



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

По дисциплине "Линейные системы автоматического управления"

“Вынужденное движение, показатели качества”

Вариант 17

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1. Вынужденное движение	3
1.1. Линейная система	3
1.2. Моделирование при различных входных воздействиях	3
1.3. Вывод	5
2. Качество переходных процессов	10
2.1. Корневые критерии качества	10
2.2. Сравнение систем	10
2.2.1. Эксперимент 1	11
2.2.2. Эксперимент 2	12
2.2.3. Эксперимент 3	12
2.2.4. Эксперимент 4	14
2.2.5. Эксперимент 5	14
2.2.6. Эксперимент 6	16
2.2.7. Эксперимент 7	16
2.2.8. Эксперимент 8	18
2.2.9. Эксперимент 9	20
2.2.10. Эксперимент 10	20
2.3. Вывод	31
3. Выводы	31

1. Вынужденное движение

1.1. Линейная система

Вернемся к системе, рассмотренной в прошлой лабораторной работе:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u \quad (1)$$

структурная схема приведена на рисунке 1.

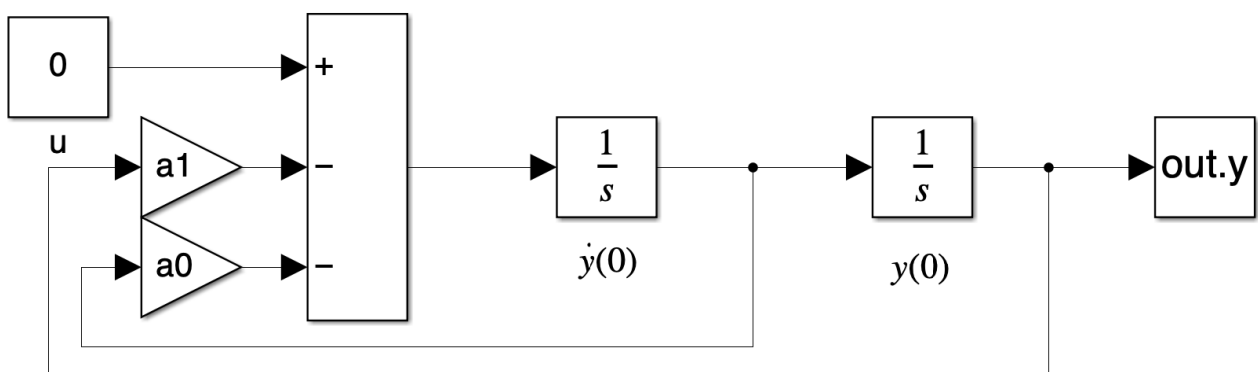


Рис. 1: Структурная схема системы

1.2. Моделирование при различных входных воздействиях

Рассмотрим поведение данной системы при параметрах $a_0, a_1 = 1$, ранее полученных из корней характеристического уравнения: Начальными условиями для системы будут:

Номер	λ_1	λ_2	a_0	a_1
1	$-2.8 + 6j$	$-2.8 - 6j$	43.84	5.6
2	$18j$	$-18j$	324	0
3	$0.8 + 6j$	$0.8 - 6j$	36.64	-1.6

Таблица 1: Начальные условия и коэффициенты

Номер	$y(0)$	$\dot{y}(0)$
1	-1	0
2	0	0
3	1	0

Таблица 2: Начальные условия

В качестве внешнего воздействия $u(t)$ возьмем следующие функции:

$$u_1(t) = 0.5 \quad u_2(t) = 0.5t \quad u_3(t) = \cos(2t) \quad (2)$$

Промоделируем системы. Для каждого набора коэффициентов и входных сигналов промоделируем систему при различных входных воздействиях (см. рис 2 - 10).

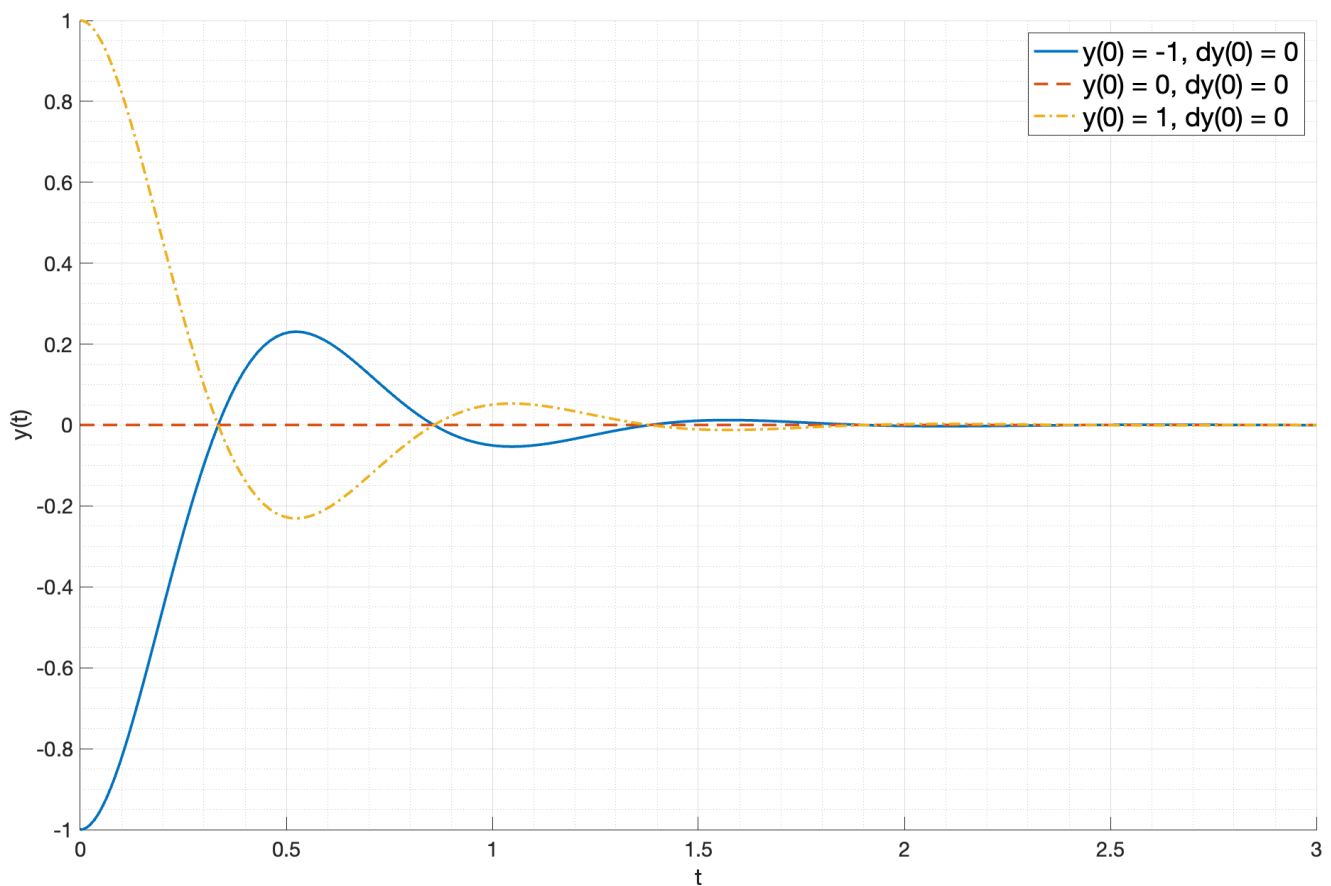


Рис. 2: $a_0 = 43.84, a_1 = 5.6, u(t) = 0.5$

Посмотрим на первую систему, являющуюся устойчивой. При внешнем воздействии $u(t) = 0.5$ система приходит к установившемуся значению, равному 0.5. При внешнем воздействии $u(t) = 0.5t$ система не приходит к установившемуся значению, а растет линейно. При внешнем воздействии $u(t) = \cos(2t)$ система колеблется около значения 0.

Рассмотрим вторую систему, находящуюся на границе устойчивости. При всех рассмотренных входных воздействиях система колеблется около нуля, таким образом, ее стабильность не зависит от внешнего воздействия.

Рассмотрим третью систему, являющуюся неустойчивой. При всех рассмотренных

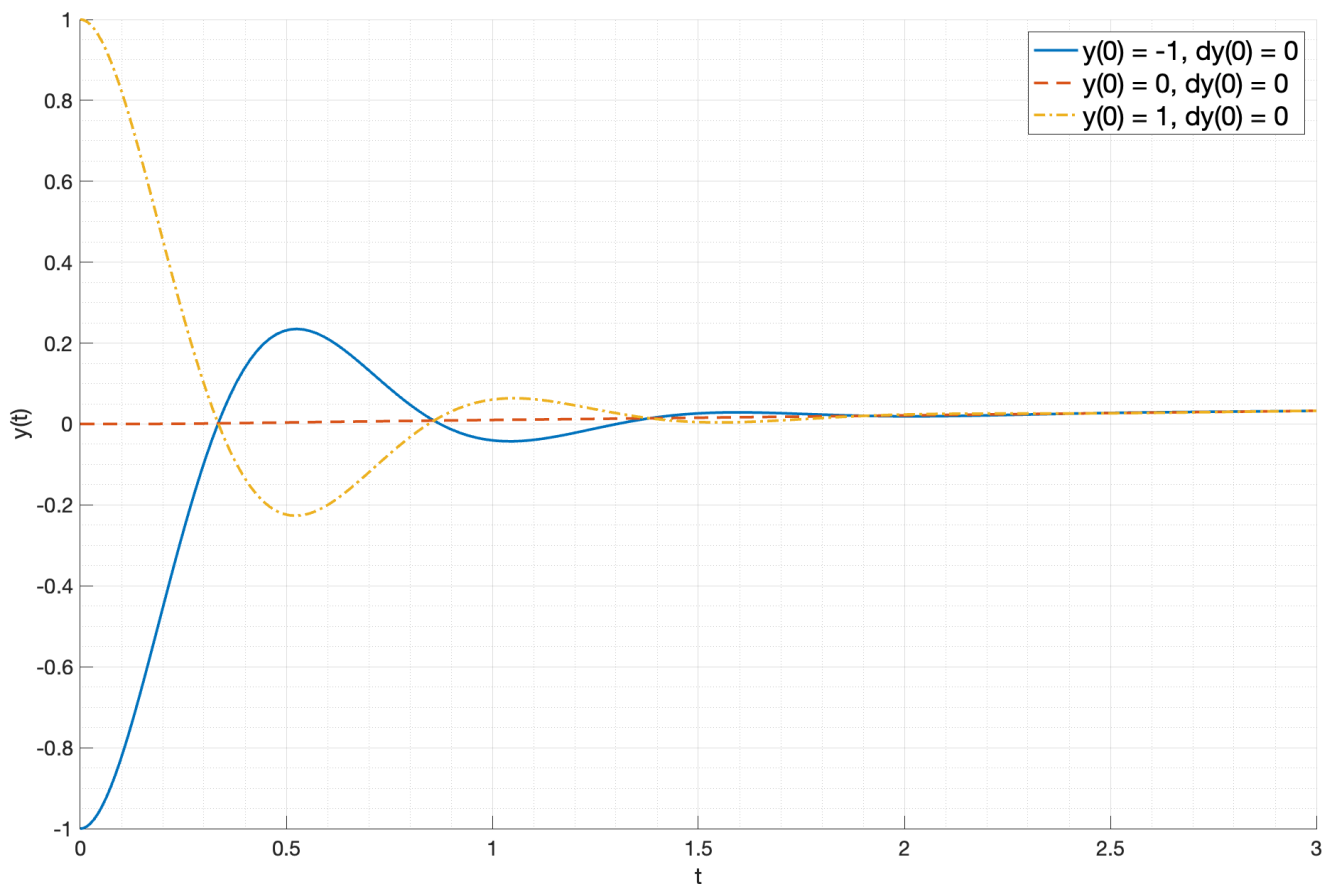


Рис. 3: $a_0 = 43.84$, $a_1 = 5.6$, $u(t) = 0.5t$

входных воздействиях система все так же будет расти. Входное воздействие слабо влияет на поведение системы.

1.3. Вывод

По результатам симуляции можно сделать вывод, что внешнее воздействие влияет на поведение системы. Даже устойчивая система может не приходить к установившемуся значению при некоторых входных воздействиях.

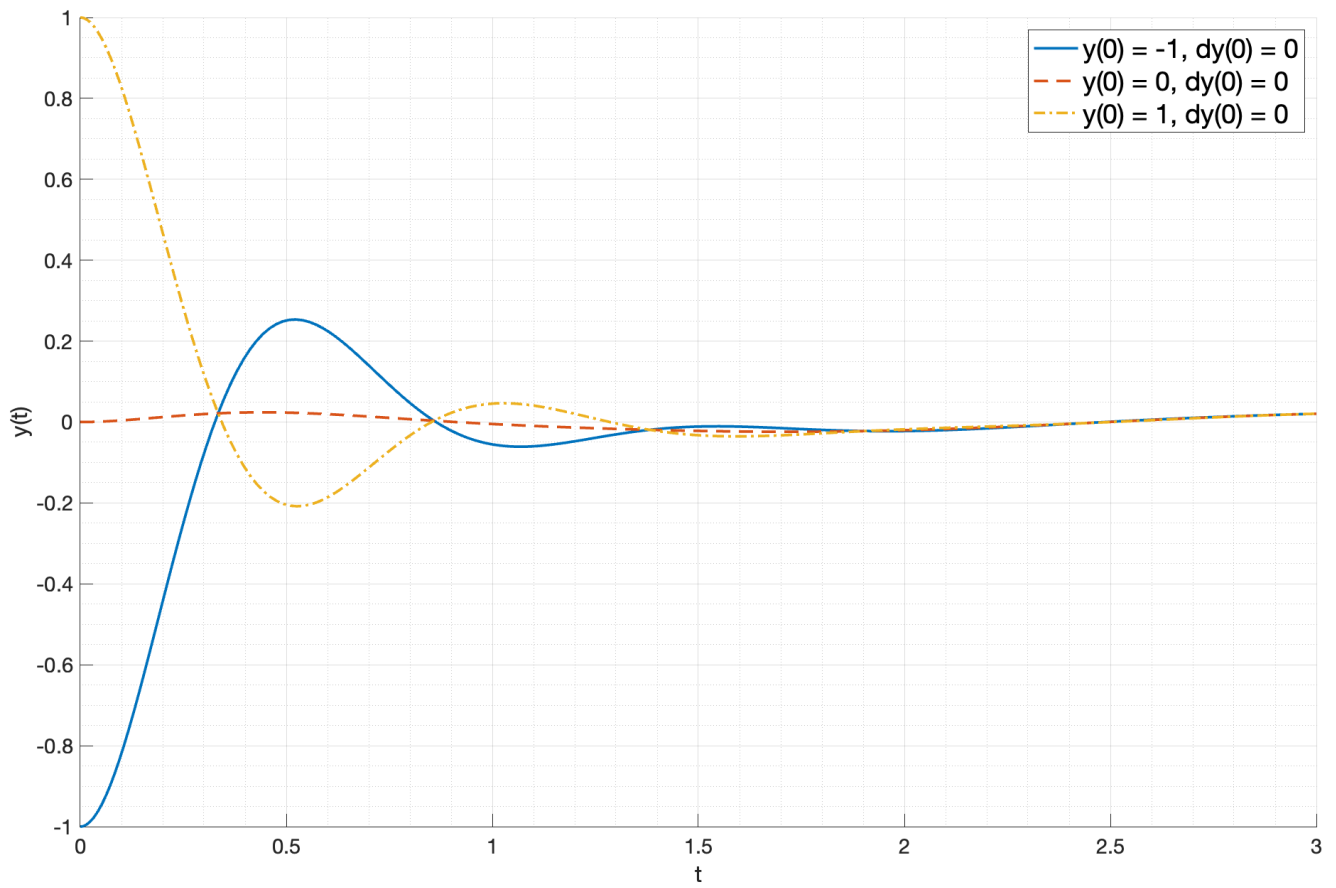


Рис. 4: $a_0 = 43.84, a_1 = 5.6, u(t) = \cos(2t)$

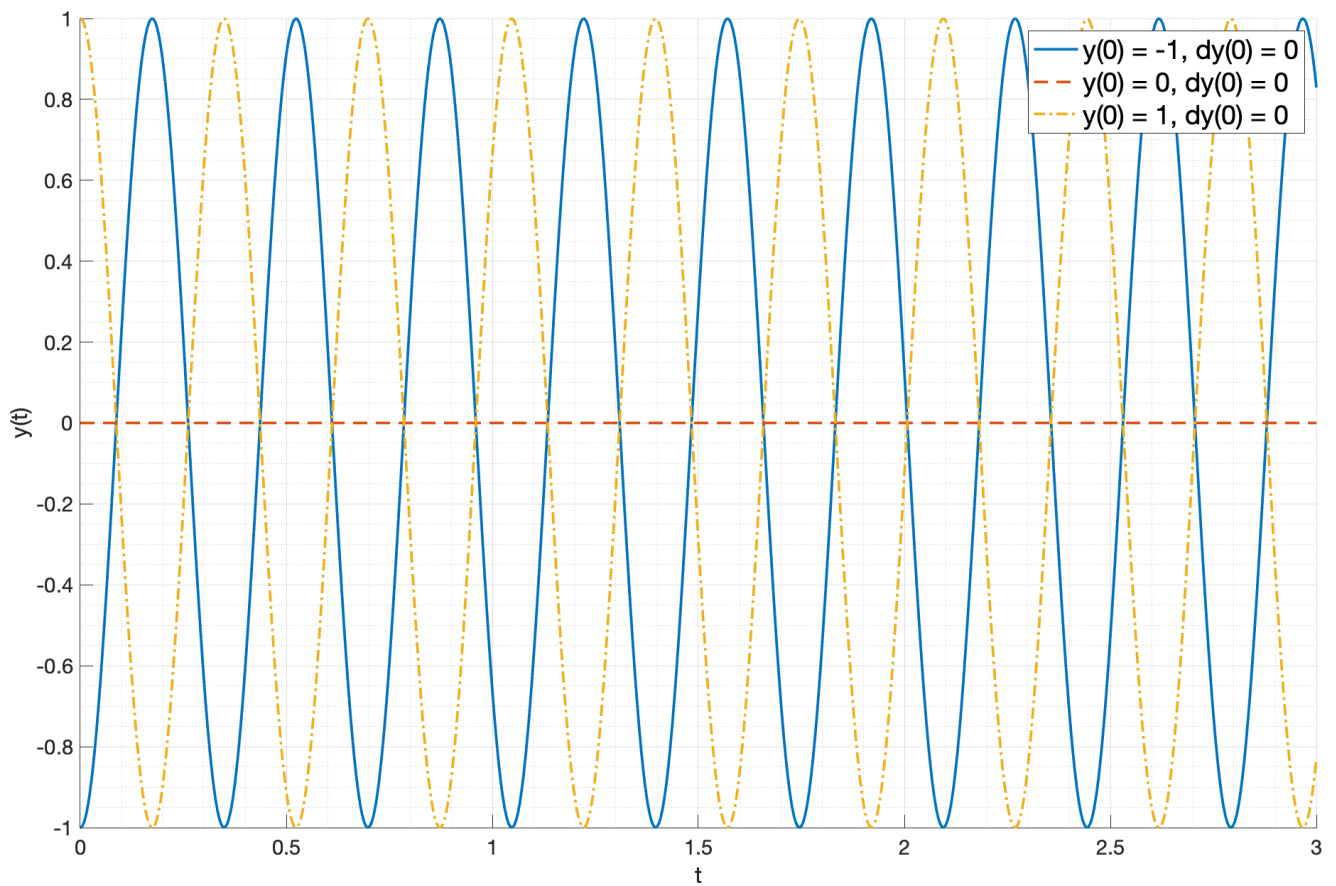


Рис. 5: $a_0 = 324, a_1 = 0, u(t) = 0.5$

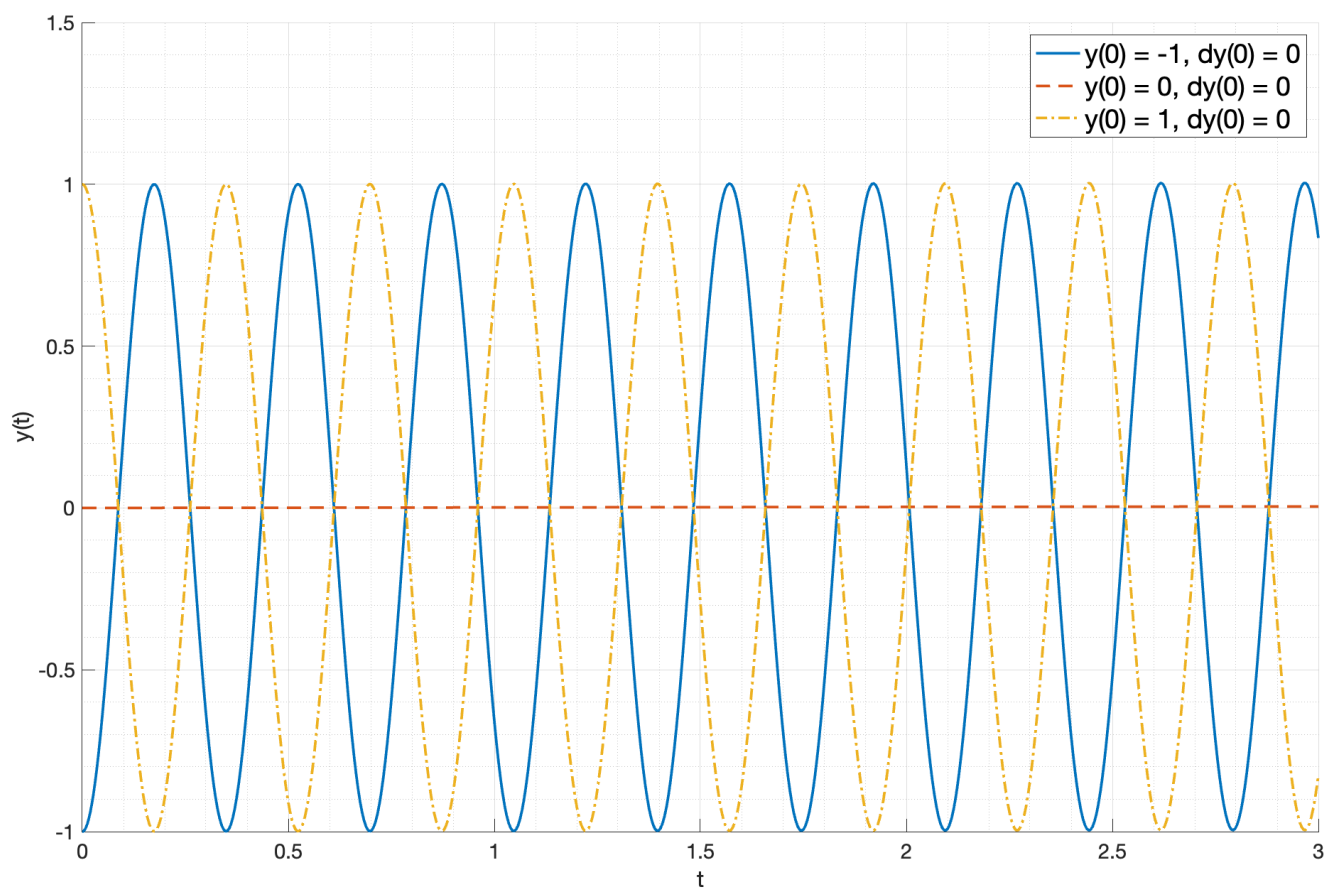


Рис. 6: $a_0 = 324, a_1 = 0, u(t) = 0.5t$

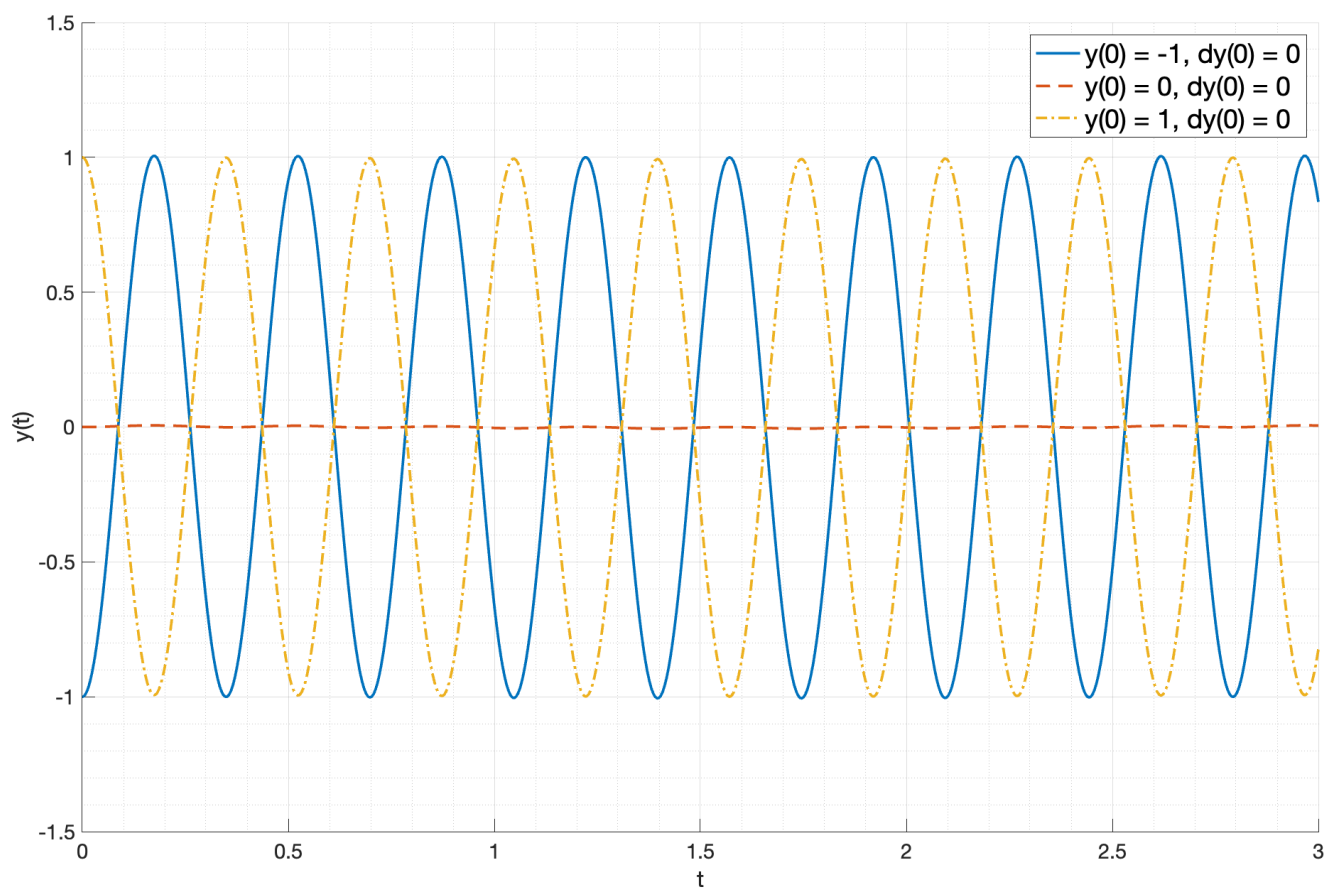


Рис. 7: $a_0 = 324, a_1 = 0, u(t) = \cos(2t)$

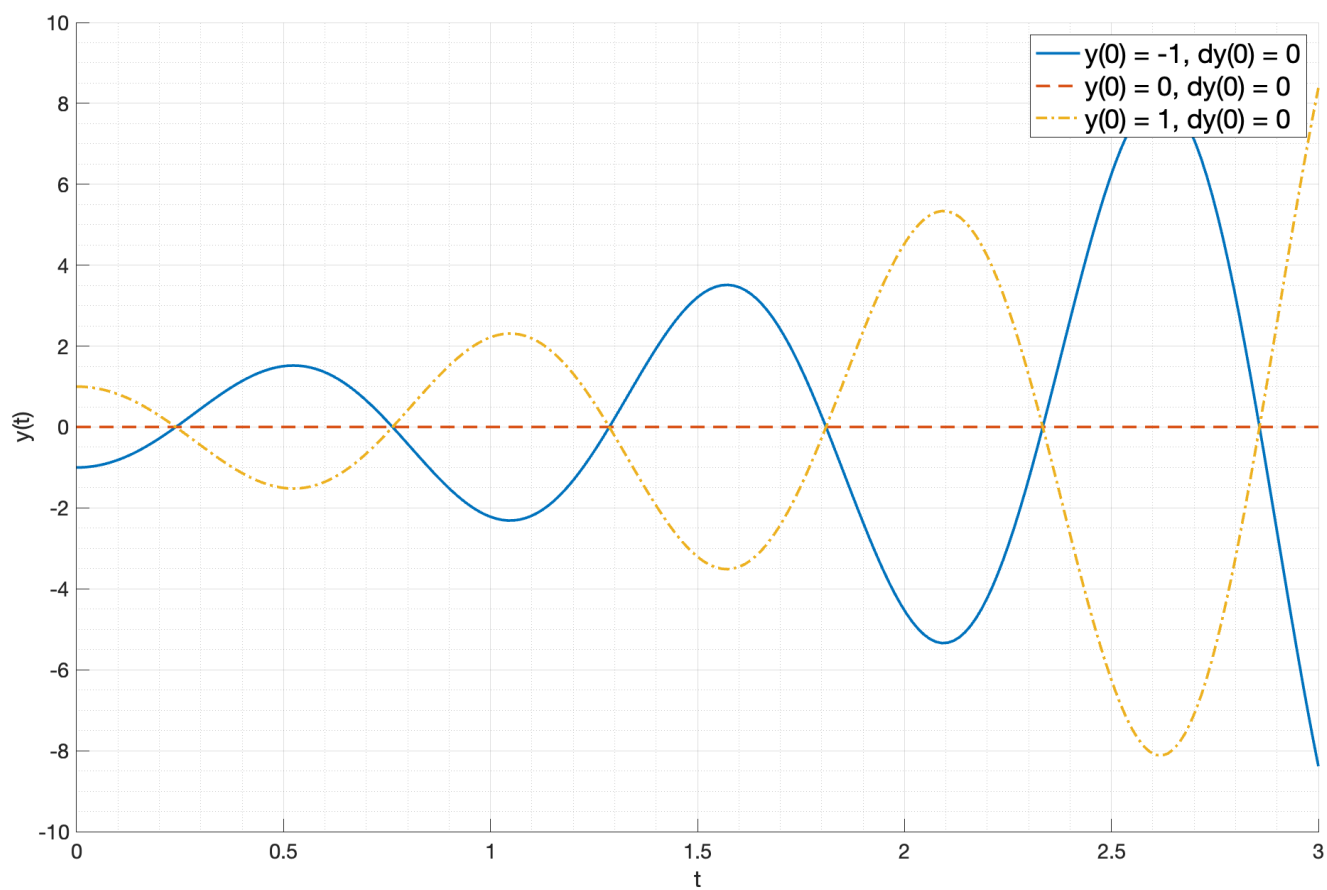


Рис. 8: $a_0 = 36.64, a_1 = -1.6, u(t) = 0.5$

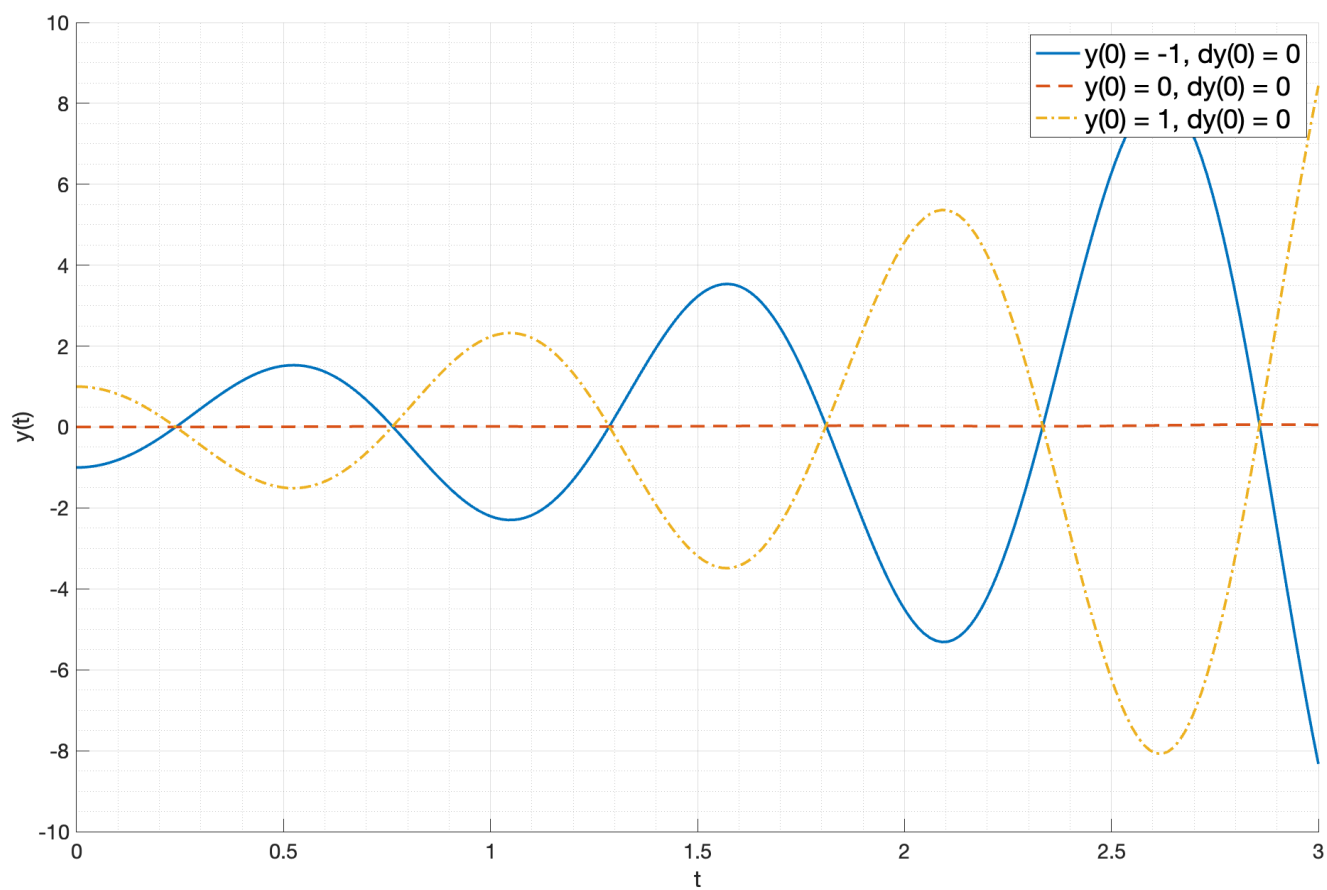


Рис. 9: $a_0 = 36.64, a_1 = -1.6, u(t) = 0.5t$

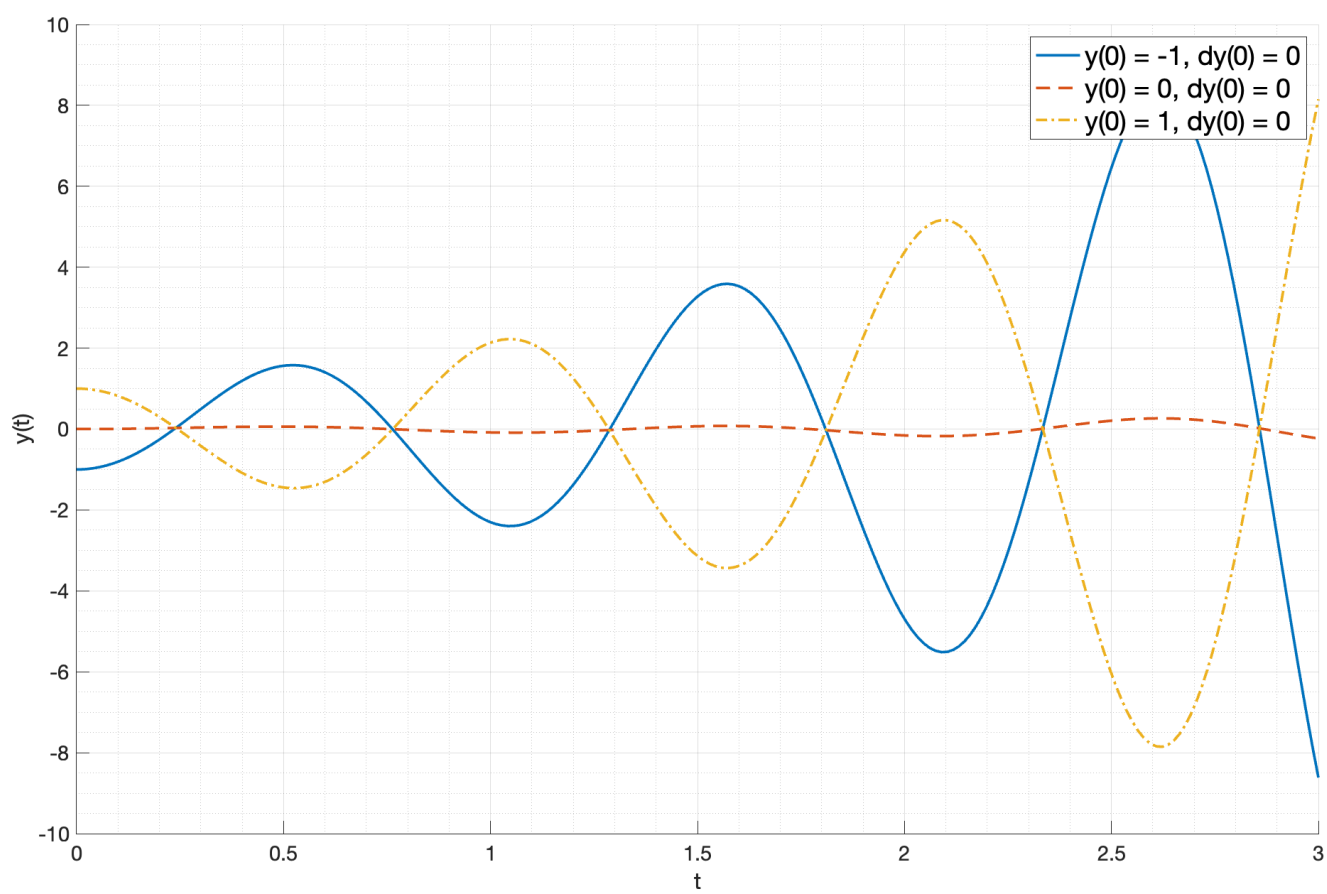


Рис. 10: $a_0 = 36.64, a_1 = -1.6, u(t) = \cos(2t)$

2. Качество переходных процессов

Рассмотрим систему, заданную передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \quad (3)$$

2.1. Корневые критерии качества

Оценить характер переходного процесса можно по корням характеристического уравнения, они же являются полюсами передаточной функции. В случае приближенной оценки качества, на комплексной плоскости, на которой расположены корни характеристического уравнения отмечается трапецевидная область, внутри которой находятся все корни.

Время переходного процесса T зависит от максимальной величины действительной части корней характеристического уравнения, то есть отдалением правой границы трапеции от мнимой оси. Чем больше это расстояние, тем меньше время переходного процесса.

$$T \approx \frac{1}{|\max(\operatorname{Re}(\lambda))|} \quad (4)$$

Перерегулирование σ зависит от колебательности системы, которая пропорциональна значению:

$$\mu = \max \left| \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)} \right| \quad (5)$$

или же тангенсу угла наклона стороны трапеции.

2.2. Сравнение систем

Будем поочередно рассматривать разные комбинации коэффициентов λ_1 , λ_2 , λ_3 и оценивать переходный процесс по времени переходного процесса T и перерегулированию σ . Будем считать, что переходный процесс завершился, когда значение выходной величины зашло в окрестность установившегося значения и более не выходит из нее. В качестве

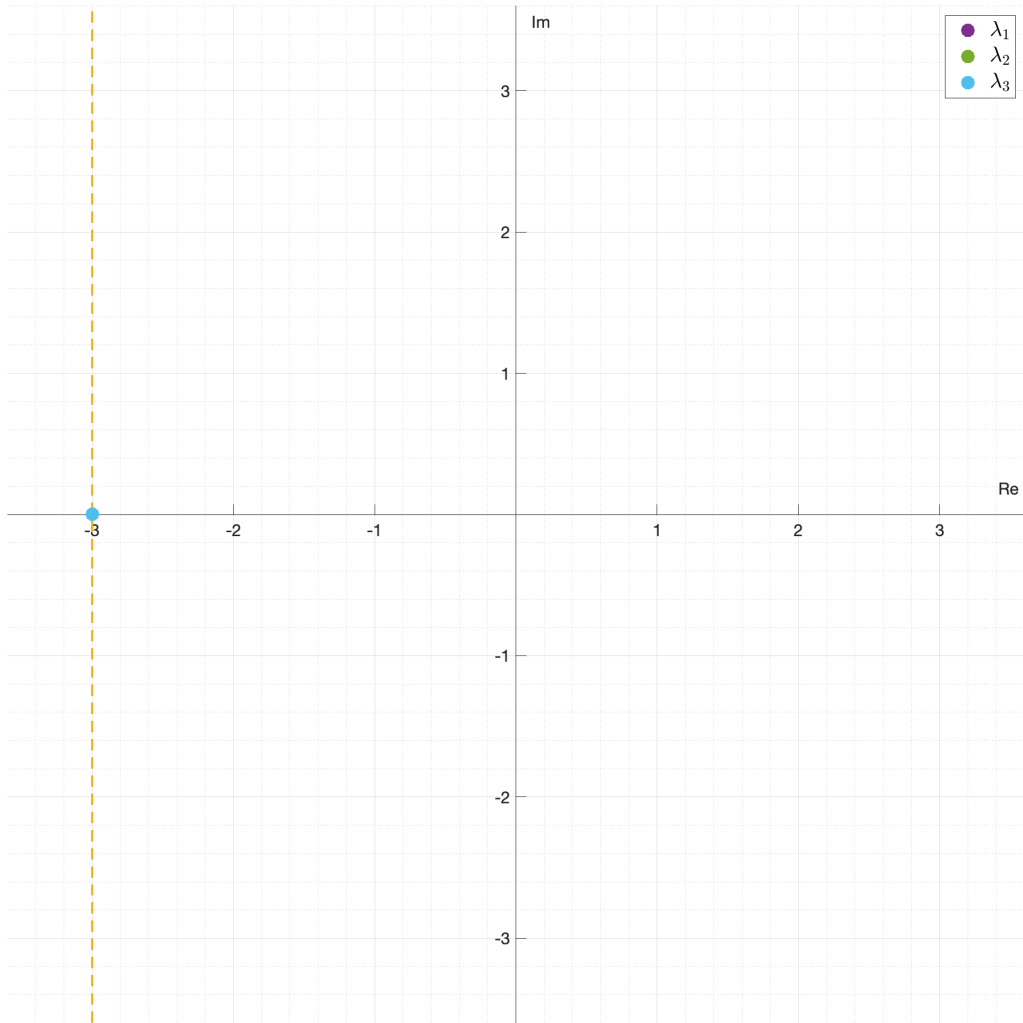


Рис. 11: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 1

допустимого отклонения от целевого значения возьмем 0.1. Конечные результаты занесены в таблицу 3.

2.2.1. Эксперимент 1

Для начала выберем коэффициенты $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Расположение корней на комплексной плоскости и результаты моделирования системы приведены на рисунках 11 и 12.

Заметим, что в данном случае значение μ равно нулю, таким образом, перерегулирование отсутствует. При этом время переходного процесса составило 2.45 секунды.

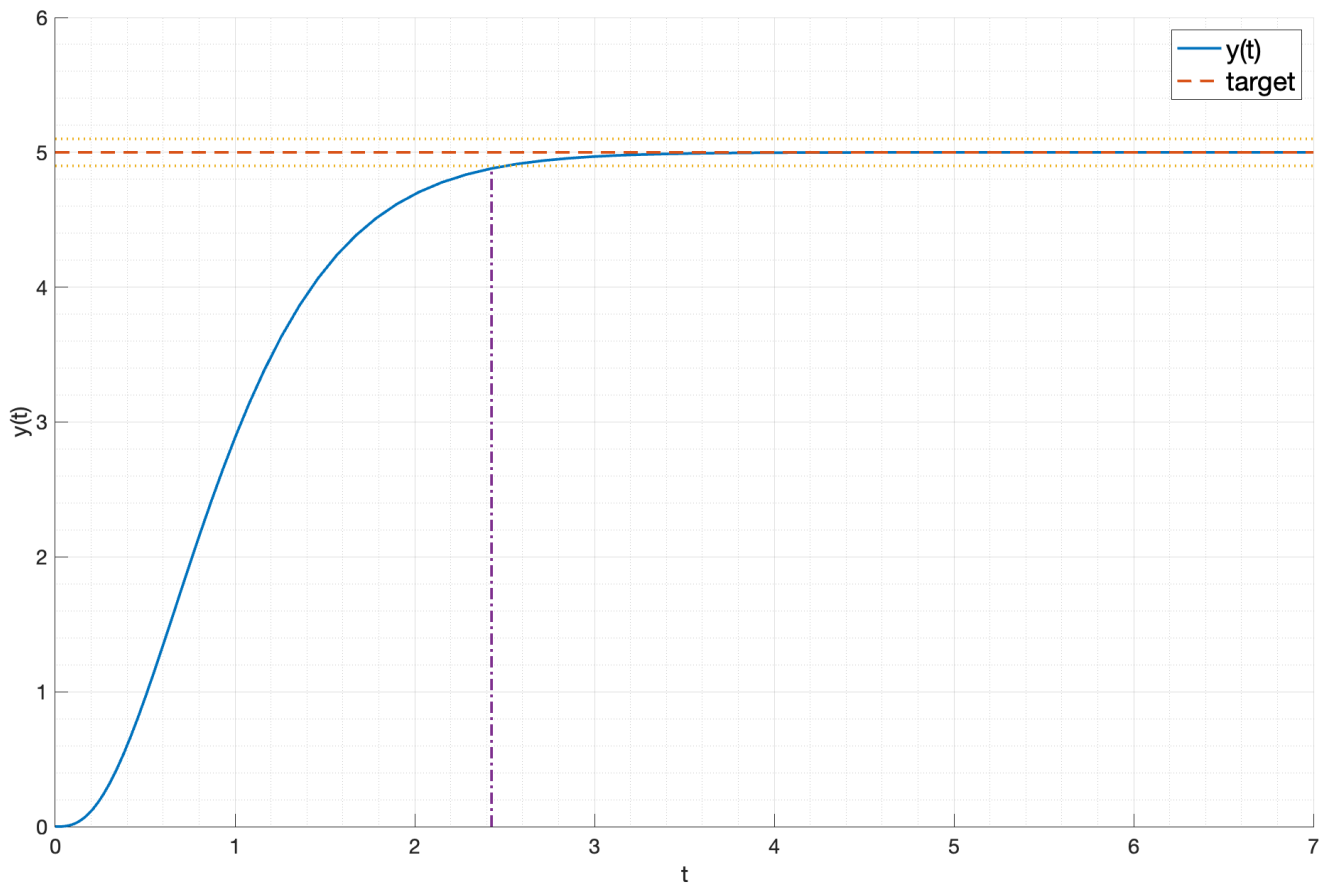


Рис. 12: Моделирование системы в эксперименте 1

2.2.2. Эксперимент 2

Теперь изменим значение одного коэффициента на меньшее. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 13 и 14.

В данном случае так же нет перерегулирования из-за отсутствия мнимых корней. Время переходного процесса составило 2.15 секунды, что несколько меньше, чем в предыдущем случае.

2.2.3. Эксперимент 3

Теперь уменьшим значения еще одного коэффициента. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = -3$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 15 и 16.

Время переходного процесса еще сильнее уменьшилось и составило 1.83 секунды.

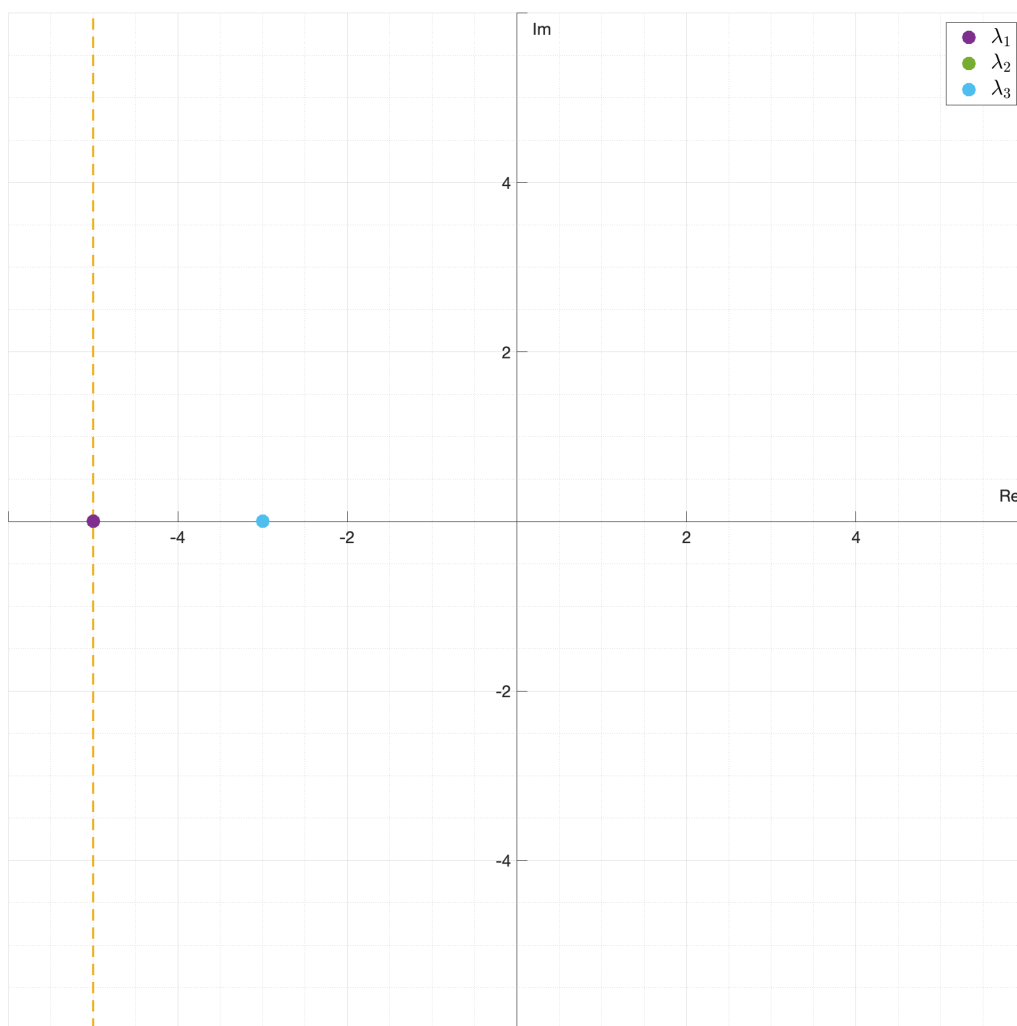


Рис. 13: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 2

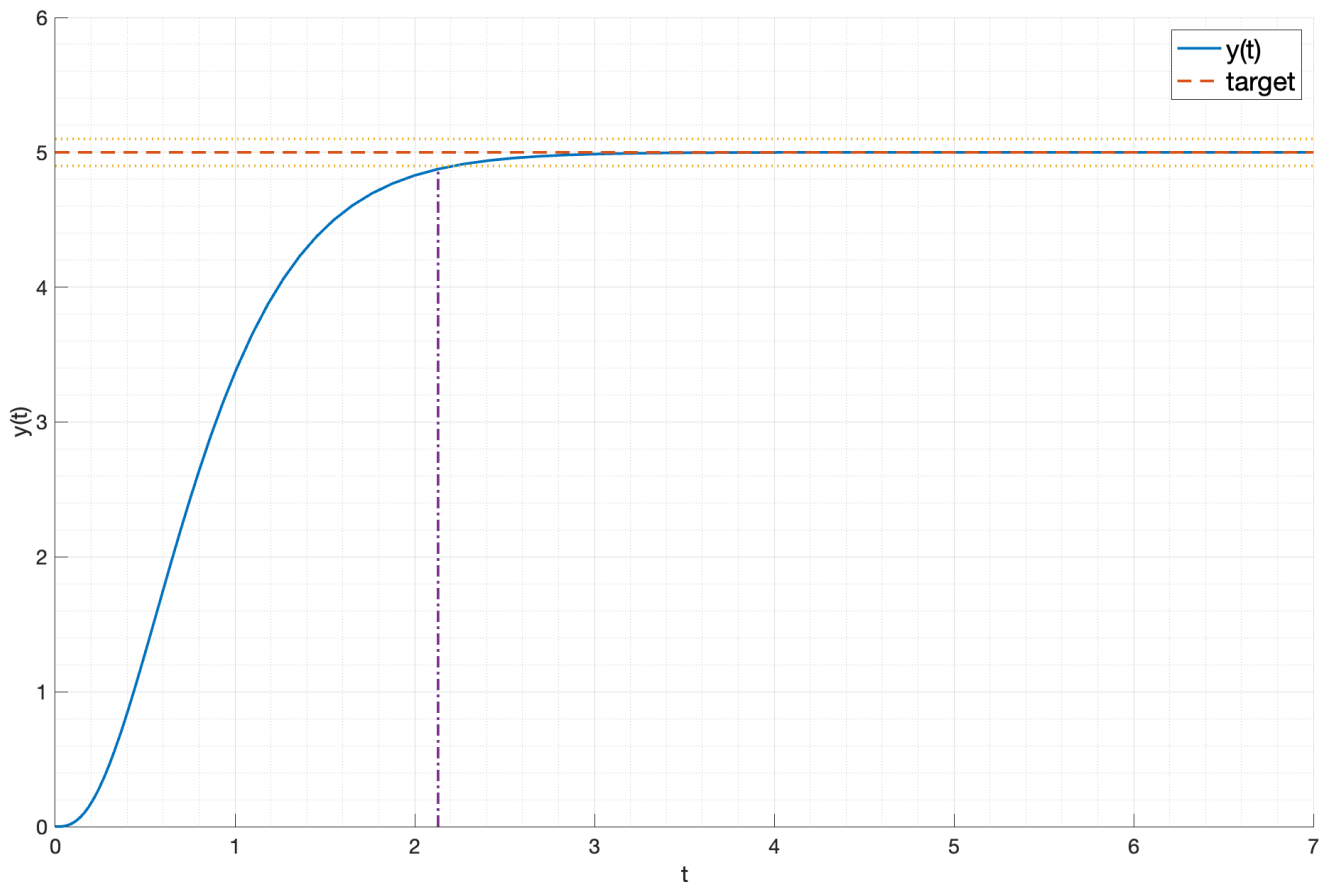


Рис. 14: Моделирование системы в эксперименте 2

2.2.4. Эксперимент 4

Теперь увеличим значение одного коэффициента. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = -1$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 17 и 18.

Видно, что время переходного процесса увеличилось до 4.31 секунды. При таком же по модулю изменению корня, но в другую сторону, время переходного процесса увеличилось на порядок сильнее.

2.2.5. Эксперимент 5

Теперь увеличим значение еще одного коэффициента. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 19 и 20.

Время переходного процесса увеличилось до 5.94 секунды. Таким образом, можно сделать вывод, что время переходного процесса зависит от максимального значения действительной части корней характеристического уравнения.

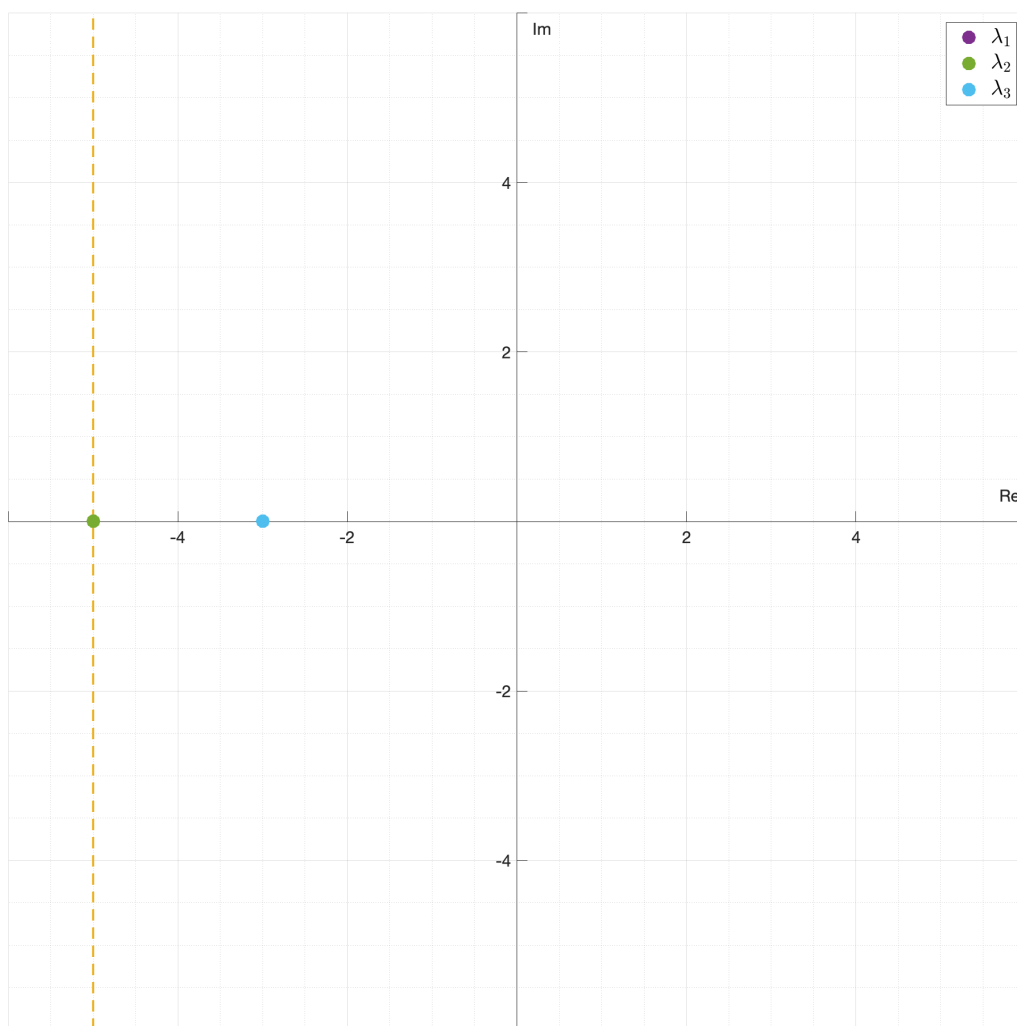


Рис. 15: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 3

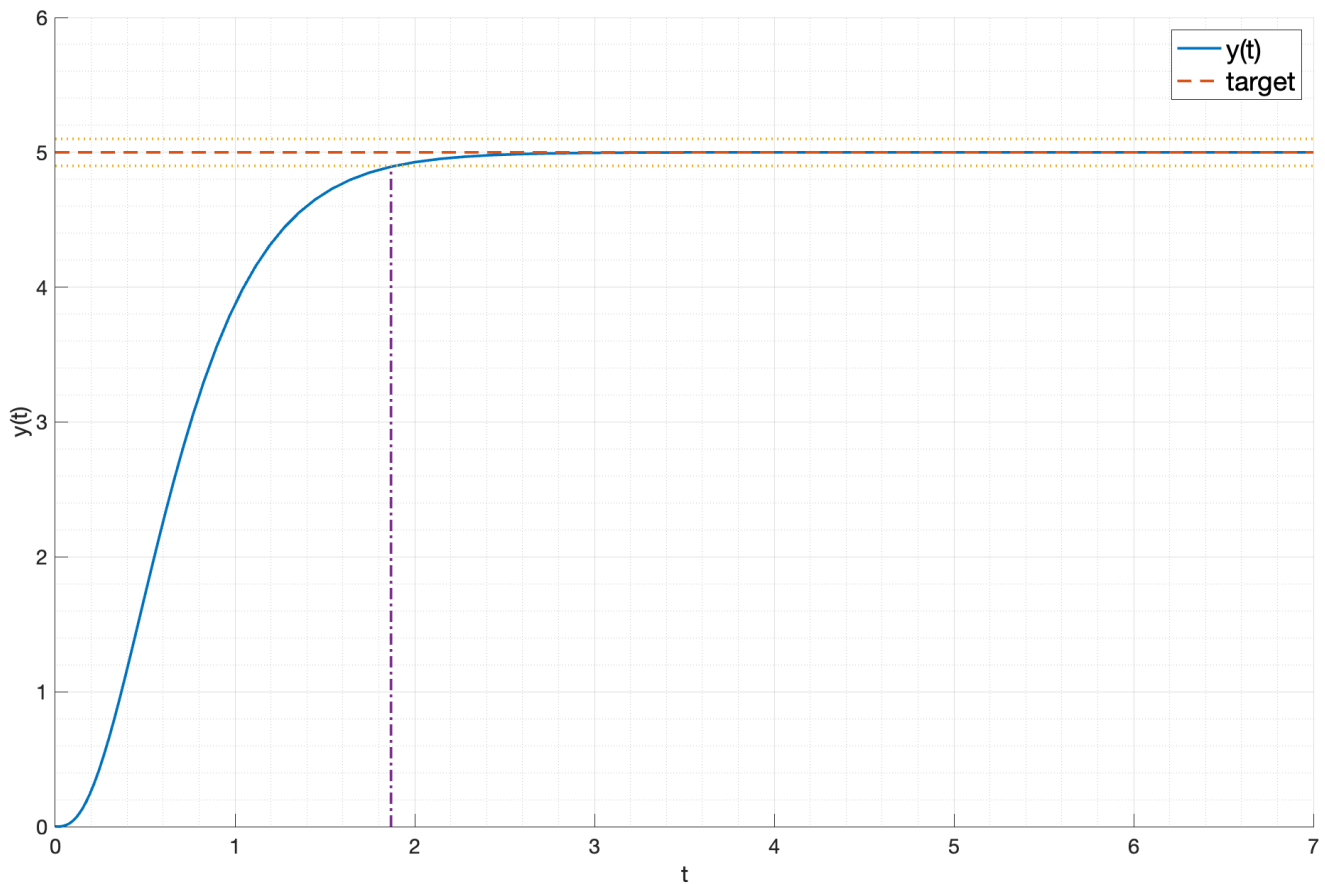


Рис. 16: Моделирование системы в эксперименте 3

2.2.6. Эксперимент 6

Теперь добавим к корням, рассмотренным в первом эксперименте, сопряженную мнимую часть. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3 - 5i$, $\lambda_3 = -3 + 5i$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 21 и 22.

Время переходного процесса уменьшилось до 1.43 секунды, перерегулирование все еще отсутствует.

2.2.7. Эксперимент 7

Увеличим по модулю значения мнимых частей корней. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3 - 15i$, $\lambda_3 = -3 + 15i$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 23 и 24.

Время переходного процесса еще немного уменьшилось и составило 1.35 секунды. При

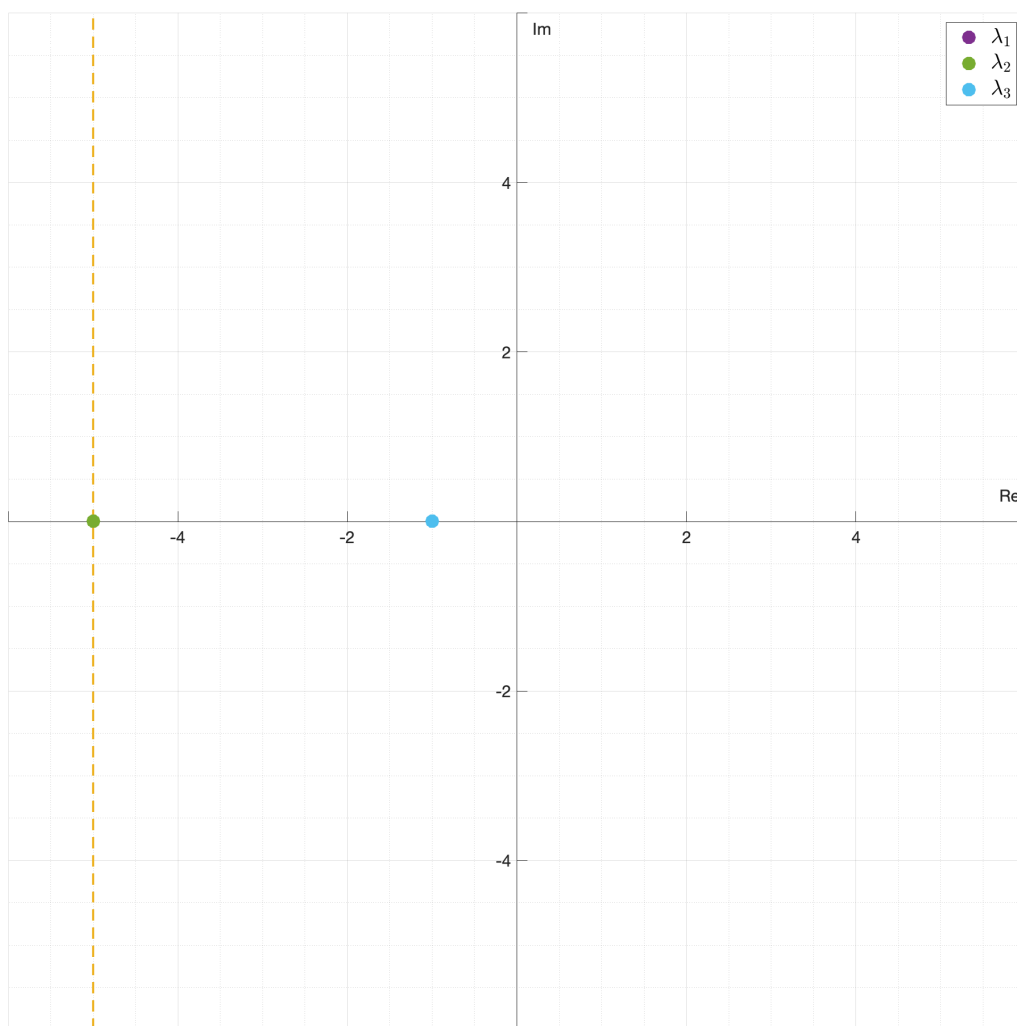


Рис. 17: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 4

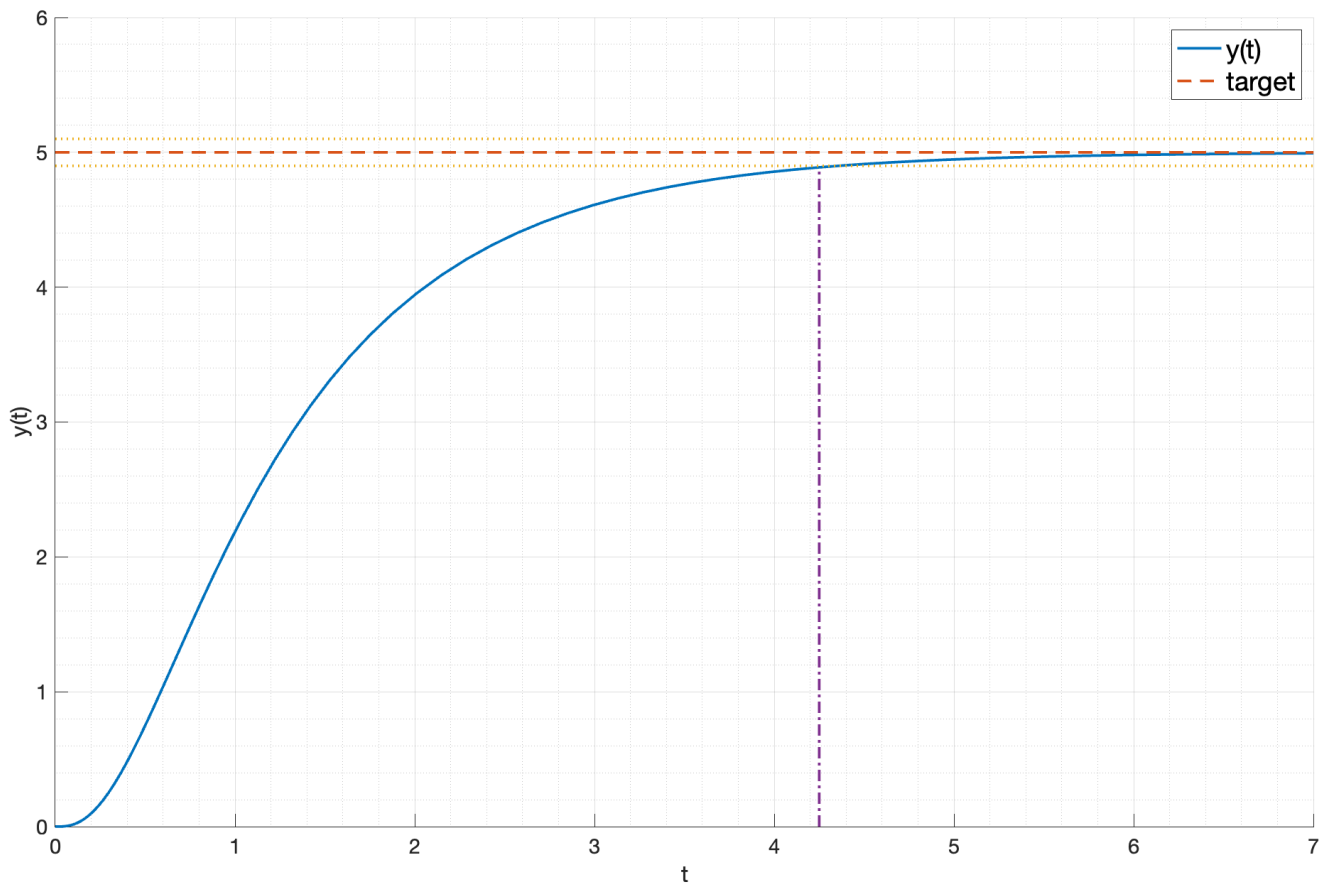


Рис. 18: Моделирование системы в эксперименте 4

этом переходный процесс стал более колебательным, что видно на графике. При этом перерегулирование все еще отсутствует.

2.2.8. Эксперимент 8

Уменьшим по модулю значения вещественных частей корней. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1 - 15i$, $\lambda_3 = -1 + 15i$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 25 и 26.

Таким образом угол наклона стороны трапеции сильно увеличился, что привело к увеличению колебательности системы, а вследствие этого и времени переходного процесса до 2.21 секунды. При этом время первого вхождения в окрестность установившегося значения уменьшилось.

Теперь появилось перерегулирование, которое составило 3.2%.

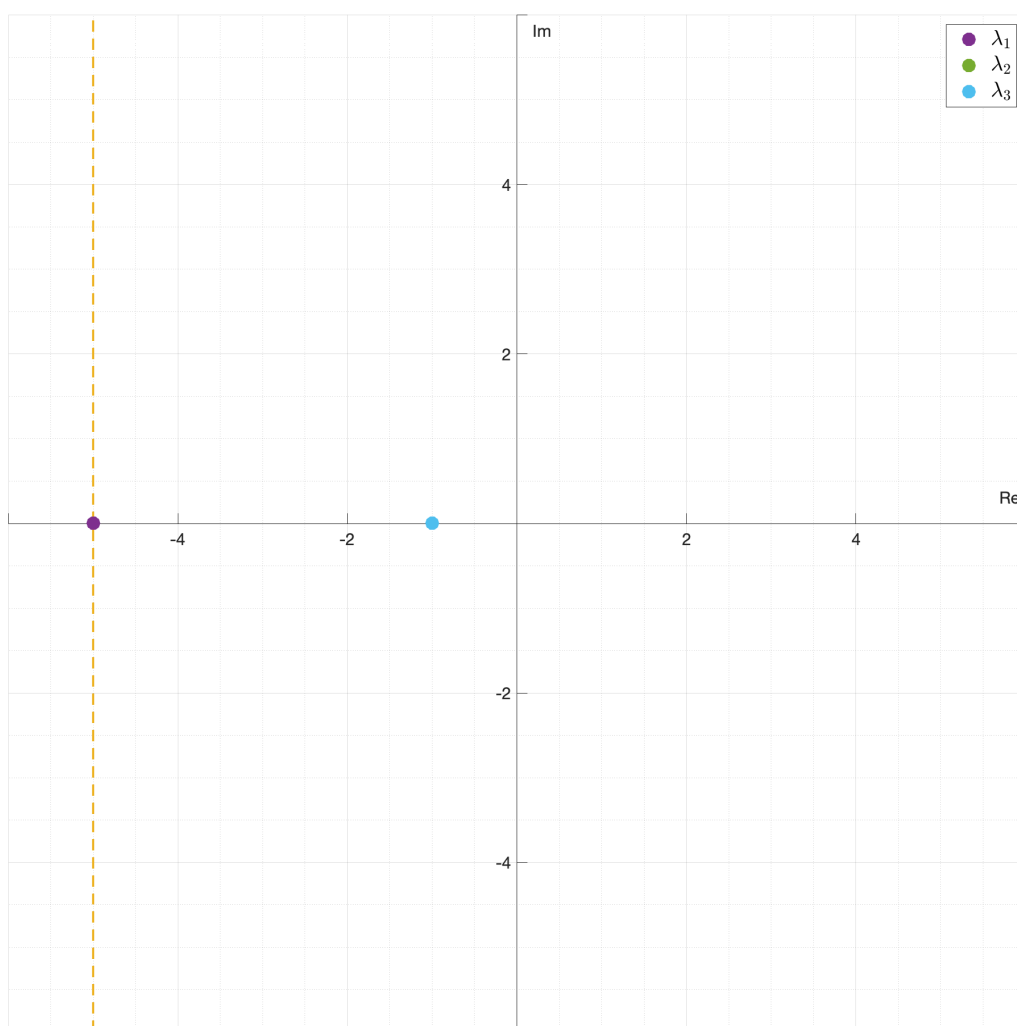


Рис. 19: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 5

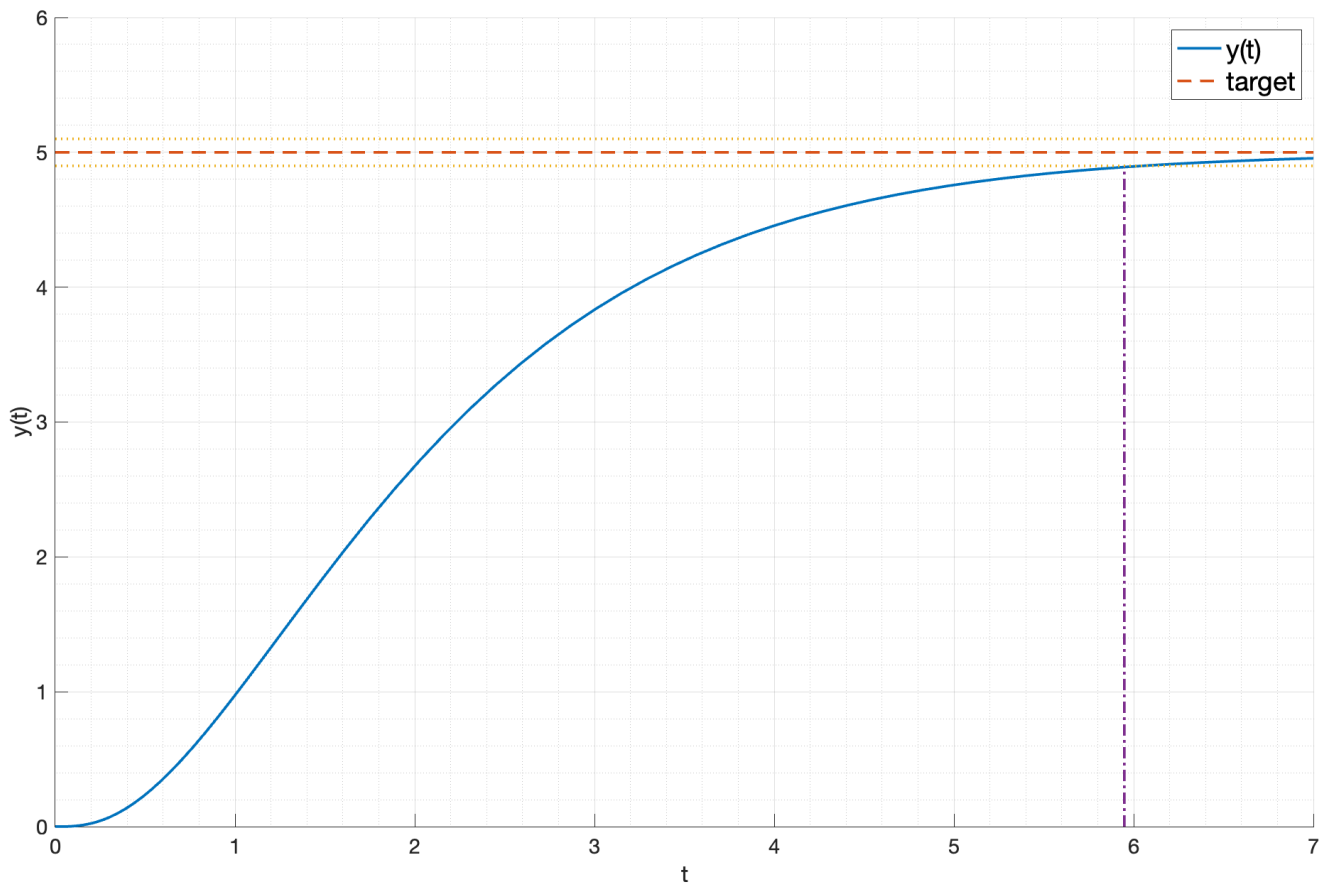


Рис. 20: Моделирование системы в эксперименте 5

2.2.9. Эксперимент 9

Уменьшим значение вещественного корня. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -1 - 15i$, $\lambda_3 = -1 + 15i$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 27 и 28.

Время переходного процесса увеличилось еще сильнее вследствие увеличения колебательности системы. Теперь оно составляет 3.22 секунды. Перерегулирование увеличилось до 38%.

2.2.10. Эксперимент 10

Уменьшим вещественную часть сопряженных корней. Рассмотрим набор $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -5 - 15i$, $\lambda_3 = -5 + 15i$. Расположение корней и результаты моделирования приведены на рисунках 29 и 30.

Время переходного процесса составило 0.59 секунды, перерегулирование 9%. Уменьшение времени переходного процесса и перерегулирования объясняется уменьшением максимального

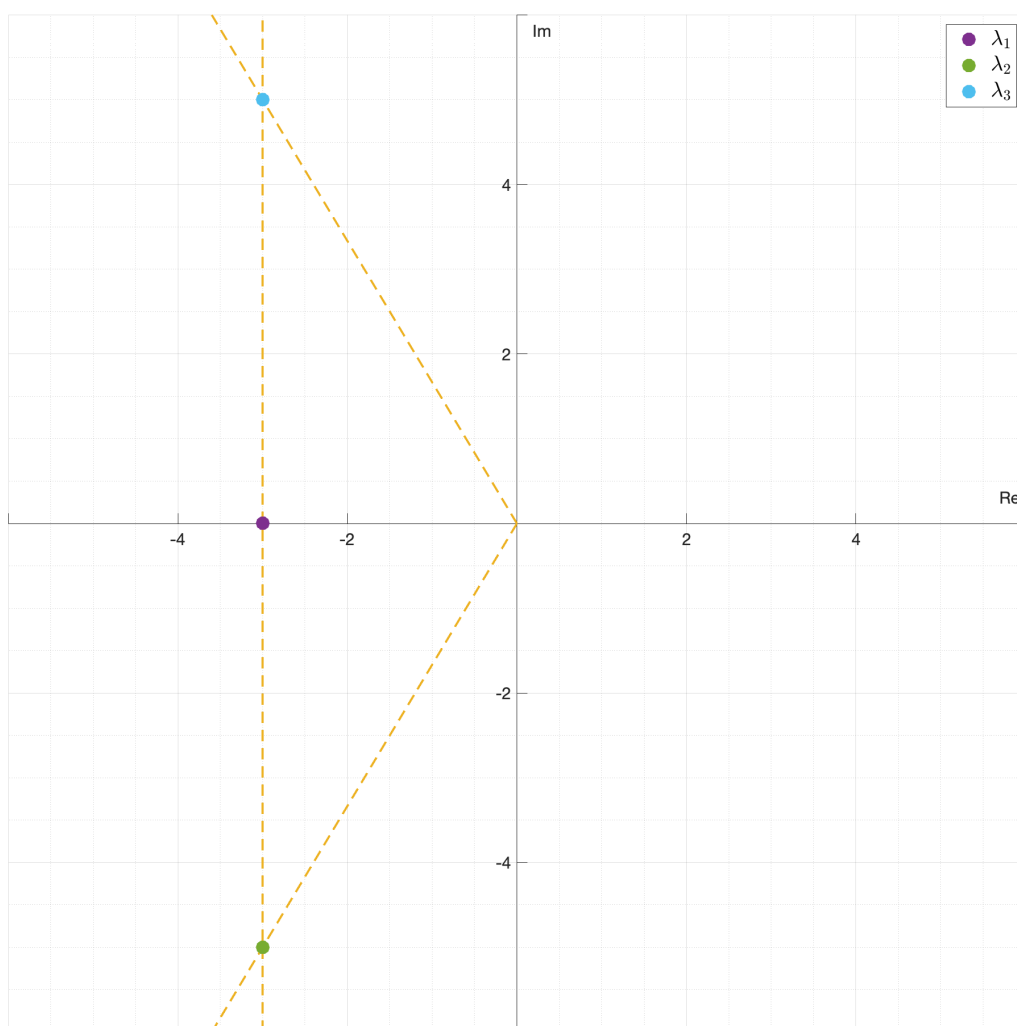


Рис. 21: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 6

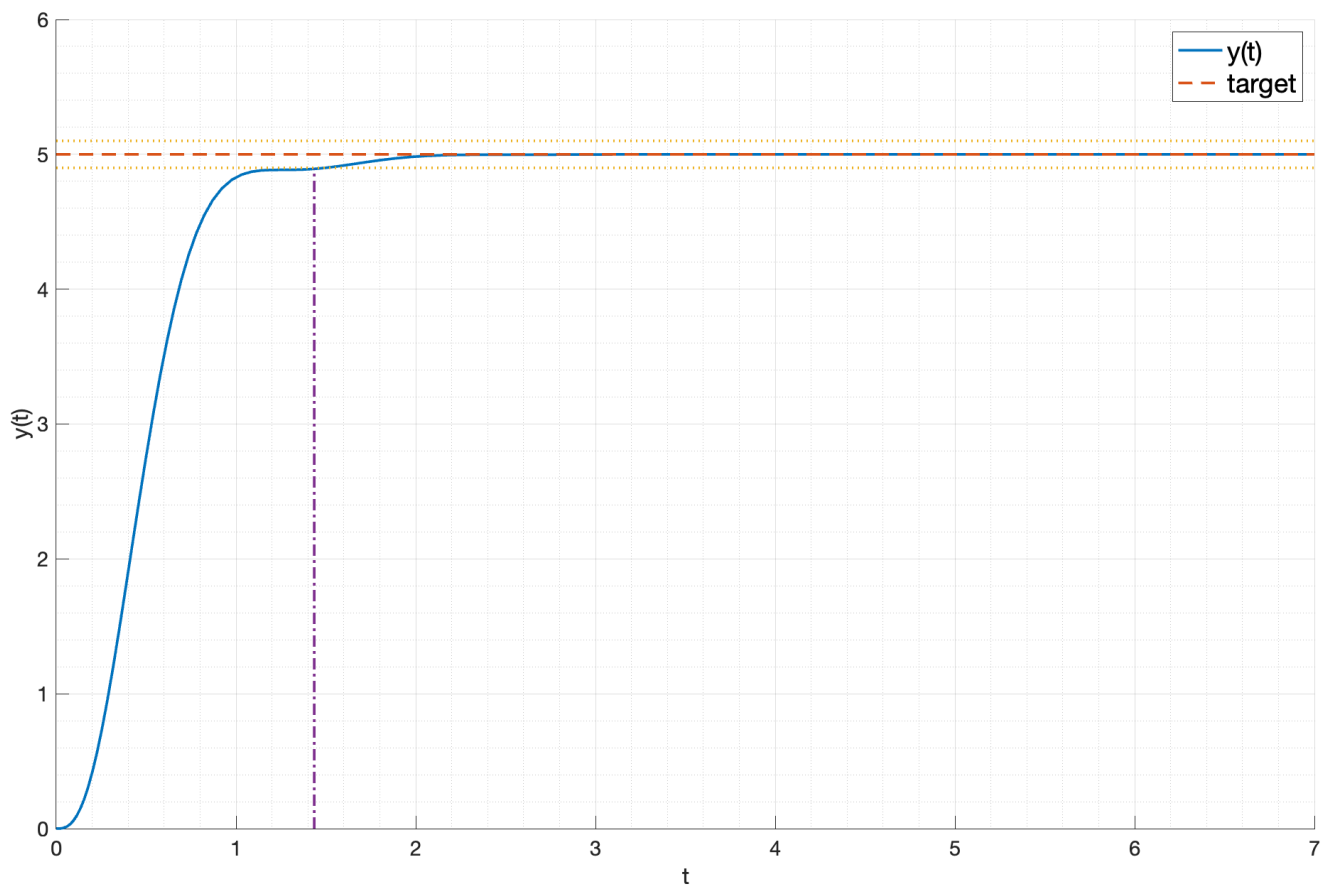


Рис. 22: Моделирование системы в эксперименте 6

значения действительной части корней характеристического уравнения, тем самым уменьшением угла наклона стороны трапеции и удаления правой границы от мнимой оси.

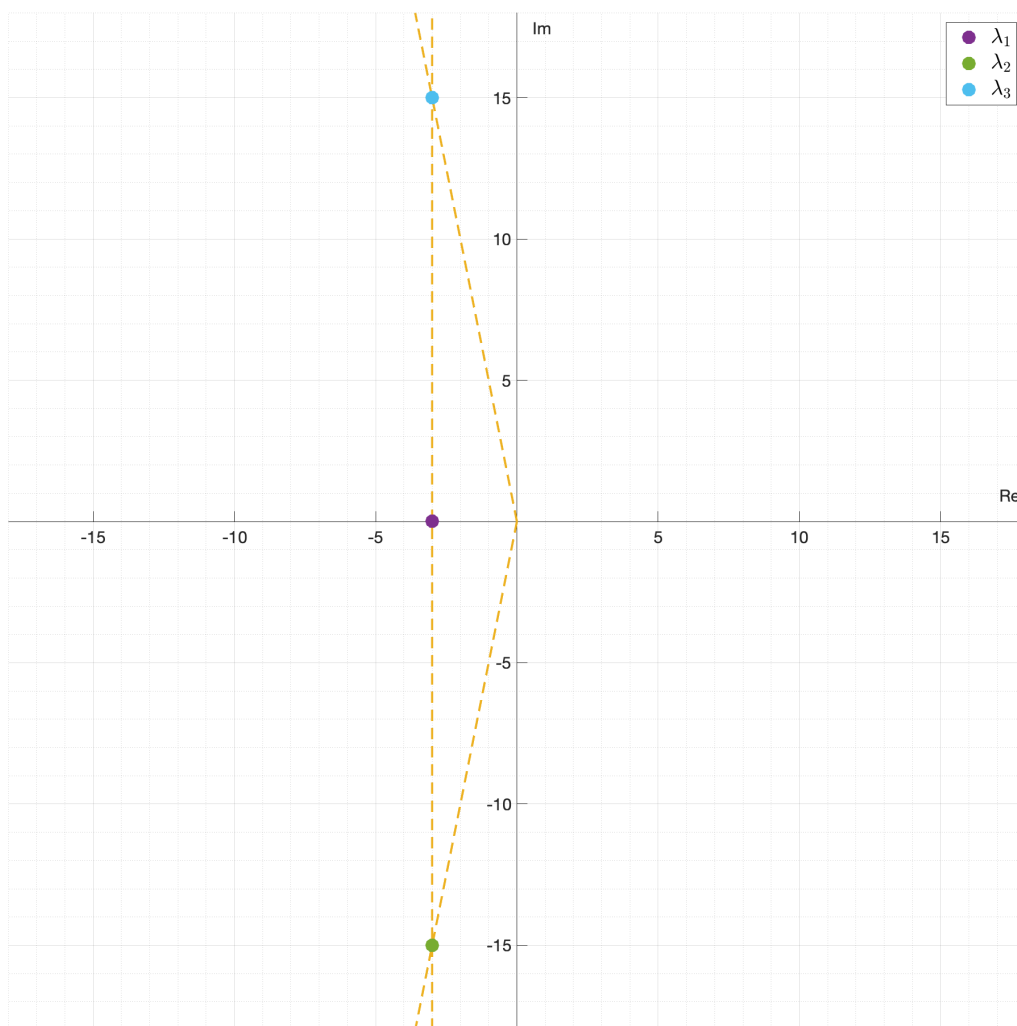


Рис. 23: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 7

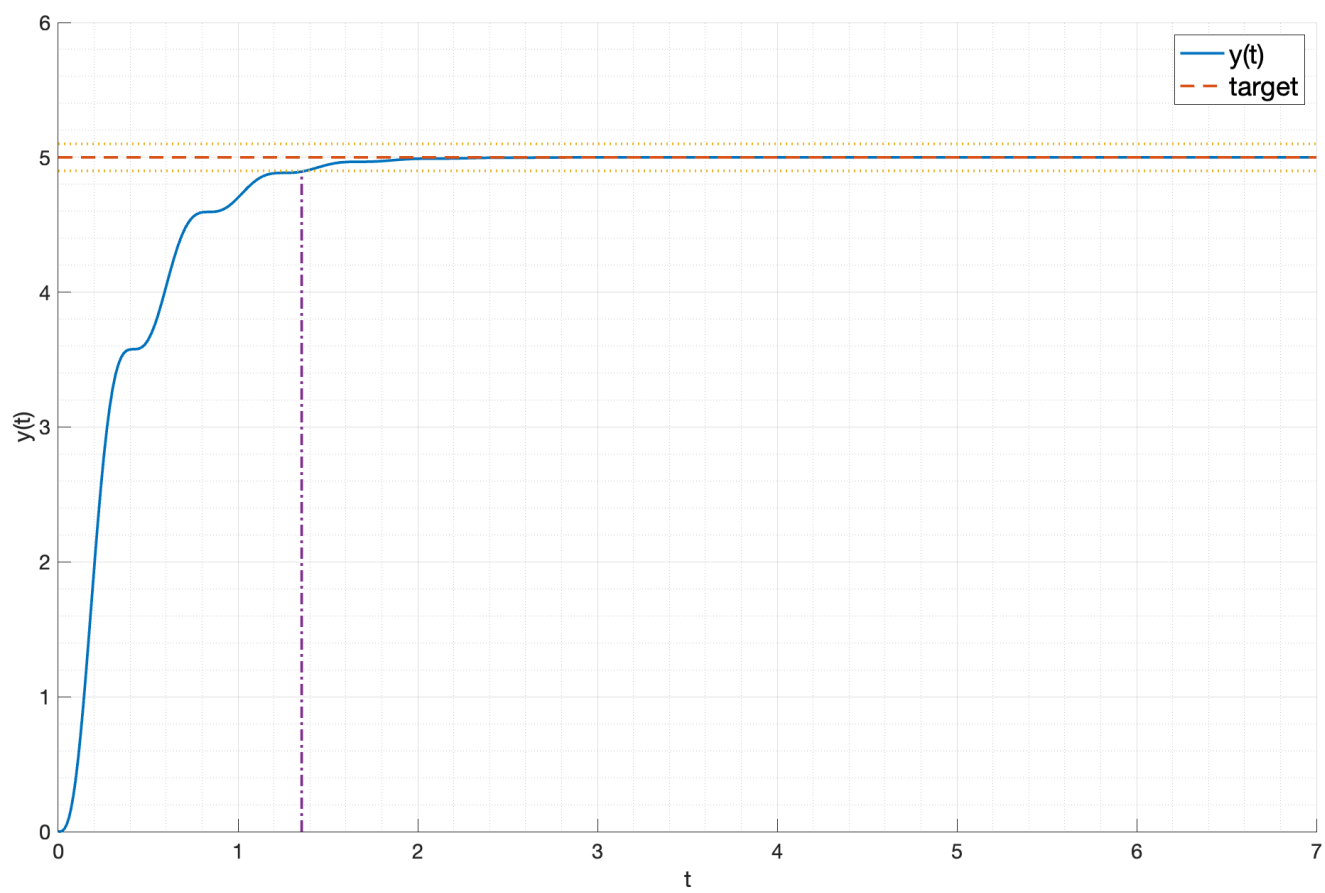


Рис. 24: Моделирование системы в эксперименте 7

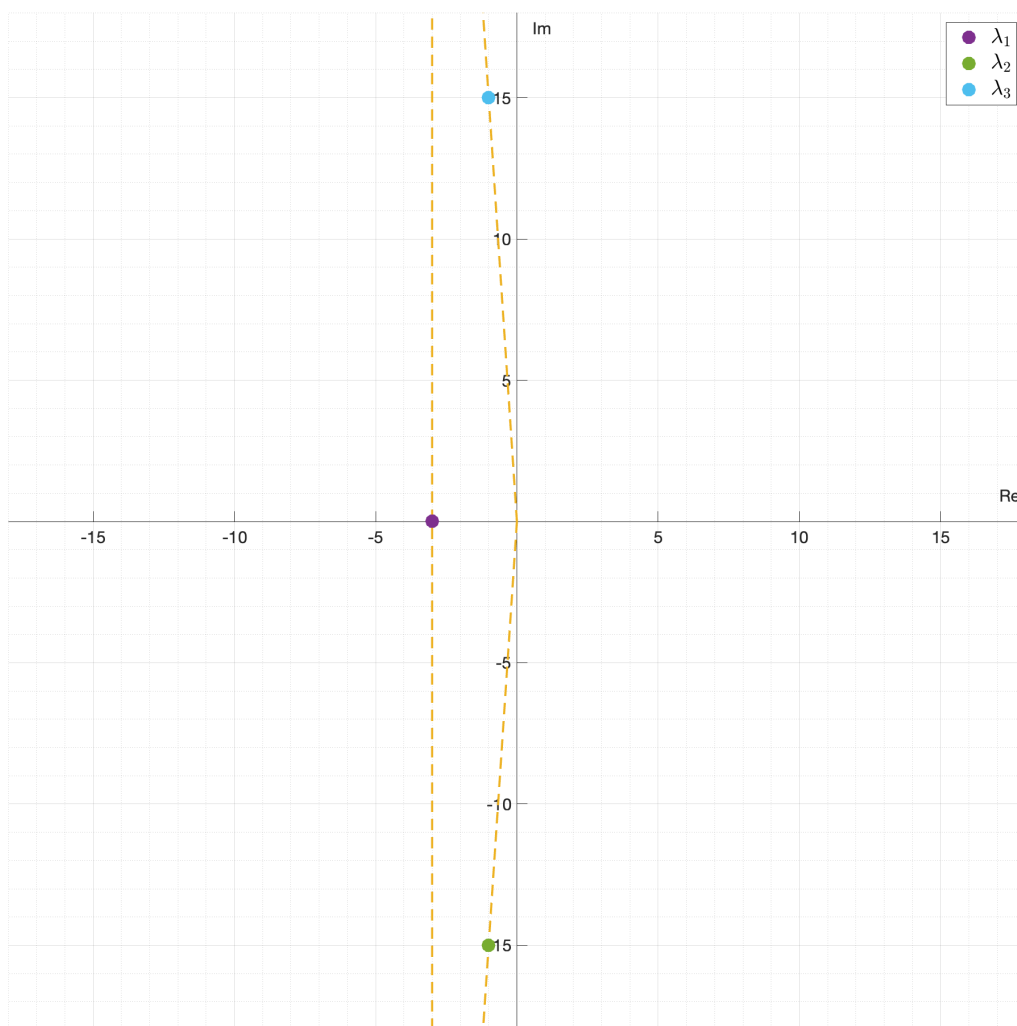


Рис. 25: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 8

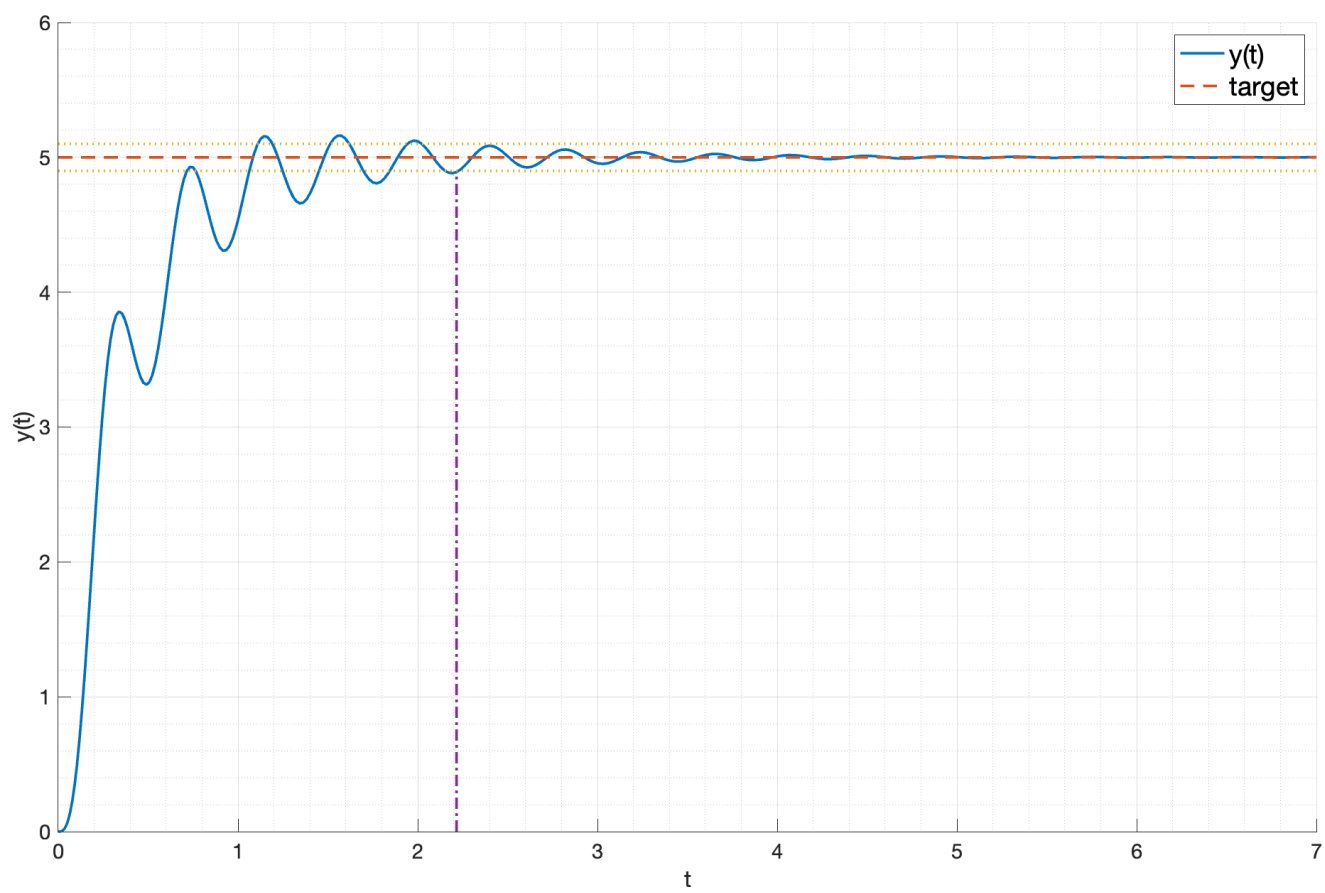


Рис. 26: Моделирование системы в эксперименте 8

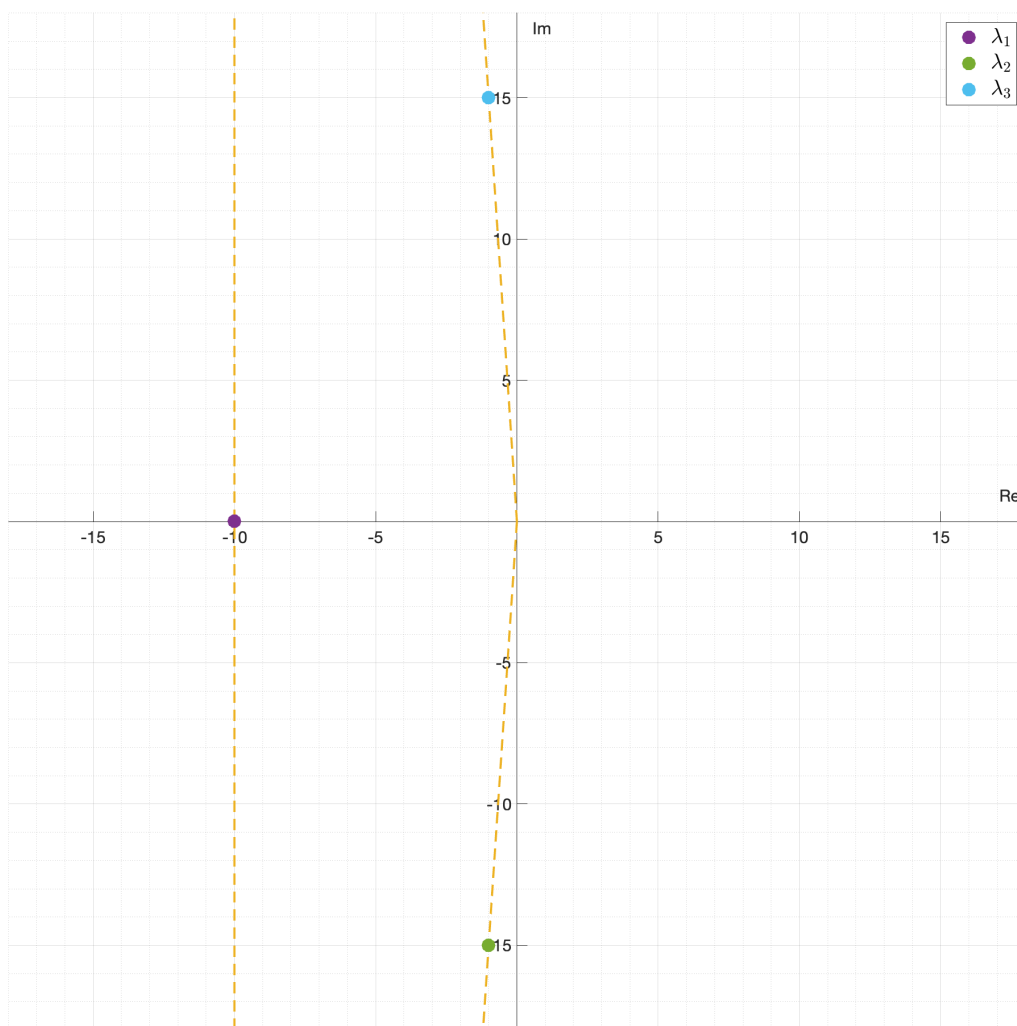


Рис. 27: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 9

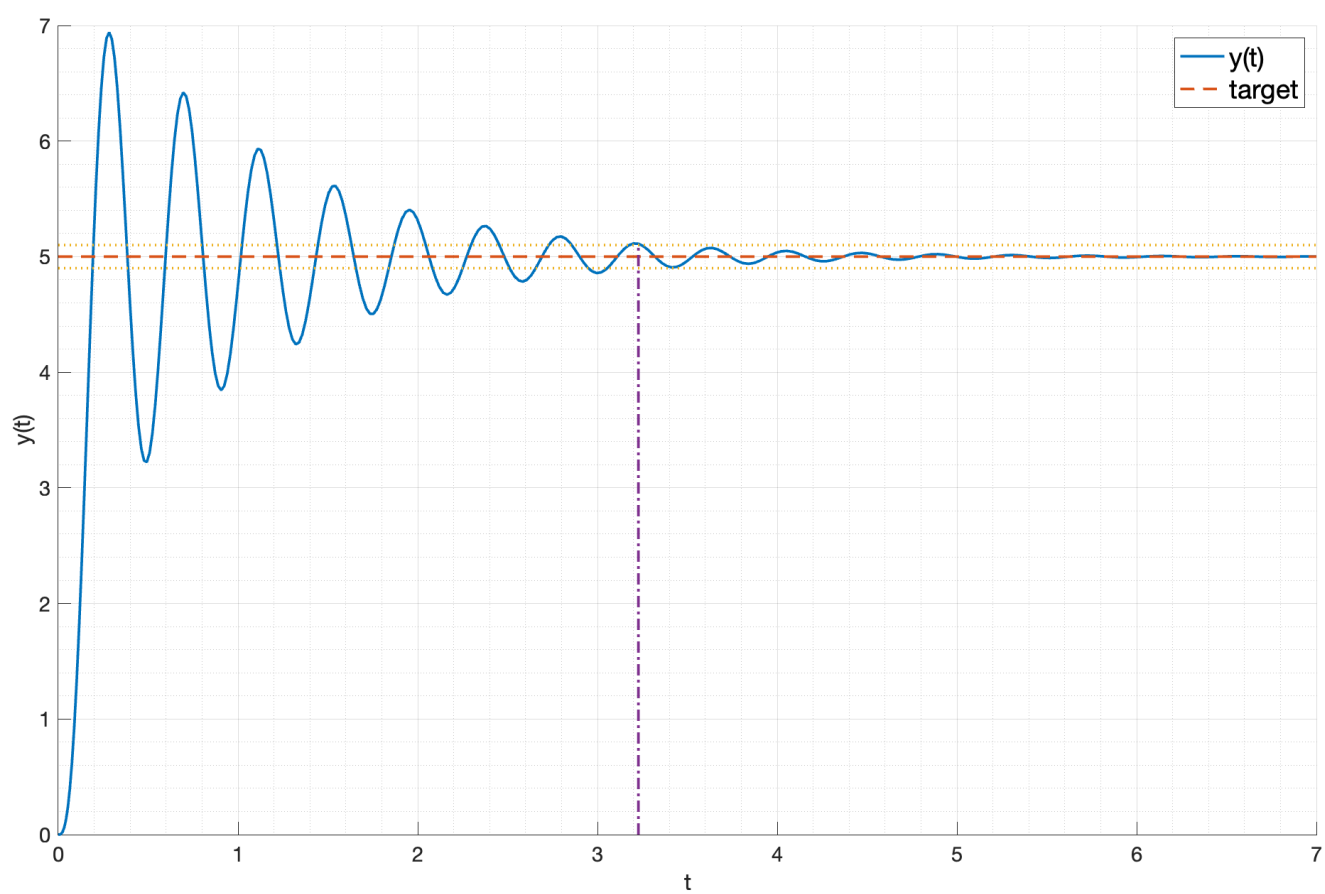


Рис. 28: Моделирование системы в эксперименте 9

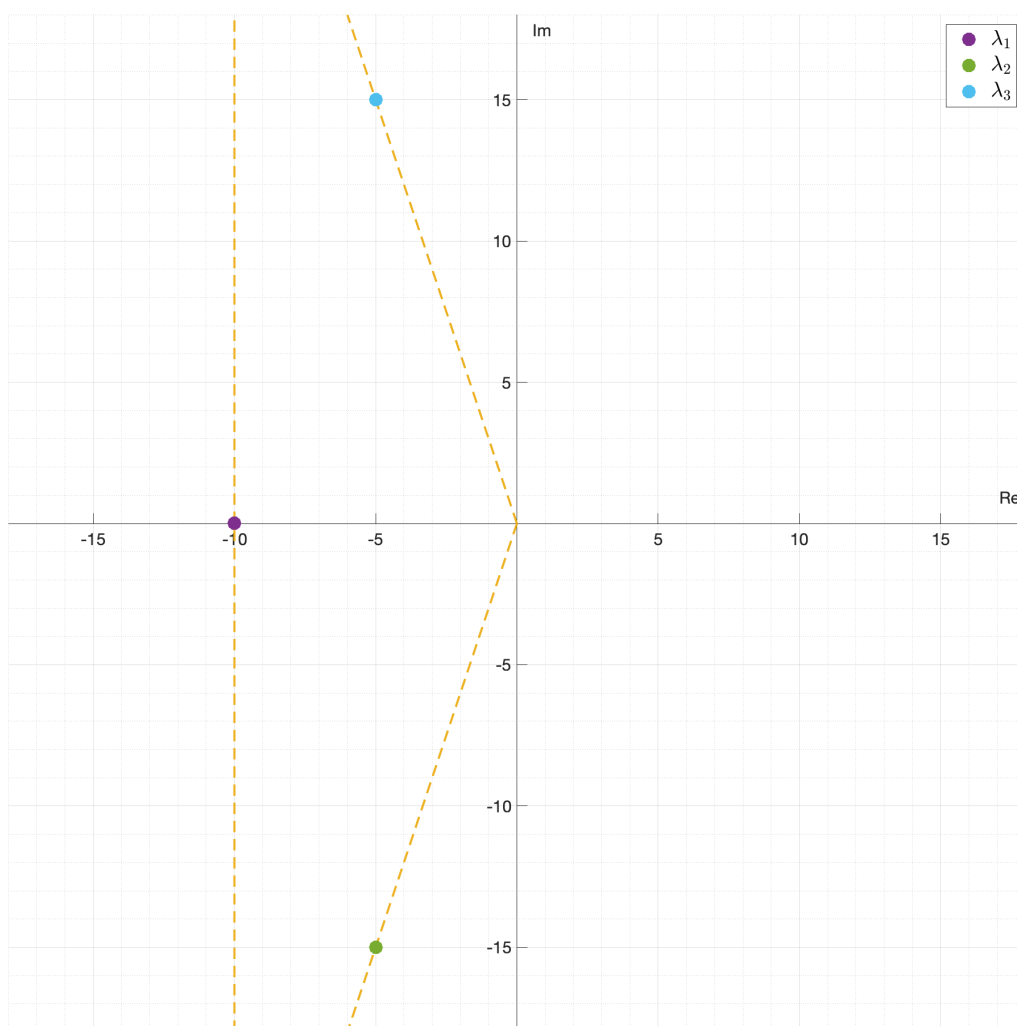


Рис. 29: Расположение корней на комплексной плоскости в эксперименте 10

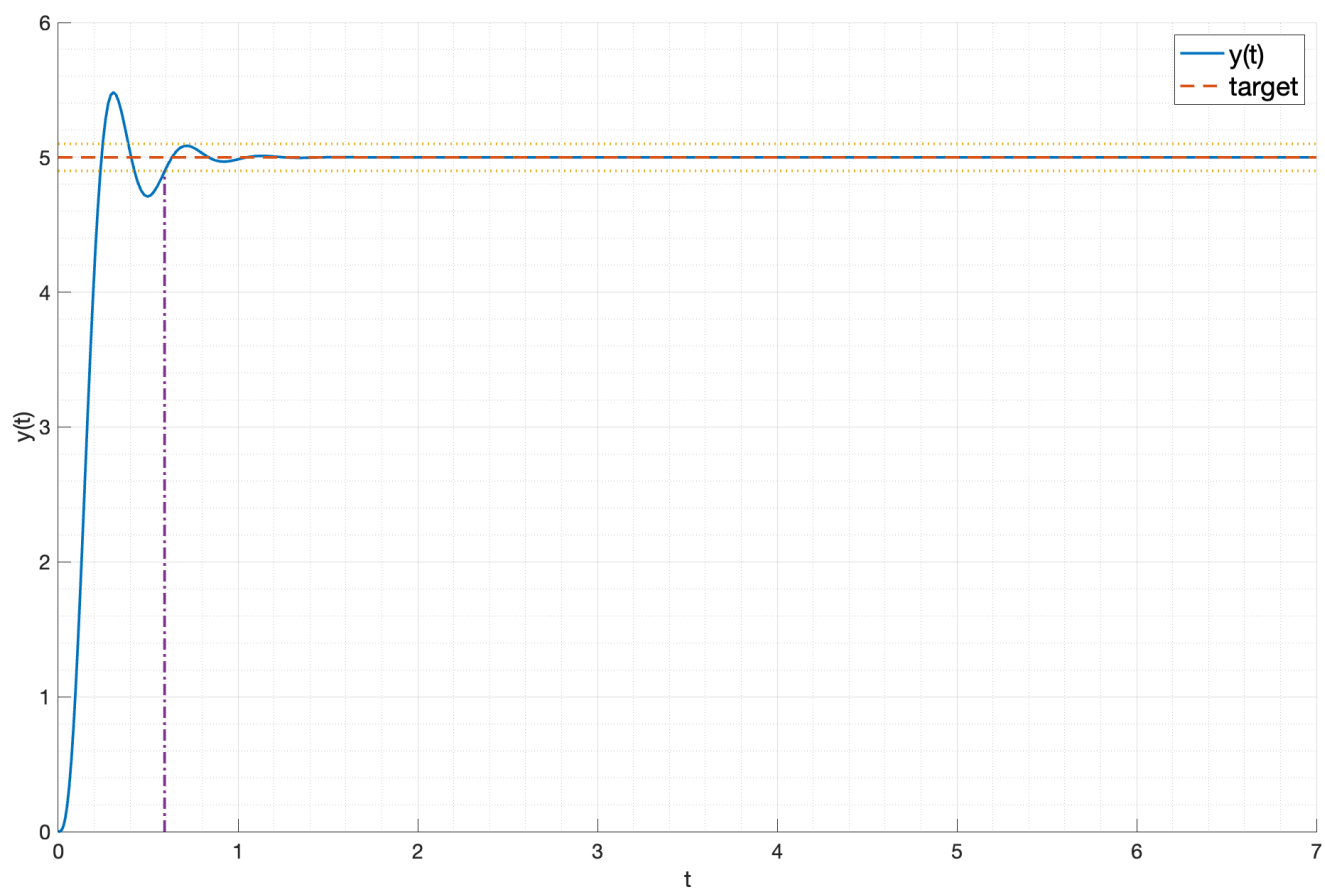


Рис. 30: Моделирование системы в эксперименте 10

2.3. Вывод

Номер	λ_1	λ_2	λ_3	T	σ	Ссылка
1	-3	-3	-3	2.45	0	2.2.1.
2	-5	-3	-3	2.15	0	2.2.2.
3	-5	-5	-3	1.83	0	2.2.3.
4	-5	-5	-1	4.31	0	2.2.4.
5	-5	-1	-1	5.94	0	2.2.5.
6	-3	-3-5i	-3+5i	1.43	0	2.2.6.
7	-3	-3-15i	-3+15i	1.35	0	2.2.7.
8	-3	-1-15i	-1+15i	2.21	3.2	2.2.8.
9	-10	-1-15i	-1+15i	3.22	38	2.2.9.
10	-10	-5-15i	-5+15i	0.59	9	2.2.10.

Таблица 3: Качество переходных процессов

В ходе моделирования систем с различными коэффициентами λ_1 , λ_2 , λ_3 были получены различные по качеству переходные процессы. В таблице 3 приведены результаты исследования.

Можно сделать вывод, что теоретические предположения о зависимости времени переходного процесса от максимального значения действительной части корней уравнения и перерегулирования от значения μ оказываются верными. В процессе моделирования не было обнаружено никаких аномалий, которые могли бы противоречить этим предположениям. Но и не было определено строгих зависимостей, так как каждый из параметров оказывает влияние на все характеристики переходного процесса.

Для достижения максимального качества переходного процесса необходимо учитывать все параметры и подбирать их так, чтобы они взаимно компенсировали друг друга.

3. Выводы

В лабораторной работе было рассмотрено вынужденное движение системы и характеристики переходных процессов. Были рассмотрены корневые критерии качества и проведено сравнение систем с разными коэффициентами.

Моделирование систем с различными входными сигналами показало, что даже устойчивая система может не сходиться к установившемуся значению при некоторых входных сигналах.

Начальные условия так же влияют на поведение системы, но глобальная структура переходного процесса остается неизменной.

Результаты симуляции показали, что при увеличении максимальной величины действительной части корней характеристического уравнения, время переходного процесса уменьшается. При этом, перерегулирование зависит от колебательности системы, которая пропорциональна значению $\mu = \max \left| \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \right|$.