия одного положительного собственного числа и двух нулевых собственных чисел, при этом система является полностью управляемой и наблюдаемой, что дает возможность синтезировать регуляторы для данной системы.

## 2.2. Передаточные функции

Так как выход системы являются вектором размерности 2, то передаточная функция (матрица)  $W_{u \rightarrow y}(s)$  по управлению  $u(t)$  и выходу  $y(t)$  и передаточная функция (матрица)  $W_{f \rightarrow y}(s)$  по возмущению  $f(t)$  и выходу  $y(t)$  системы будут иметь размерность  $2 \times 1$  и могут быть получены из матричного уравнения состояния (18) системы следующим образом:

Полагая нулевые начальные условия, применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (18):

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) + DF(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases} \quad (29)$$

где  $X(s)$ ,  $Y(s)$  и  $U(s)$ ,  $F(s)$  - образы Лапласа, соответствующие вектору состояния  $x(t)$ , выходу  $y(t)$  и входу  $u(t)$ ,  $f(t)$  системы соответственно.

Разрешим систему относительно  $X(s)$ :

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}DF(s) \quad (30)$$

Подставим полученное выражение в уравнение для выхода  $Y(s)$ :

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}DF(s) \quad (31)$$

Теперь, полагая  $U(s) = 0$  и  $F(s) = 0$  получим передаточные матрицы системы по входу и внешнему возмущению соответственно:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (32)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D \quad (33)$$

Подставив в уравнения полученные ранее матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  получим:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0039s^2 - 0.1}{s^4 - 26.3392s^2} \\ \frac{0.0102}{s^2 - 26.3392} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0102s^2}{s^4 - 26.3392s^2} \\ \frac{0.8383}{s^2 - 26.3392} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Определим динамические порядки полученных передаточных функций. Принимая то, что динамический порядок системы с несколькими выходами определяется как наибольший из динамических порядков передаточных функций звеньев, получаем, для первой передаточной функции  $W_{u \rightarrow y}(s)$  динамический порядок равен 4, для второй передаточной функции  $W_{f \rightarrow y}(s)$  динамический порядок равен 4. Относительный динамический порядок для всех выходов обоих передаточных функций равен 2. Динамический порядок равный 4 указывает на то, что для описание системы требуется

4 уравнения первого порядка.

Определим нули и полюса полученных передаточных функций. Для этого найдем корни полиномов числителя и знаменателя полученных передаточных функций. Полюса обоих передаточных функций соответствуют собственным числам матрицы  $A$  и равны:

$$\begin{aligned} \sigma(W_{u \rightarrow y_1}(s)) &= \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 5.13 \\ -5.13 \end{bmatrix} & \sigma(W_{u \rightarrow y_2}(s)) &= \begin{bmatrix} 5.13 \\ -5.13 \end{bmatrix} \\ \sigma(W_{f \rightarrow y_1}(s)) &= \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 5.13 \\ -5.13 \end{bmatrix} & \sigma(W_{f \rightarrow y_2}(s)) &= \begin{bmatrix} 5.13 \\ -5.13 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Нули первой передаточной функции  $W_{u \rightarrow y_1}(s)$  равны  $\pm 5.06$ , для второй передаточной функции  $W_{u \rightarrow y_2}(s)$  один ноль, равный 0. Наличие нуля в правой полуплоскости указывает на то, что система не является минимальной фазовой.

## 2.3. Моделирование систем

Создадим блоки, имитирующие поведение начальной системы (11) и ее линеаризованной модели (18) в среде MATLAB Simulink. На вход блоков будут подаваться управляющее воздействие  $u(t)$  и внешнее возмущение  $f(t)$ , а на выходе будет получаться вектор измеряемых величин  $y(t)$  и вектора состояния системы, который может быть использован в процессе синтеза и проверки регуляторов. В реальной системе он недоступен для непосредственного измерения. Схемы блоков представлены на рисунке 2 и 3.

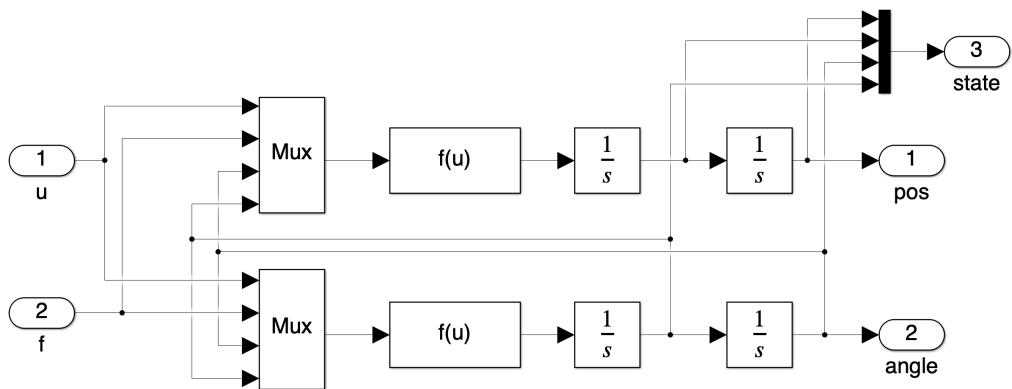


Рис. 2: Схема блока нелинейной модели системы

Уравнения в блоках **fcn** представляют собой уравнения (11) системы.

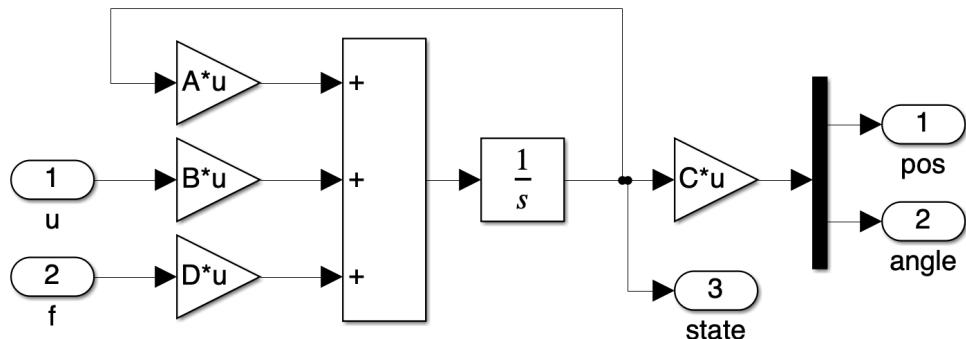


Рис. 3: Схема блока линейной модели системы

Проведем моделирование свободного движения системы в отсутствии внешнего возмущения с различными начальными условиями: будем изменять начальное положение маятника (его отклонение от верхнего положения равновесия), все остальные параметры системы оставим равными нулю. В качестве начального условия выберем угол отклонения маятника из

множества  $[0, 0.1, -0.1, 0.3, \pi/2, \pi]$ . Результаты моделирования представлены на рисунке 4 и 5.

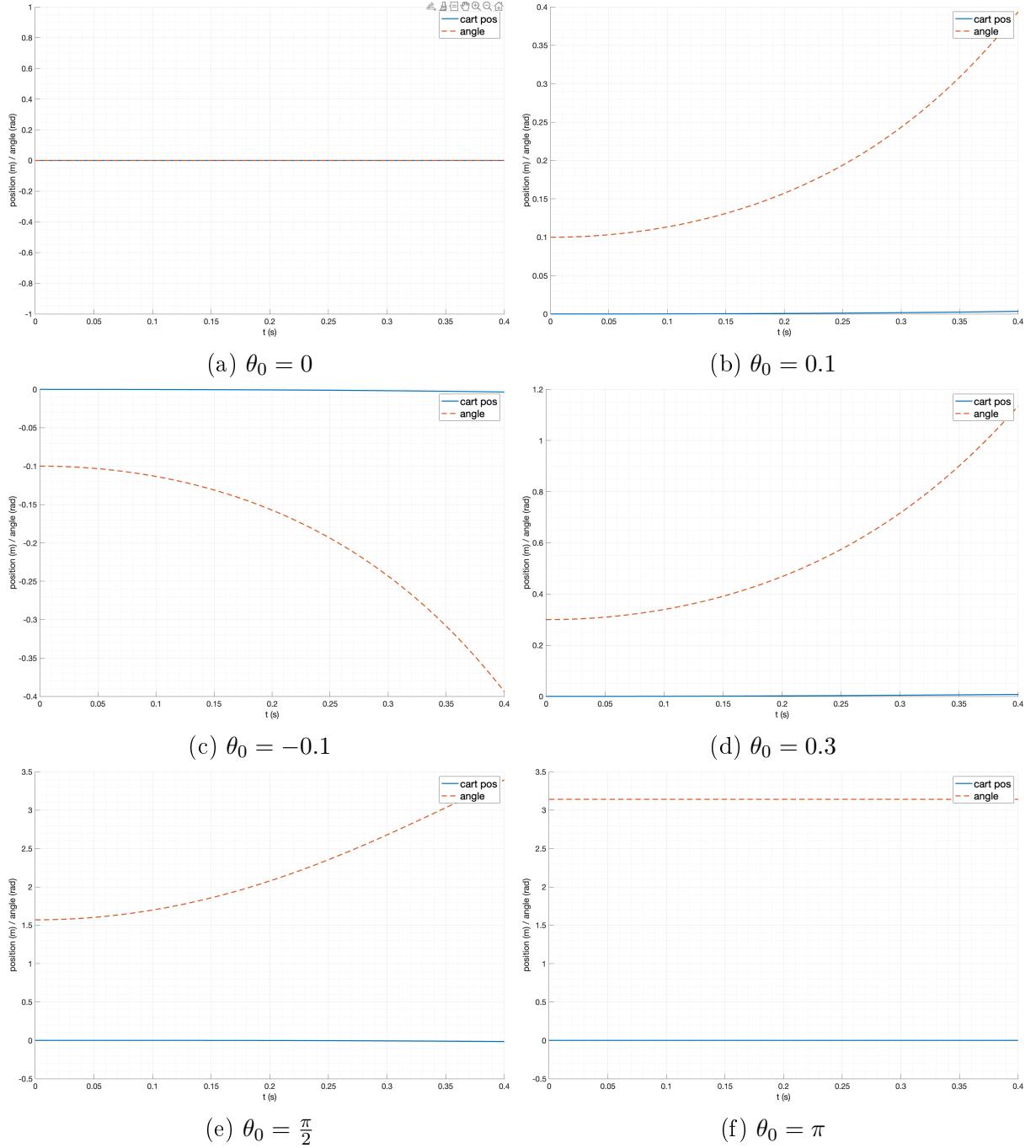


Рис. 4: Свободное движение маятника (нелинейная модель)

На рисунках 4 и 5 видно, что при отсутствии отклонения от вертикального положения маятник остается в покое, при отклонении от вертикального положения маятник начинает движение, причем направление движения зависит от направления отклонения. При отклонении равным  $\pi$ , что соответствует нижнему положению равновесия, в случае нелинейной модели, остается неподвижным, в то время как в случае линеаризованной модели маятник начинает движение, что связано с тем, что линеаризация проводилась в окрестности

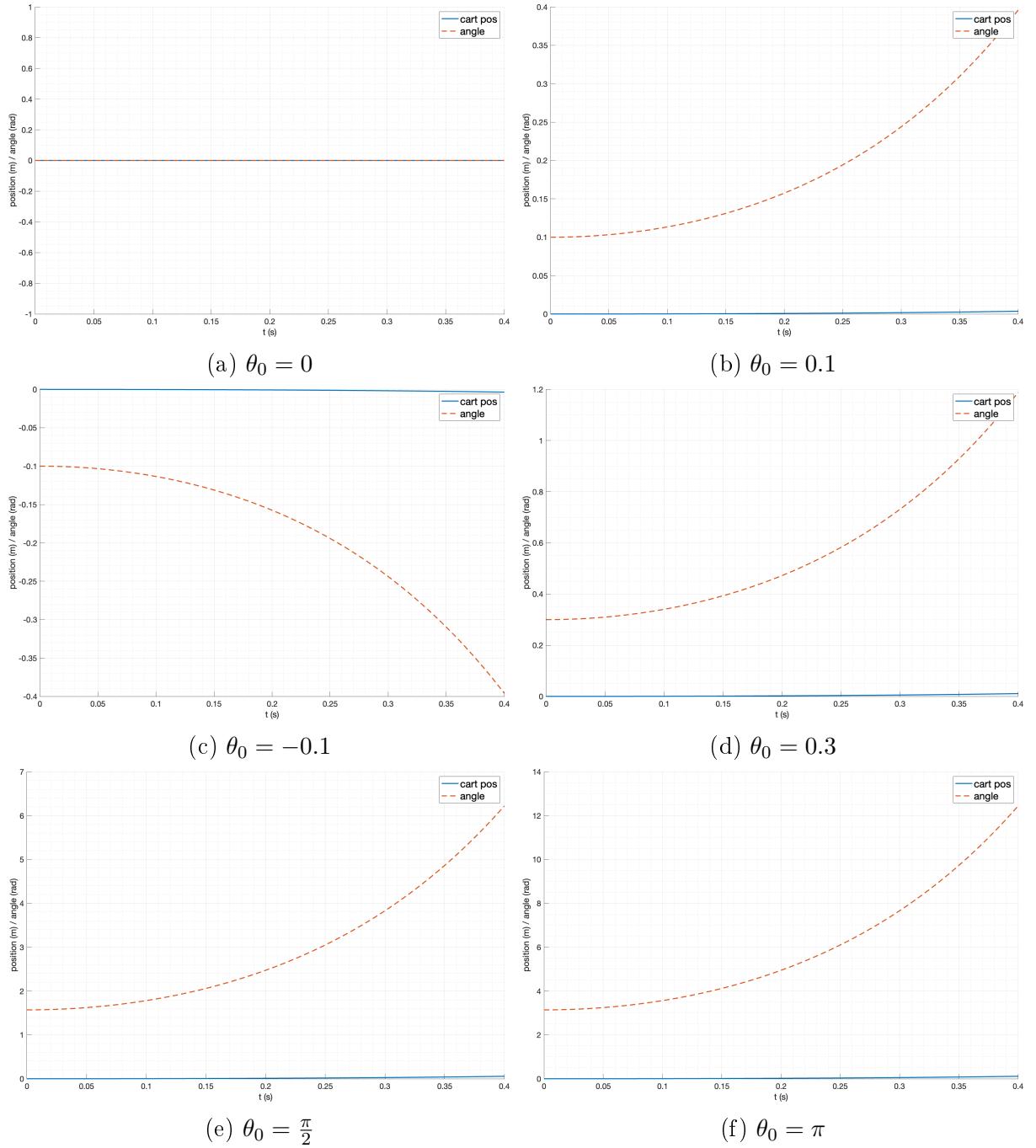


Рис. 5: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)

верхней точки равновесия, а не нижней. Сравним результаты моделирования нелинейной и линеаризованной моделей. Графики различия движения приведены на рисунке 6.

Видно, что при отклонениях  $\theta_0 = 0.1$ ,  $\theta_0 = -0.1$  и  $\theta_0 = 0.3$  различия в движении незначительны, при этом увеличиваются с увеличением модуля отклонения. При отклонении  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  различия в движении уже становятся существенными, что, опять же, связано с линеаризацией вблизи верхней точки равновесия.

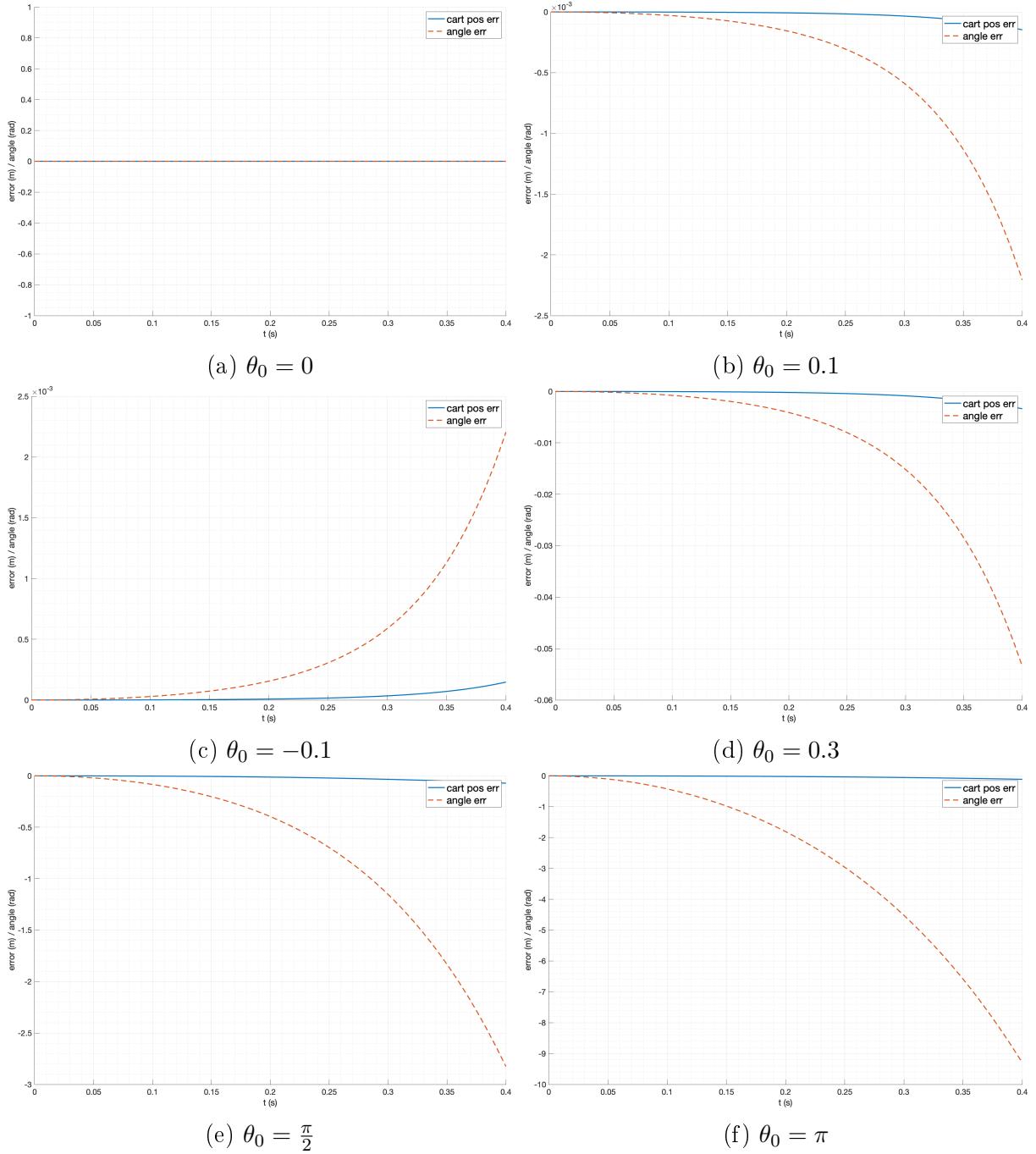


Рис. 6: Различия в движении маятника (нелинейная и линеаризованная модели)

Проведем моделирование системы с начальным отклонением  $\theta_0 = 0.1$  на более длительном промежутке времени. Результаты моделирования представлены на рисунках 8, 7.

На графиках 7 и 8 видно, что в случае нелинейной модели система колебалась с затухающими колебаниями, что является ожидаемым результатом движения маятника, в то время как в случае линеаризованной модели система не является колебательной и выход системы стремится к бесконечности, это связано с тем, что линеаризованная модель способна давать корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия,

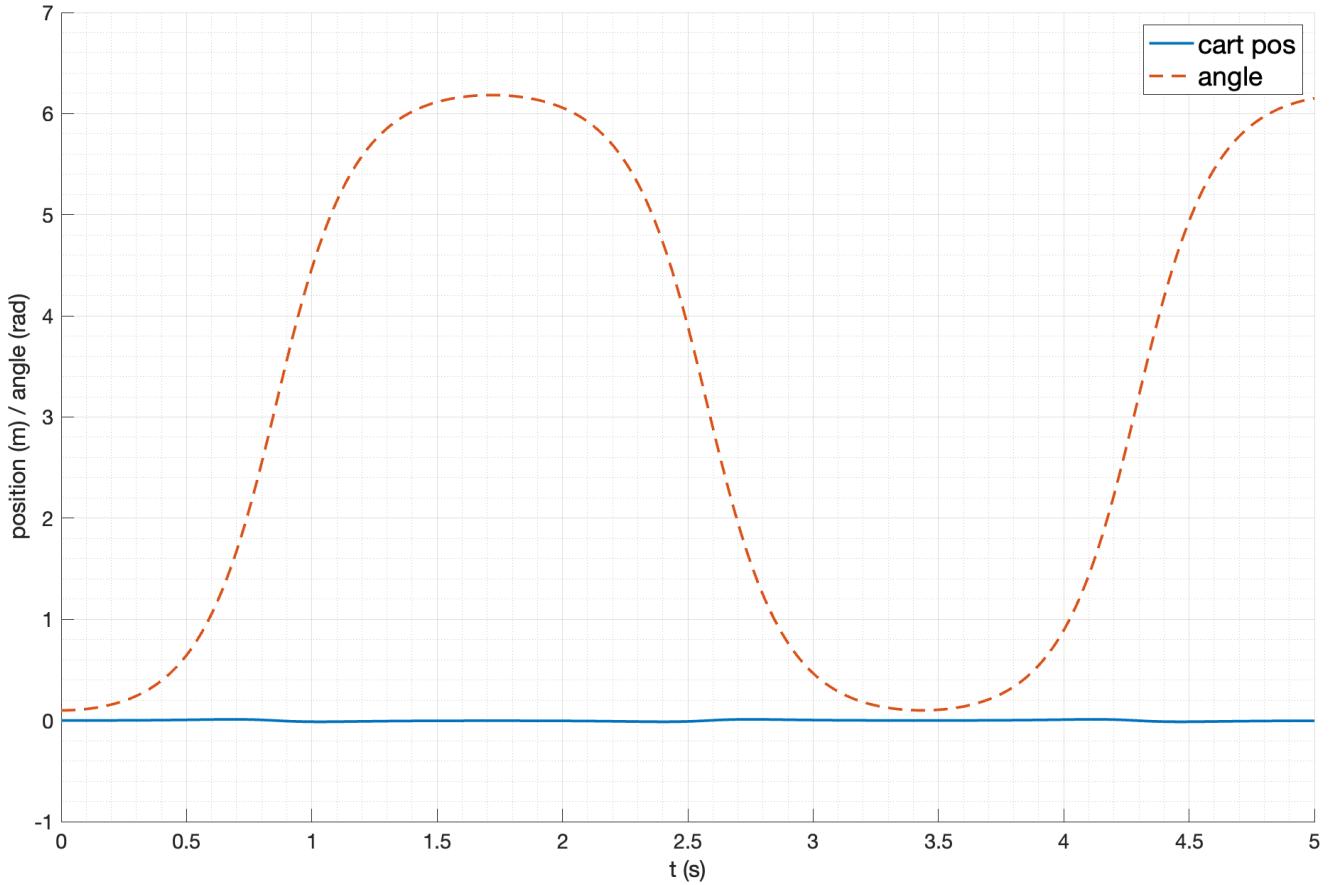


Рис. 7: Свободное движение маятника (нелинейная модель)

а при больших отклонениях от вертикального положения ее поведение уже не является корректным.

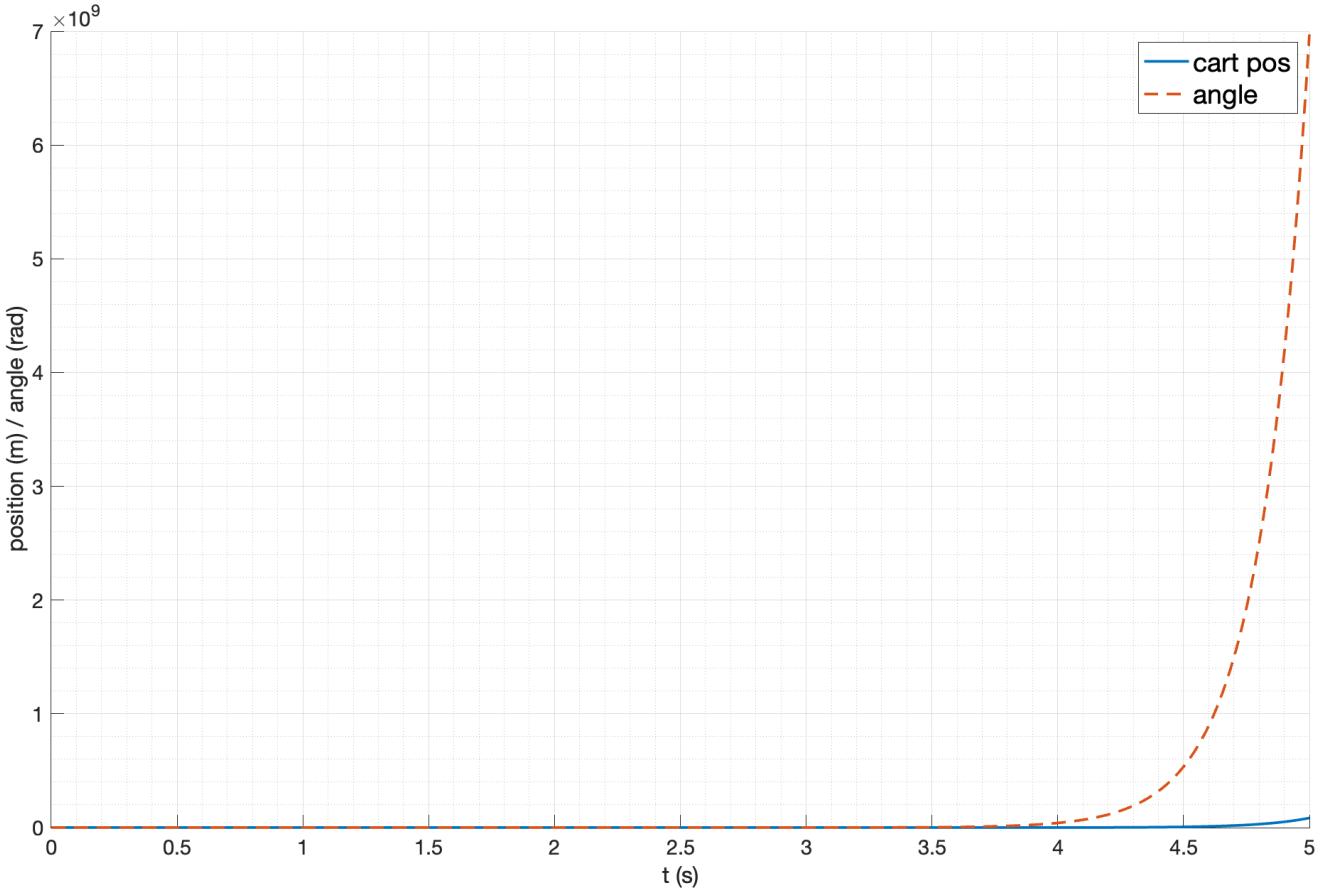


Рис. 8: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)

### 2.3.1. Итоги моделирования

В ходе анализа и моделирования модели системы перевернутого маятника на тележке и ее линеаризованной модели при небольших отклонениях от вертикального положения было показано, что линейная модель является хорошим приближением нелинейной модели в окрестности верхней точки равновесия, что позволяет использовать ее для дальнейшего синтеза. Можно, изменив способ задания угла отклонения, получить линейную модель, описывающую движение маятника в окрестности нижней точки равновесия, что может быть использовано для создания модели козлового крана.

Из-за того, что линеаризованная модель дает корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия, асимптотическое ее поведение сильно отличается от асимптотического поведения нелинейной модели, так же как в случае существенных отклонений от вертикального положения.

### 3. Модальное управление

#### 3.1. Модальный регулятор

Рассмотрим модальный регулятор вида  $u = Kx$ . Согласно (26), система является полностью управляемой. Таким образом, любой спектр замкнутой системы является достижимым. Выберем желаемый спектр для замкнутой регулятора системы  $\sigma_1 = [-2 -2 -3 -3]$ . Для реализации регулятора, обеспечивающего заданный спектр, воспользуемся уравнением Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (37)$$

где  $\Gamma$  – матрица с желаемым спектром.

Решим данное уравнение с помощью пакета **cvx** в MATLAB, в результате получаем матрицу регулятора  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} 360.14 & 600.24 & -6354.55 & -1212.24 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Проверим правильность полученного результата, вычислив собственные числа замкнутой системы  $A + BK$ :

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -2.00 \\ -2.00 \\ -3.00 \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Получены желаемые собственные числа, что подтверждает правильность полученного результата. Рассмотрим работу регулятора на линейной модели системы при отсутствии внешних возмущений и небольшом начальном отклонении от равновесного состояния ( $\theta_0 = 0.2$ ). Схема моделирования приведена на рисунке 9. Результаты моделирования приведены на рисунке 10.

Можно заметить, что система приходит в равновесное состояние. Теперь попробуем использовать этот же модальный регулятор на нелинейной модели системы. Схема

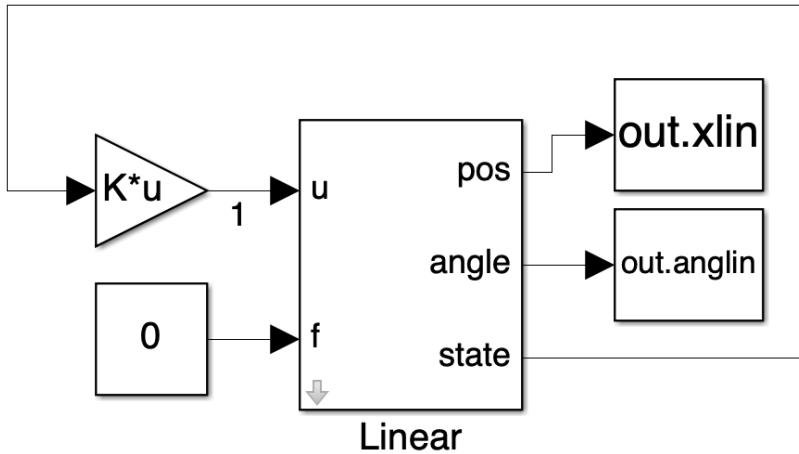


Рис. 9: Схема моделирования линейной модели системы с модальным регулятором

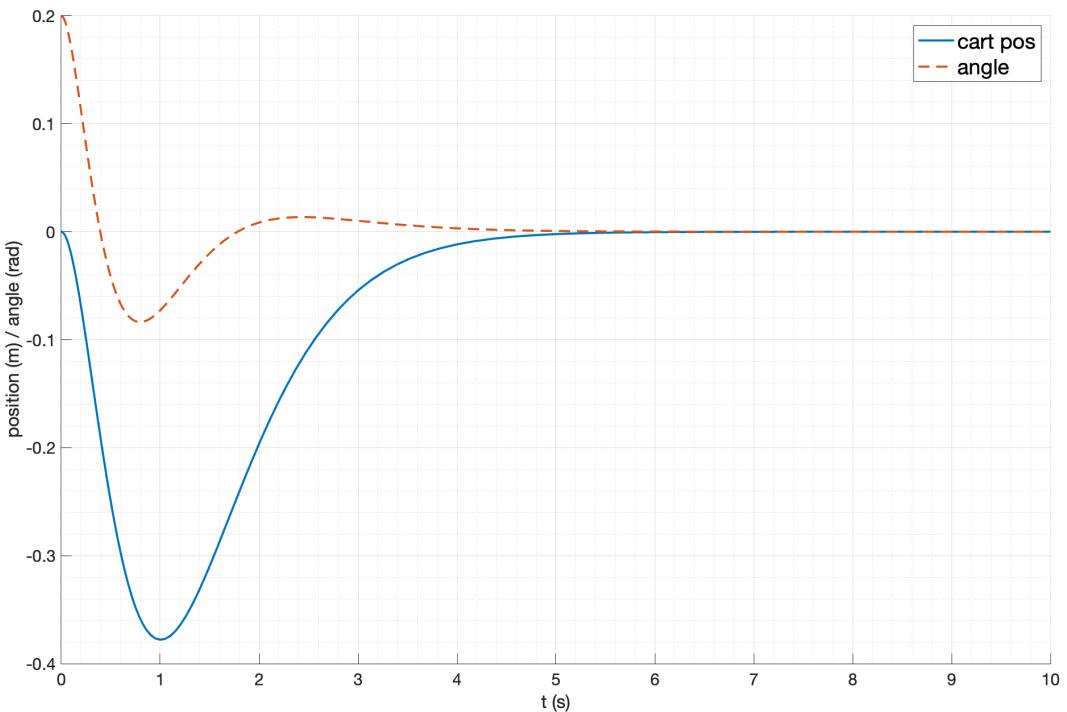


Рис. 10: Результаты моделирования линейной модели системы с модальным регулятором

моделирования приведена на рисунке 11. Результаты моделирования приведены на рисунке 12.

Рассмотрим различия между движением линейной и нелинейной модели системы. График различий в движении представлен на рисунке 13. Видно, что различие между углом отклонения маятника не превышает  $10^{-3}$  радиан, а различие между координатами тележки не превышает  $8 \cdot 10^{-3}$  метра. Данный результат можно считать удовлетворительным, регулятор, синтезированный для линейной модели системы, обеспечивает приемлемое качество управления нелинейной модели системы.

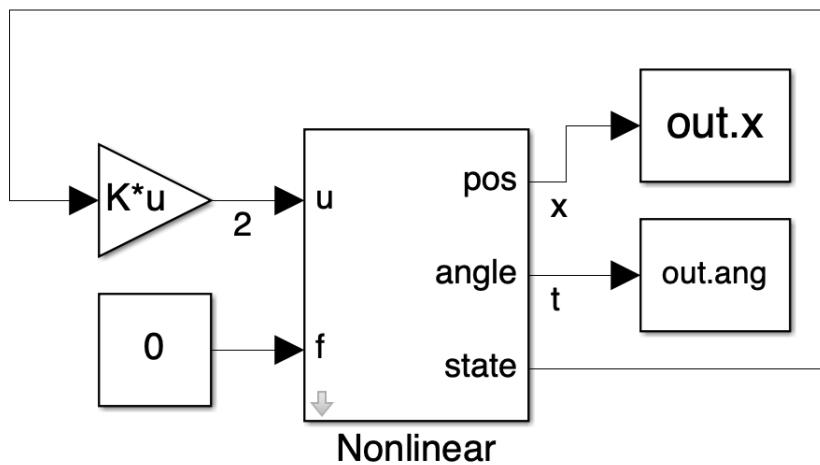


Рис. 11: Схема моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором

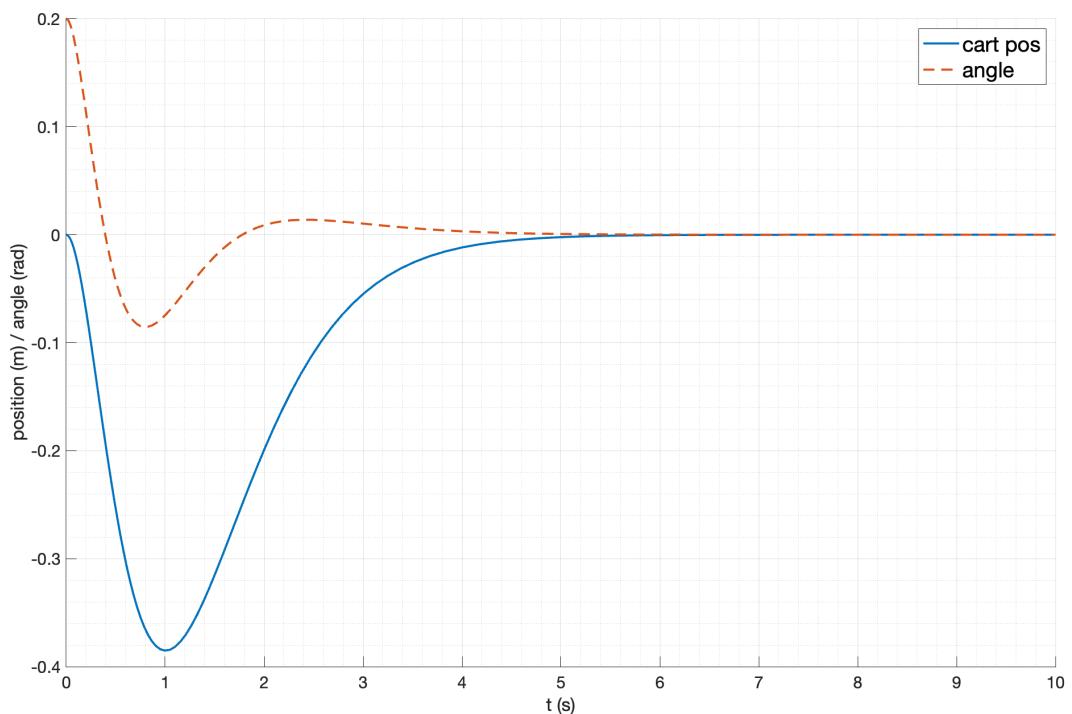


Рис. 12: Результаты моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором

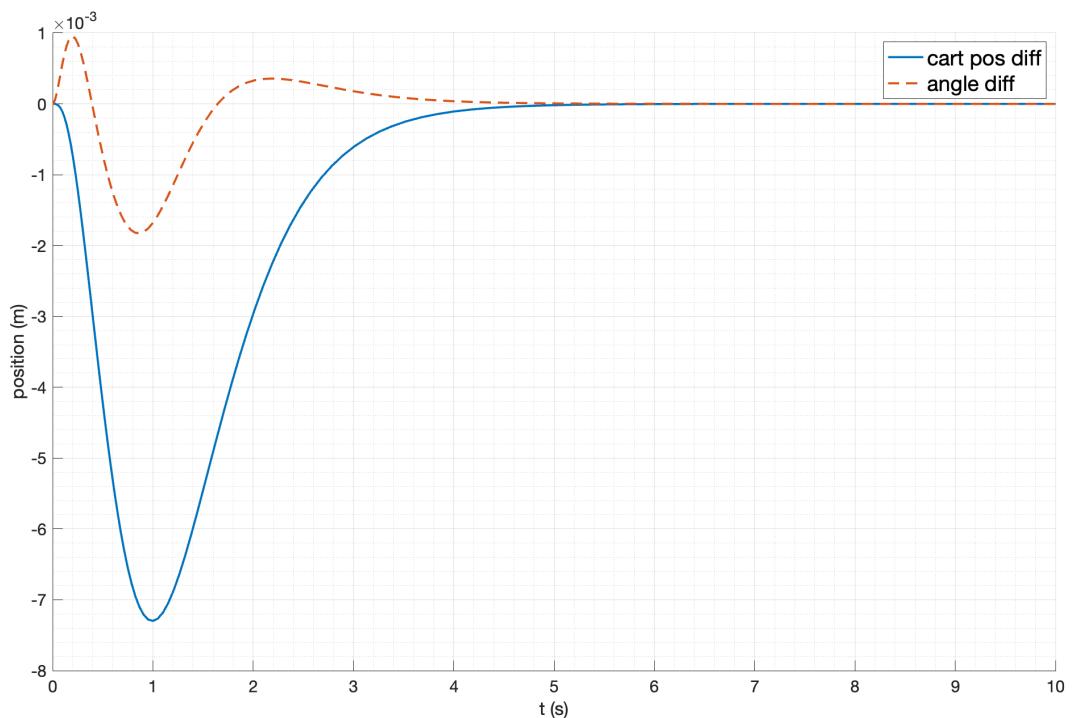


Рис. 13: Различия в движении линейной и нелинейной модели системы с модальным регулятором

### 3.2. Исследование устойчивости при различных начальных условиях

Проверим работу данного регулятора при различных начальных условиях. В качестве начальных условий возьмем различные начальные углы отклонения маятника  $\theta_0 \in [0.3, 0.7, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2]$ . Результаты моделирования приведены на рисунке 14. Видно, что

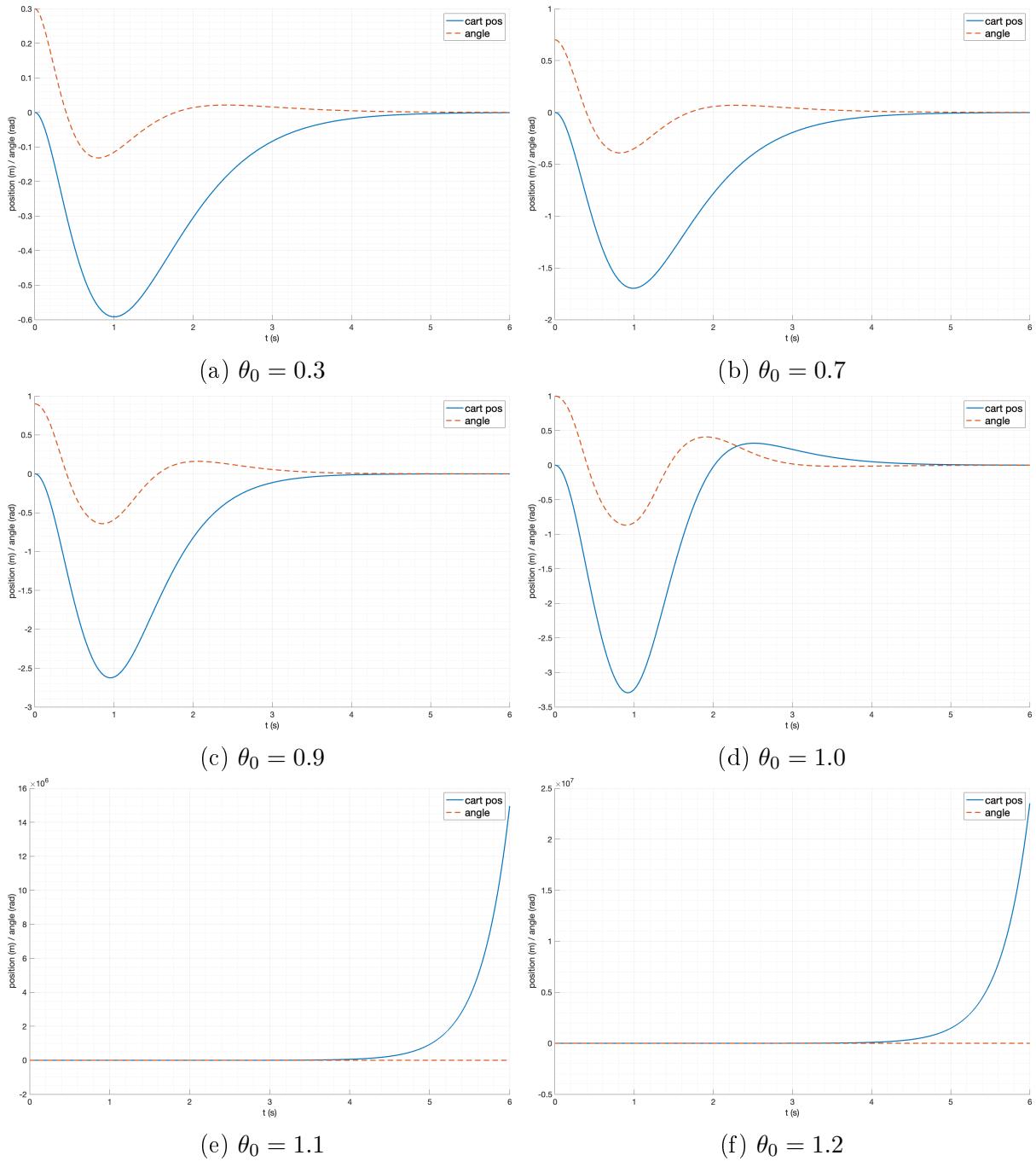


Рис. 14: Модальное управление нелинейной модели системы

при начальном угле отклонения маятника вплоть до  $\theta_0 = 1.0$  система приходит в равновесное состояние. При этом время переходного процесса остается приблизительно одинаковым. При дальнейшем увеличении угла начального отклонения маятника система не приходит

в равновесное состояние, это связано с тем, что при больших отклонениях маятника от вертикального положения линейная модель, на основе которой был синтезирован регулятор, перестает адекватно описывать поведение системы. Убедиться в этом можно посмотрев на график поведения линейной модели системы при начальном угле отклонения  $\theta_0 = 1.2$  (рисунок 15). Видно, что линейная модель система приходит в равновесное состояния, в

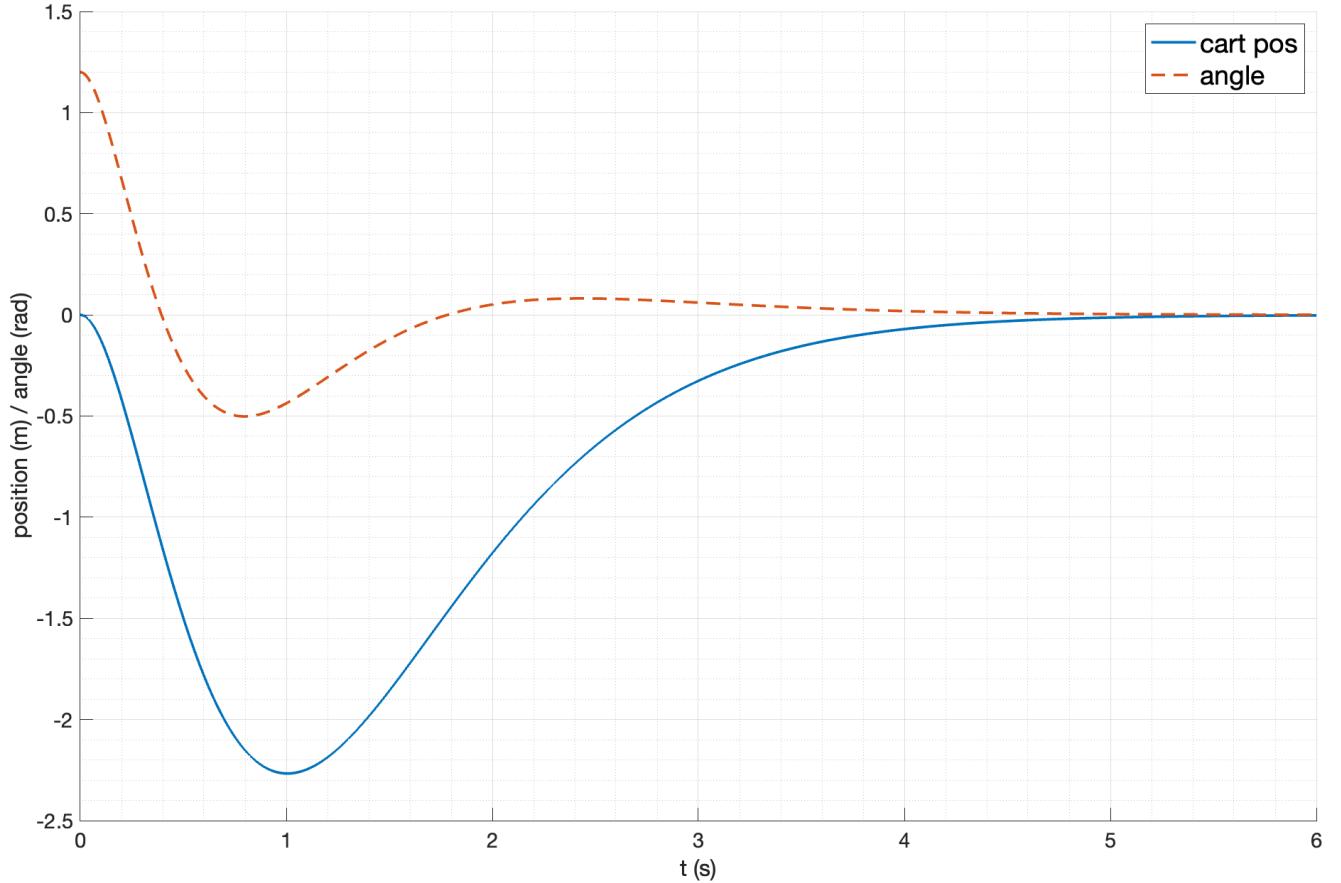


Рис. 15: Результаты моделирования линейной модели системы с модальным регулятором при  $\theta_0 = 1.2$

отличие от нелинейной модели.

### 3.3. Исследование переходного процесса

Будем рассматривать переходный процесс и управляющее воздействие при различных собственных числах замкнутой регулятором системы. В качестве начальных условий возьмем  $\theta_0 = 0.3$ . Для начала, рассмотрим регуляторы, обеспечивающие спектр замкнутой системы вида  $\sigma_k = [k \ k \ k \ k]$ , где  $k \in [-4, -6, -8, -10]$ . Результаты моделирования приведены на рисунках 16 – 23.

Можно заметить, что при увеличении модуля собственных чисел замкнутой системы,

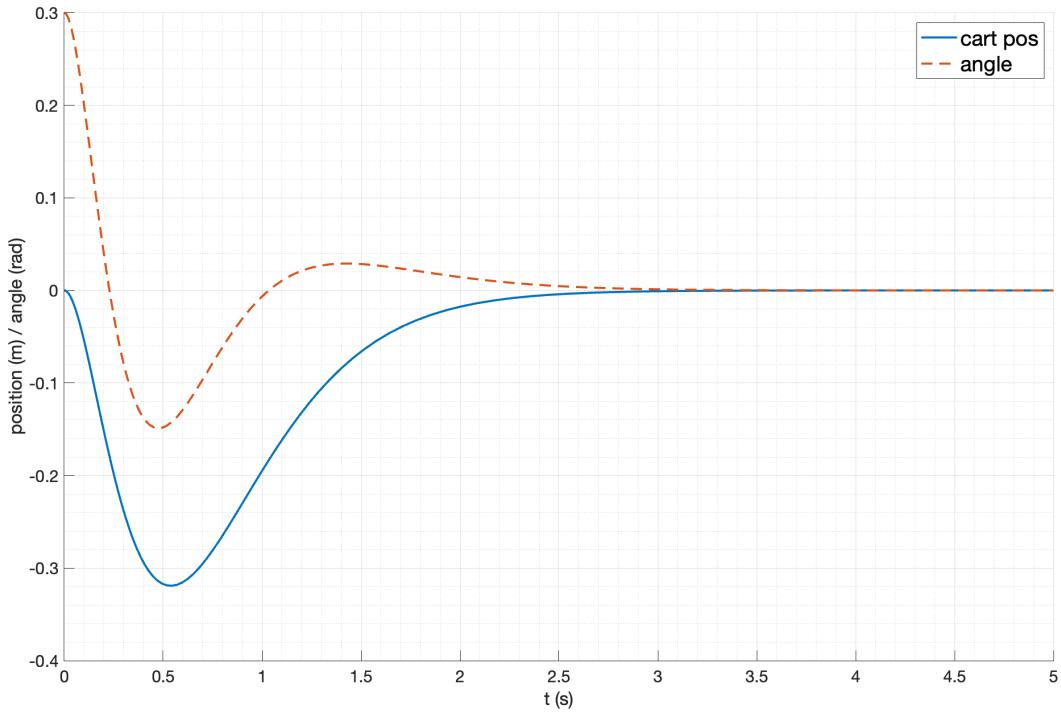


Рис. 16: Результаты моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -4$

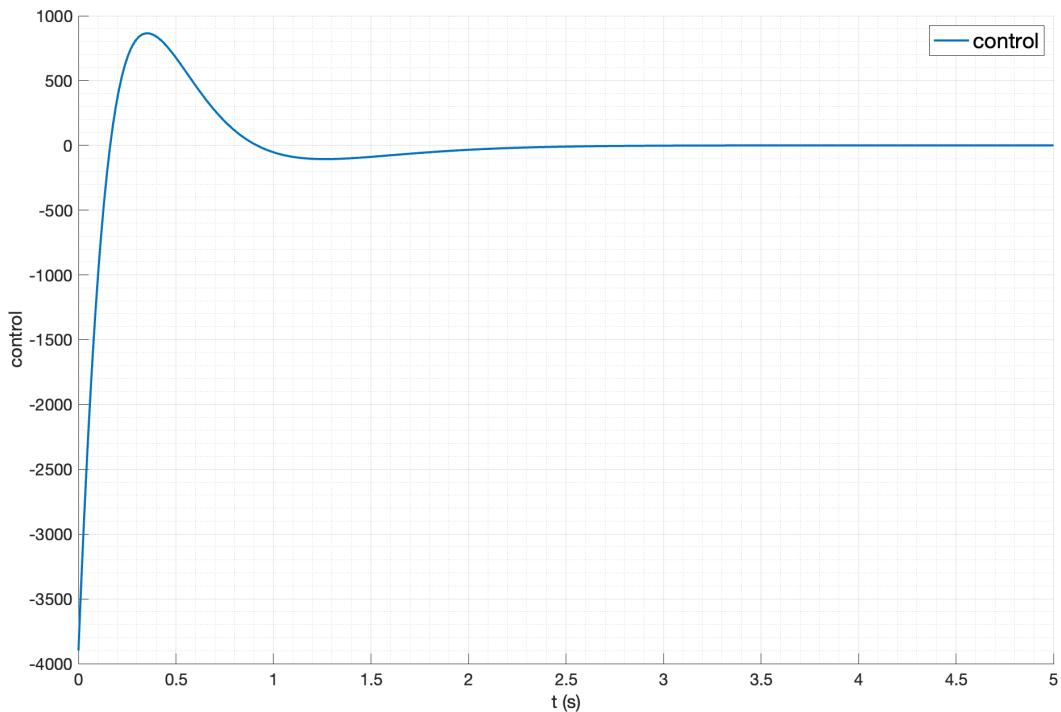


Рис. 17: Управляющее воздействие нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -4$

время переходного процесса сокращается, а перегулирование отклонения маятника увеличивается, максимальный модуль управляющего воздействия тоже увеличивается с увеличением модуля собственных чисел. Численные результаты сравнения приведены в таблице 1.

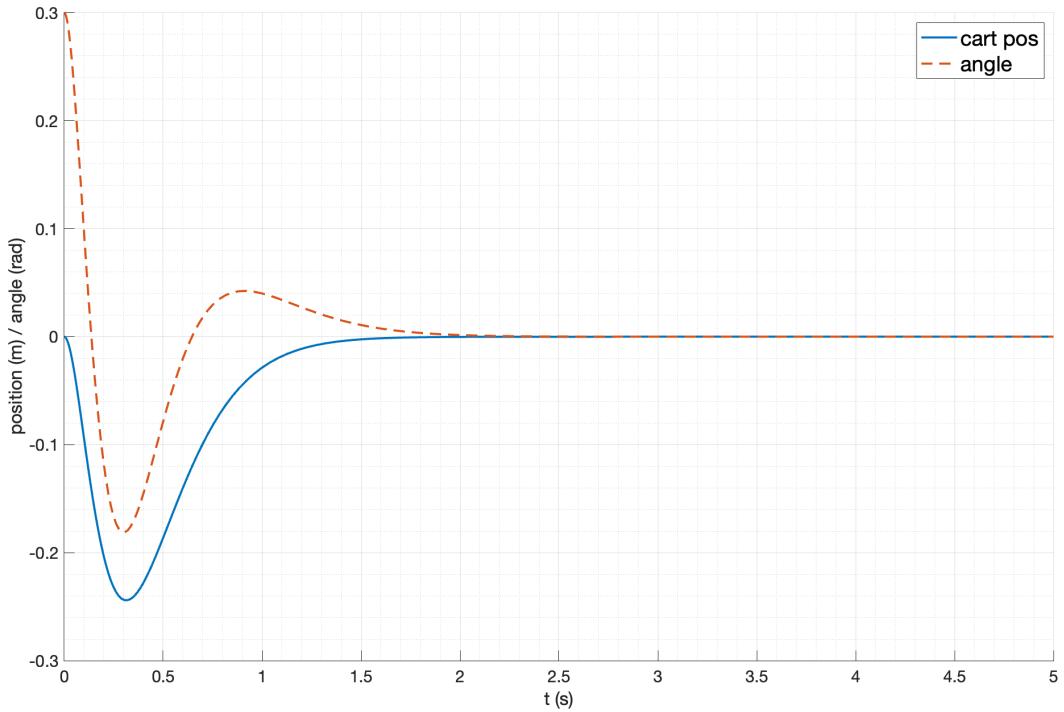


Рис. 18: Результаты моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -6$

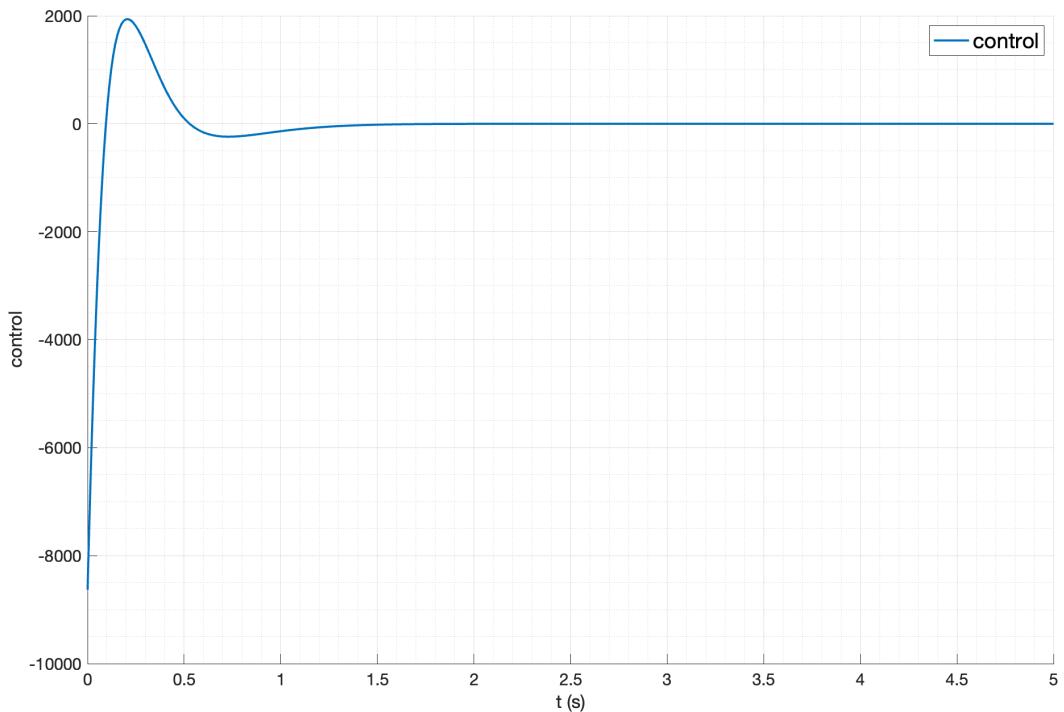


Рис. 19: Управляющее воздействие нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -6$

Можно заметить, что перегулирование координаты тележки остается практически одинаковым, что связано с тем, что угол маятника зависит от скорости и ускорения тележки, а не от ее положения.

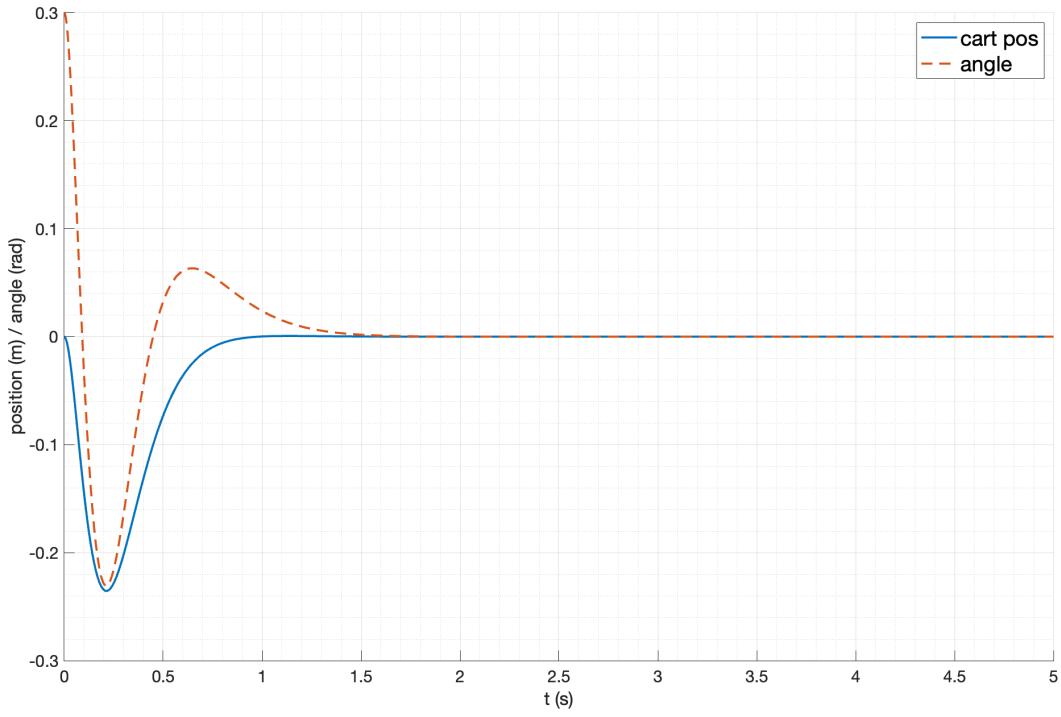


Рис. 20: Результаты моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -8$

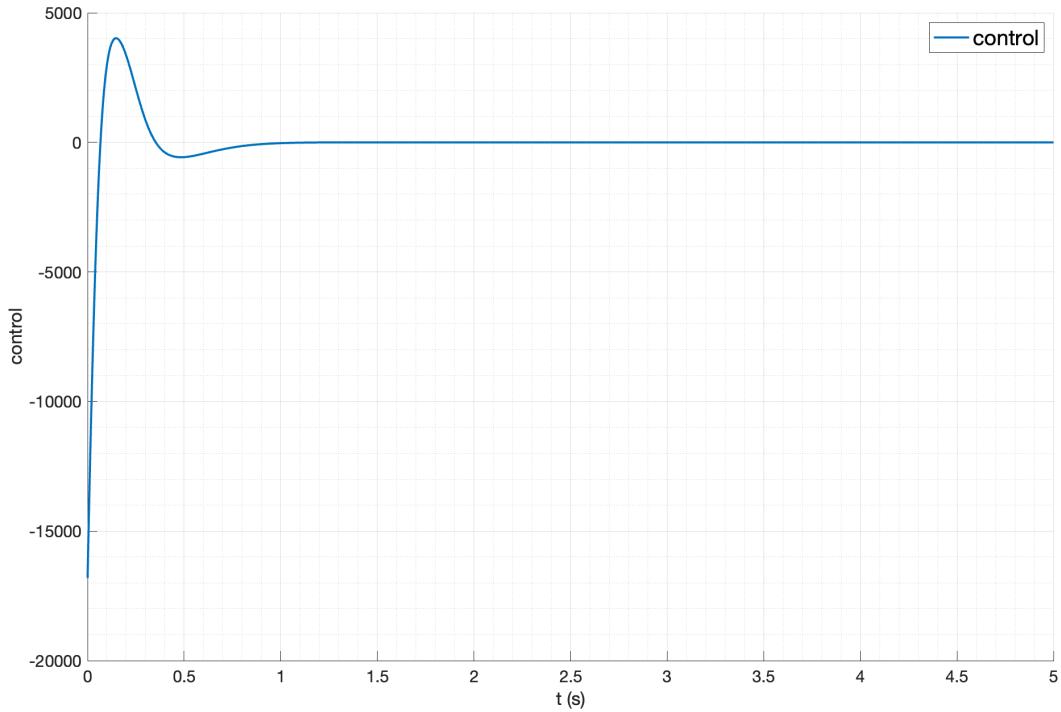


Рис. 21: Управляющее воздействие нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -8$

$k$	$t_{\text{set}}$ , с	$M_\theta$	$M_x$	$\max  u $
-4	3.1	0.15	0.32	3800
-6	2.2	0.18	0.24	9100
-8	1.6	0.23	0.24	17000
-10	1.4	0.3	0.25	30000

Таблица 1: Сравнение регуляторов с различными собственными числами замкнутой системы

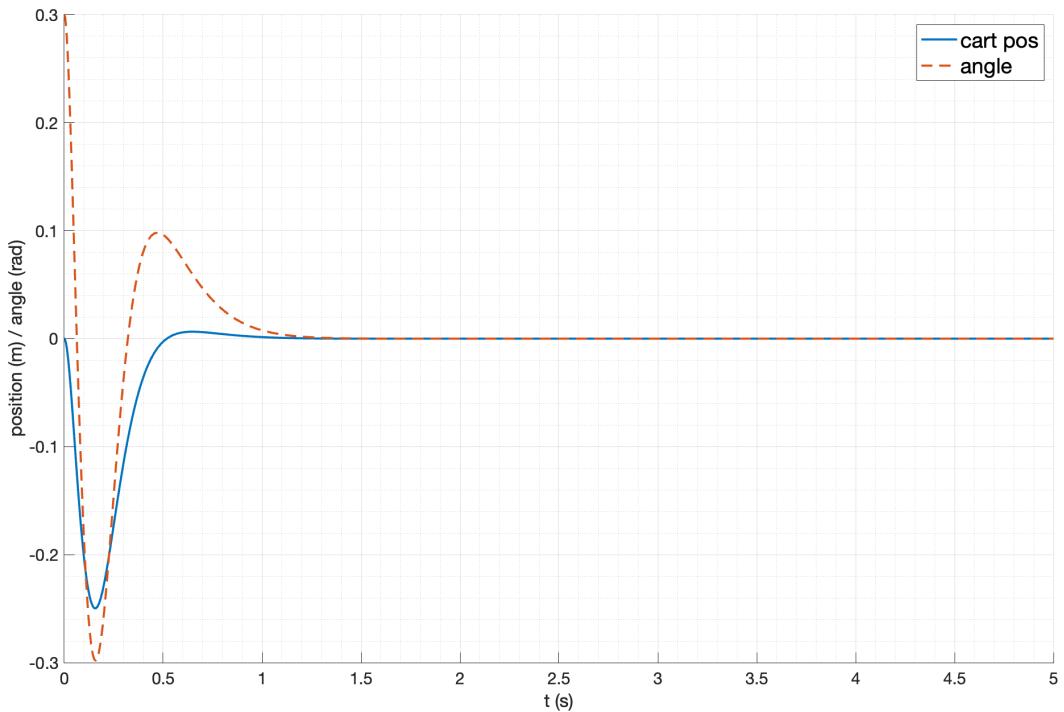


Рис. 22: Результаты моделирования нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -10$

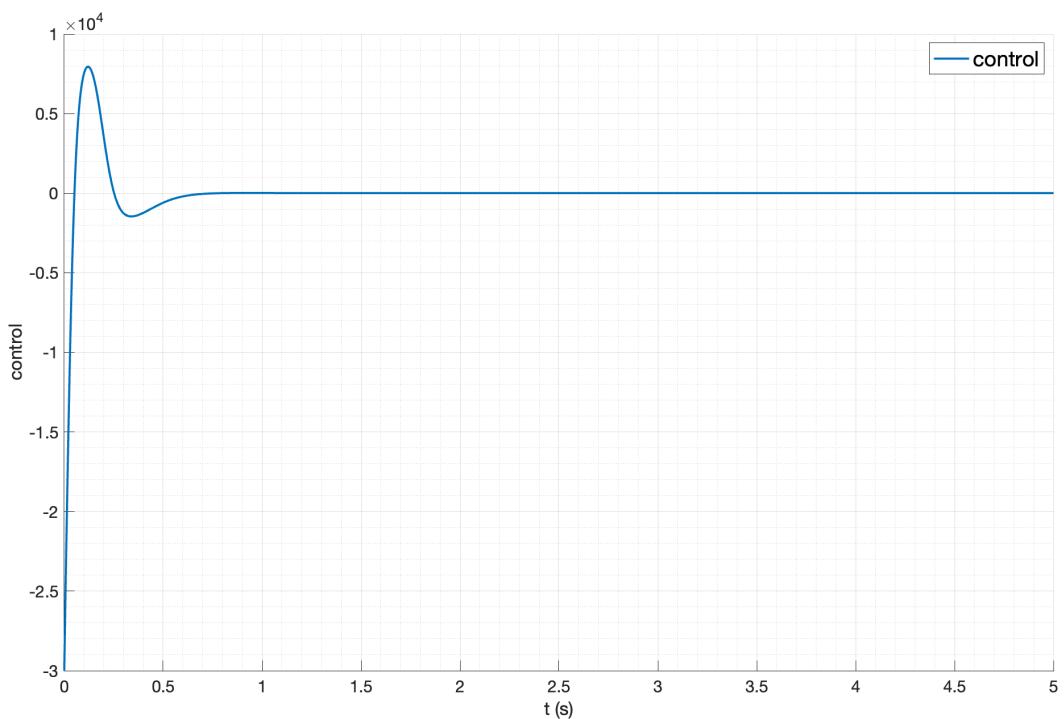


Рис. 23: Управляющее воздействие нелинейной модели системы с модальным регулятором при  $k = -10$

Дополнительно посмотрим на случай замкнутой системы, имеющей спектр  $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$  и сравним ее с системой, имеющей спектр  $\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ , рассмотренной на рисунке 16. Графики результатов моделирования приведены на рисунке 24 – 25. Видно, что

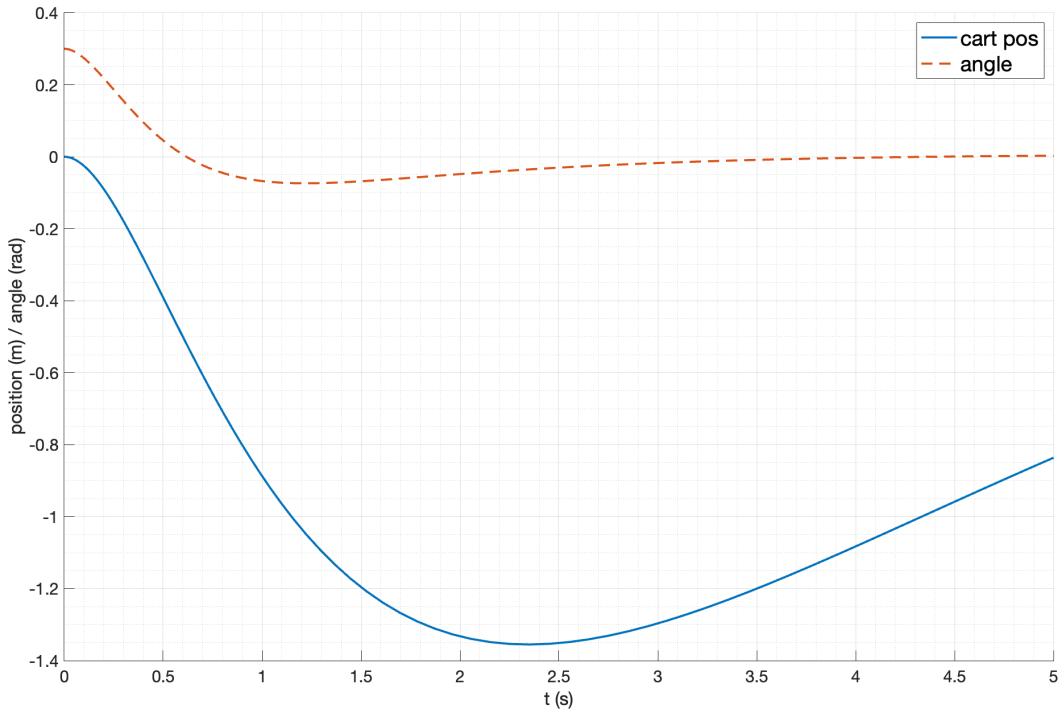


Рис. 24: Результаты моделирования нелинейной модели системы со спектром  $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

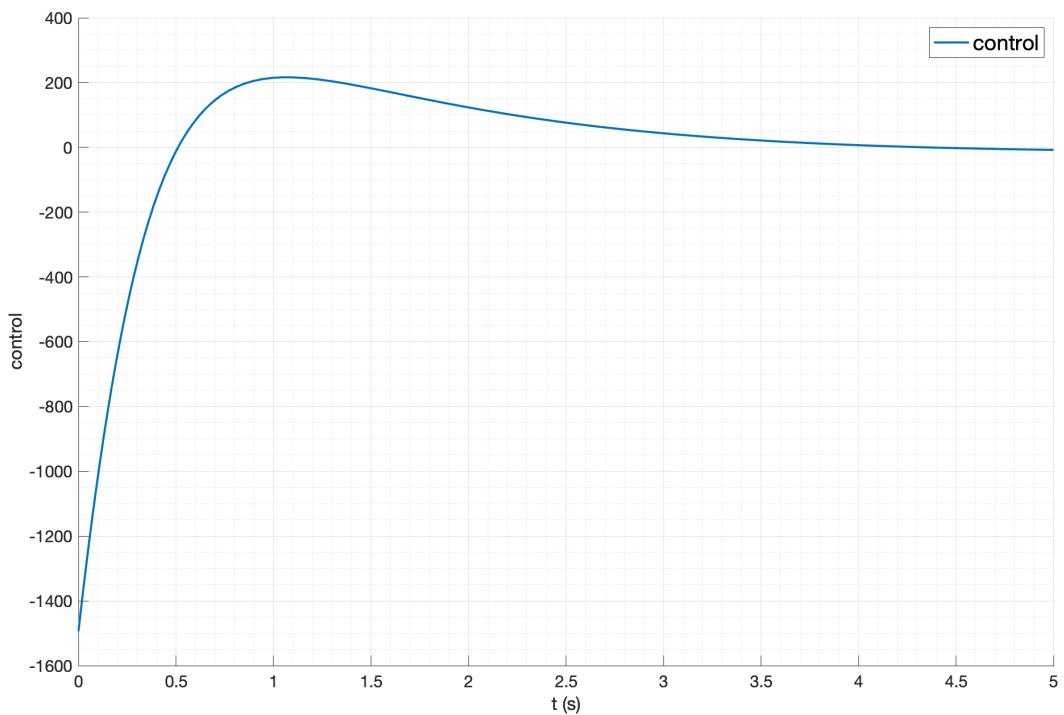


Рис. 25: Управляющее воздействие нелинейной модели системы со спектром  $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

при уменьшении первых двух собственных чисел замкнутой системы, время переходного

процесса для координаты тележки сильно увеличивается, а для угла отклонения маятника практически не меняется, при этом управление тоже становится меньше. При уменьшении первых двух собственных чисел произошло влияние на первые два собственные вектора системы (24), которые, в свою очередь, влияют на линейное положение тележки, но не на угол отклонения маятника. Таким образом, можно сделать вывод, что с использованием модального управления можно влиять на динамику системы *по отдельности*, изменяя собственные числа для каждого из собственных векторов.

### 3.4. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим наблюдатель полного порядка, основанный на линейной модели системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (40)$$

где  $L$  – матрица коррекции наблюдателя.

Для синтеза наблюдателя воспользуемся уравнением Сильвестра, решение которого будем находить с помощью пакета **cvx** в MATLAB.

$$\begin{cases} \Gamma Q - QA = YC \\ L = QY^{-1} \end{cases} \quad (41)$$

где  $\Gamma$  – матрица с желаемыми собственными числами.

Синтезируем наблюдатель с желаемым спектром  $\{-3, -3, -3, -3\}$ . Решим уравнение Сильвестра с помощью пакета **cvx** в MATLAB, в результате получаем матрицу наблюдателя  $L$ :

$$L = \begin{bmatrix} 3.91 & 3.91 \\ 2.07 & 2.07 \\ -15.91 & -15.91 \\ -82.41 & -82.41 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Проверим правильность полученного результата, вычислив собственные числа замкнутой

системы  $A + LC$ :

$$\sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} -3.00 \\ -3.00 \\ -3.00 \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Проверим полученный наблюдатель, сравнив его выход с реальным состоянием нелинейной системы. В качестве регулятора выберем регулятор со спектром  $[-6 \ -6 \ -6 \ -6]$ , рассмотренный ранее. В качестве начальных условий возьмем  $\theta_0 = 0.3$  для системы и  $\hat{X}_0 = 0$  для наблюдателя.

Схема наблюдателя приведена на рисунке 26. Схема включения наблюдателя в систему показана на рисунке 27.

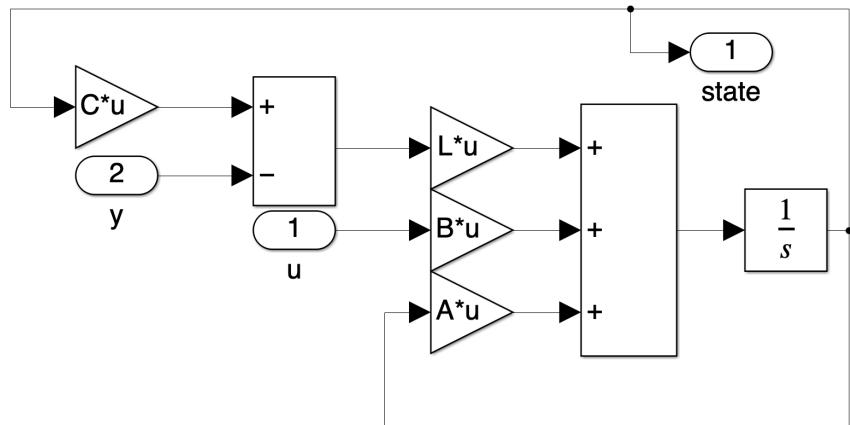


Рис. 26: Схема наблюдателя

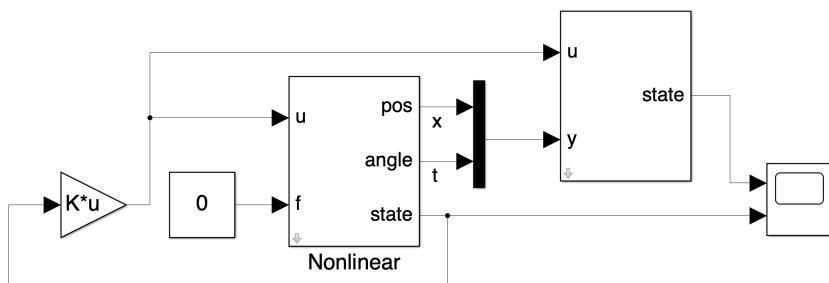


Рис. 27: Схема включения наблюдателя в систему

Результаты моделирования приведены на рисунке 28 и рисунках 29.

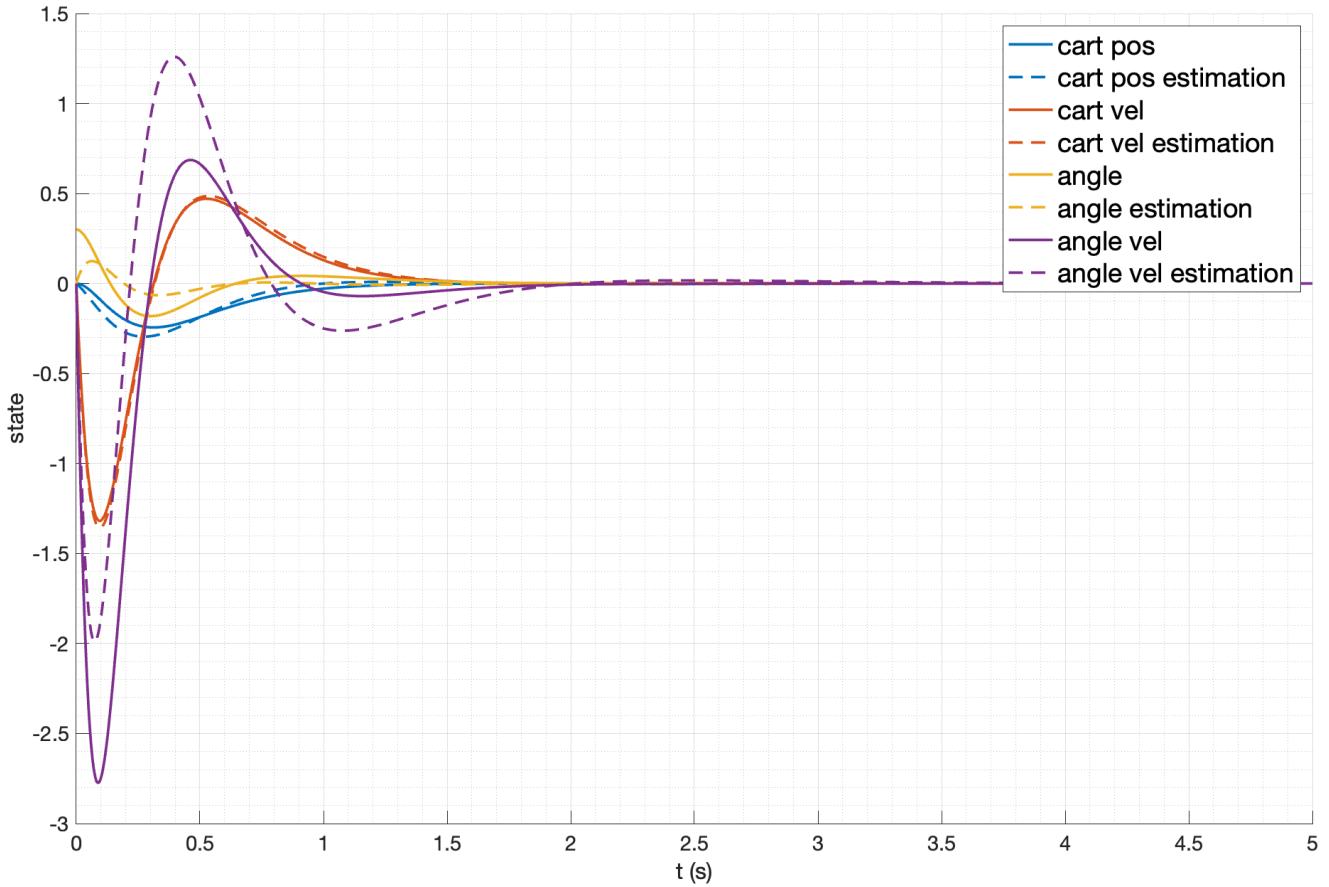


Рис. 28: Результаты моделирования наблюдателя полного порядка

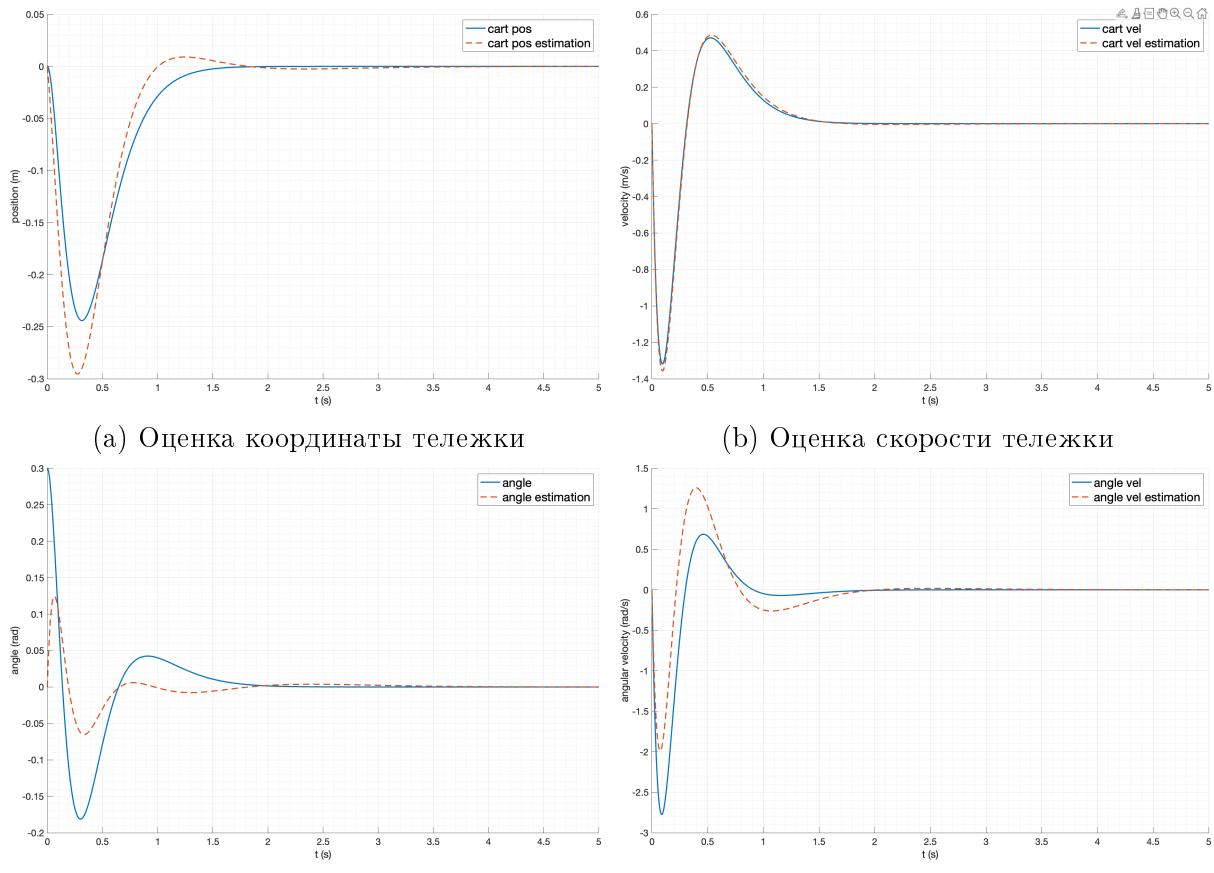


Рис. 29: Сравнение оценок состояния системы с реальным состоянием

Можно увидеть, что оценка состояния нелинейной системы наблюдателем полного порядка сходится к реальному состоянию системы, при этом время переходного процесса составляет около 2 секунд. График ошибки оценки состояния системы приведен на рисунке 30.

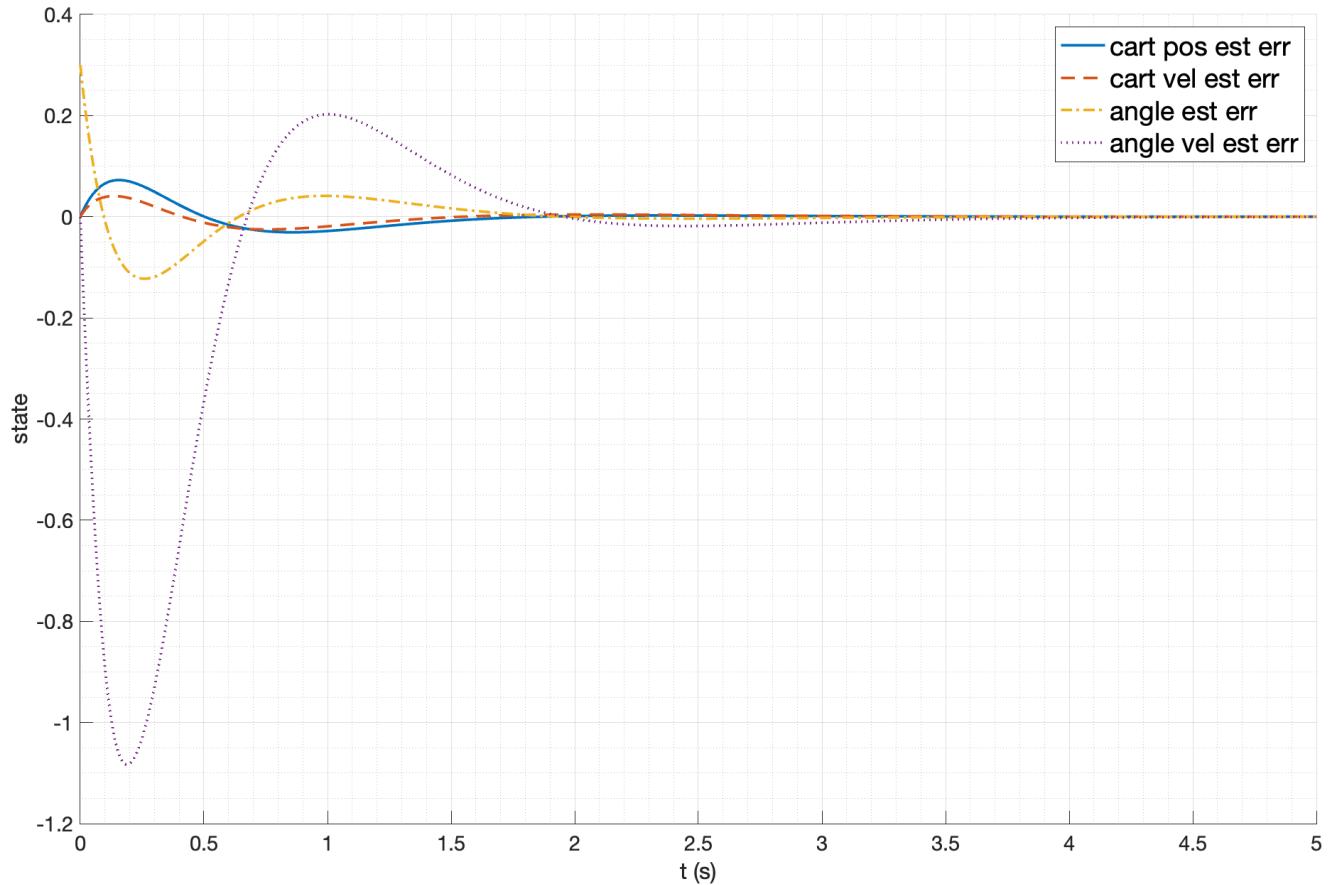


Рис. 30: Ошибка оценки состояния системы наблюдателем полного порядка

Теперь посмотрим на работу наблюдателя полного порядка с более большим по модулю спектром, например,  $\begin{bmatrix} -10 & -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$ . Результаты моделирования приведены на рисунке 31 и 32.

График ошибки оценки состояния системы приведен на рисунке 33.

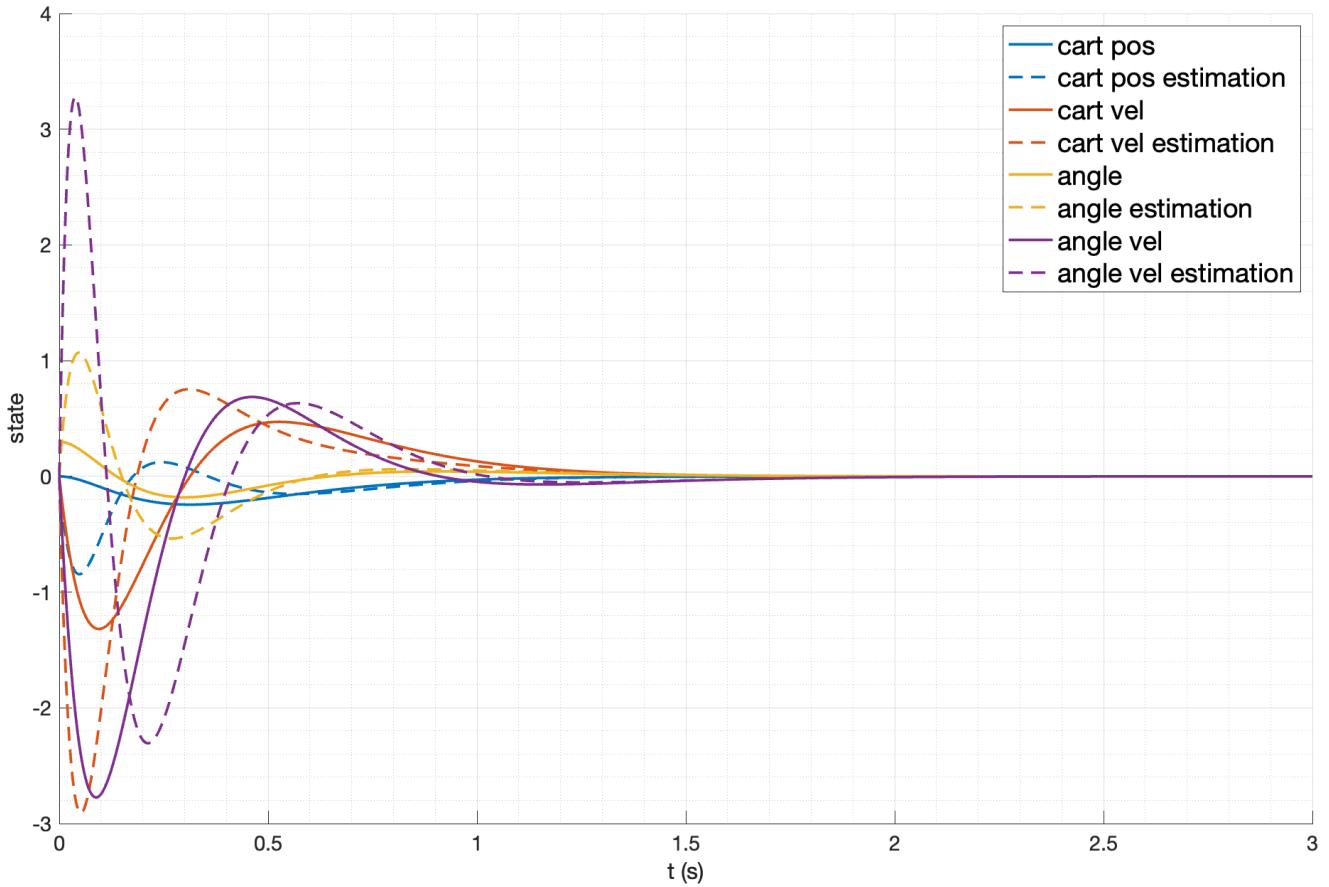


Рис. 31: Результаты моделирования наблюдателя полного порядка

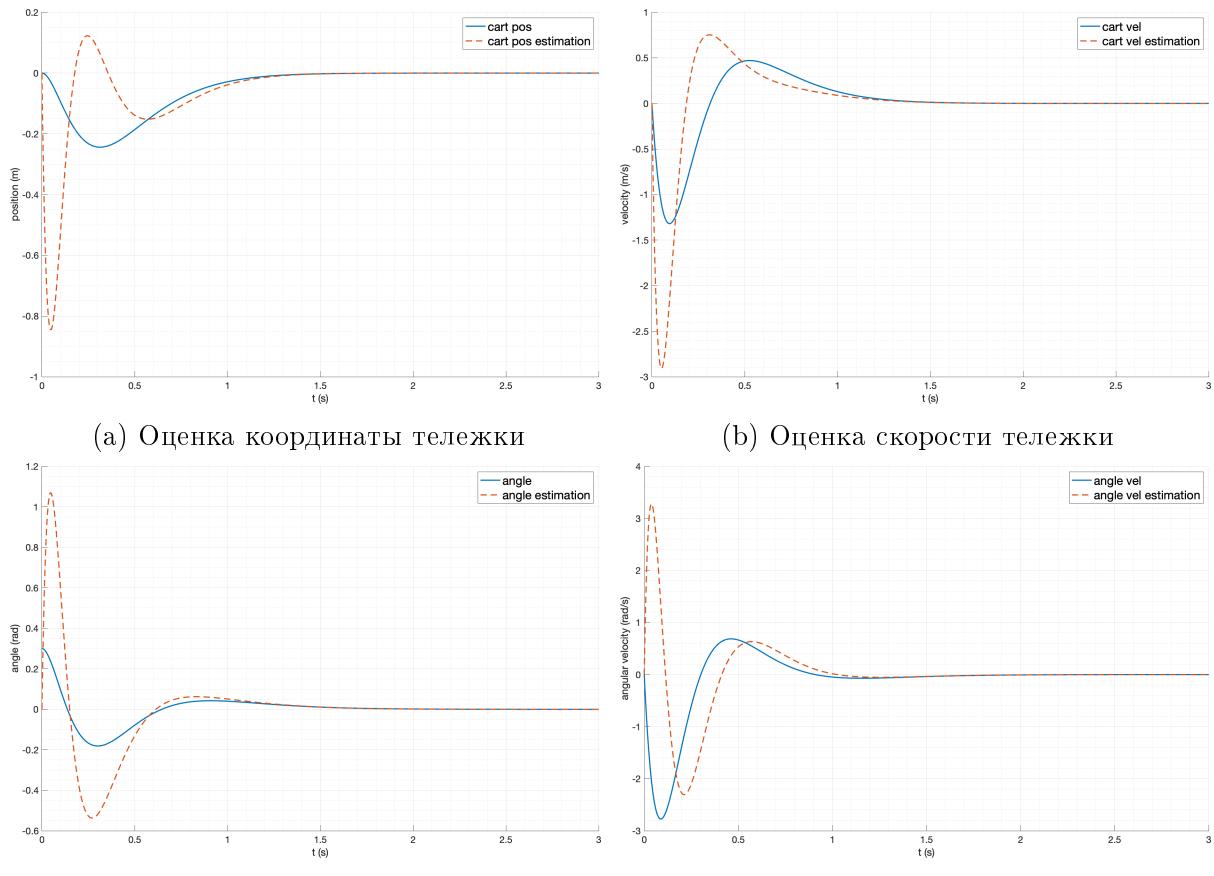


Рис. 32: Сравнение оценок состояния системы с реальным состоянием при  $k = -10$

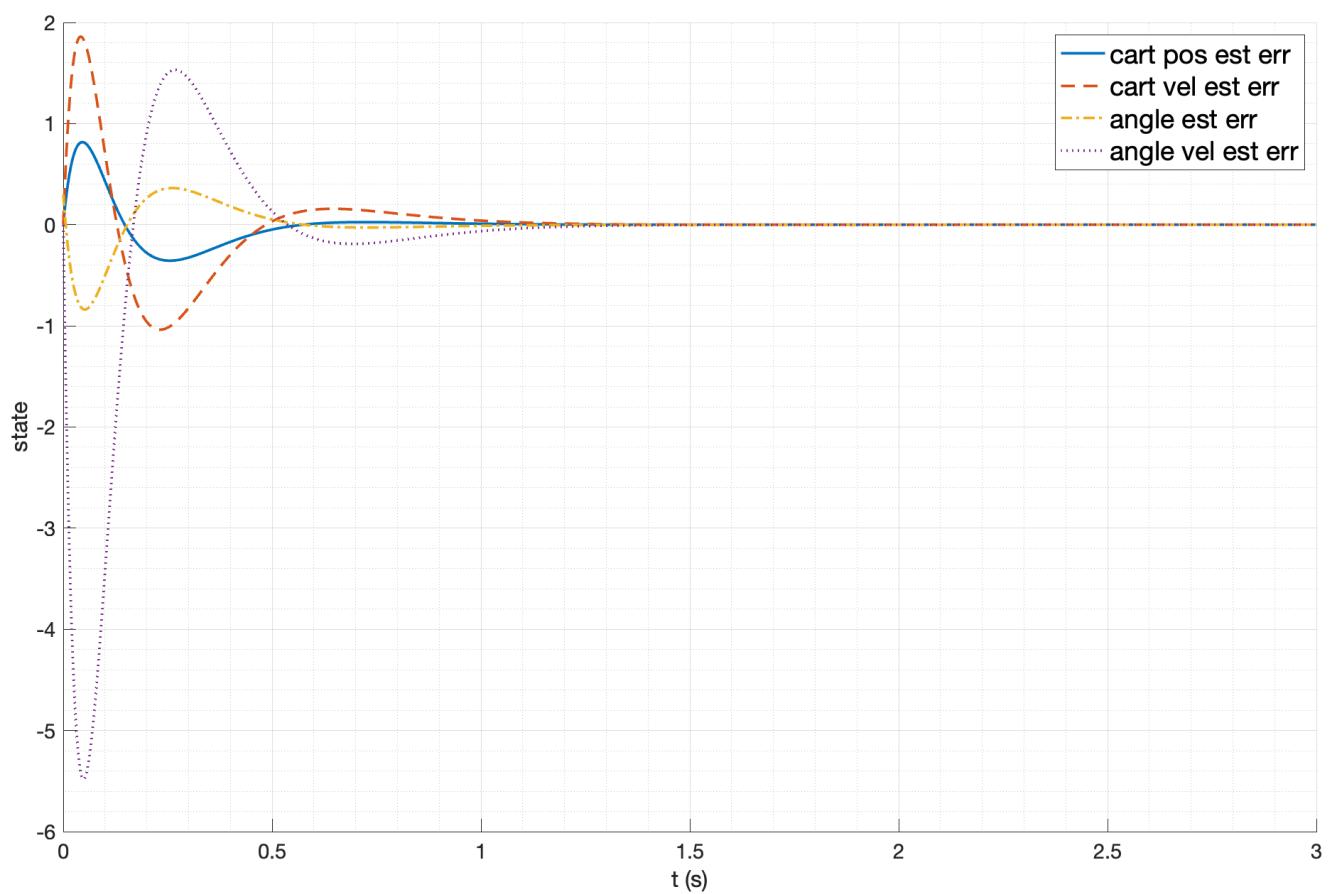


Рис. 33: Ошибка оценки состояния системы наблюдателем полного порядка

Видно, что теперь время переходного процесса составляет около 1 секунды, что меньше, чем в случае наблюдателя с меньшими по модулю собственными числами.

При этом можно заметить, что начальная ошибка оценки состояния системы увеличилась, особенно сильно это заметно для оценки угловой скорости маятника. Это может негативно сказать на работе регулятора, замкнутого по наблюдаемому состоянию.

### 3.5. Наблюдатель пониженного порядка

Так как два значения из вектора состояния являются измеримыми, то можно использовать наблюдатель пониженного порядка, который будет оценивать только два оставшихся, неизмеримых состояния системы, которыми являются скорость тележки и угловая скорость маятника.

Рассмотрим наблюдатель пониженного порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= \Gamma \hat{z} - Y y + Q B u \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{44}$$

Зададим желаемый спектр наблюдателя пониженного порядка  $\{-4, -5\}$ .

Тогда матрица  $Q$  находится из решения уравнения Сильвестра:

$$\Gamma Q - QA = YC\tag{45}$$

где  $\Gamma$  – матрица с желаемыми собственными числами. Решим уравнение Сильвестра с помощью пакета **cvx** в MATLAB, в результате получаем матрицу наблюдателя  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.06 & 0.01 & -0.00 \\ -0.20 & 0.04 & 0.05 & -0.01 \end{bmatrix}\tag{46}$$

Схема наблюдателя пониженного порядка приведена на рисунке 34.

Схема включения наблюдателя в систему аналогичная схеме включения наблюдателя полного порядка, которая приведена на рисунке 27.

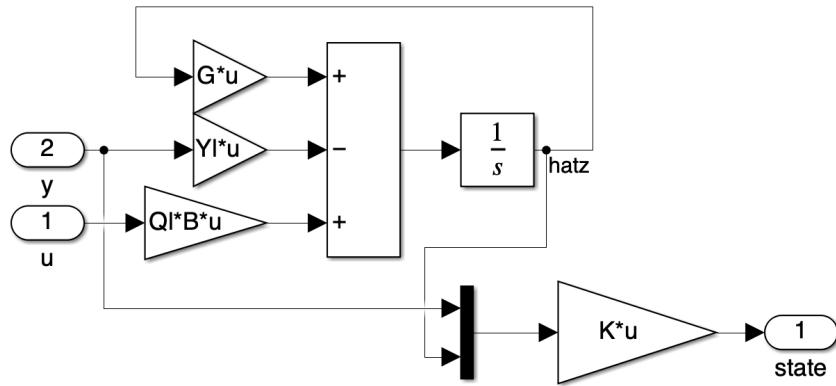


Рис. 34: Схема наблюдателя пониженного порядка

Проверим работу наблюдателя пониженного порядка, сравнив его выход с реальным состоянием нелинейной системы. Результаты моделирования приведены на рисунке 35 и рисунках 36.

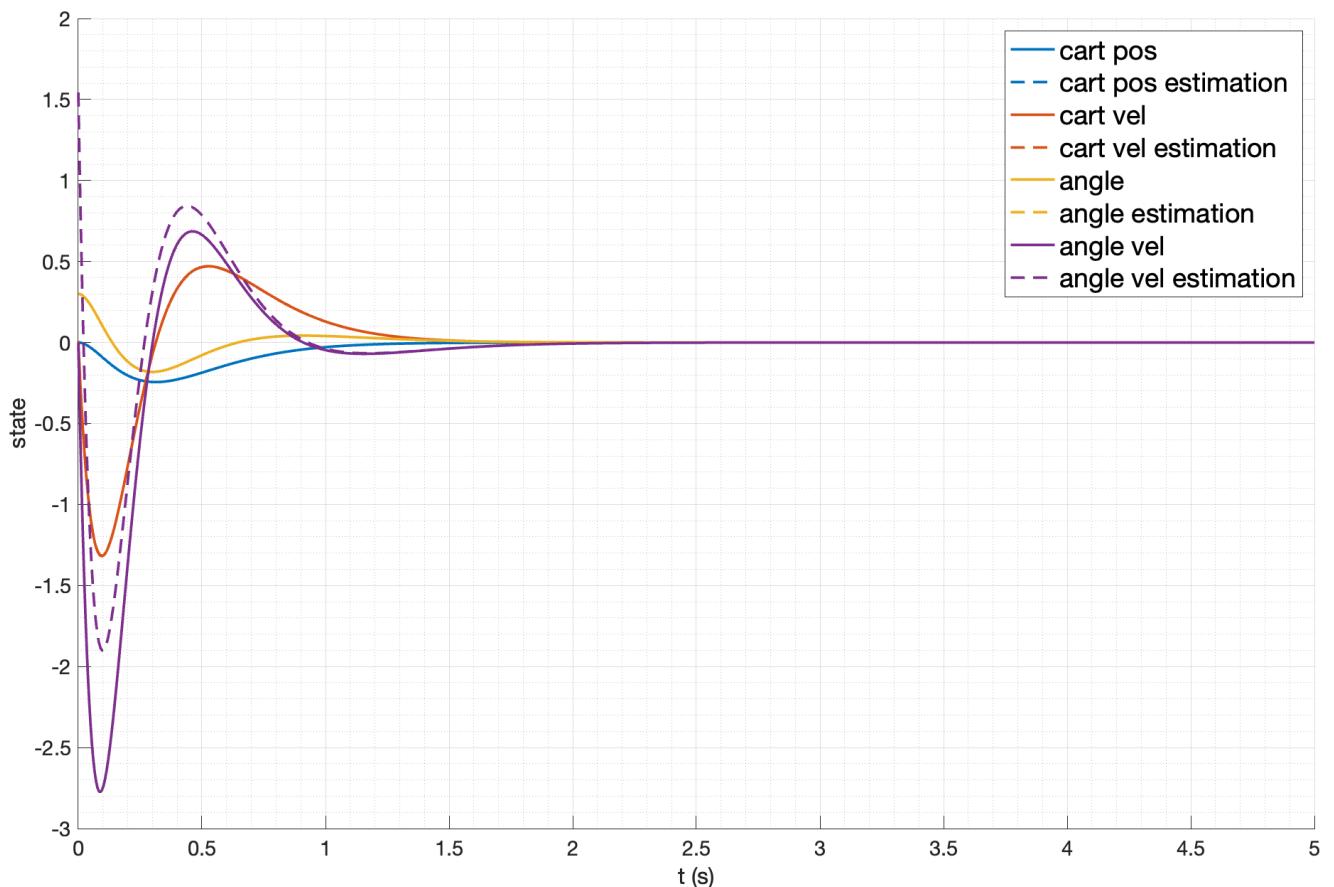


Рис. 35: Результаты моделирования наблюдателя пониженного порядка

Ошибка оценки состояния системы приведена на рисунке 37.

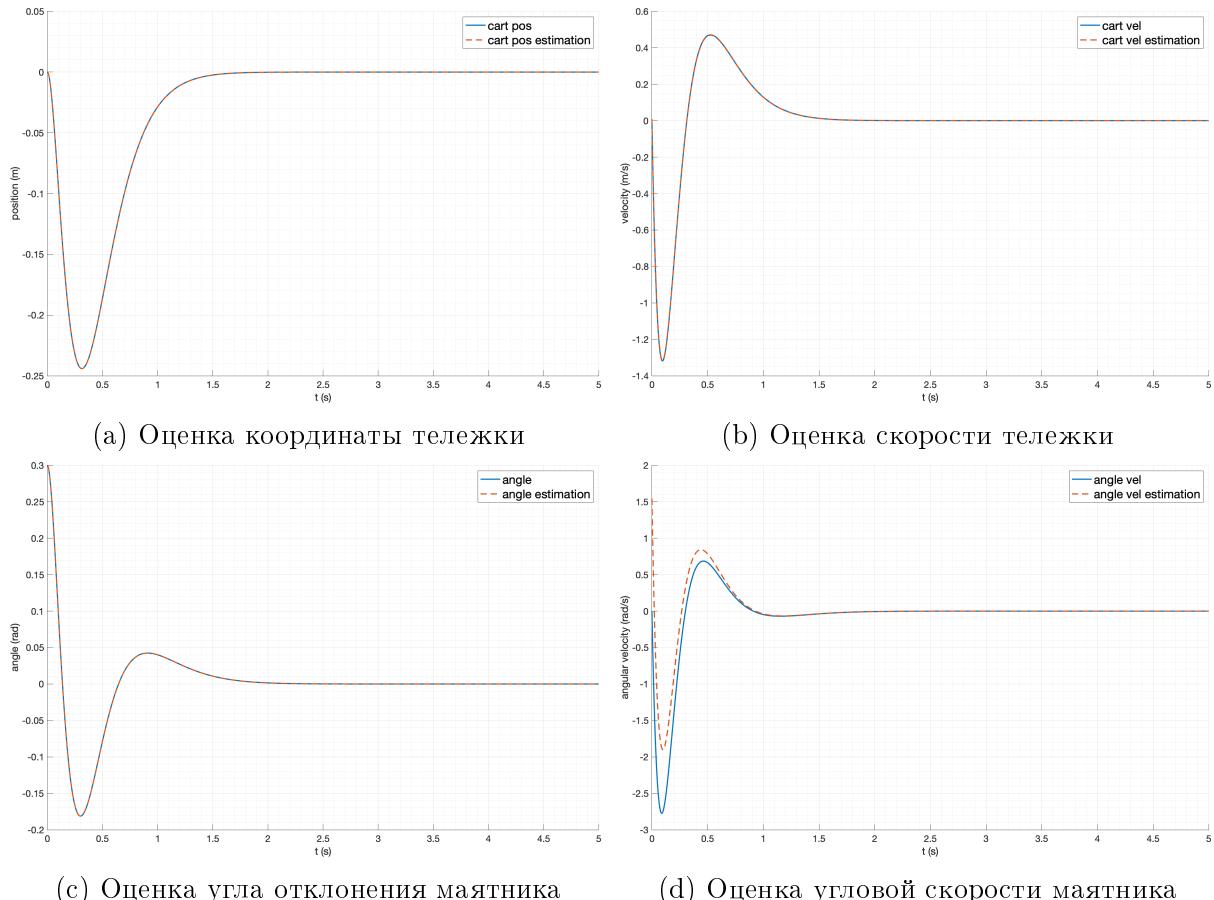


Рис. 36: Сравнение оценок состояния системы с реальным состоянием наблюдателем пониженного порядка

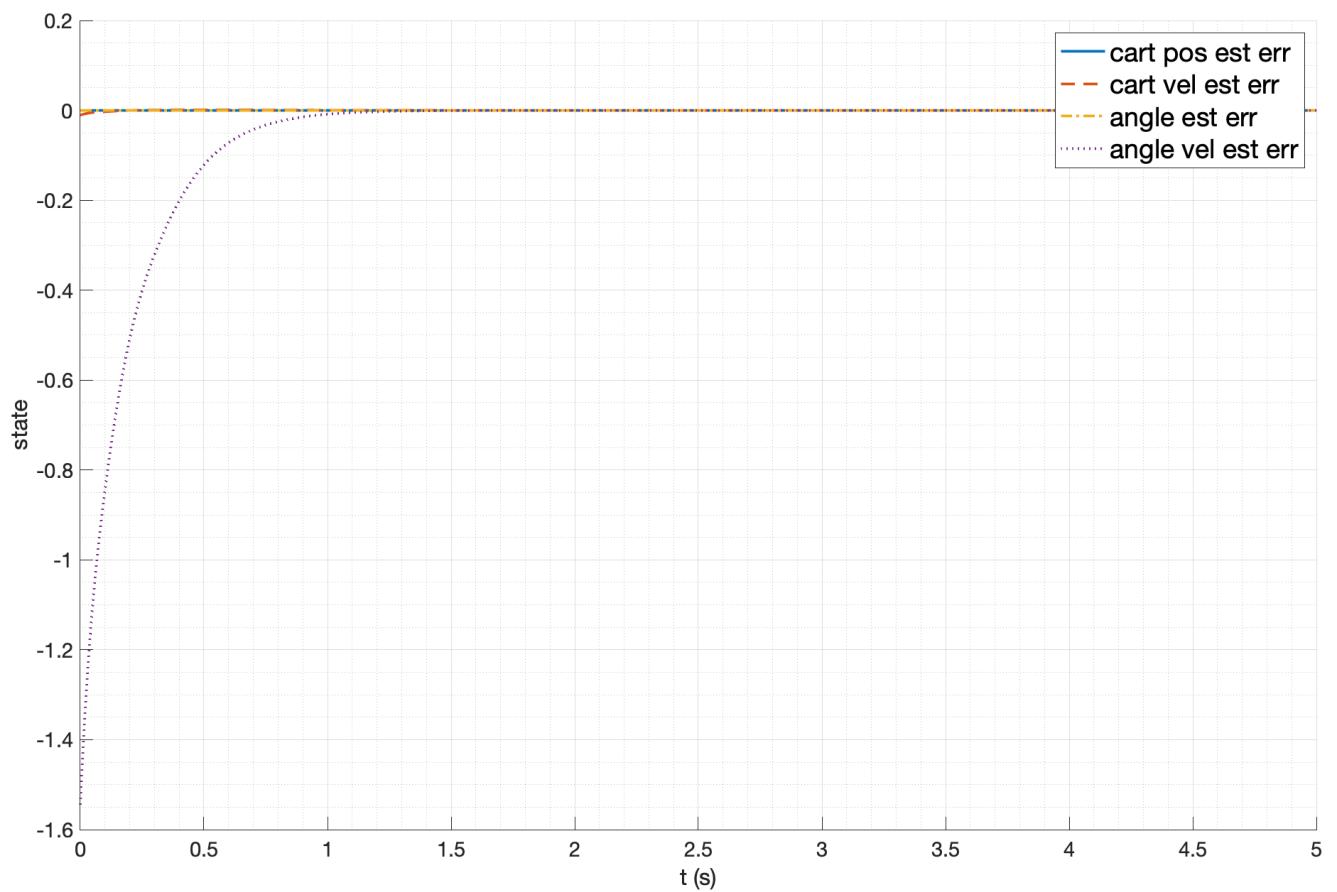


Рис. 37: Ошибка оценки состояния системы наблюдателем пониженного порядка

Видно, что оценка состояния нелинейной системы наблюдателем пониженного порядка не отличается от реального состояния системы для координаты тележки и угла отклонения маятника, так как они являются напрямую измеримыми. При этом оценка скорости тележки и угловой скорости маятника тоже сходится к реальным значениям. Время переходного процесса составляет около 1 секунды.

Рассмотрим наблюдатель пониженного порядка с желаемым спектром  $\{-1, -1\}$ . Результаты моделирования приведены на рисунке 38 и рисунках 39. График ошибки оценки

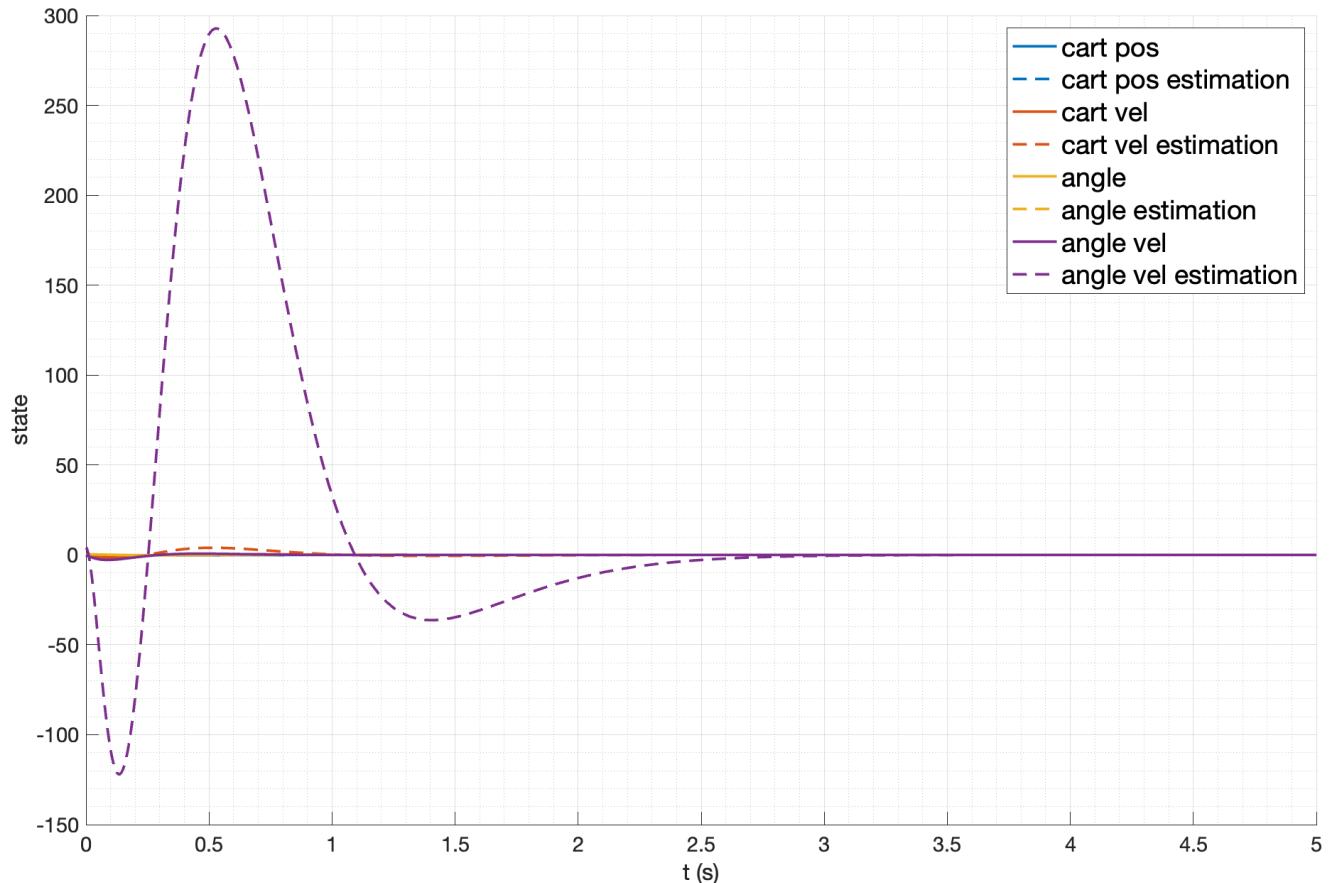
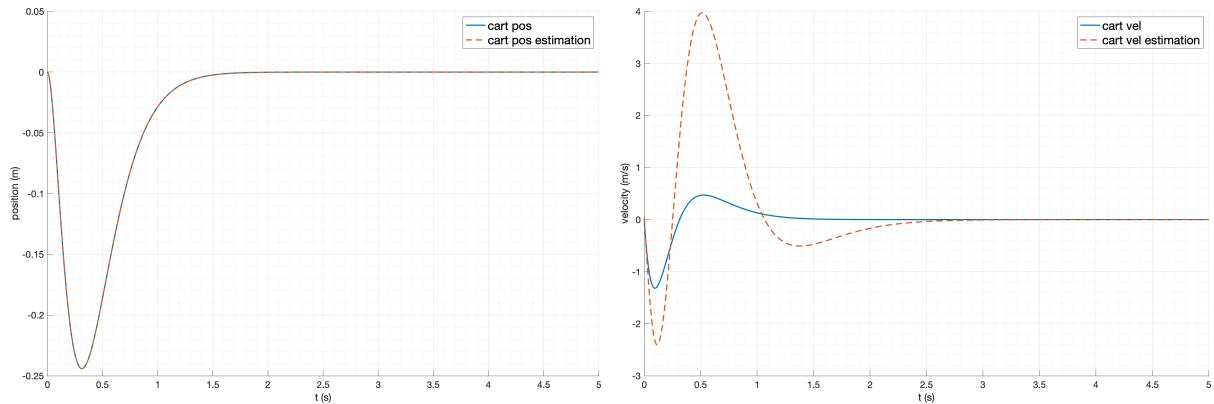
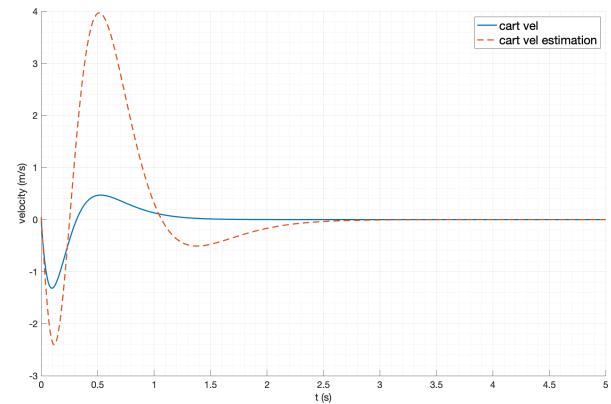


Рис. 38: Результаты моделирования наблюдателя пониженного порядка

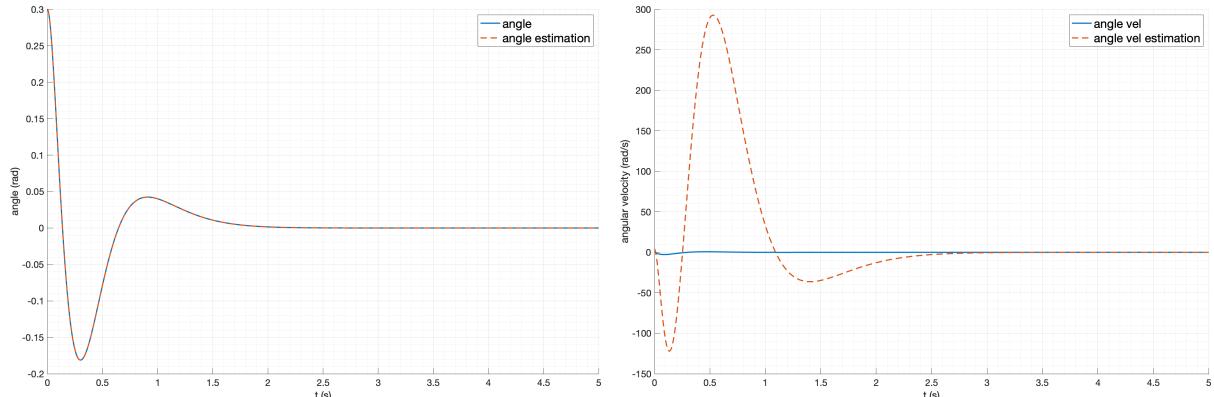
состояния системы приведен на рисунке 40.



(a) Оценка координаты тележки



(b) Оценка скорости тележки



(c) Оценка угла отклонения маятника

(d) Оценка угловой скорости маятника

Рис. 39: Сравнение оценок состояния системы с реальным состоянием наблюдателем пониженного порядка при  $k = -1$

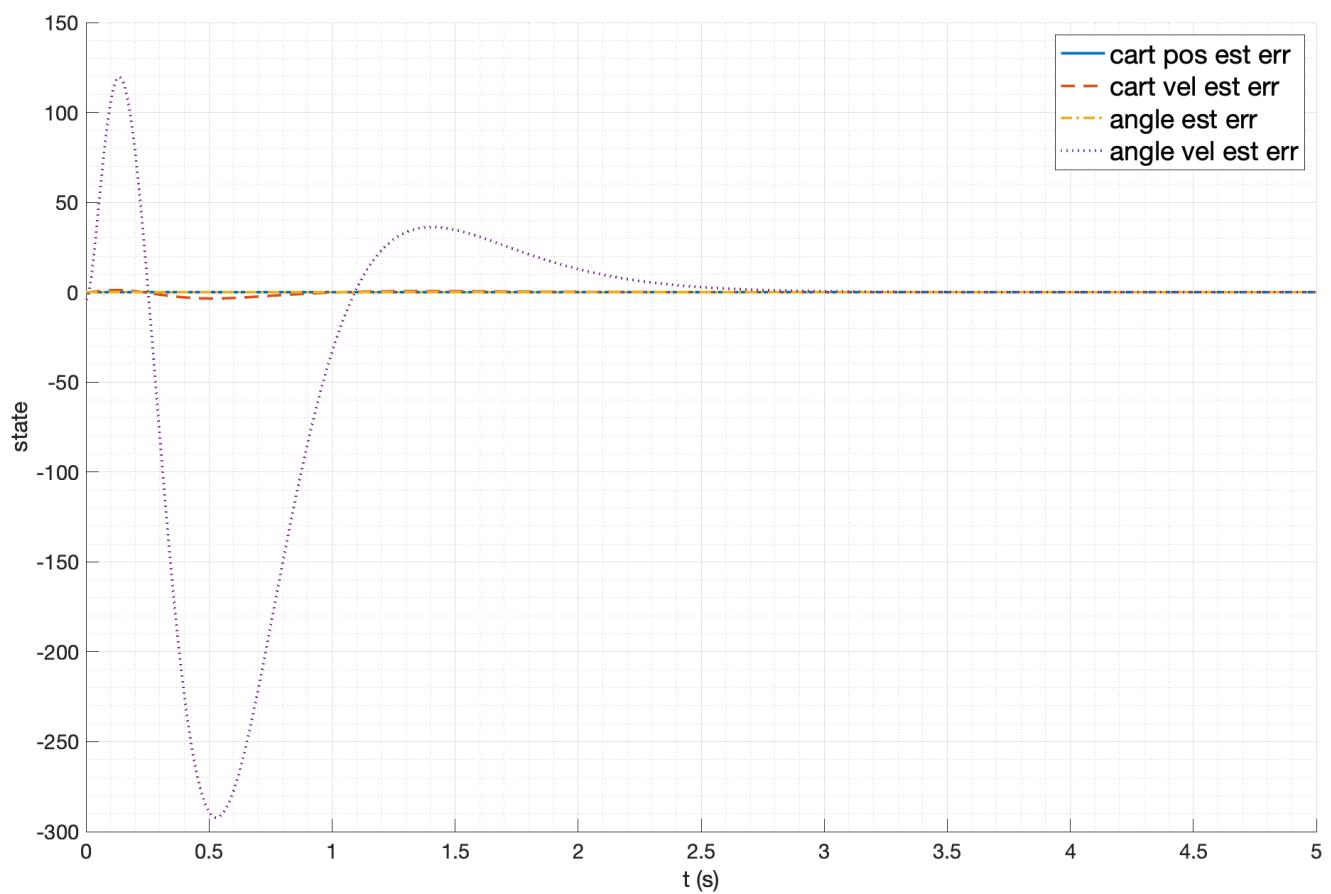


Рис. 40: Ошибка оценки состояния системы наблюдателем пониженного порядка

Так же видно, что два измеримых состояния системы совпадают с реальными значениями, а два неизмеримых состояния системы тоже сходятся к реальным значениям, но с большим временем переходного процесса, которое составляет около 2.5 секунд.

### 3.6. Регулятор по выходу

Рассмотрим реальный случай, когда для измерения и использования доступны только два из четырех состояний системы, а именно координата тележки и угол отклонения маятника. Эти состояния могут быть измерены с помощью датчиков, установленных на системе. Для того, чтобы стабилизировать систему будем использовать регулятор, основанный на оценке состояния системы наблюдателем пониженного порядка.

Порядок синтеза модального регулятора и наблюдателя пониженного порядка приведен выше. Схема моделирования приведена на рисунке 41. Выход подсистемы, соответствующий вектору состояния не используется, что имитирует реальный случай, когда для управления доступны только два состояния системы.

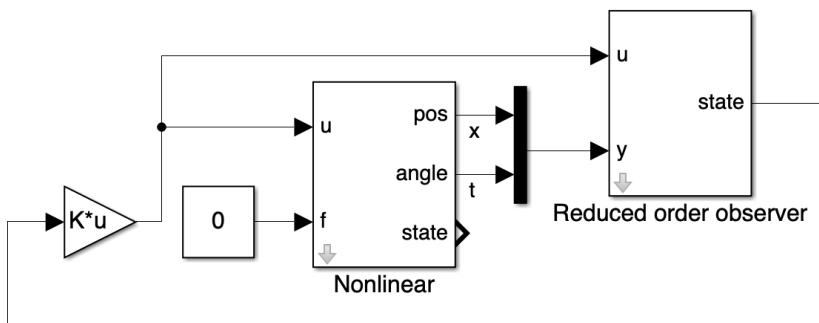


Рис. 41: Схема моделирования регулятора по выходу

Подберем спектры регулятора и наблюдателя пониженного порядка таким образом, чтобы достичь наилучшего качества переходного процесса. Наилучшего результата удалось достичь при спектрах  $\{-9, -9, -9, -9\}$  и  $\{-5, -5\}$  для регулятора и наблюдателя соответственно. Выход системы, замкнутой регулятором по выходу, приведен на рисунке 42.

Система стабилизируется, при этом время переходного процесса составляет около 1.8 секунд. График управляющего воздействия приведен на рисунке 43. Максимальное по

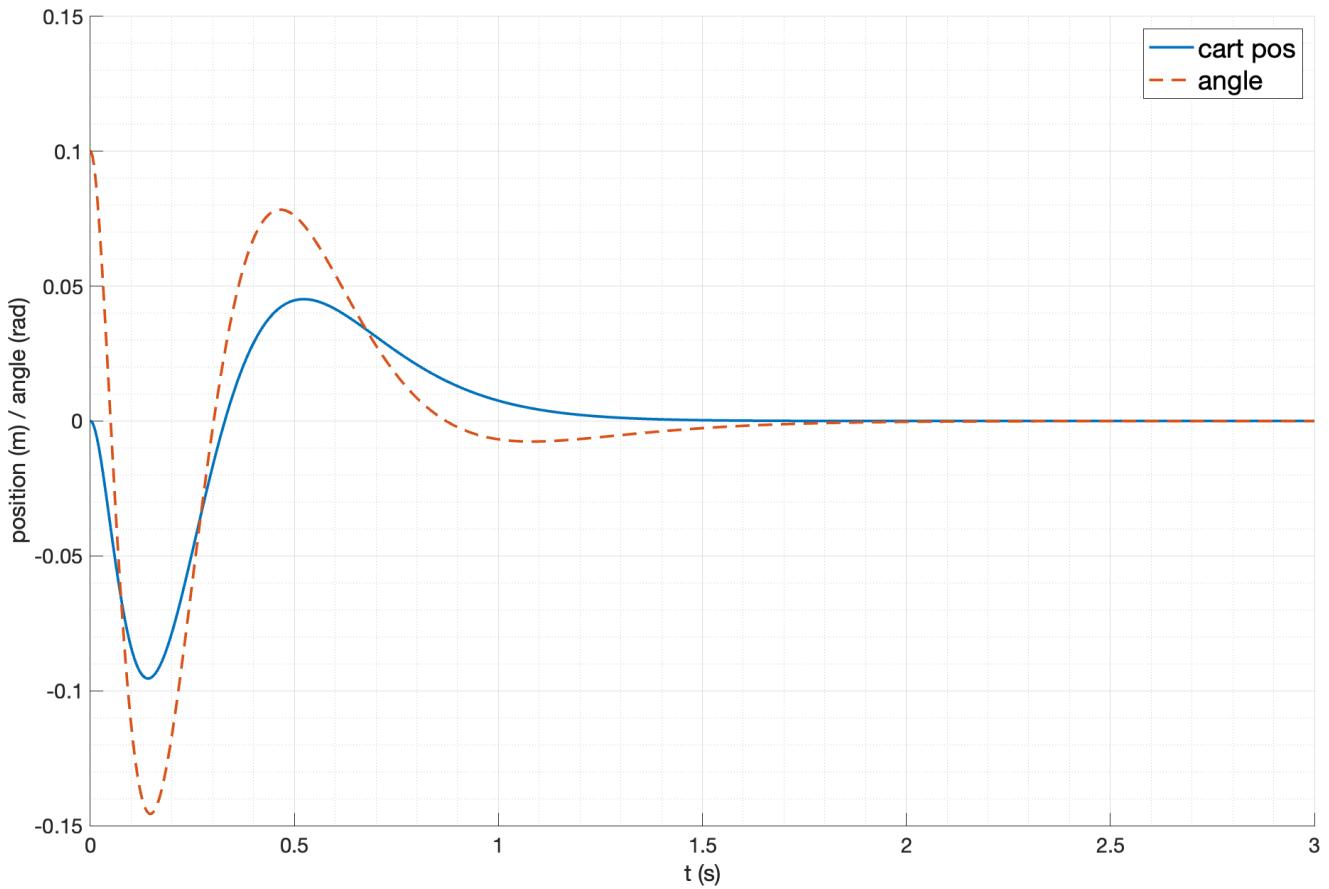


Рис. 42: Результаты моделирования регулятора по выходу

модулю управляющее воздействие составляет около 15000 Н. Величина, довольно большая, но может быть объяснена тем, что масса тележки составляет 255кг.

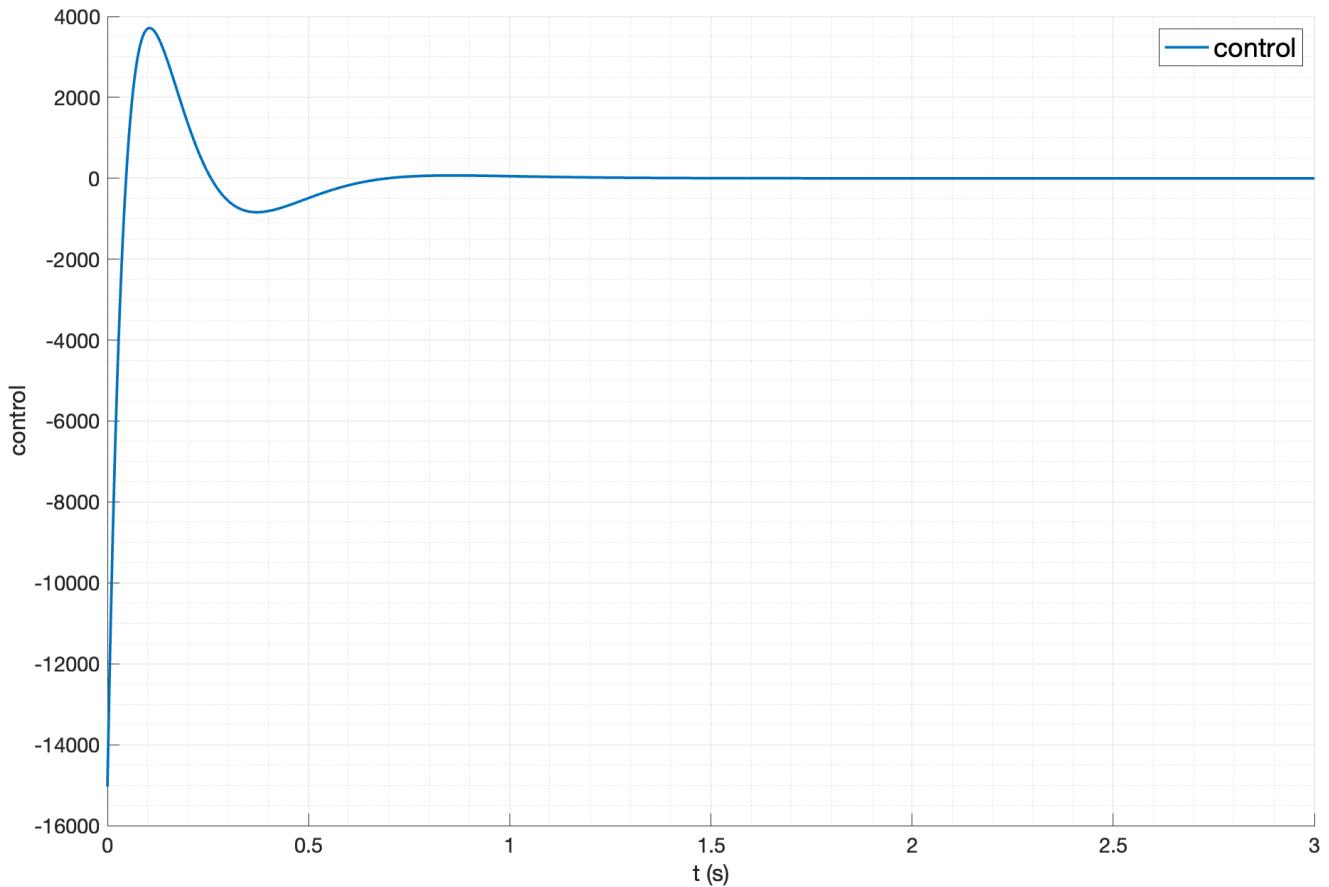


Рис. 43: Управляющее воздействие регулятора по выходу

### 3.7. Выводы

В данной главе были рассмотрены модальные регуляторы и наблюдатели. Были рассмотрены влияния собственных чисел замкнутой системы на динамику системы, а также влияние собственных чисел на работу наблюдателя. Исследовано влияние начальных условий на работу системы. Ожидаемым результатом оказалось то, что при увеличении модуля собственных чисел замкнутой системы, время переходного процесса уменьшается, при этом увеличивается перегулирование и максимальное по модулю управляющее воздействие. Влияние начальных условий на работу системы оказалось тоже весьма ожидаемым. При увеличении начального отклонения маятника увеличивается расхождение между линеаризованной моделью и реальной системой, что приводит к ошибкам в управлении. Начиная с некоторого значения начального отклонения, на практике оказавшегося равным 1.2 радиан, система не может быть стабилизирована.