



НИУ ИТМО

## ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Управляемость и наблюдаемость”

Вариант 30

Выполнил:

**Александр Иванов, R3338**

Преподаватели:

**Перегудин А.А.**

**Пашенко А.В.**

Санкт-Петербург, 2025

# Содержание

<b>1. Исследование управляемости</b>	<b>4</b>
1.1. Управляемость системы . . . . .	4
1.1.1. Матрица управляемости . . . . .	4
1.1.2. Управляемость собственных значений . . . . .	4
1.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	5
1.2. Грамиан управляемости . . . . .	6
1.3. Управление системой . . . . .	6
1.4. Вывод . . . . .	8
<b>2. Управляемое подпространство</b>	<b>9</b>
2.1. Управляемость системы . . . . .	9
2.1.1. Матрица управляемости . . . . .	9
2.1.2. Управляемость собственных значений . . . . .	9
2.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	10
2.2. Грамиан управляемости . . . . .	10
2.3. Управляемое подпространство . . . . .	11
2.4. Управление системой . . . . .	12
2.5. Вывод . . . . .	13
<b>3. Исследование наблюдаемости</b>	<b>14</b>
3.1. Наблюдаемость системы . . . . .	14
3.1.1. Матрица наблюдаемости . . . . .	14
3.1.2. Наблюдаемость собственных значений . . . . .	14
3.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	15

3.2. Грамиан наблюдаемости . . . . .	16
3.3. Наблюдение системы . . . . .	16
3.4. Вывод . . . . .	19
<b>4. Наблюдаемое подпространство</b>	<b>19</b>
4.1. Наблюдаемость системы . . . . .	19
4.1.1. Матрица наблюдаемости . . . . .	19
4.1.2. Наблюдаемость собственных значений . . . . .	20
4.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	20
4.2. Грамиан наблюдаемости . . . . .	21
4.3. Наблюдение системы . . . . .	21
4.4. Альтернативные начальные условия . . . . .	23
4.5. Вывод . . . . .	25
<b>5. Исследование управляемости по выходу</b>	<b>28</b>
5.1. Диагональная форма системы . . . . .	28
5.2. Управляемость по выходу . . . . .	29
5.3. Вывод . . . . .	30
<b>6. Выводы</b>	<b>30</b>

# 1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

## 1.1. Управляемость системы

### 1.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости  $U = [B, AB, A^2B]$ :

$$U = \left[ \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right] \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 3 \quad (4)$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то система является полностью управляемой согласно критерию Калмана.

### 1.1.2. Управляемость собственных значений

Найдем спектр матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{-3, -1 - 2j, -1 + 2j\} \quad (5)$$

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$  и определим ее ранг:

1.  $\lambda_1 = -3$ :  $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_1) = 3$ , собственное значение управляемо.
2.  $\lambda_2 = -1 - 2j$ :  $H_2 = \begin{bmatrix} 6 + 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 + 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 + 2j & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_2) = 3$ , собственное значение управляемо.
3.  $\lambda_3 = -1 + 2j$ :  $H_3 = \begin{bmatrix} 6 - 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 - 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 - 2j & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_3) = 3$ , собственное значение управляемо.

Так как выше было показано, что система является полностью управляемой, то каждое собственное значение матрицы  $A$  является управляемым.

### 1.1.3. Диагональная форма системы

Найдем диагональную форму системы, заменив базис на базис из собственных векторов матрицы  $A$ :

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (6)$$

Где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ . Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 - j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Тогда матрица  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 + j & -3 - j \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Система преобразуется к виду:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5-5j}{4} \\ \frac{5+5j}{4} \end{bmatrix} u \quad (9)$$

Так как все элементы  $P^{-1}B$  не равны нулю, то система является полностью управляемой, каждая мода системы управляема.

## 1.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости  $P(t_1)$ :

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (10)$$

Вычислим грамиан управляемости для  $t_1 = 3$  с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 18.12 & 10.97 & -11.64 \\ 10.97 & 7.48 & -8.48 \\ -11.64 & -8.48 & 10.14 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Найдем собственные числа Грамиана управляемости:

$$\sigma(P(3)) = \{0.05, 1.94, 33.74\} \quad (12)$$

Все собственные числа Грамиана управляемости положительны, что говорит о том, что система является управляемой.

## 1.3. Управление системой

Найдем управление  $u(t)$ , которое будет переводить систему из состояния  $x(0) = 0$  в состояние  $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$ .

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (13)$$

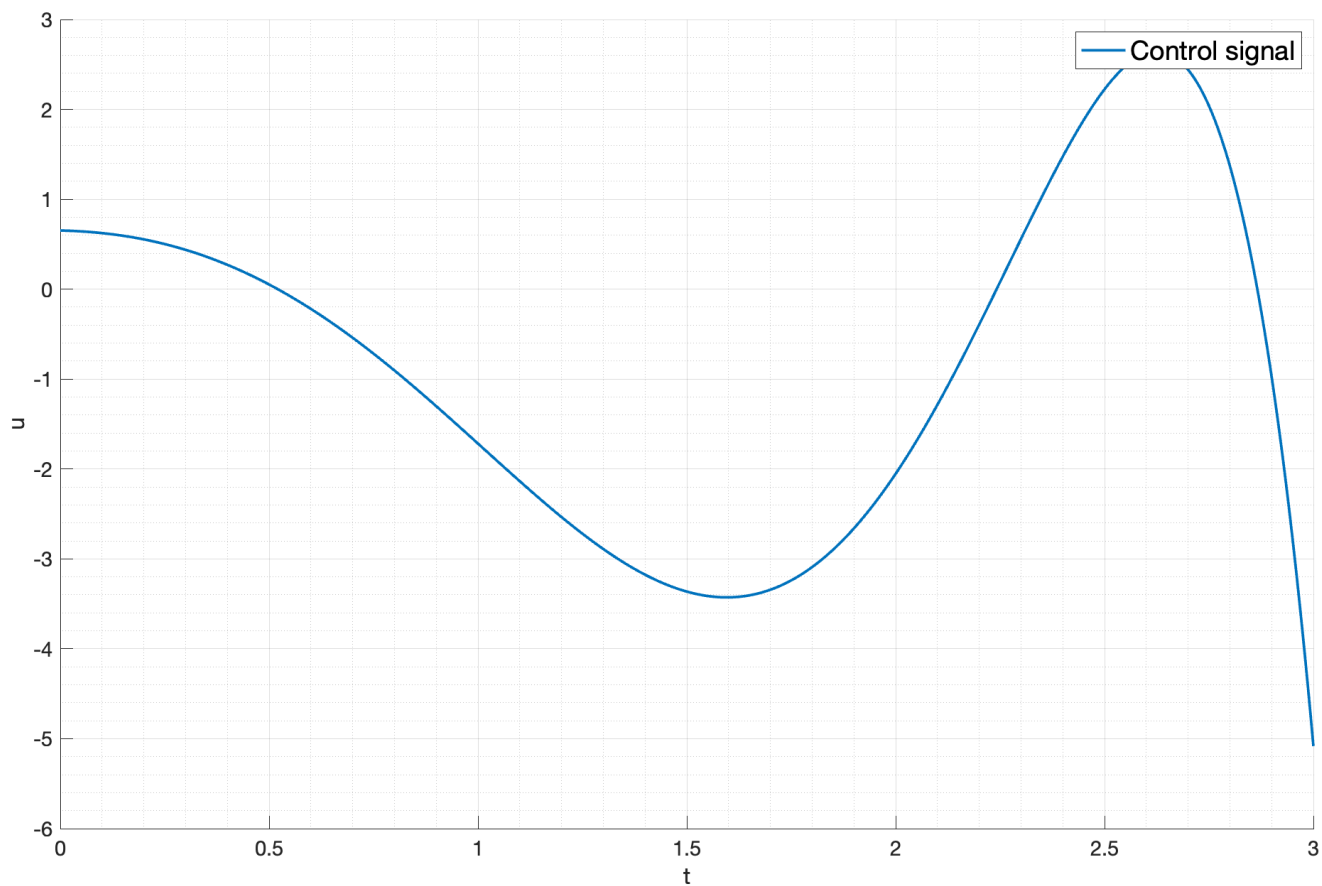


Рис. 1: Управление системой

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 1 изображено управление системой. На рисунке 2 изображено состояние системы.

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.

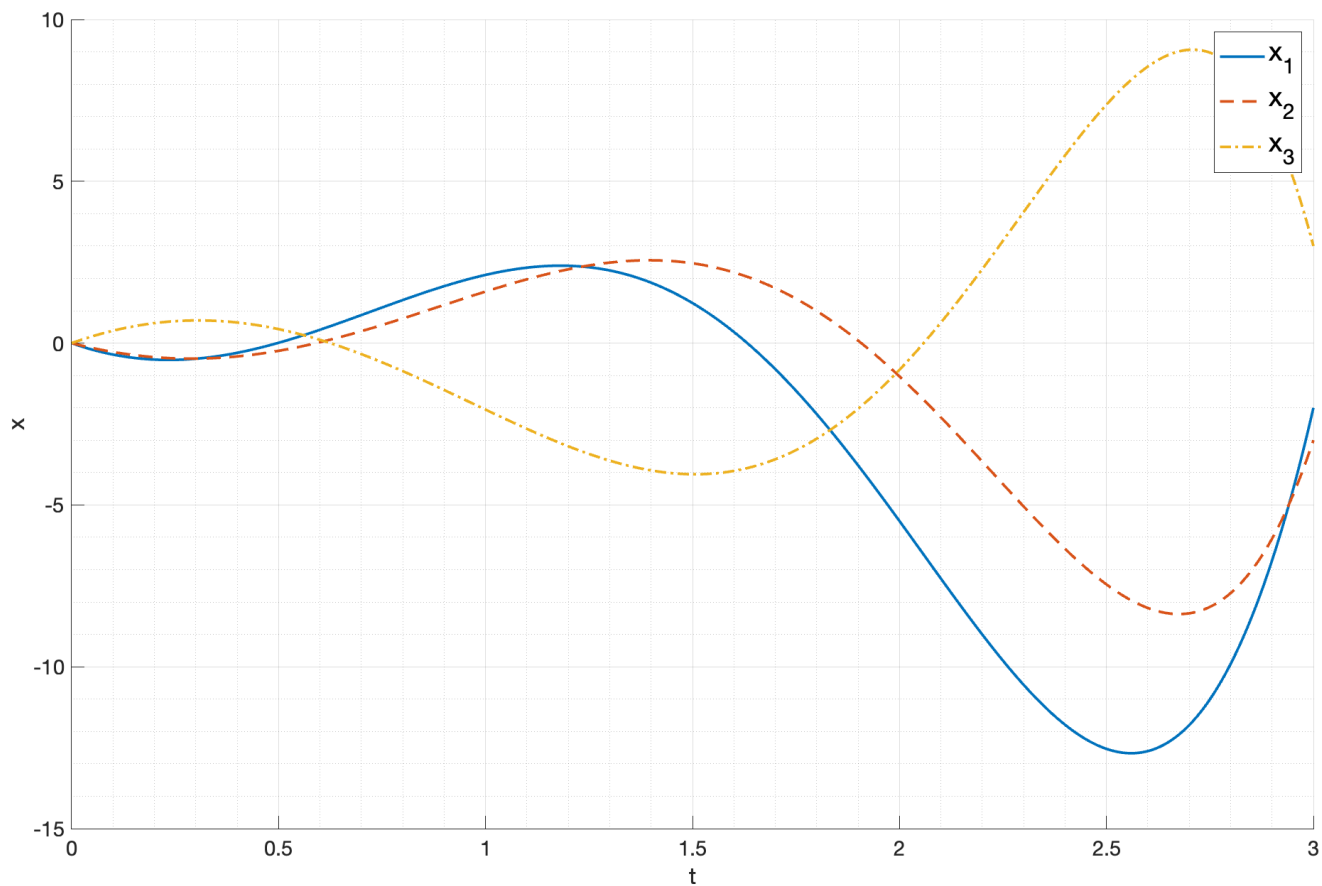


Рис. 2: Состояние системы

#### 1.4. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом заднии, удалось показать, что она является полностью управляемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через управляемость собственных значений и диагональную форму системы. Также был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты моделирования показали, что система управляема и управление работает корректно.



## 2. Управляемое подпространство

Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 2.1. Управляемость системы

#### 2.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости  $U = [B, AB, A^2B]$ :

$$U = \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \quad (15)$$

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 2 \quad (17)$$

Так как ранг матрицы управляемости меньше размерности матрицы  $A$ , система не является полностью управляемой.

#### 2.1.2. Управляемость собственных значений

Определим управляемость собственных значений матрицы  $A$ . Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$  и определим ее ранг:

1.  $\lambda_1 = -3$ :  $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_1) = 2$ , собственное значение не управляемо.
2.  $\lambda_2 = -1-2j$ :  $H_2 = \begin{bmatrix} 6+2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2+2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6+2j & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_2) = 3$ , собственное значение управляемо.
3.  $\lambda_3 = -1+2j$ :  $H_3 = \begin{bmatrix} 6-2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2-2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6-2j & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_3) = 3$ , собственное значение управляемо.

### 2.1.3. Диагональная форма системы

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3-7j}{4} \\ \frac{3+7j}{4} \end{bmatrix} u \quad (18)$$

Первое число в векторе  $P^{-1}B$  равно нулю, значит, что первое состояние системы не является управляемым. Результаты совпали с результатами, полученными при анализе управляемости собственных значений через матрицу Хаутуса.

## 2.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости  $P(t_1)$ :

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (19)$$

Вычислим грамиан управляемости для  $t_1 = 3$  с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 26.65 & 13.37 & -13.37 \\ 13.37 & 8.28 & -8.28 \\ -13.37 & -8.28 & 8.28 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Найдем собственные числа Грамиана управляемости:

$$\sigma(P(3)) = \{0, 2.03, 41.17\} \quad (21)$$

Первое собственное число равно нулю, что говорит о том, что Грамиан является вырожденным и система не является полностью управляемой. Таким образом, для дальнейшего нахождения управления необходимо использовать псевдообратную матрицу.

### 2.3. Управляемое подпространство

Выясним, принадлежат ли точки  $x'_1$  и  $x''_1$  управляемому подпространству:

$$x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x''_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Для этого можно записать расширенную матрицу управляемости  $U'$  и найти ранг этой матрицы:

$$U' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -2 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{rank}(U') = 2 \quad (24)$$

$$U'' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -3 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{rank}(U'') = 3 \quad (26)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а точка  $x''_1$  не принадлежит. В дальнейшем будем обозначать  $x'_1$  как  $x_1$ .

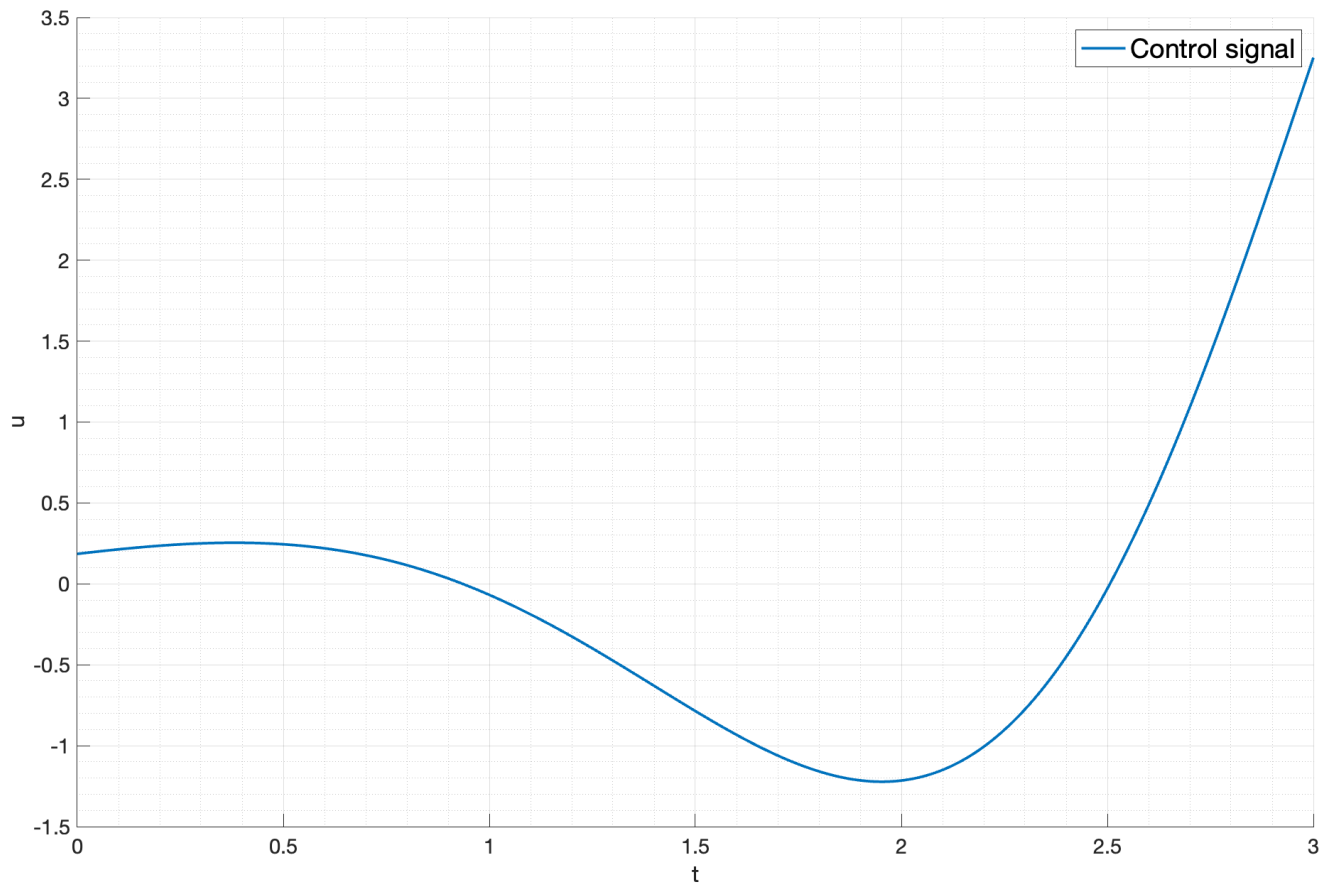


Рис. 3: Управление системой

## 2.4. Управление системой

Найдем управление  $u(t)$ , которое будет переводить систему из состояния  $x(0) = 0$  в состояние  $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$ .

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (27)$$

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 3 изображено управление системой. На рисунке 4 изображено состояние системы.

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.

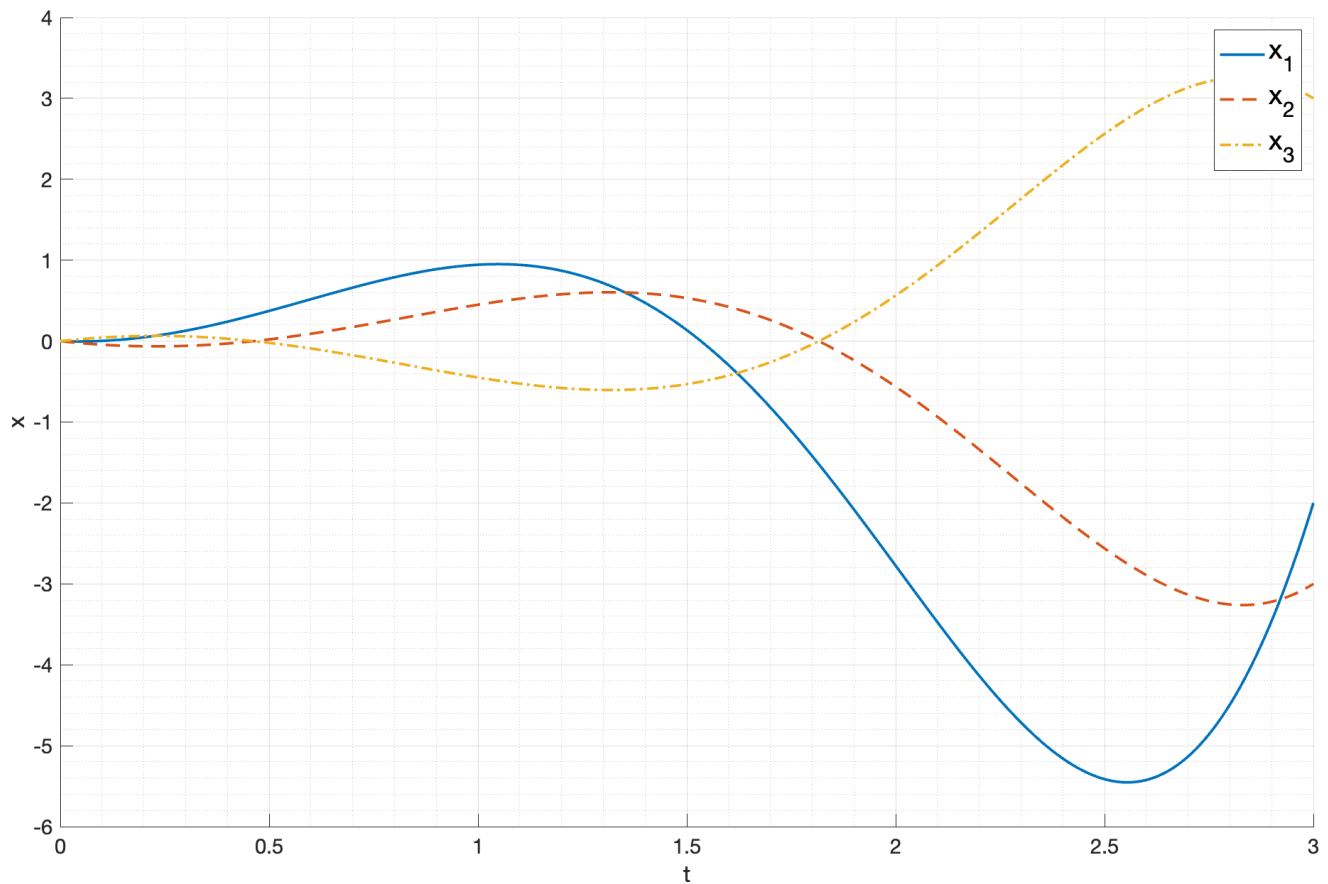


Рис. 4: Состояние системы

## 2.5. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом задании, получилось доказать, что она не является полностью управляемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через управляемость собственных значений и диагональную форму системы. При этом оказалось, что собственное число  $\lambda_1 = -3$  не является управляемым. Также был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Одно из собственных чисел равно нулю, что говорит о том, что система не является полностью управляемой.

Были рассмотрены две точки  $x'_1$  и  $x''_1$  и проверена их принадлежность управляемому подпространству. Точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а точка  $x''_1$  не принадлежит. Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты моделирования показали, что система управляема и управление работает корректно.

### 3. Исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -18 \\ -3 & -4 & -8 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

#### 3.1. Наблюдаемость системы

##### 3.1.1. Матрица наблюдаемости

Найдем матрицу наблюдаемости  $W = [C, CA, CA^2]^T$ :

$$W = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 22 & 19 & 43 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Определим ранг матрицы наблюдаемости:

$$\text{rank}(W) = 3 \quad (31)$$

Таким образом, система является полностью наблюдаемой.

##### 3.1.2. Наблюдаемость собственных значений

Найдем спектр матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{1, -2 - 5j, -2 + 5j\} \quad (32)$$

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = [A - \lambda_i, C]^T$ :

$$1. \lambda_1 = 1: H_1 = \begin{bmatrix} -11 & -7 & -18 \\ -3 & -5 & -8 \\ 8 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_1) = 3, \text{собственное значение наблюдаемо.}$$

$$2. \lambda_2 = -2 - 5j: H_2 = \begin{bmatrix} -8 + 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 + 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 + 5j \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_2) = 3, \text{собственное значение наблюдаемо.}$$

$$3. \lambda_3 = -2 + 5j: H_3 = \begin{bmatrix} -8 - 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 - 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 - 5j \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_3) = 3, \text{собственное значение наблюдаемо.}$$

Все собственные значения наблюдаемы, что сходится с результатом, полученным при анализе матрицы наблюдаемости.

### 3.1.3. Диагональная форма системы

Найдем диагональную форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} \\ y = CP\hat{x}, \end{cases} \quad (33)$$

где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ . Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1.5 - 0.5j \\ -1.5 - 0.5j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1.5 + 0.5j \\ -1.5 + 0.5j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Тогда матрица  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 - 0.5j & -1.5 + 0.5j \\ -1 & -1.5 - 0.5j & -1.5 + 0.5j \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 5j & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 5j \end{bmatrix} \hat{x} \\ y = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 + 0.5j & -0.5 - 0.5j \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases} \quad (36)$$

Так как все элементы матрицы  $CP$  не равны нулю, система является полностью наблюдаемой.

### 3.2. Грамиан наблюдаемости

Найдем грамиан наблюдаемости  $Q(t_1)$ :

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (37)$$

Вычислим грамиан наблюдаемости для  $t_1 = 3$ :

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 804.17 & -804.51 & 804.12 \\ -804.51 & 805.18 & -804.28 \\ 804.12 & -804.28 & 804.22 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Найдем собственные числа грамиана наблюдаемости:

$$\sigma(Q(3)) = \{0.013, 0.42, 2413.13\} \quad (39)$$

Все собственные числа грамиана наблюдаемости положительны, что говорит о том, что система является наблюдаемой.

### 3.3. Наблюдение системы

Будем считать, что выход системы соответствует функции  $y(t)$ :

$$y(t) = e^{-2t} \cos(5t) - 2e^{-2t} \sin(5t) \quad (40)$$



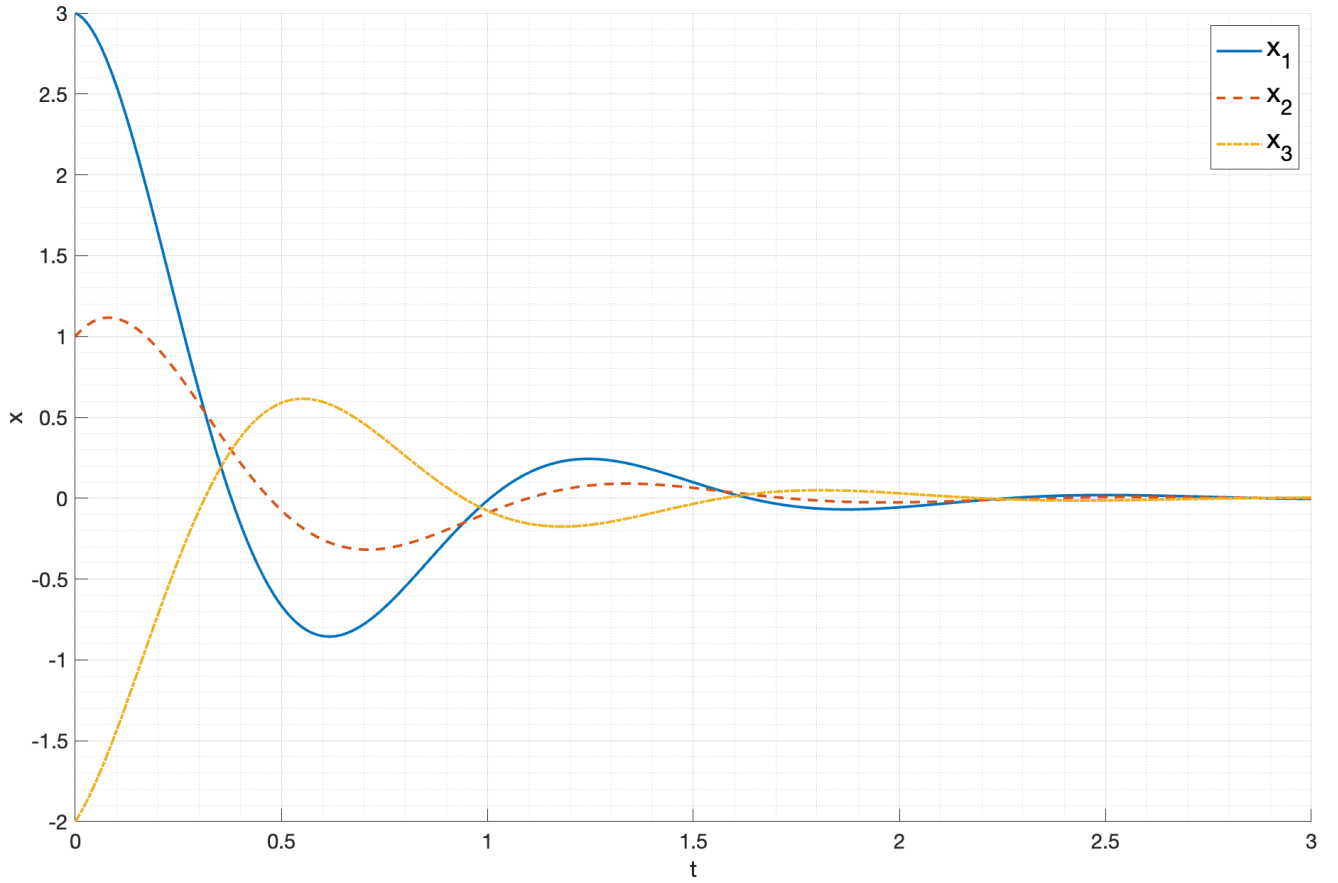


Рис. 5: Состояния системы

Найдем начальные условия  $x(0)$  такие, чтобы выход системы совпадал с функцией  $y(t)$ :

$$x(0) = Q(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \quad (41)$$

Получаем вектор начальных условий:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

Проведем моделирование системы с начальными условиями  $x(0)$  и входом  $u(t) = 0$ : На рисунке 5 изображены состояния системы. На рисунке 6 изображен выход системы. Видно, что выход системы совпадает с функцией  $y(t)$ . На рисунке 7 изображена ошибка наблюдения. Видно, что ошибка наблюдения стремится к нулю и не превышает  $10^{-11}$ .

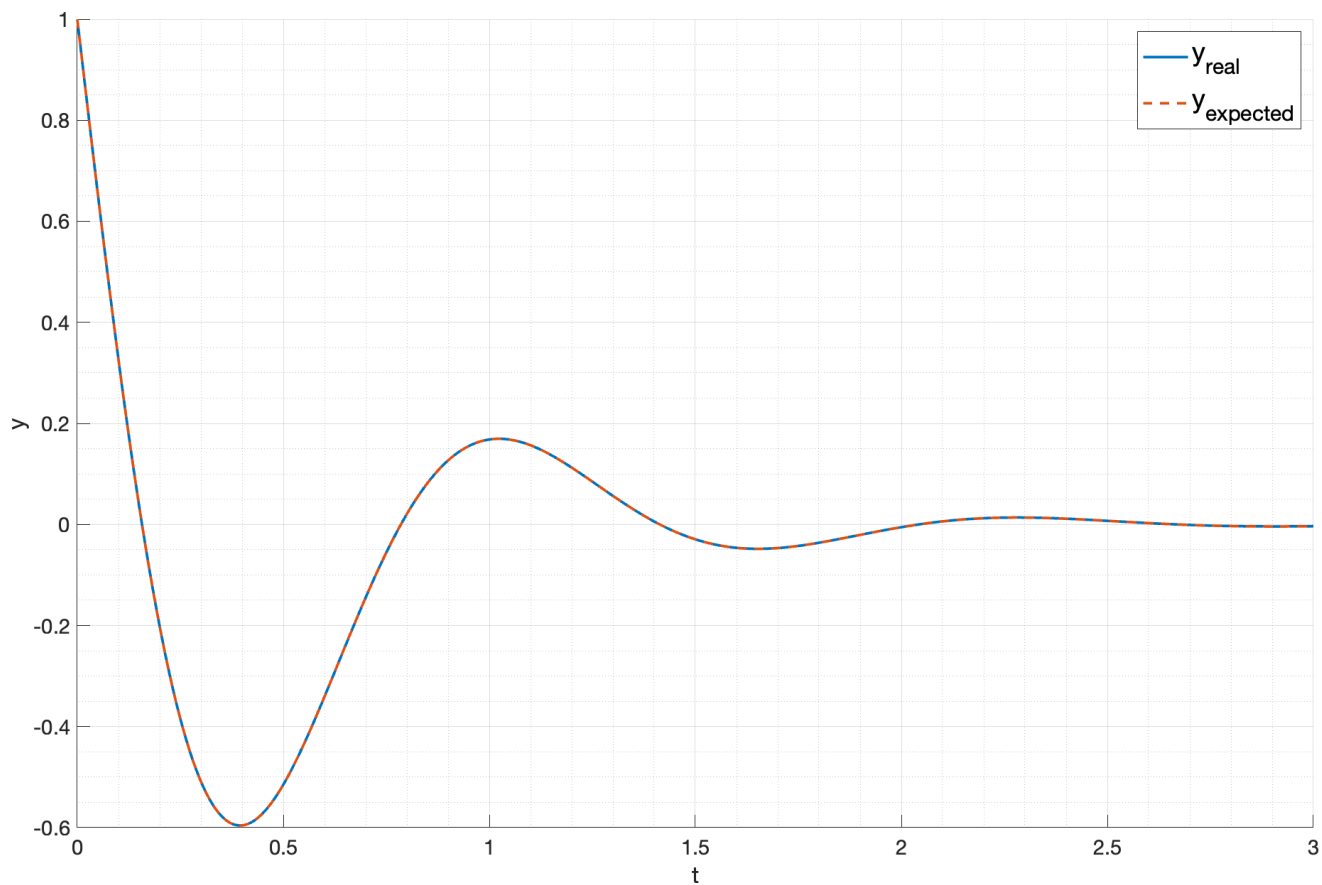


Рис. 6: Выход системы

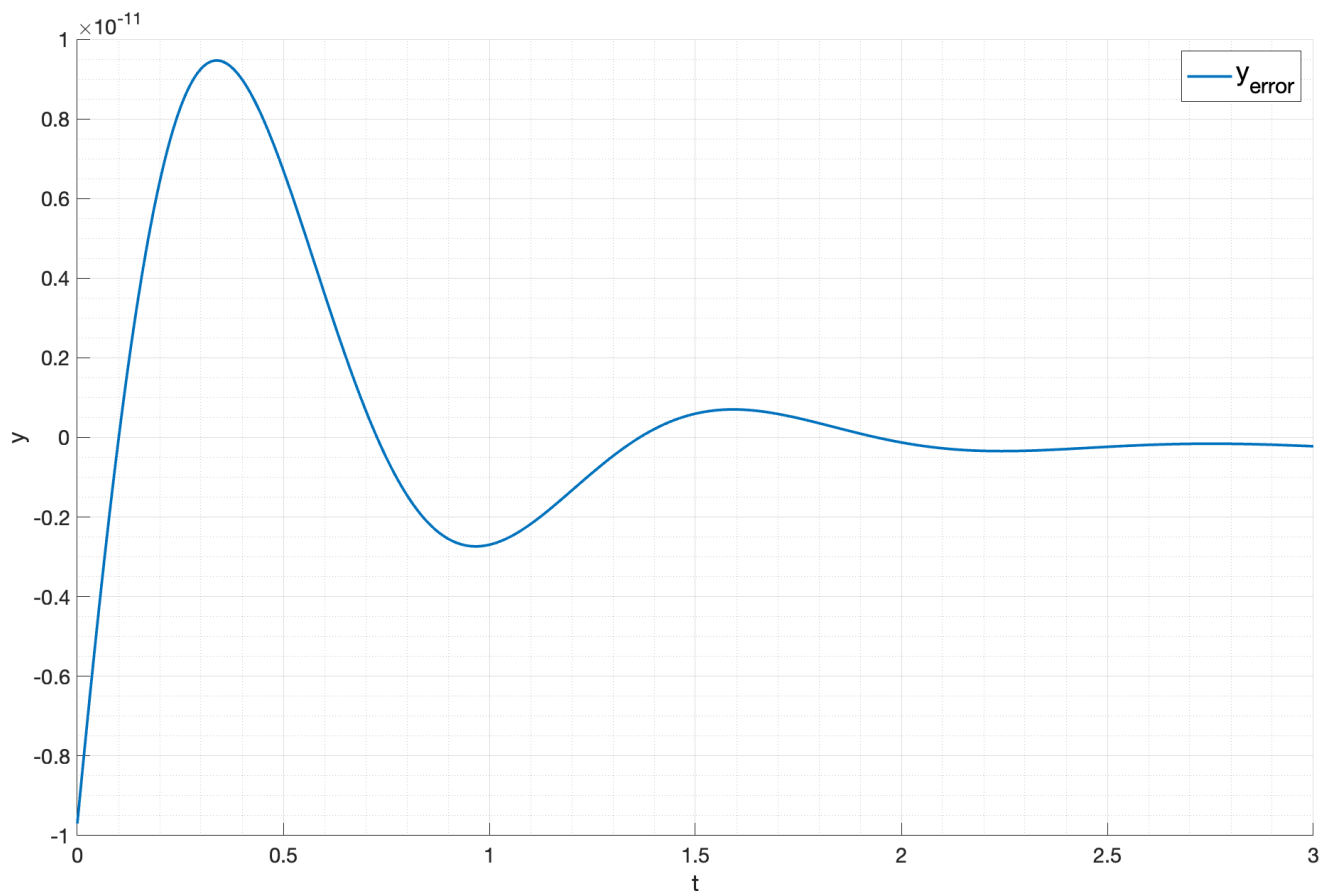


Рис. 7: Ошибка наблюдения

### 3.4. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом задании, удалось показать, что она является полностью наблюдаемой. Это было продемонстрировано с помощью матрицы наблюдаемости, через наблюдаемость собственных значений и диагональную форму системы. Также был найден грамиан наблюдаемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с начальными условиями, при которых выход системы совпадает с заданной функцией. Результаты моделирования показали, что система наблюдаема и наблюдение работает корректно.

## 4. Наблюдаемое подпространство

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -18 \\ -3 & -4 & -8 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

### 4.1. Наблюдаемость системы

#### 4.1.1. Матрица наблюдаемости

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 20 & 21 & 41 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Определим ранг матрицы наблюдаемости:

$$\text{rank}(W) = 2 \quad (46)$$

Так как ранг матрицы наблюдаемости меньше порядка системы, то система не является полностью наблюдаемой.

#### 4.1.2. Наблюдаемость собственных значений

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = [A - \lambda_i, C]^T$ :

$$1. \lambda_1 = -2 + 5j : \begin{bmatrix} -8 - 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 - 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 - 5j \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_1) = 3, \text{собственное значение} \\ \text{наблюдаемо}$$

$$2. \lambda_2 = -2 - 5j : \begin{bmatrix} -8 + 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 + 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 + 5j \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_2) = 3, \text{собственное значение} \\ \text{наблюдаемо}$$

$$3. \lambda_3 = 1 : \begin{bmatrix} -11 & -7 & -18 \\ -3 & -5 & -8 \\ 8 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_3) = 2, \text{собственное значение не наблюдаемо}$$

Как и было показано ранее, система не является полностью наблюдаемой. Таким образом, наблюдаемое подпространство системы состоит из двух векторов.

#### 4.1.3. Диагональная форма системы

Диагональная форма системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 5j & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 5j \end{bmatrix} \hat{x} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 + 0.5j & -0.5 - 0.5j \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases} \quad (47)$$

Первый элемент вектора  $CP$  равен нулю, откуда можно сделать вывод, что первая мода системы не является наблюдаемой.

## 4.2. Грамиан наблюдаемости

Найдем грамиан наблюдаемости  $Q(3)$ :

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.04 & 0.15 \\ 0.04 & 0.14 & 0.19 \\ 0.15 & 0.19 & 0.34 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Собственные числа грамиана наблюдаемости:

$$\sigma(Q(3)) = \{0, 0.083, 0.51\} \quad (49)$$

Есть одно нулевое собственное число, что говорит о том, что система не является полностью наблюдаемой.

## 4.3. Наблюдение системы

Будем считать, что выход системы соответствует функции  $y(t)$ :

$$y(t) = e^{-2t} \cos(5t) - 2e^{-2t} \sin(5t) \quad (50)$$

Найдем начальные условия  $x(0)$  такие, чтобы выход системы совпадал с функцией  $y(t)$ :

$$x(0) = Q(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \quad (51)$$

Получаем вектор начальных условий:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (52)$$

Проведем моделирование системы с начальными условиями  $x(0)$  и входом  $u(t) = 0$ : На рисунке 8 изображены состояния системы. На рисунке 9 изображен выход системы. Видно,

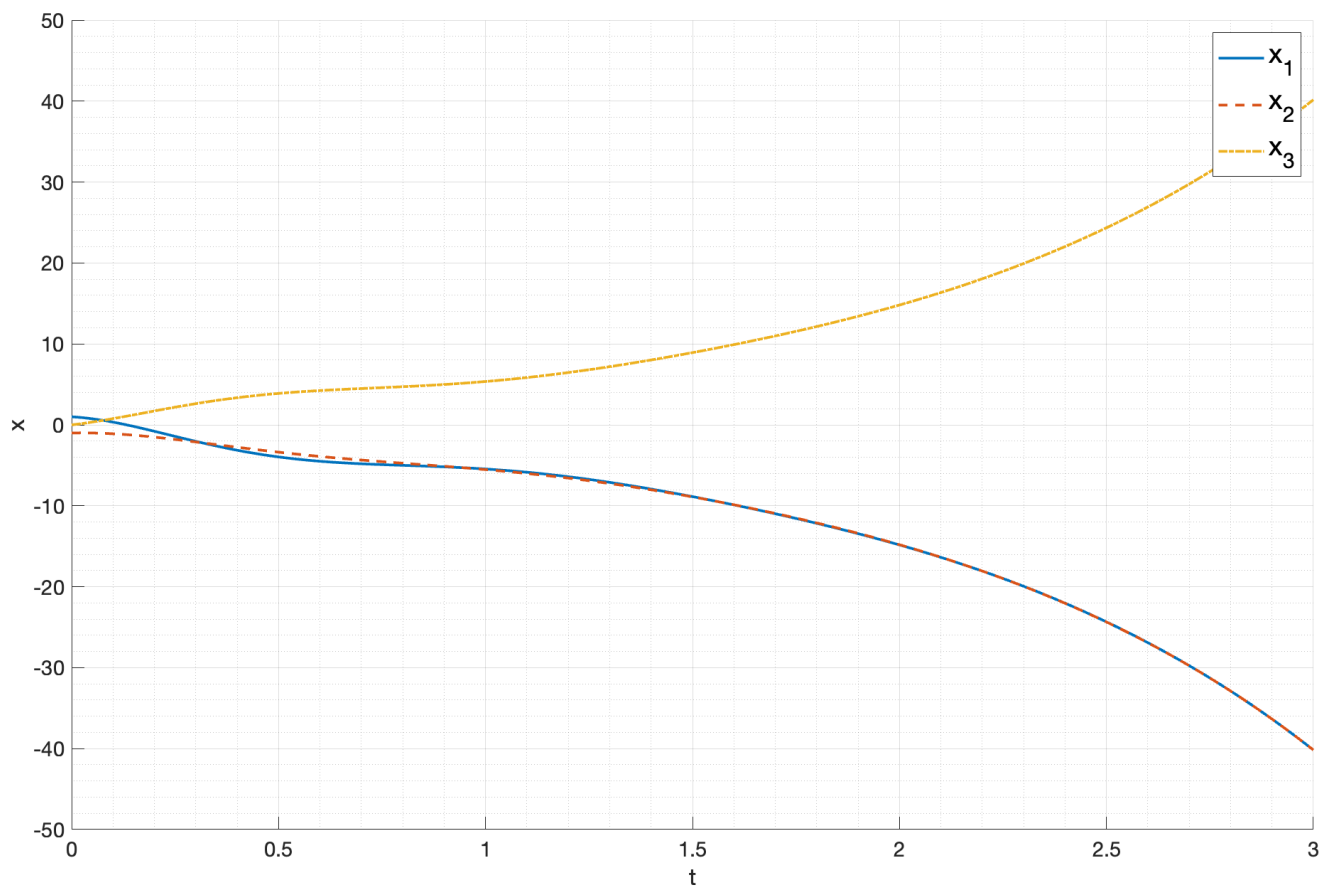


Рис. 8: Состояния системы

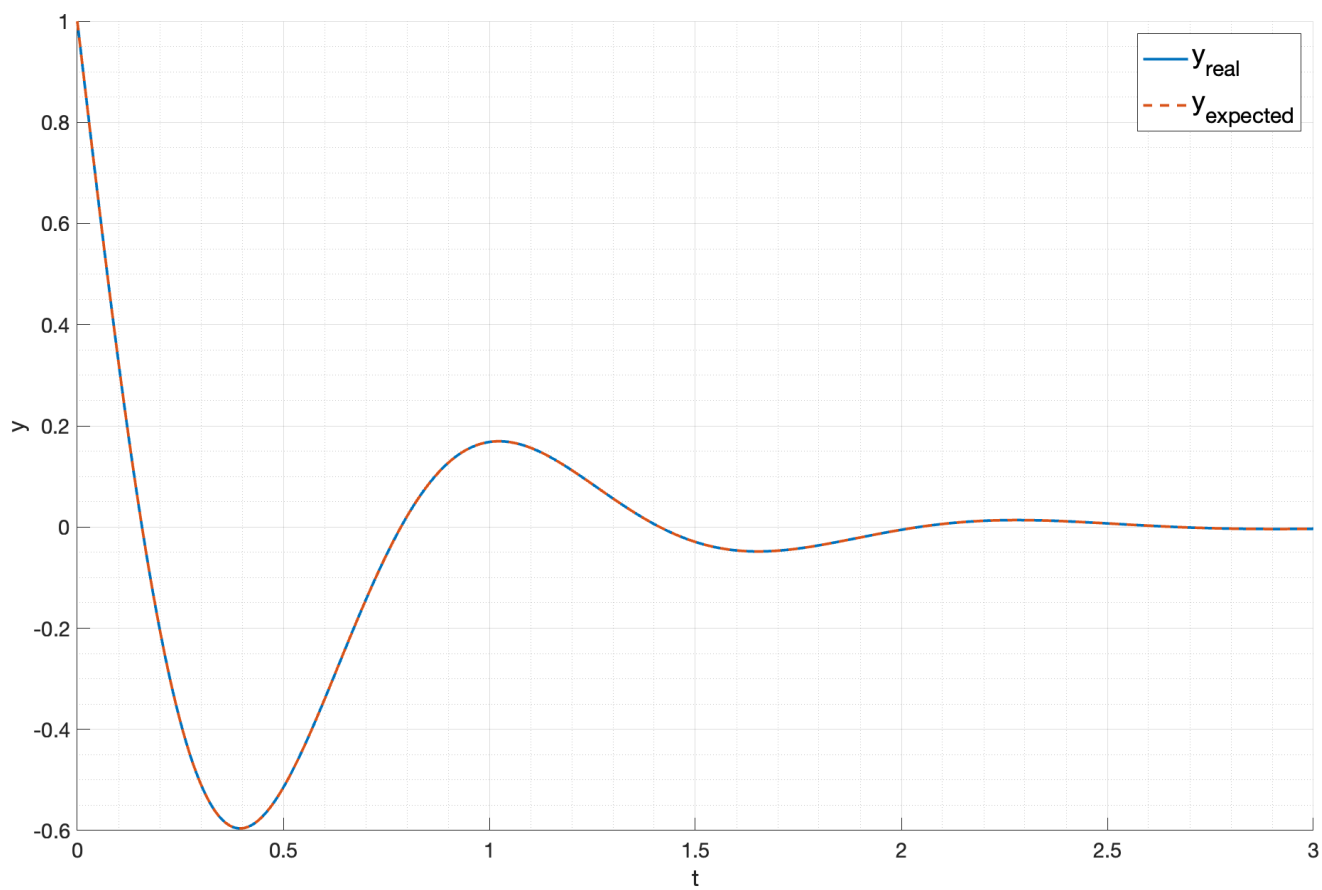


Рис. 9: Выход системы

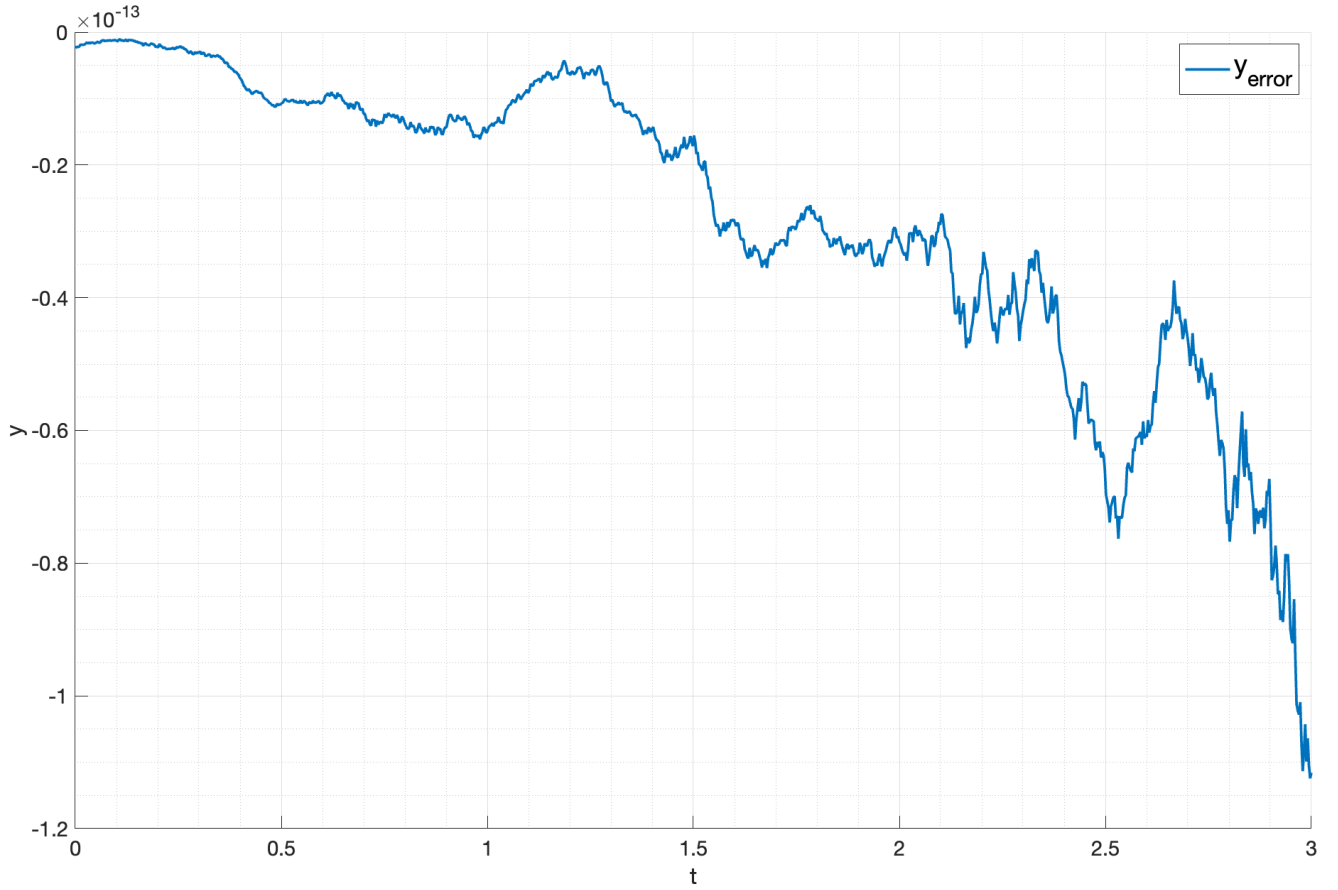


Рис. 10: Ошибка наблюдения

что выход системы совпадает с функцией  $y(t)$ .

#### 4.4. Альтернативные начальные условия

Так как система не является полностью наблюдаемой, то существует бесконечное множество начальных условий, при которых выход системы совпадает с функцией  $y(t)$ . Для того, чтобы найти такие начальные условия, необходимо рассмотреть ядро матрицы наблюдаемости.

$$\text{Nullspace}(W) = \text{Nullspace} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (53)$$

Таким образом, начальные условия могут быть представлены в виде:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

где  $\alpha \in R$  - произвольное число.

Приведем примеры таких начальных условий:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(0) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ \hat{x}_2(0) &= \begin{bmatrix} -19 & -21 & 20 \end{bmatrix}^T, \\ \hat{x}_3(0) &= \begin{bmatrix} -299 & -301 & 300.00 \end{bmatrix}^T, \\ &\dots\end{aligned}\tag{55}$$

Проведем моделирование системы с этими начальными условиями:

1.  $\hat{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ ; графики состояний и выхода системы представлены на рисунках 11 и 12 соответственно.
2.  $\hat{x}_2(0) = \begin{bmatrix} -19 & -21 & 20 \end{bmatrix}^T$ ; графики состояний и выхода системы представлены на рисунках 13 и 14 соответственно.
3.  $\hat{x}_3(0) = \begin{bmatrix} -299 & -301 & 300 \end{bmatrix}^T$ ; графики состояний и выхода системы представлены на рисунках 15 и 16 соответственно.

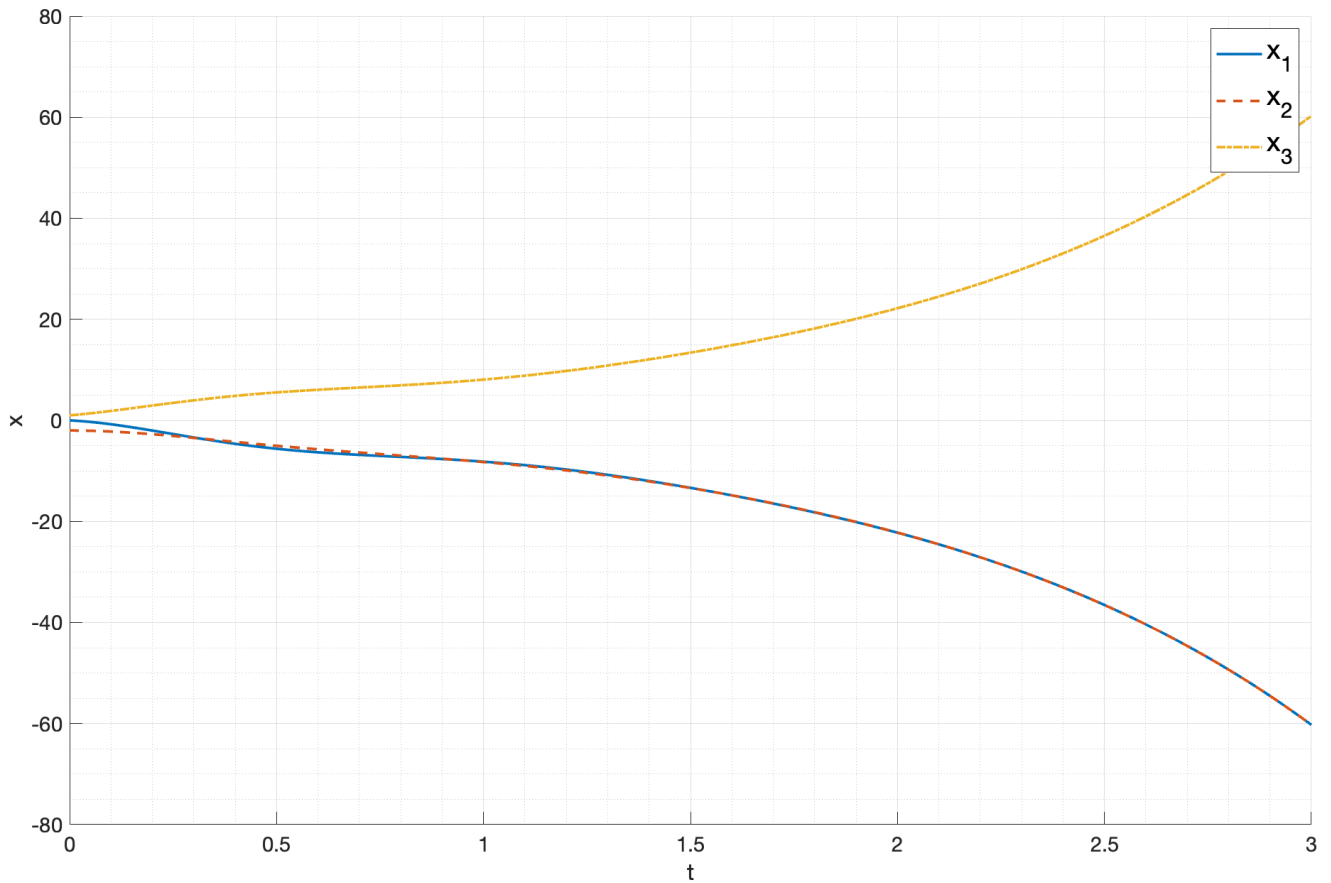


Рис. 11: Состояния системы с начальными условиями  $\hat{x}_1(0)$



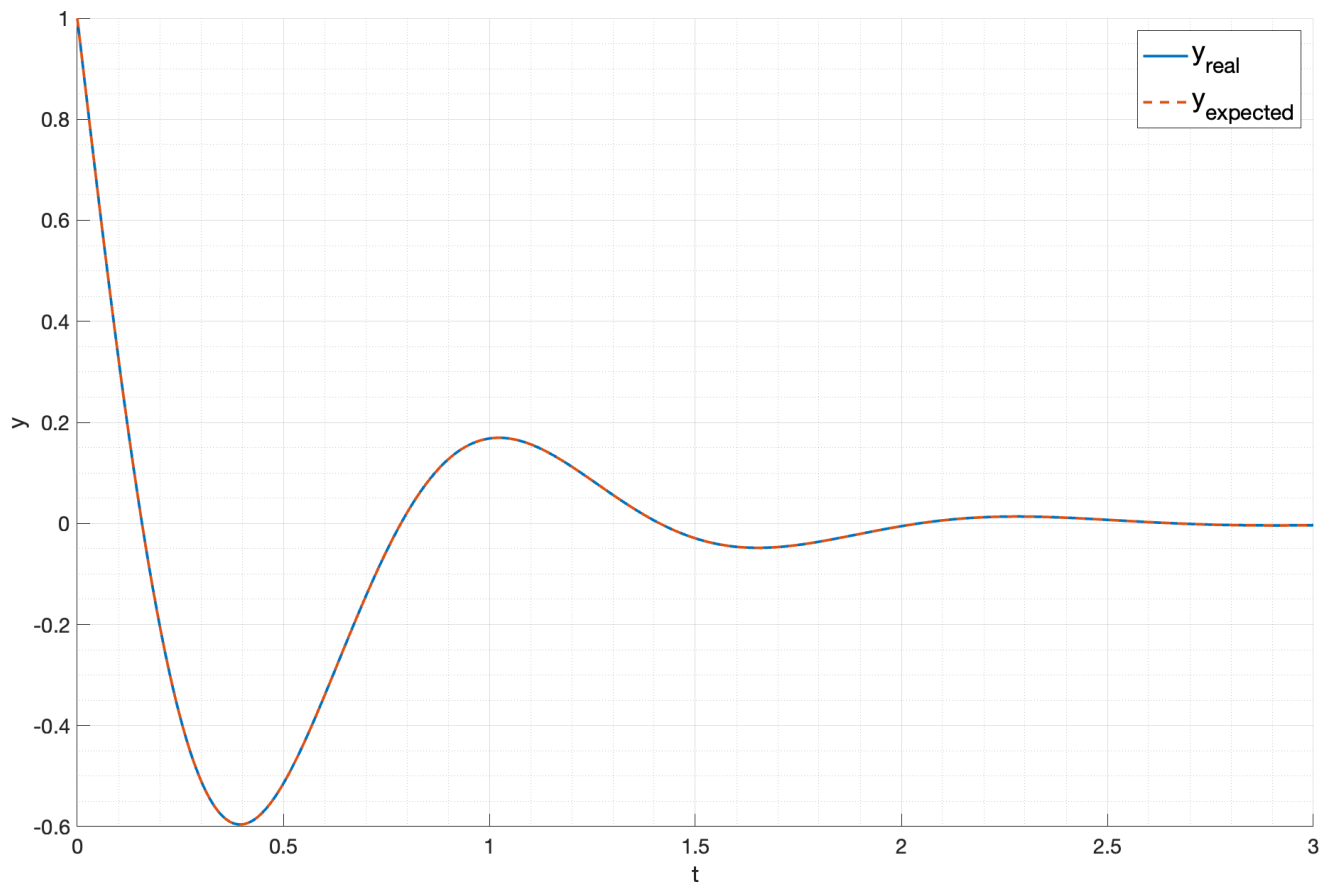


Рис. 12: Выход системы с начальными условиями  $\hat{x}_1(0)$

Видно, что при всех этих начальных условиях выход системы совпадает с функцией  $y(t)$ .

## 4.5. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом задании, удалось показать, что она не является полностью наблюдаемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через наблюдаемость собственных значений и диагональную форму системы. Также был найден грамиан наблюдаемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с различными начальными условиями, при которых выход системы совпадает с заданной функцией. Результаты моделирования показали, что система не является полностью наблюдаемой, то есть невозможно однозначно восстановить начальные условия системы по ее выходу.

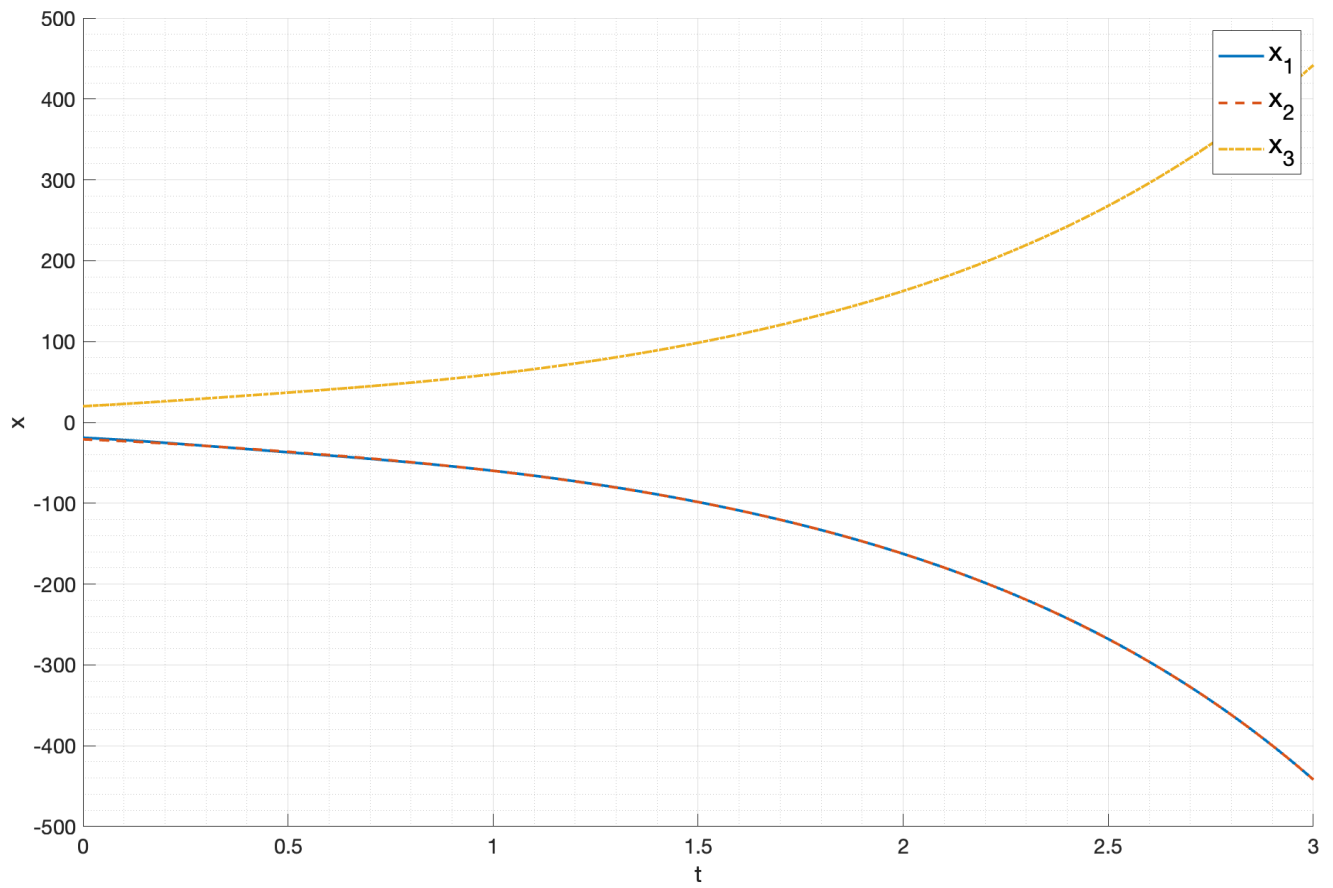


Рис. 13: Состояния системы с начальными условиями  $\hat{x}_2(0)$

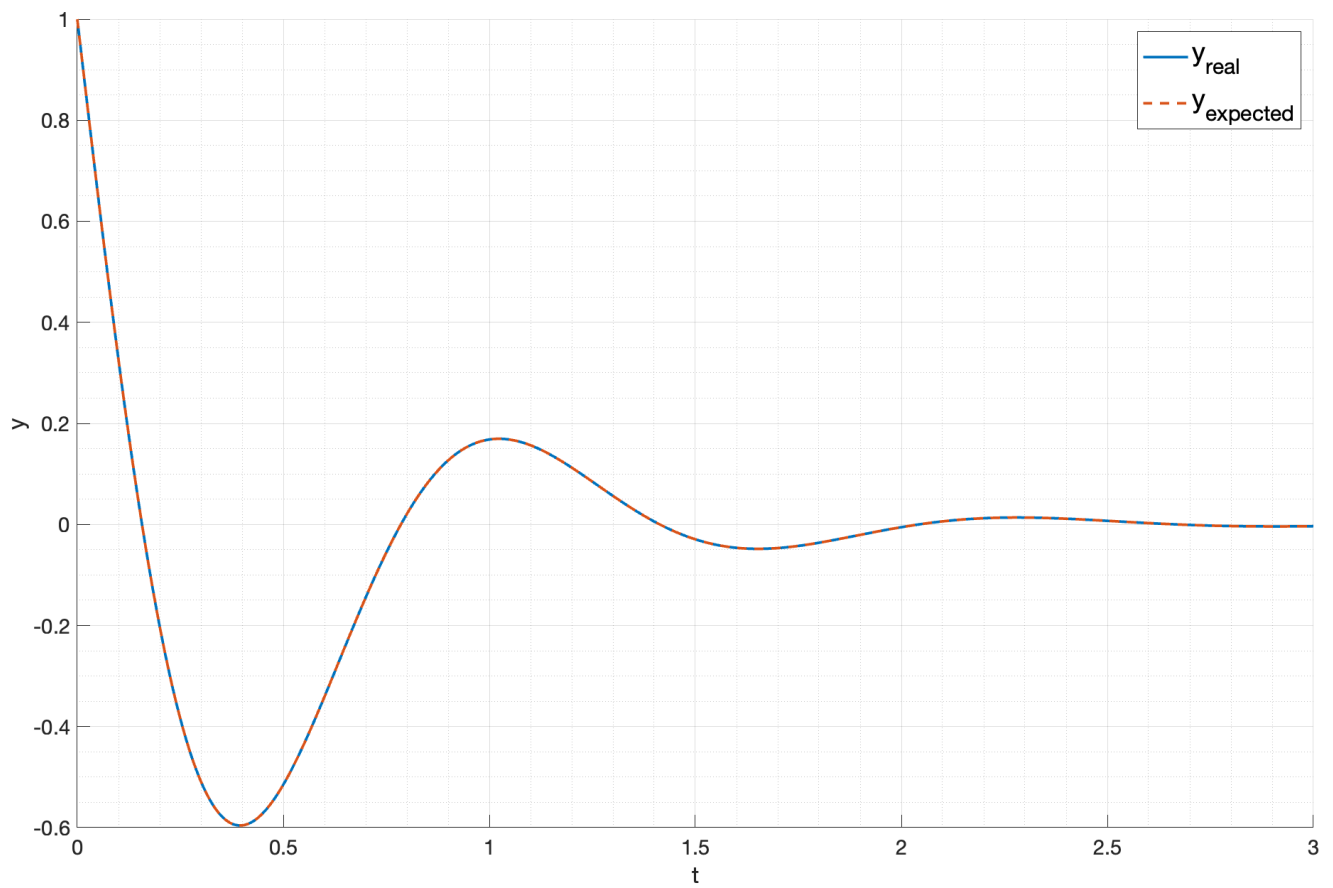


Рис. 14: Выход системы с начальными условиями  $\hat{x}_2(0)$

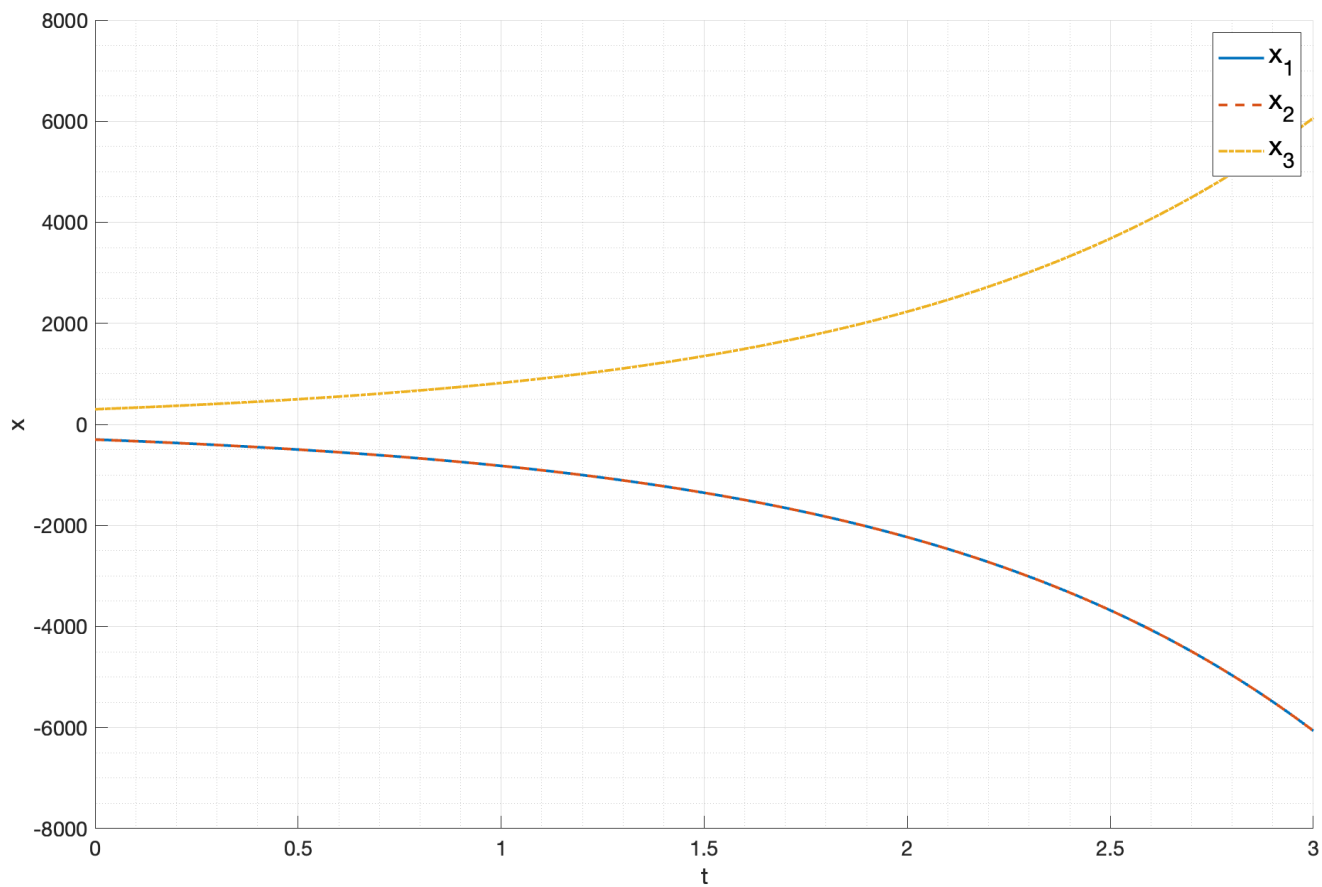


Рис. 15: Состояния системы с начальными условиями  $\hat{x}_3(0)$

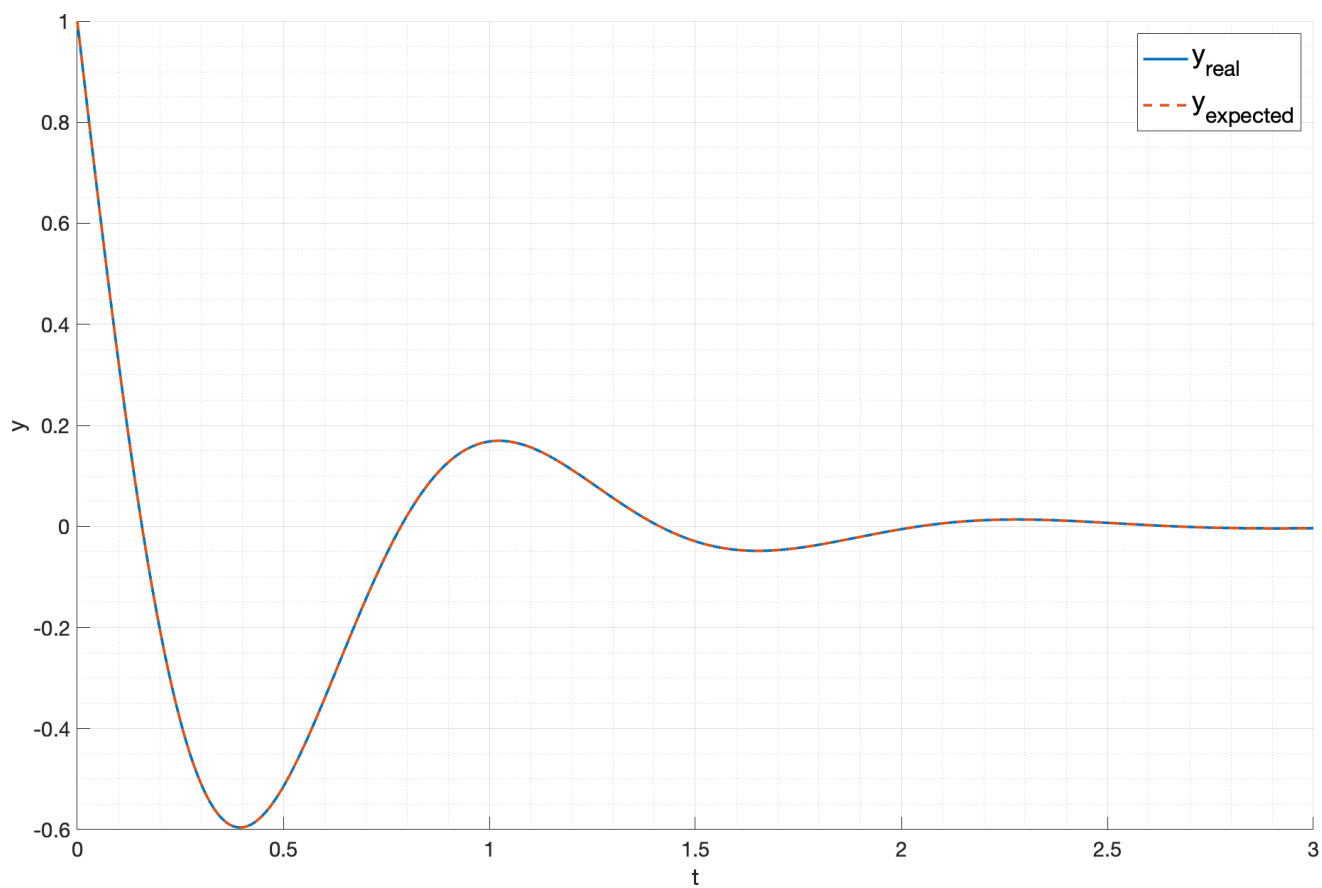


Рис. 16: Выход системы с начальными условиями  $\hat{x}_3(0)$

## 5. Исследование управляемости по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (56)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 14 & 9 \end{bmatrix} \quad (57)$$

### 5.1. Диагональная форма системы

Диагональную форму системы можно найти согласно следующим формулам:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} + Du \end{cases} \quad (58)$$

где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3+j & -3-j \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.75-1.75j \\ 0.75+1.75j \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 9 & -10 & -10 \end{bmatrix} \hat{x} + Du \end{cases} \quad (60)$$

По системе в диагональной форме можно понять, что первое собственное число не является управляемым, так как первый компонент вектора  $P^{-1}B$  равен нулю.

При этом каждое из собственных чисел является наблюдаемым, так как все компоненты вектора  $CP$  не равны нулю.

## 5.2. Управляемость по выходу

Для того, чтобы определить, является ли система управляемой по выходу, необходимо посмотреть на матрицу управляемости по выходу  $U_y$ :

$$U_y = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} A, & AB, & A^2B \end{bmatrix} \quad (61)$$

Для данной системы при  $D = 0_{2 \times 2}$  матрица управляемости по выходу равна:

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} \quad U_y = \begin{bmatrix} 6 & -34 & 38 & 0 & 0 \\ -15 & 85 & -95 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Определим ранг матрицы  $U_y$ :

$$\text{rank}(U_y) = 1 \quad (63)$$

Так как размерность выхода равна 2, то система не является управляемой по выходу.

Данная система не является полностью управляемой по выходу из-за того, что одно из собственных чисел не является управляемым, при этом входит в выход, согласно диагональной форме системы (см. систему (60)).

Для того, чтобы сделать систему управляемой по выходу, необходимо изменить матрицу  $D$  таким образом, чтобы выполнялся критерий управляемости по выходу, то есть, ранг матрицы  $U_y$  должен быть равен 2.

В данном случае подойдет любая ненулевая матрица  $D$  размера  $2 \times 2$ , например:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Тогда матрица управляемости по выходу будет равна:

$$\hat{U}_y = \begin{bmatrix} 6 & -34 & 38 & 1 & 0 \\ -15 & 85 & -95 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

и ее ранг будет равен 2.

### 5.3. Вывод

В данном задании была рассмотрена *полная* линейная система в форме В-С-В. Была найдена диагональная форма системы, исследована управляемость по выходу и сделан вывод о том, что система не является управляемой по выходу. При этом, данную систему можно сделать полностью управляемой по выходу, добавив ненулевую матрицу  $D$  размера  $2 \times 2$ .

## 6. Выводы

В ходе работы были рассмотрены различные линейные системы а также аспекты их управляемости и наблюдаемости. На практике были проверены теоретические положения об управляемости и наблюдаемости систем путем нахождения подходящего управления или начального состояния, удовлетворяющих заданным условиям.