



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ А

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Линейно-квадратичные регуляторы”

Вариант 30

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Исследование LQR	3
1.1. Управляемость собственных чисел	3
1.2. Синтез регулятора	3
1.3. Моделирование	5
1.4. Выводы	11
2. Фильтр Калмана	11
2.1. Наблюдаемость собственных чисел	12
2.2. Синтез фильтра Калмана	12
2.3. Моделирование	13
2.4. Выводы	19
3. LQG	19
3.1. Управляемость и наблюдаемость	20
3.2. Синтез LQG-регулятора	20
3.3. Выводы	24
4. Выводы	24

1. Исследование LQR

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.1. Управляемость собственных чисел

Для определения управляемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (3)$$

Где P – матрица собственных векторов матрицы A , а $\hat{x} = P^{-1}x$.

$$A_j = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -2.12 & 0.71 \\ 0 & -1.41 & 0 \\ 1 & 1.41 & 0 \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.12 \\ 4.95 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Таким образом, последнее собственное число $\lambda_3 = -3$ не является управляемым. Соответственно, система не является полностью управляемой. Но, так как данное собственное число располагается в левой полуплоскости, то есть является устойчивым, то система является стабилизируемой.

1.2. Синтез регулятора

Зададимся четырьмя матрицами весов Q и R для синтеза регулятора LQR:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_2 = [20] \quad (6)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad R_3 = [2] \quad (7)$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad R_4 = [20] \quad (8)$$

Таким образом, получаем пары матриц весов Q_i и R_i , каждая из которых соответствует определенному критерию оптимальности. Будем называть матрицу Q_i матрицей, отвечающий за штраф за отклонение состояния системы от желаемого значения, а матрицу R_i – матрицей, отвечающей за штраф за использование *резкого* управления.

На основе этих матриц будем синтезировать регулятор, минимизирующий функционал качества:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9)$$

Для получения регулятор решим матричное уравнение Риккати при $v = 1$ для каждой пары матриц весов Q_i и R_i :

$$\begin{cases} A^T + P A + Q - v P B R^{-1} B^T P = 0 \\ K = -R^{-1} B^T P \end{cases} \quad (10)$$

Единственное решение данного уравнения будет существовать при том, что пара (A, B) является стабилизируемой, пара (Q, A) – наблюдаемой, а матрица R – положительно определенной и матрица Q – положительно полуопределенной.

При этом соответствующее минимизированное значения функционала качества J_{min} можно найти по формуле:

$$J_{min} = x_0^T P x_0 \quad (11)$$

Синтезируем регуляторы для каждой пары матриц весов Q_i и R_i , получим следующие

результаты:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} -6.40 & 0.79 & -5.96 \end{bmatrix} & J_1 &= 30.903426 \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -14.44 & 0.40 & -12.68 \end{bmatrix} & J_2 &= 130.971703 \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -3.64 & 0.85 & -3.55 \end{bmatrix} & J_3 &= 121.680719 \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} -6.40 & 0.79 & -5.96 \end{bmatrix} & J_4 &= 309.034256
 \end{aligned} \tag{12}$$

1.3. Моделирование

Проведем моделирование системы с регуляторами K_i и начальными условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Схема моделирования представлена на рисунке 1, схема для вычисления функционала качества представлена на рисунке 2.

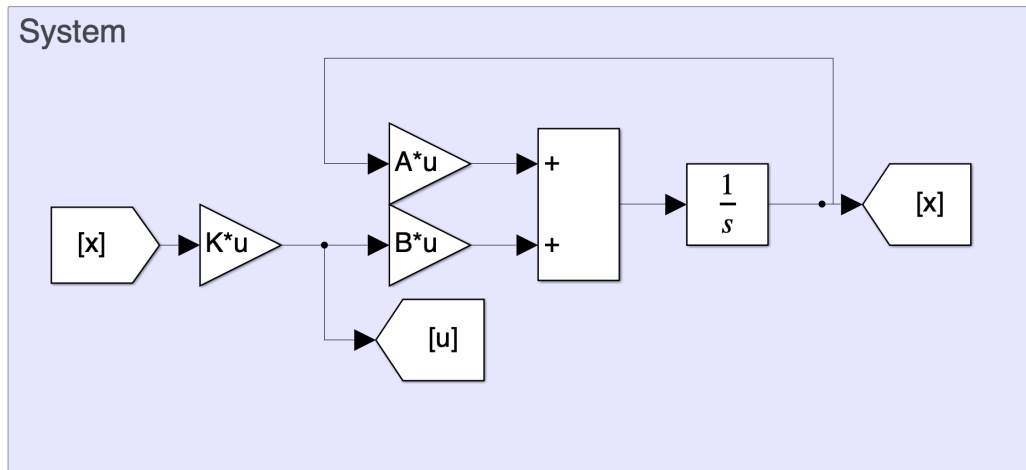


Рис. 1: Схема моделирования системы с регулятором LQR

Результаты моделирования представлены на рисунках 3 – 6 (состояние системы), 7 (сравнительный график управления для всех регуляторов), 8 (сравнительный график функционала качества для всех регуляторов) и графиках 9 – 11 (сравнительные графики состояния системы для регуляторов K_i).

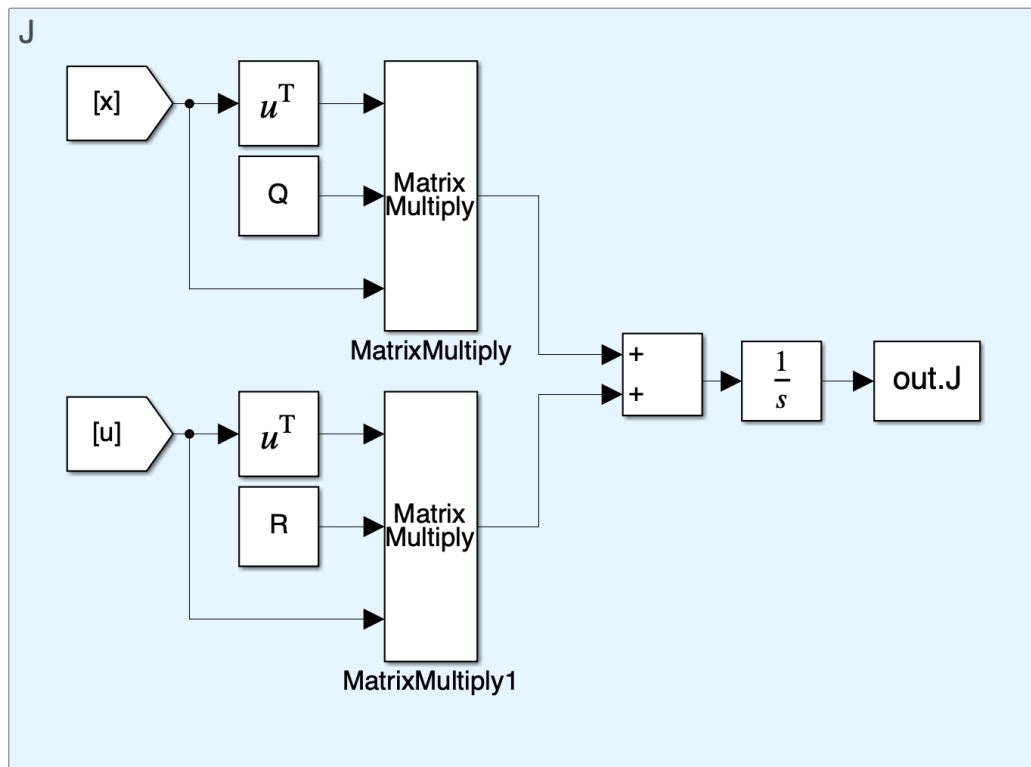


Рис. 2: Схема вычисления функционала качества LQR

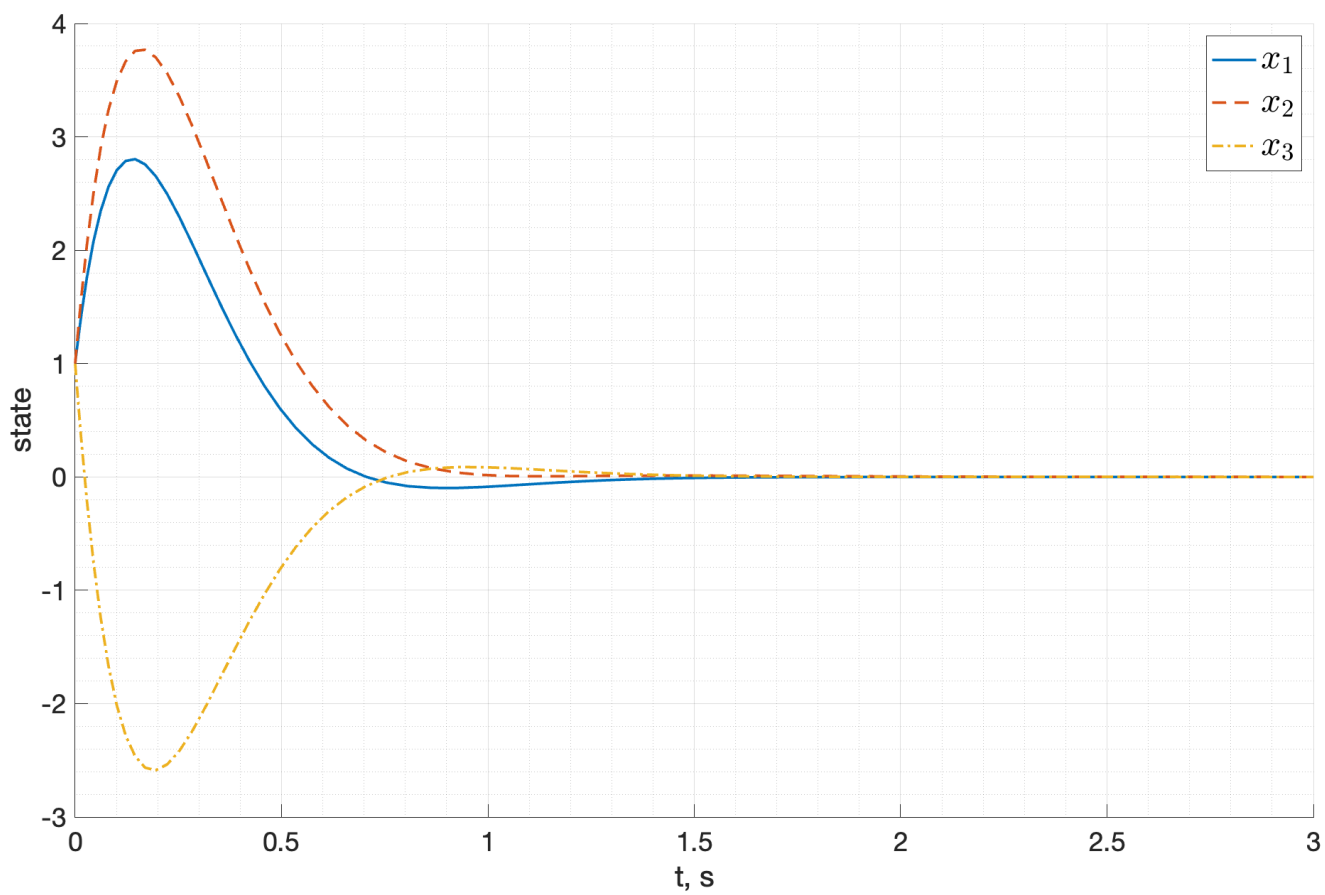


Рис. 3: Состояние системы с регулятором K_1

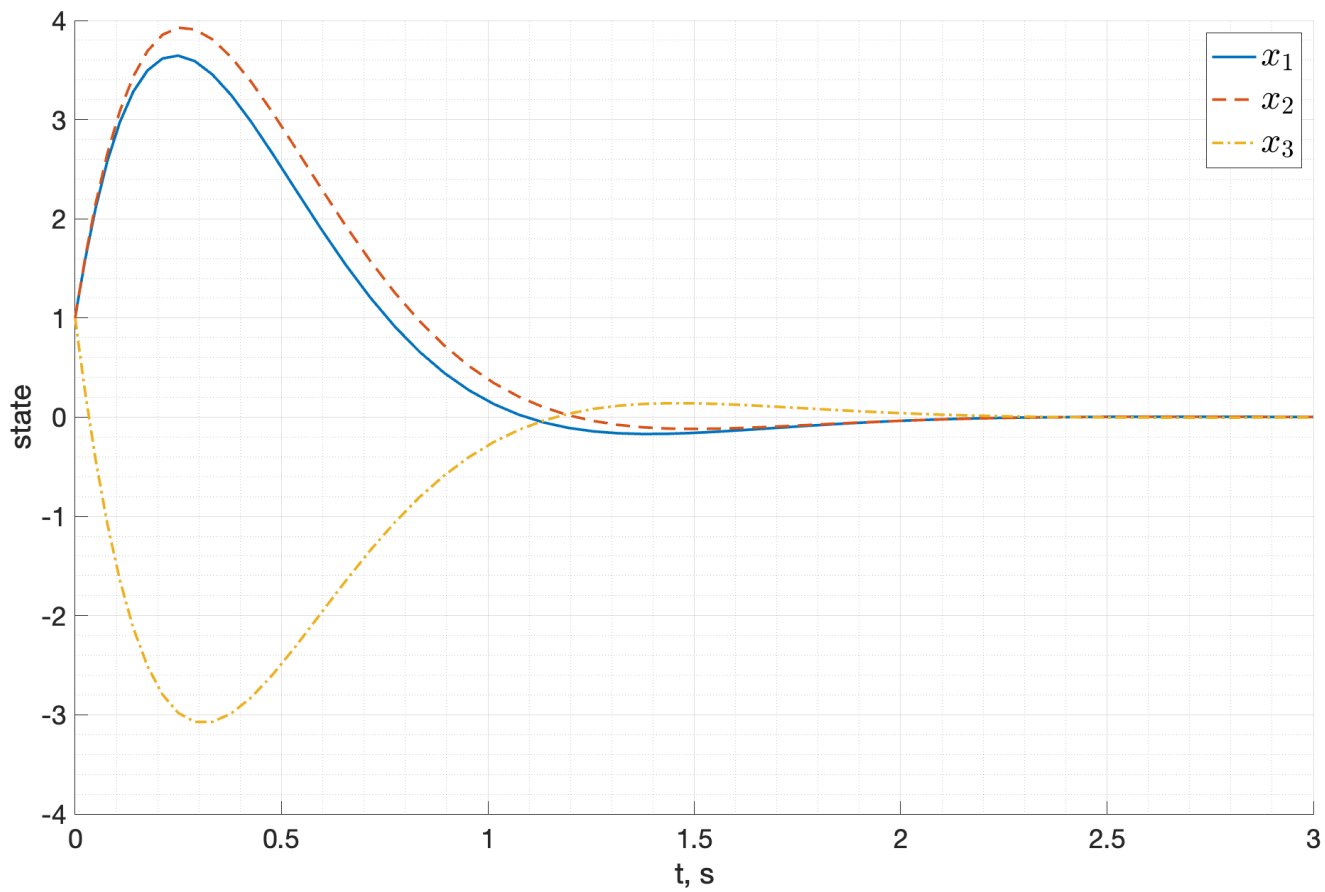


Рис. 4: Состояние системы с регулятором K_2

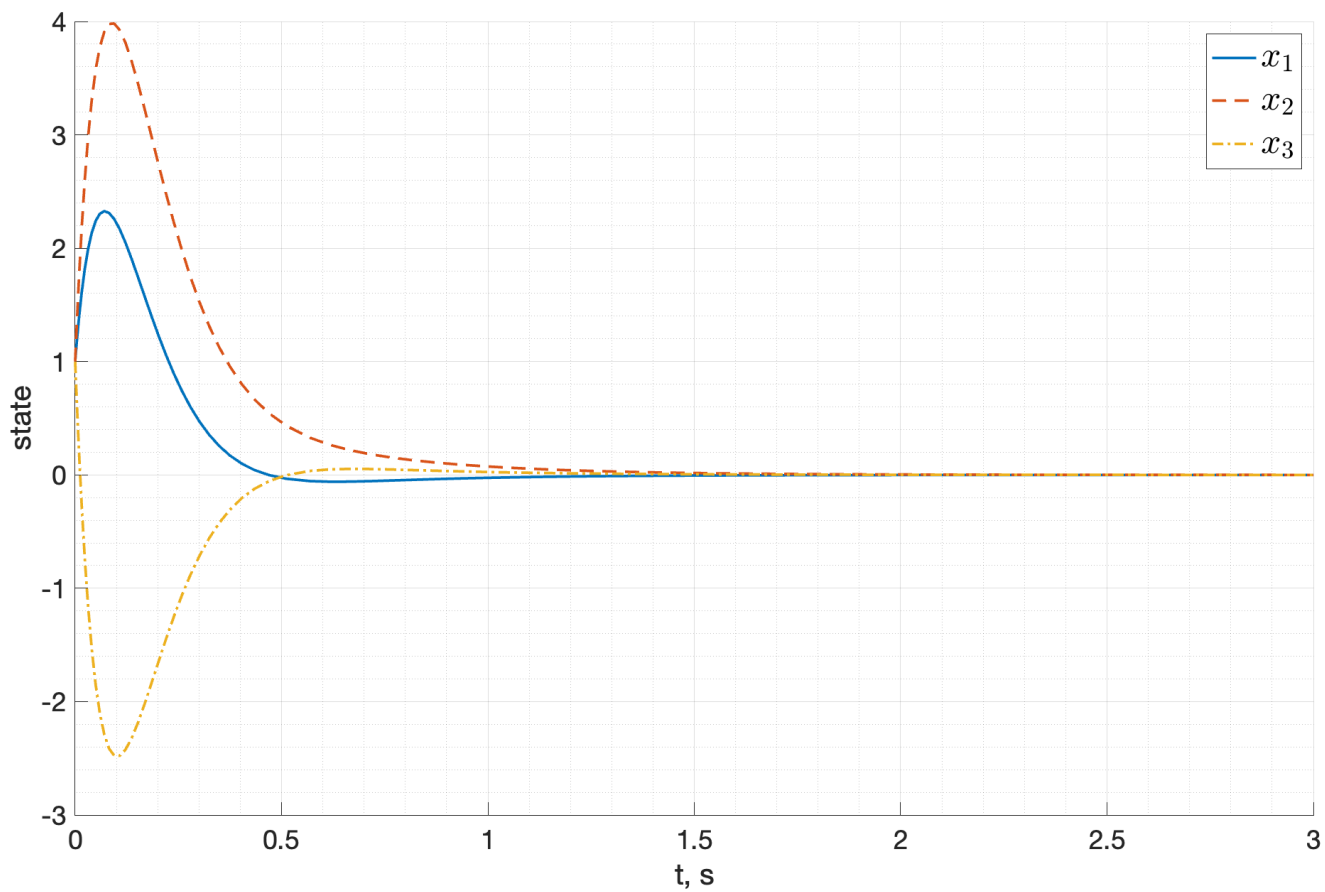


Рис. 5: Состояние системы с регулятором K_3

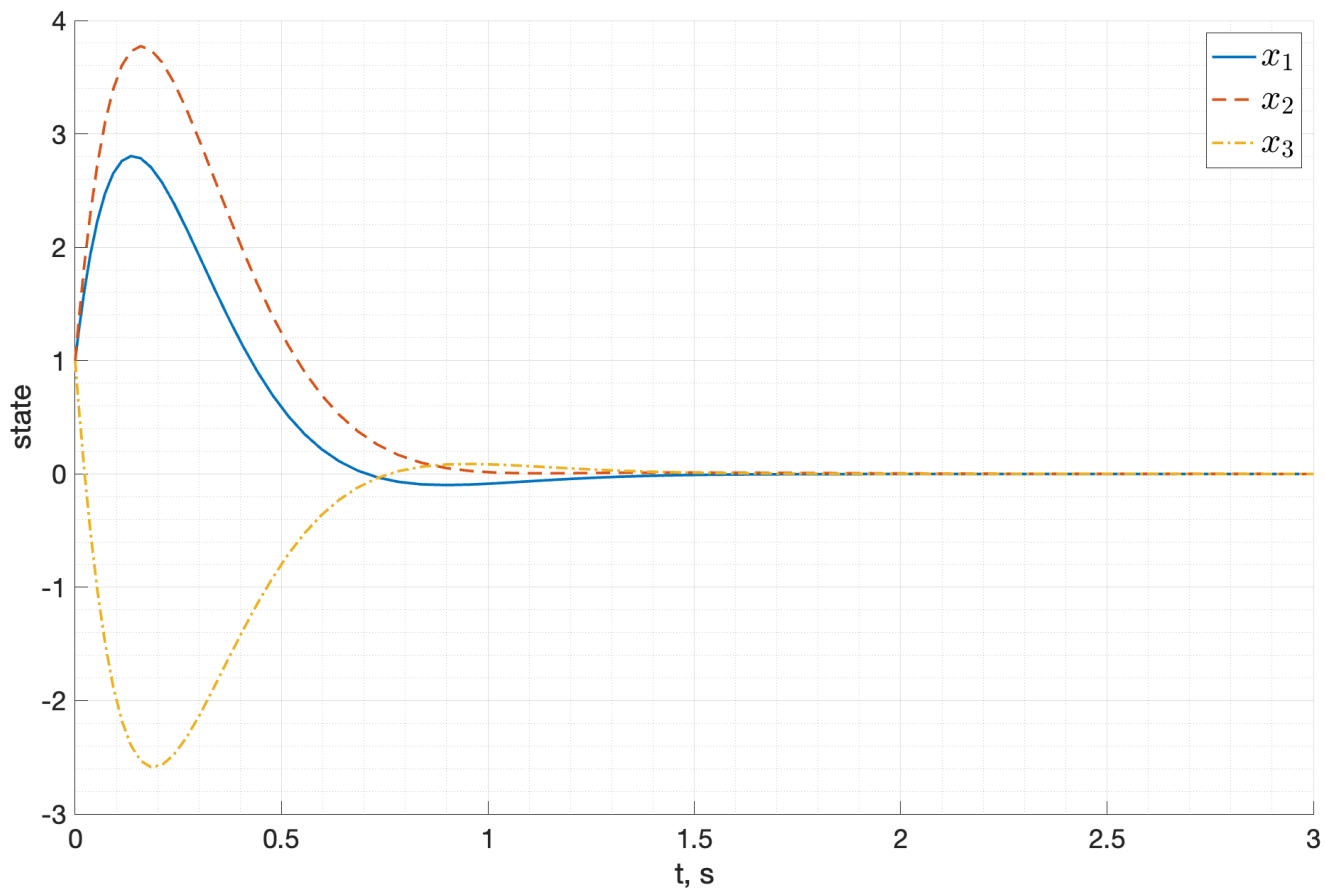


Рис. 6: Состояние системы с регулятором K_4

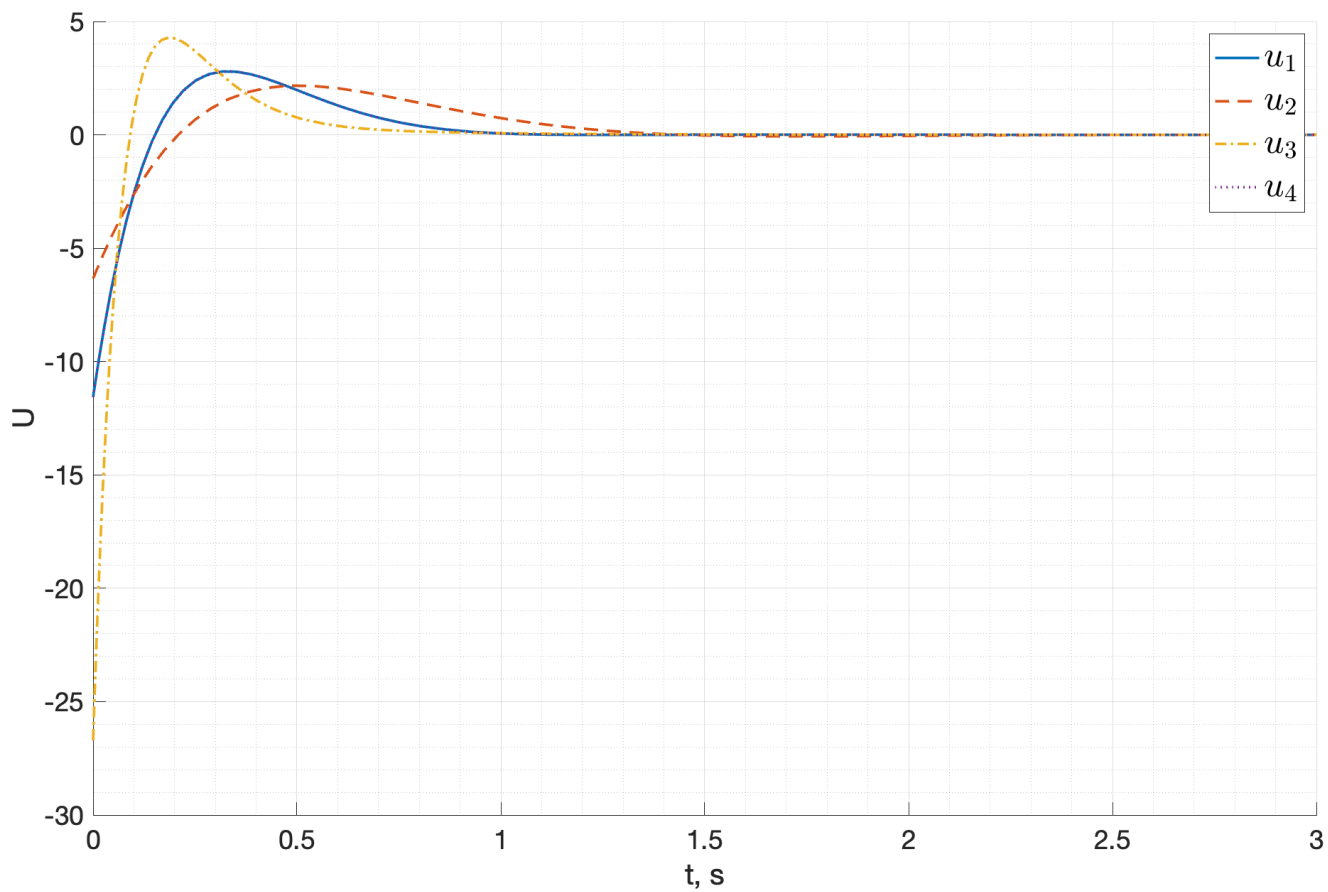


Рис. 7: Управление системы с регуляторами K_i

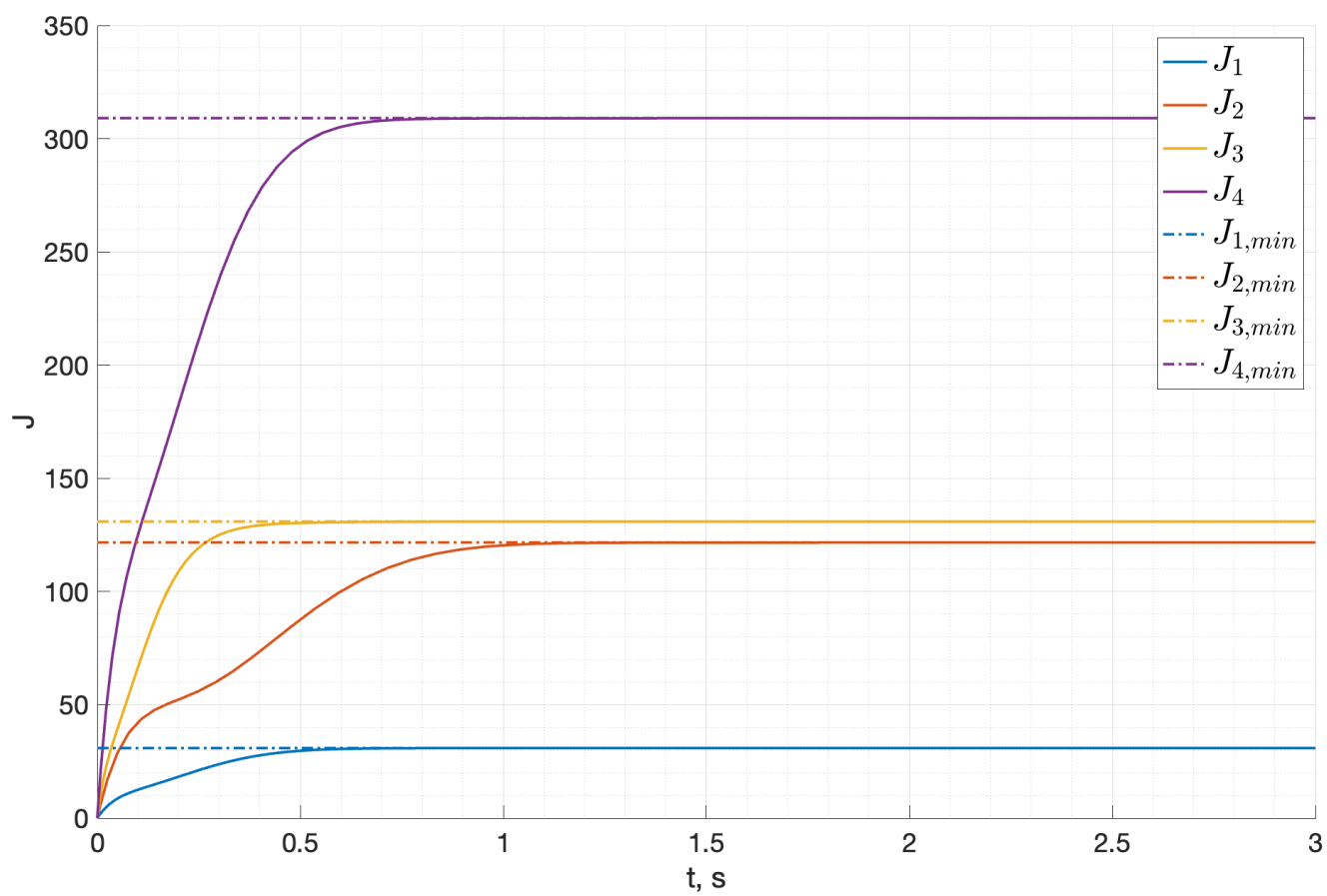


Рис. 8: Функционал качества J для регуляторов K_i

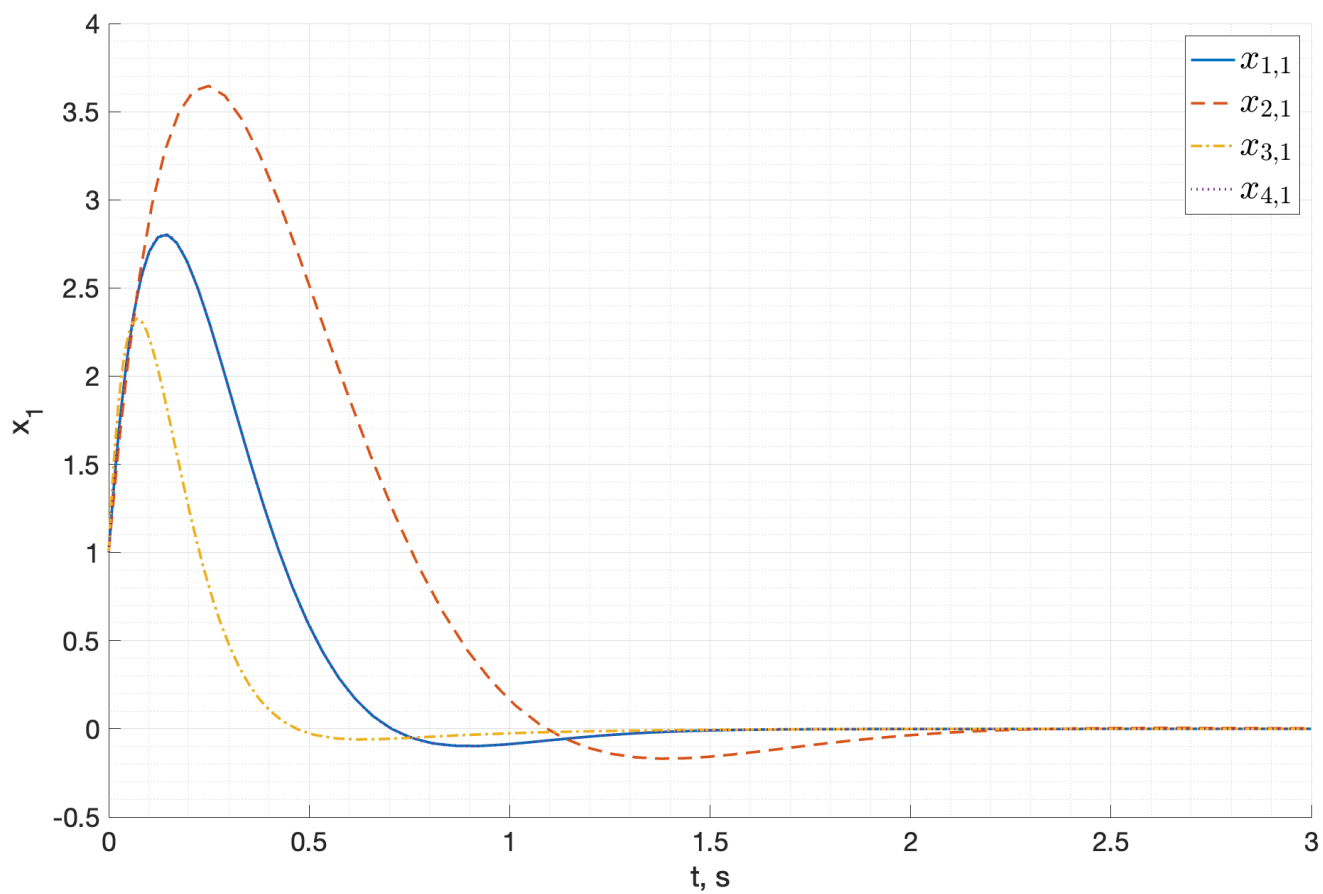


Рис. 9: Вектор состояние системы x_1

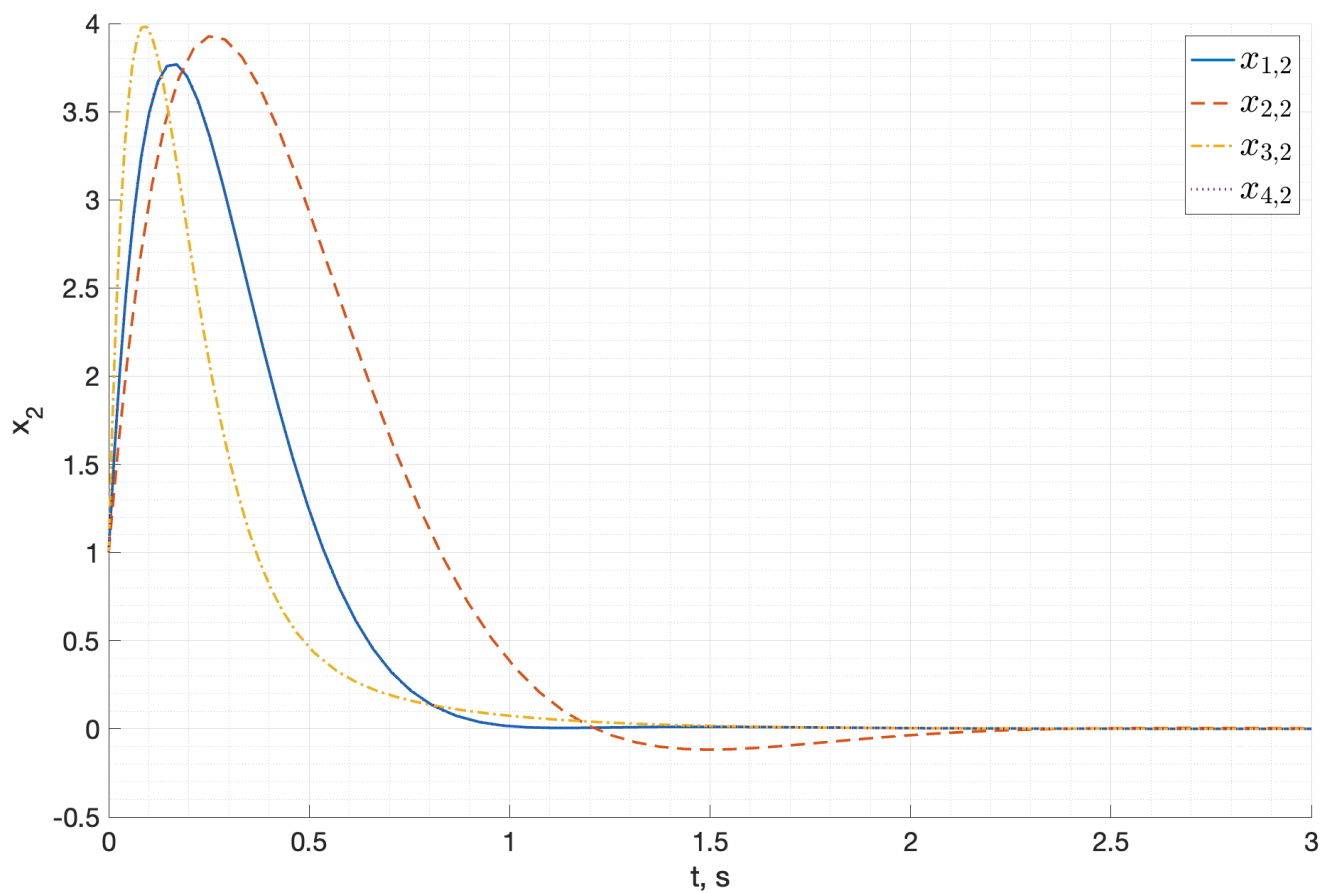


Рис. 10: Сравнение состояния системы x_2

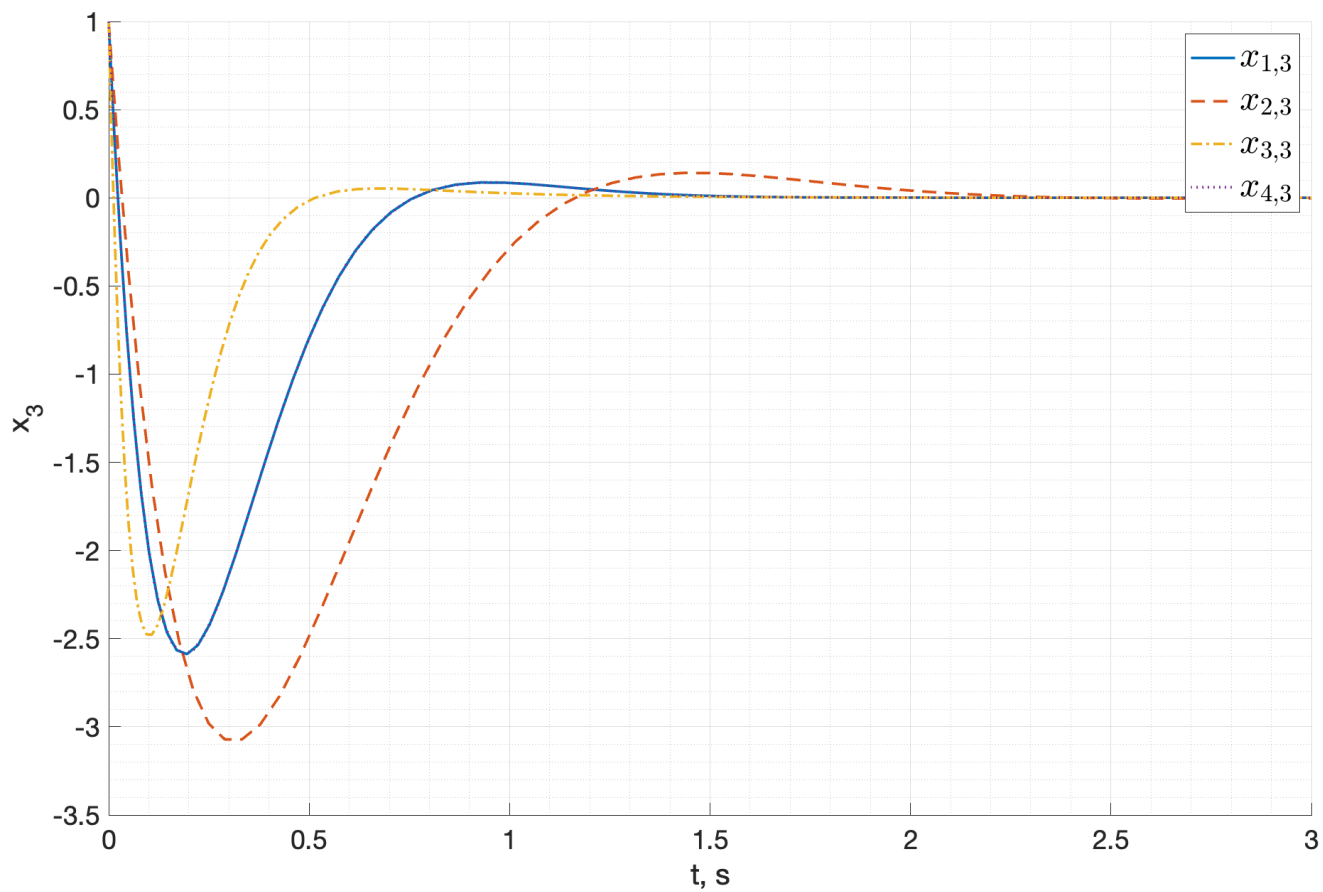


Рис. 11: Сравнение состояния системы x_3

1.4. Выводы

По данному исследованию можно понять влияние матриц весов на поведение системы. Матрица Q отвечает за штраф за отклонение состояния системы от желаемого значения, убедиться в этом можно сравнивая системы с регуляторами K_1 и K_3 , K_2 и K_4 . На рисунках 9 – 11 хорошо видно, что при увеличении матрицы Q компоненты вектора состояния системы x стремятся к нулю быстрее, чем при меньшей матрицы Q . При этом, значения функционала качества J для регуляторов K_1 и K_3 меньше, чем для K_2 и K_4 , что говорит о том, что, при прочих равных, чем меньше матрица Q , тем меньше значение функционала качества, тем меньше энергии тратится на управление системой.

Аналогично, матрица R отвечает за штраф за использование *резкого* управления. Тем больше значение матрицы R , тем тем более плавным становится управление системой, тем меньше перерегулирование, но при этом меньше скорость достижения нулевого состояния системы.

Теоретические результаты вычисления минимизированного функционала качества J_{min} для каждого регулятора K_i совпадают с результатами моделирования, что видно на графике 8.

Можно сделать вывод, что выбор матриц весов Q и R влияет на поведение системы, и получение желаемого поведения системы заключается в одновременном подборе матриц весов Q и R .

2. Фильтр Калмана

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f \\ y = Cx + \xi \end{cases}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

где $f(t)$ и $\xi(t)$ – некоторый гауссовский шум с известной дисперсией и мат. ожиданием.

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & 7 \\ -64 & 25 & 14 & 12 \\ -26 & 11 & 7 & 3 \\ -48 & 18 & 14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$Var(f) = 0.4, \quad E(f) = 0, \quad Var(\xi) = 0.2, \quad E(\xi) = 0 \quad (15)$$

2.1. Наблюдаемость собственных чисел

Для определения наблюдаемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= P^{-1}AP\hat{x} \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (16)$$

Где P – матрица собственных векторов матрицы A , а $\hat{x} = P^{-1}x$.

$$\begin{bmatrix} -0.00 & -2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 & -3.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.05 & 1.13 & 0.14 \\ 1.74 & -0.22 & 1.84 & 0.14 \\ 0.87 & -0.11 & 0.71 & 0.00 \\ 1.41 & 0.00 & 1.41 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} -0.27 \\ -0.05 \\ 0.28 \\ -0.14 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

Таким образом, система является полностью наблюдаемой.

2.2. Синтез фильтра Калмана

Рассмотрим наблюдатель:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \quad (18)$$

Зададимся четырьмя матрицами весов Q и R для синтеза фильтра Калмана:

$$Q_1 = 2 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_1 = 2 \quad (19)$$

$$Q_2 = 2 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_2 = 20 \quad (20)$$

$$Q_3 = 20 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_3 = 2 \quad (21)$$

$$Q_4 = 20 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_4 = 20 \quad (22)$$

На основе этих матриц будем синтезировать фильтр Калмана, минимизирующий критерий доверия J :

$$J = \int_0^\infty (fQ^{-1}f + \xi R^{-1}\xi) dt \quad (23)$$

Для получения фильтра Калмана необходимо решить уравнение Риккати при $v = 1$:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - vPC^TR^{-1}CP = 0 \\ L = -PC^TR^{-1} \end{cases} \quad (24)$$

Для каждой пары матриц весов Q_i и R_i получаем фильтр Калмана, минимизирующий критерий доверия J :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 5.63 \\ 6.71 \\ 3.63 \\ 5.38 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.46 \\ 0.56 \\ 0.47 \end{bmatrix} \quad L_3 = \begin{bmatrix} 29.08 \\ 39.46 \\ 18.63 \\ 30.44 \end{bmatrix} \quad L_4 = \begin{bmatrix} 5.63 \\ 6.71 \\ 3.63 \\ 5.38 \end{bmatrix} \quad (25)$$

2.3. Моделирование

Проведем моделирование системы с фильтром Калмана L_i и начальными условиями $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ для системы и $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ для фильтра. Схема моделирования представлена на рисунке 12. Результаты моделирования представлены на рисунках 13 (выход системы с шумом и без), 14 – 17 (векторы состояния системы и векторы оценки состояния фильтром Калмана), 18 – 21 (ошибки оценки состояния фильтром Калмана).

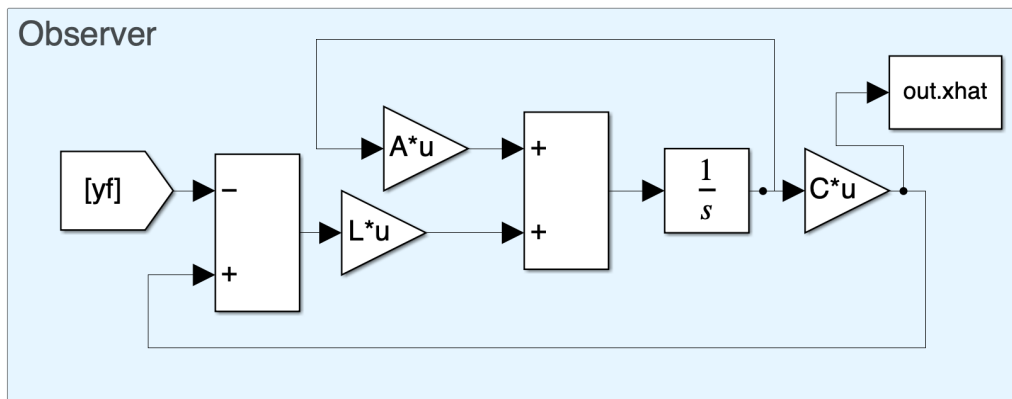
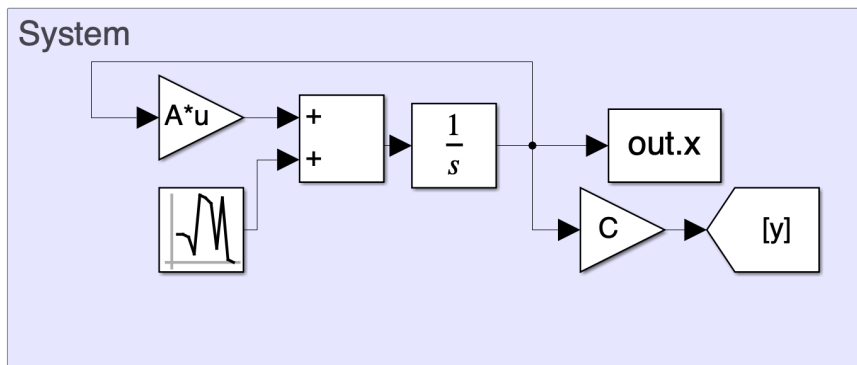


Рис. 12: Схема моделирования фильтра Калмана

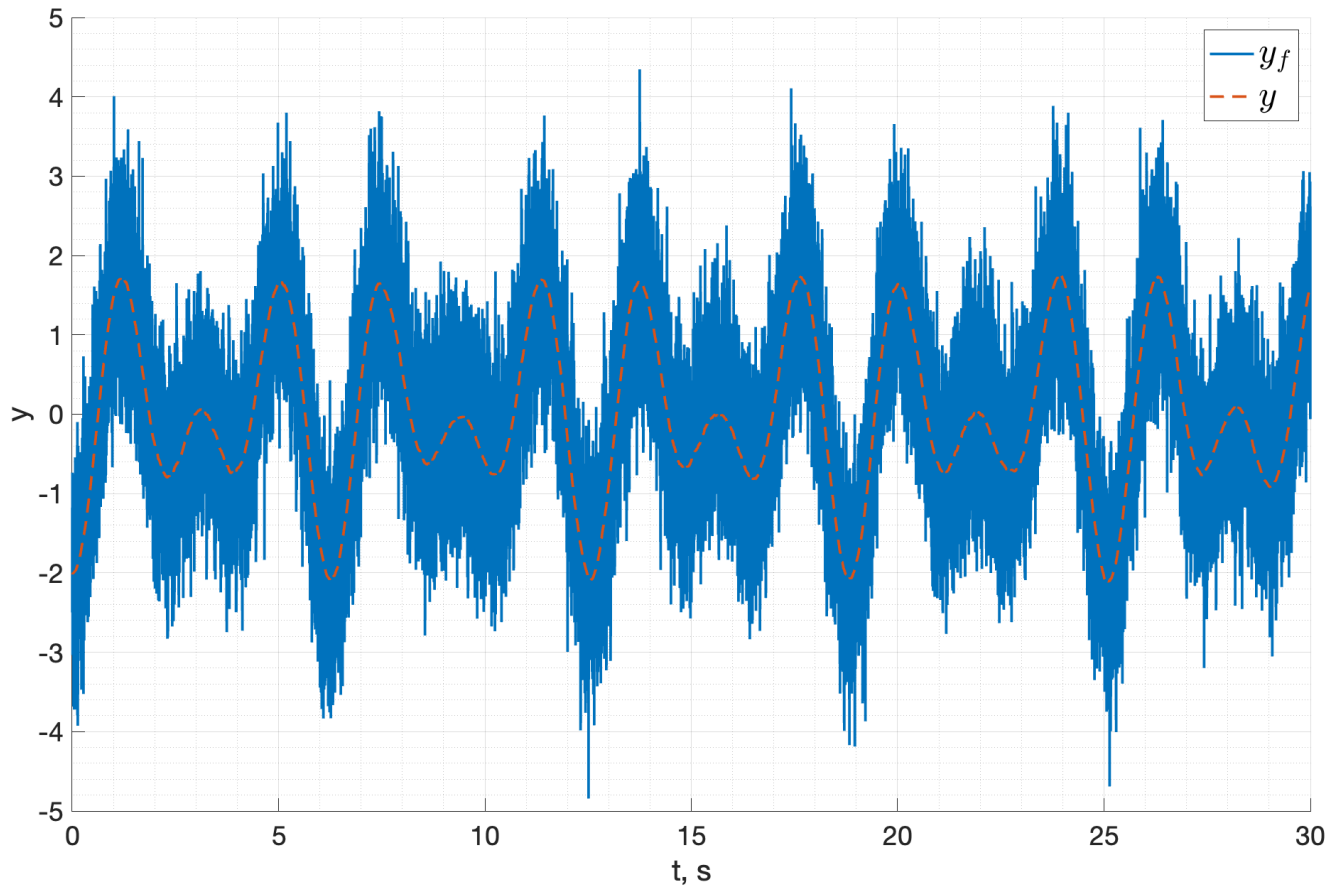


Рис. 13: Сравнение выходов системы с шумом и без

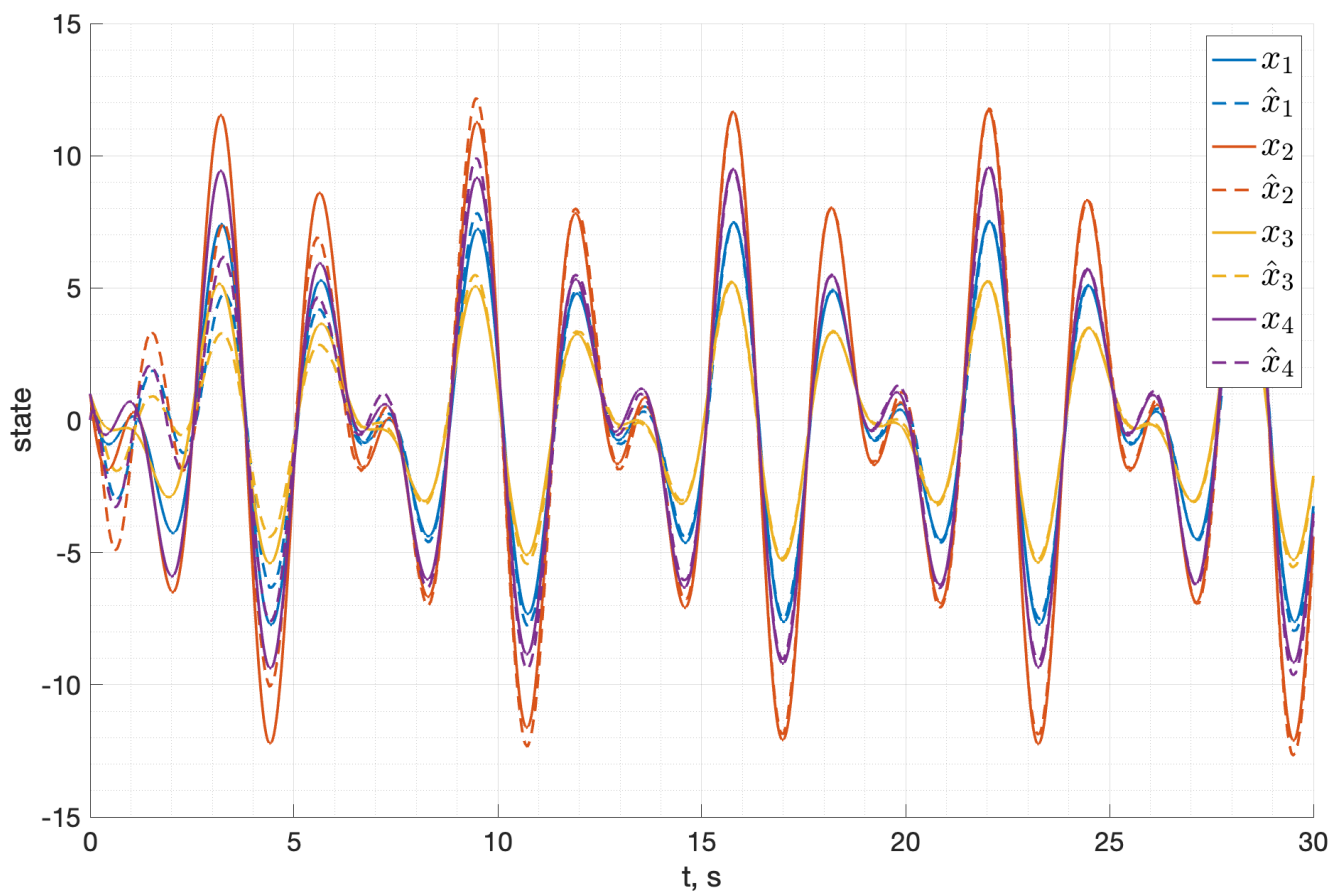


Рис. 14: Сравнение векторов состояния системы и оценки состояния фильтром Калмана L_1

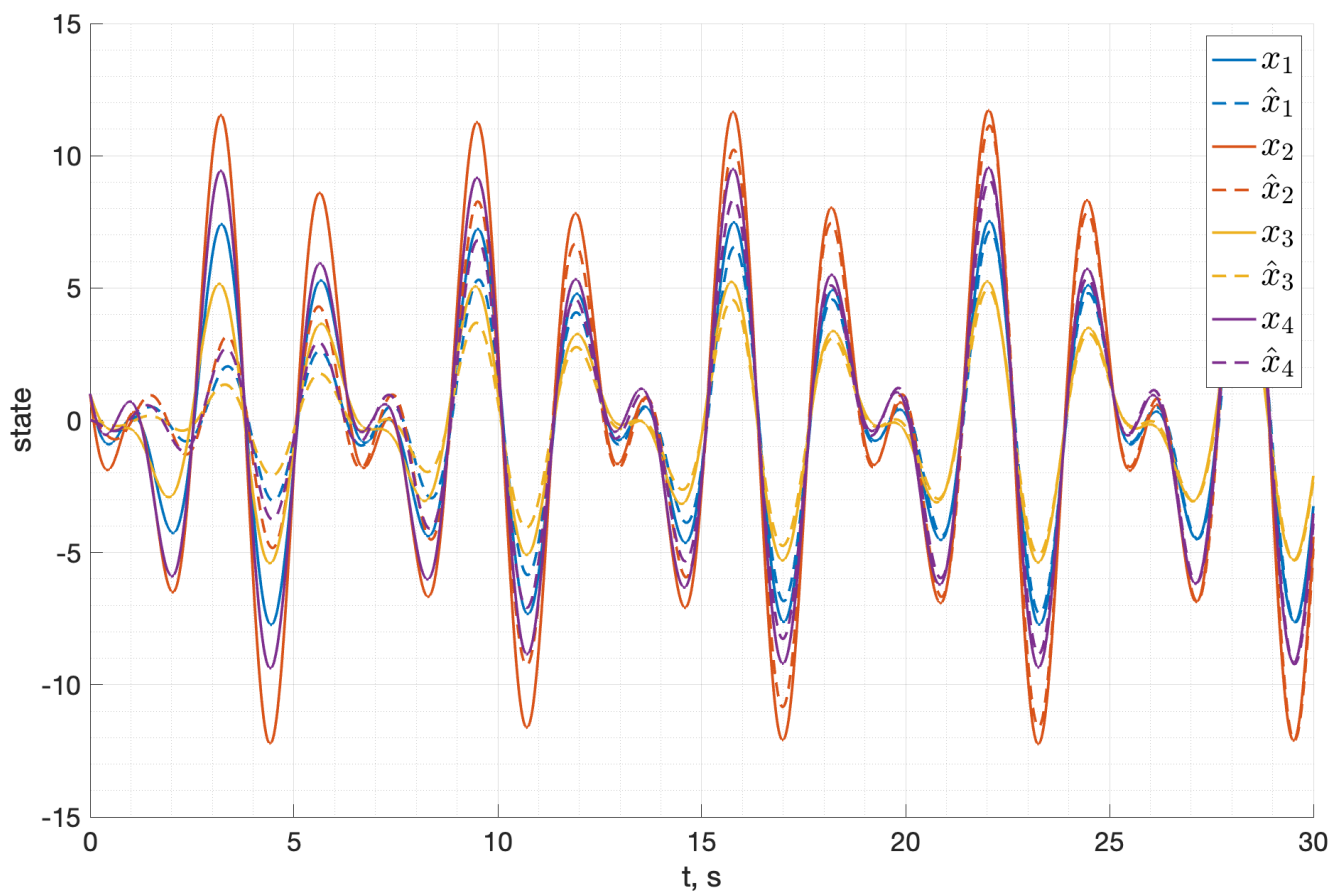


Рис. 15: Сравнение векторов состояния системы и оценки состояния фильтром Калмана L_2

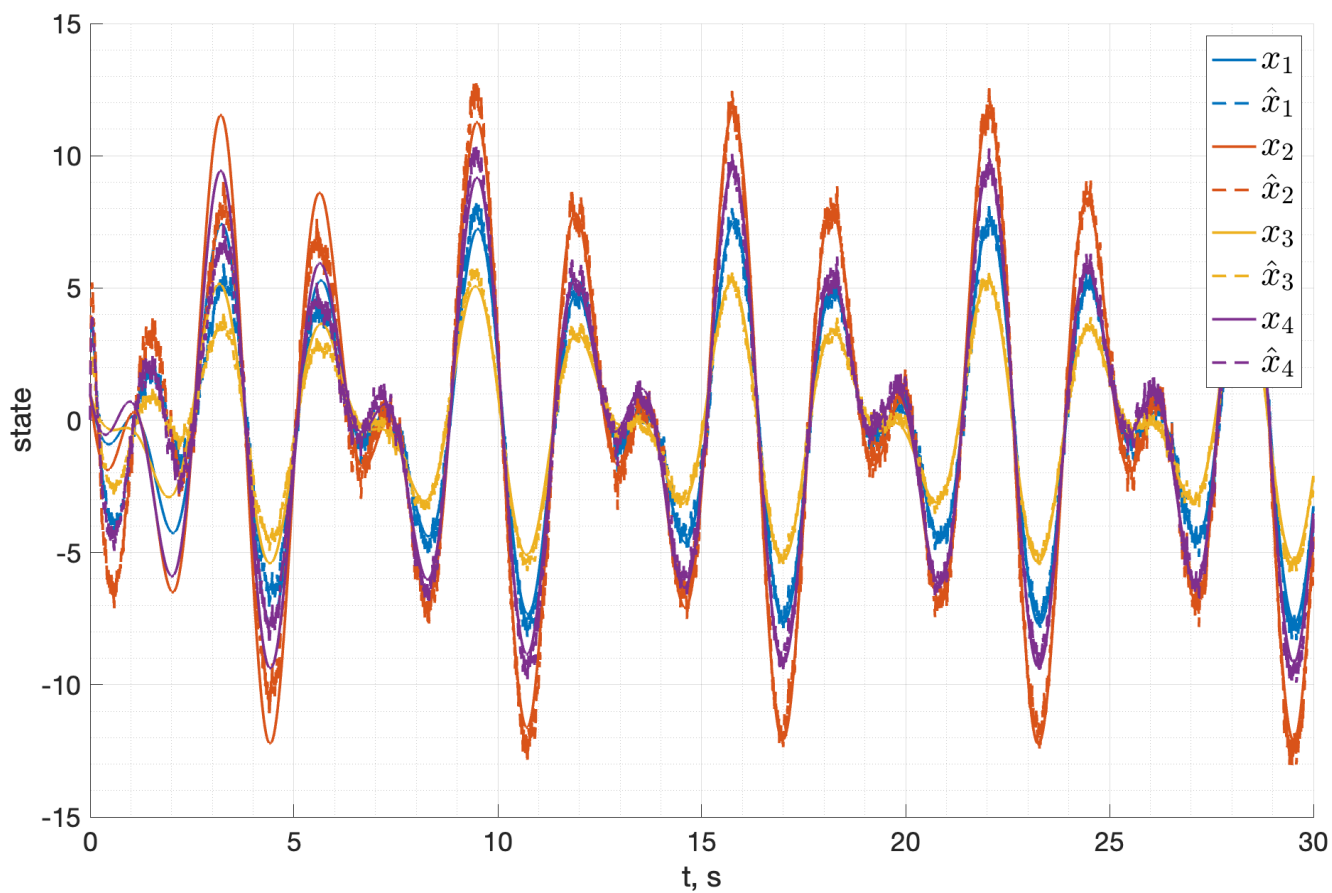


Рис. 16: Сравнение векторов состояния системы и оценки состояния фильтром Калмана L_3

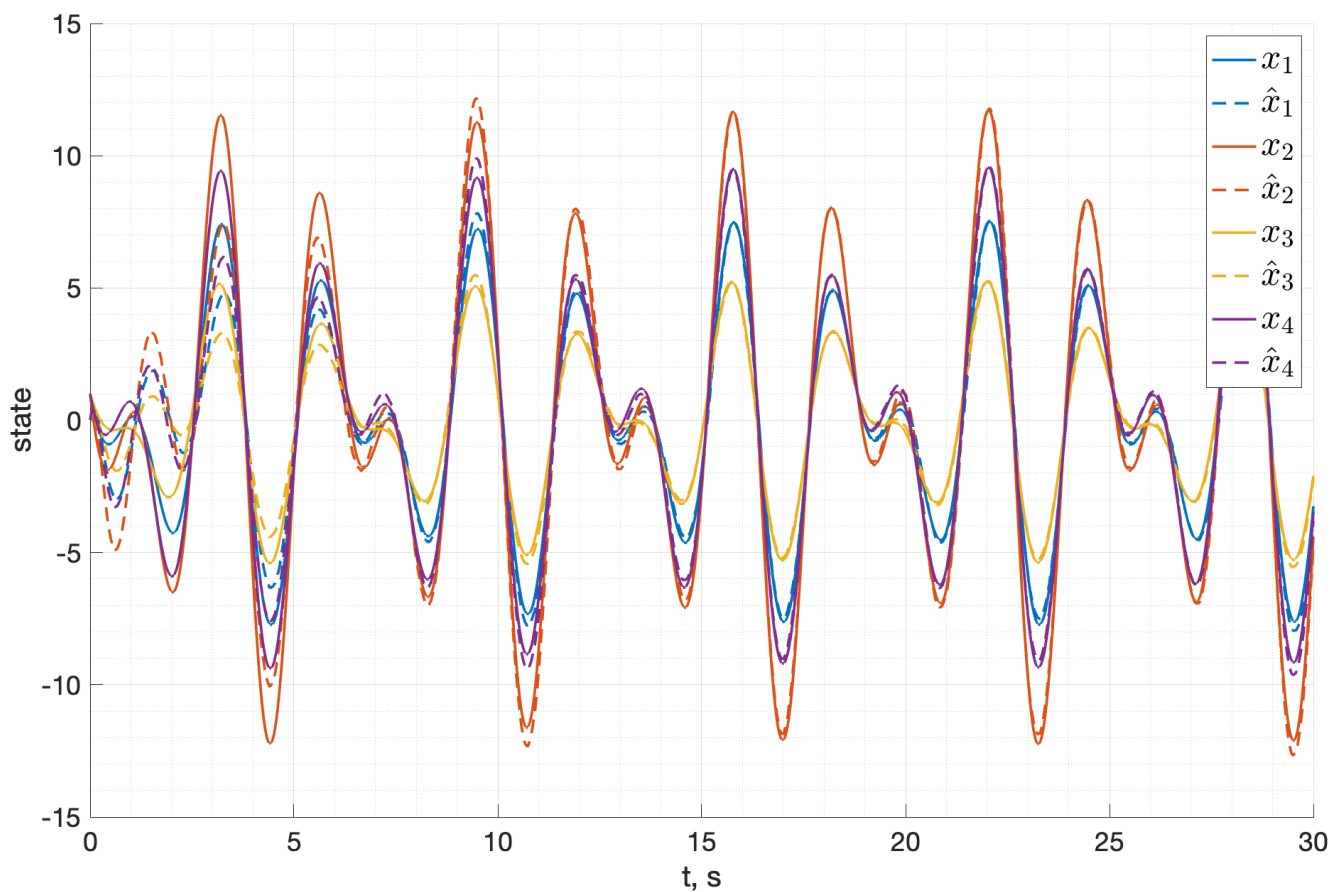


Рис. 17: Сравнение векторов состояния системы и оценки состояния фильтром Калмана L_4

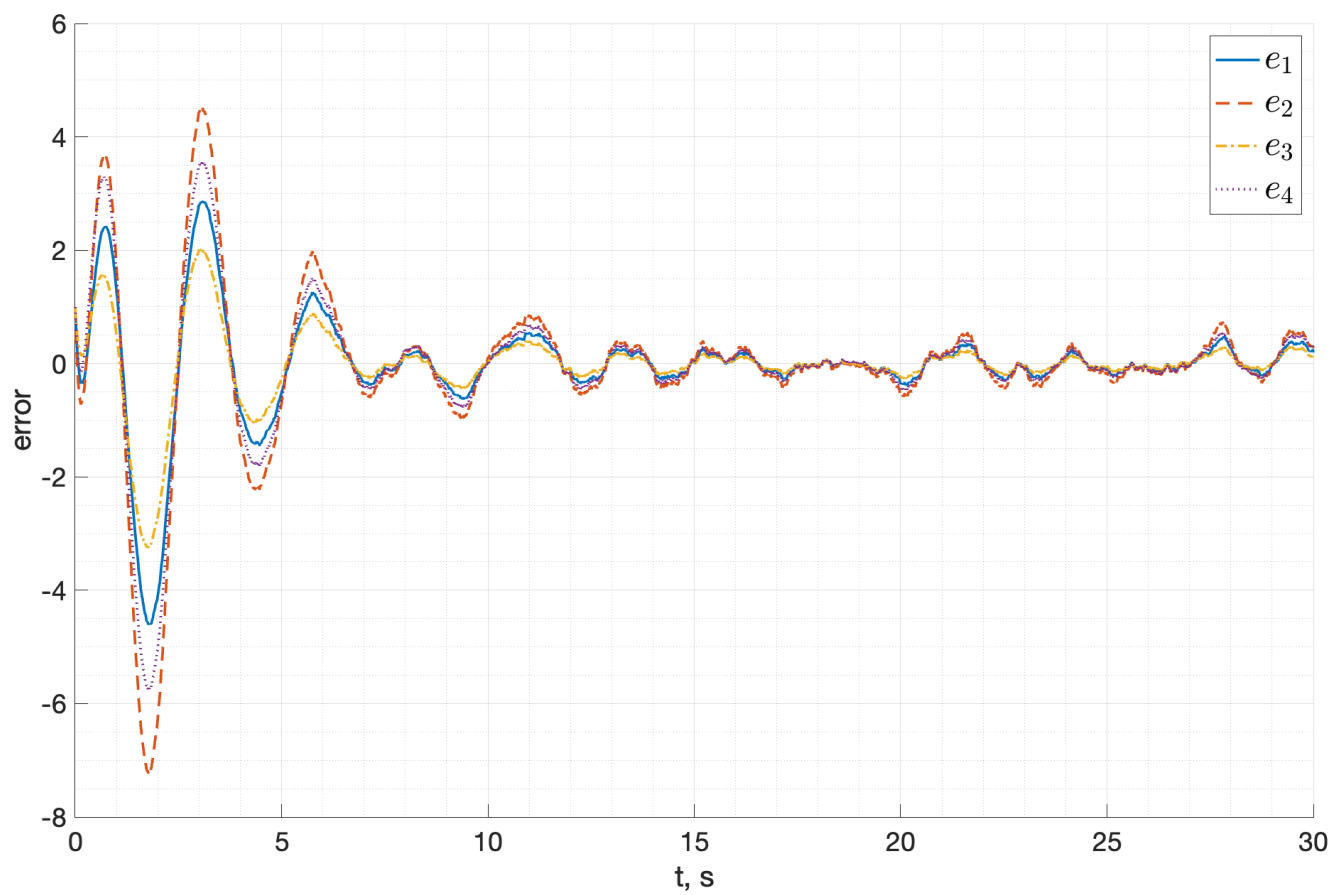


Рис. 18: Ошибка оценки состояния фильтром Калмана L_1

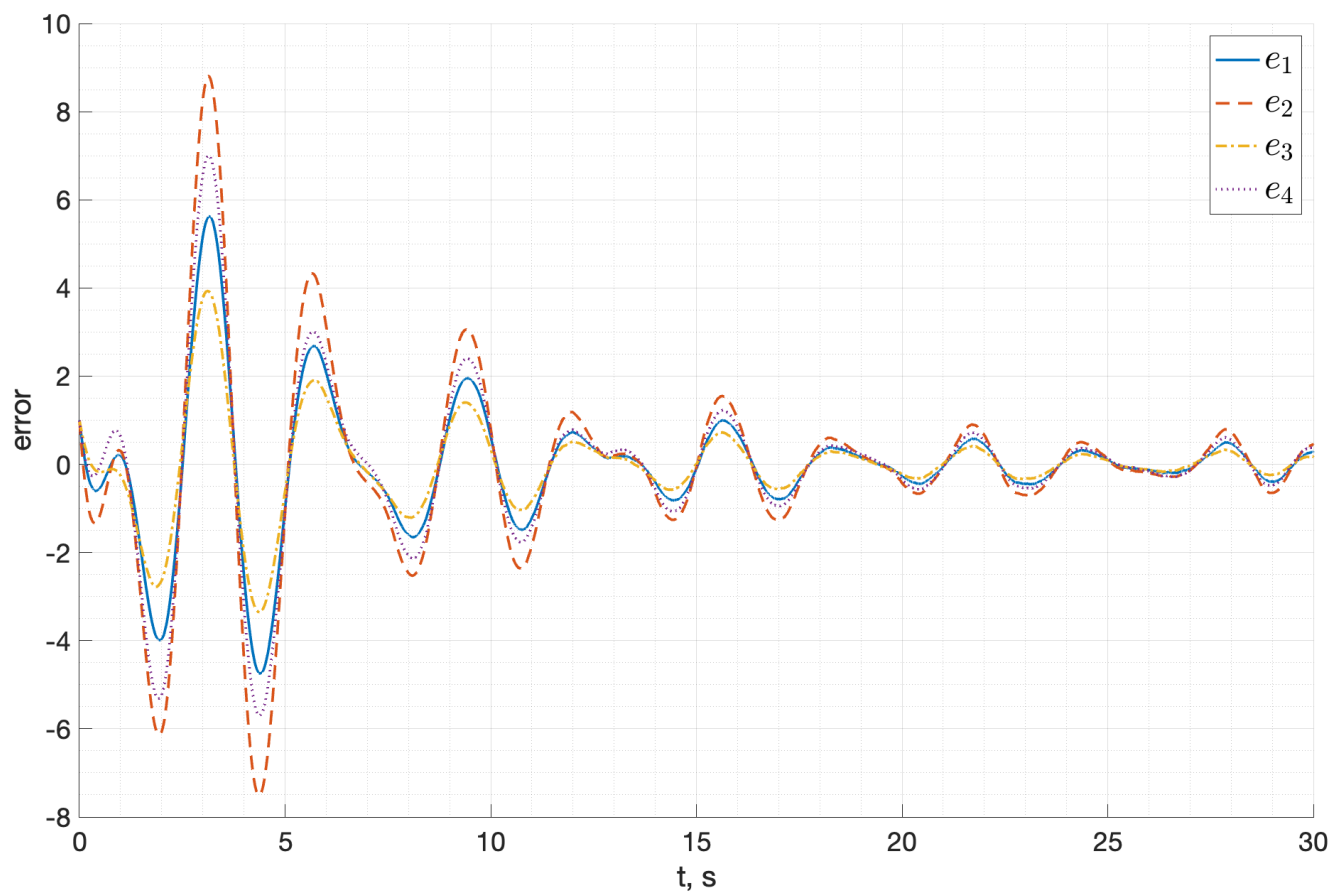


Рис. 19: Ошибка оценки состояния фильтром Калмана L_2

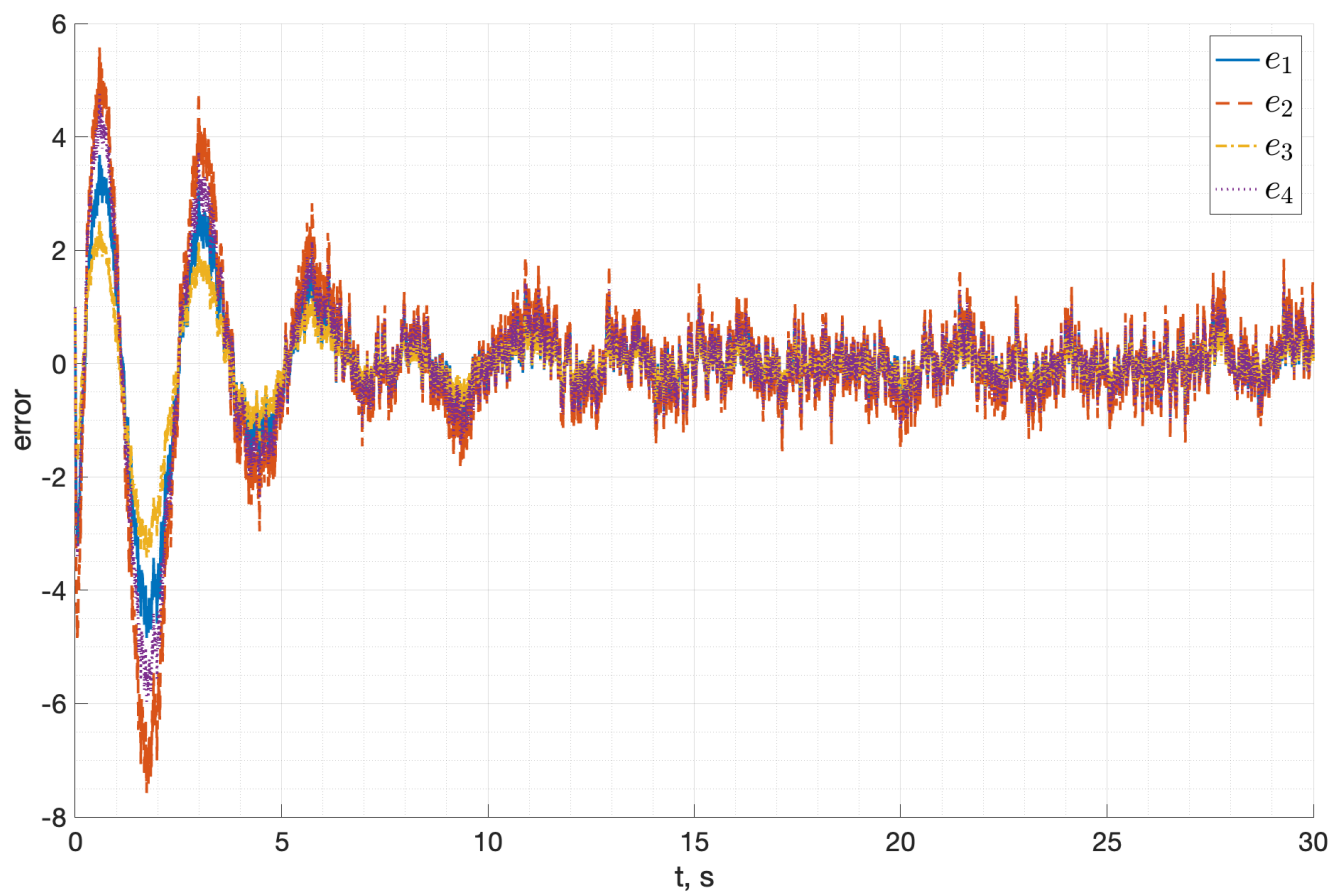


Рис. 20: Ошибка оценки состояния фильтром Калмана L_3

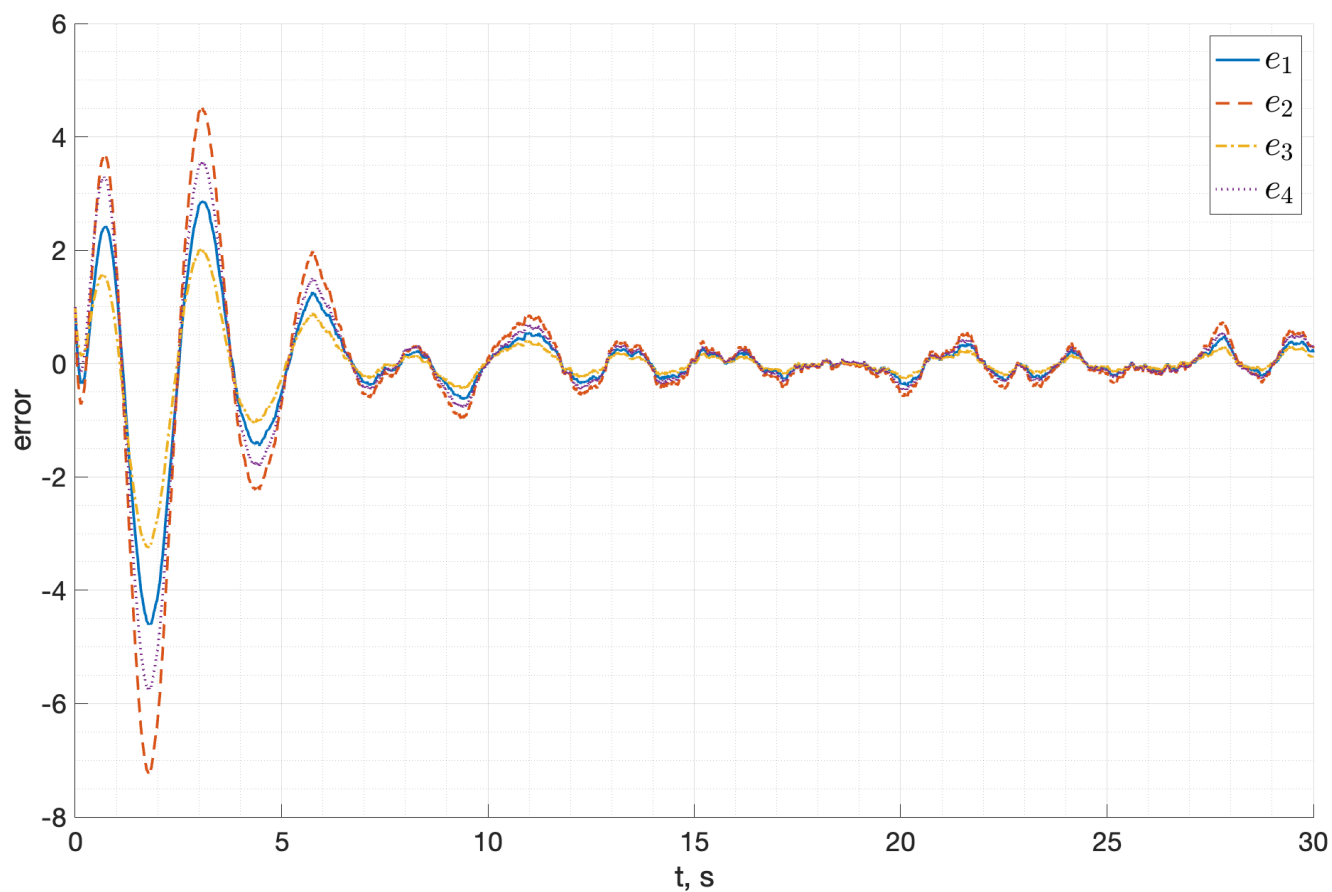


Рис. 21: Ошибка оценки состояния фильтром Калмана L_4

2.4. Выводы

Как и с LQR можно сказать, что вклад вносит не каждая матрица весов по отдельности, а их сочетание. Наиболее заметный шум в оценке системы получился при *сильной* матрице веса Q и *слабой* матрице веса R . При этом, ни в одном из случаев не удалось полностью избавиться от шума в оценке состояния системы. Это связано с тем, что наблюдатель не имеет сведений о шуме в системе, как это было в случае использования принципа внутренней модели в прошлых работах. Тем не менее, сравнивая величину шумов в выходе системы и в оценке состояния, можно заметить, что фильтр Калмана позволяет существенно уменьшить внешние возмущения и помехи.

3. LQG

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + Du + \xi \end{cases}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ -1 & 0 \\ 7 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 3 \sin(2t) & 2 \cos(3t) & \sin(3t) & \cos(t) \end{bmatrix}^T \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos(3t) & \sin(3t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

3.1. Управляемость и наблюдаемость

Для определения управляемости и наблюдаемости собственных чисел рассмотрим вещественную Жорданову форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} A_j &= \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -4.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 12.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 8.00 \end{bmatrix} & P &= \begin{bmatrix} -1.00 & -1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & -1.00 & -1.00 & 1.00 \\ 1.00 & -1.00 & 1.00 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ B_j &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ -2.00 & 0.00 \\ 7.00 & 0.00 \\ 3.00 & 0.00 \end{bmatrix}, & C_j &= \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 4.00 & 0.00 \\ 4.00 & 0.00 & 0.00 & 8.00 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Можно сделать вывод, что система является полностью управляемой, а собственное число $\lambda_2 = -4$ не является наблюдаемым. Соответственно, система не является полностью наблюдаемой, но, так как собственное число λ_2 располагается в левой полуплоскости, то система является обнаруживаемой.

3.2. Синтез LQG-регулятора

Рассмотрим наблюдатель и регулятор

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(\hat{y} - y) \quad u = K\hat{x} \quad (31)$$

Будем использовать линейно-квадратичные уравнения для синтеза регулятора и LQE-наблюдателя. Порядок синтеза был рассмотрен в предыдущих задачах, поэтому сразу приведем матрицы весов Q_K , R_K для синтеза регулятора и Q_L , R_L для синтеза наблюдателя и полученные матрицы K и L .

$$Q_K = 30 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_K = 20 \quad (32)$$

$$Q_L = 60 \cdot I_{4 \times 4}, \quad R_L = 2 \quad (33)$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.99 & 19.14 & -20.41 & 4.82 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -7.06 & -8.73 \\ 7.06 & -3.25 \\ -7.06 & 8.73 \\ -7.06 & -3.25 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Проведем моделирование системы, замкнутой регулятором на основе вектора оценки состояния наблюдателем. Схема моделирования представлена на рисунке 22.

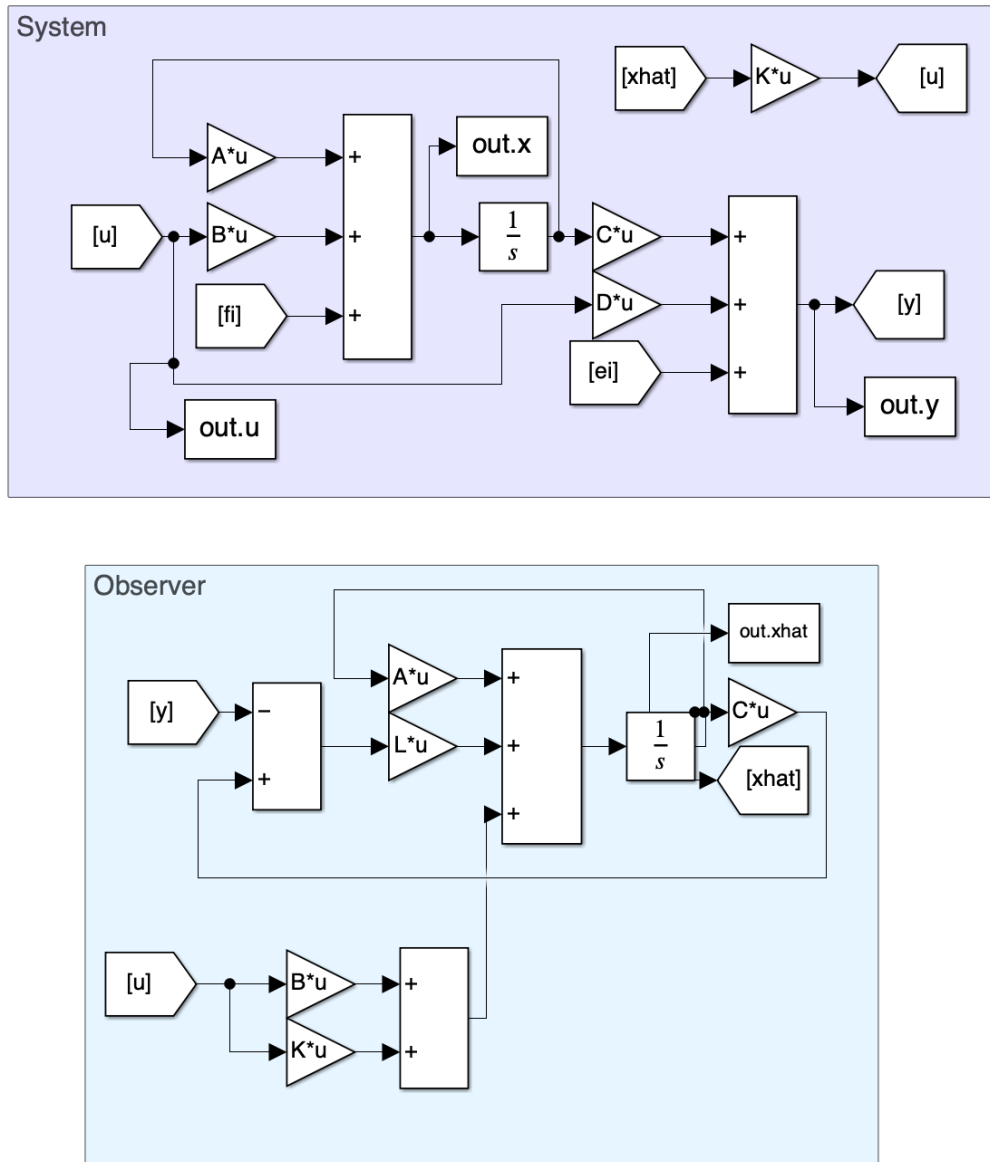


Рис. 22: Схема моделирования LQG-регулятора

График состояния системы и оценки состояния приведены на рисунке 23, ошибка оценки состояния приведена на рисунке 24, график управляющего воздействия на систему приведен на рисунке 25, график выхода системы приведен на рисунке 26.

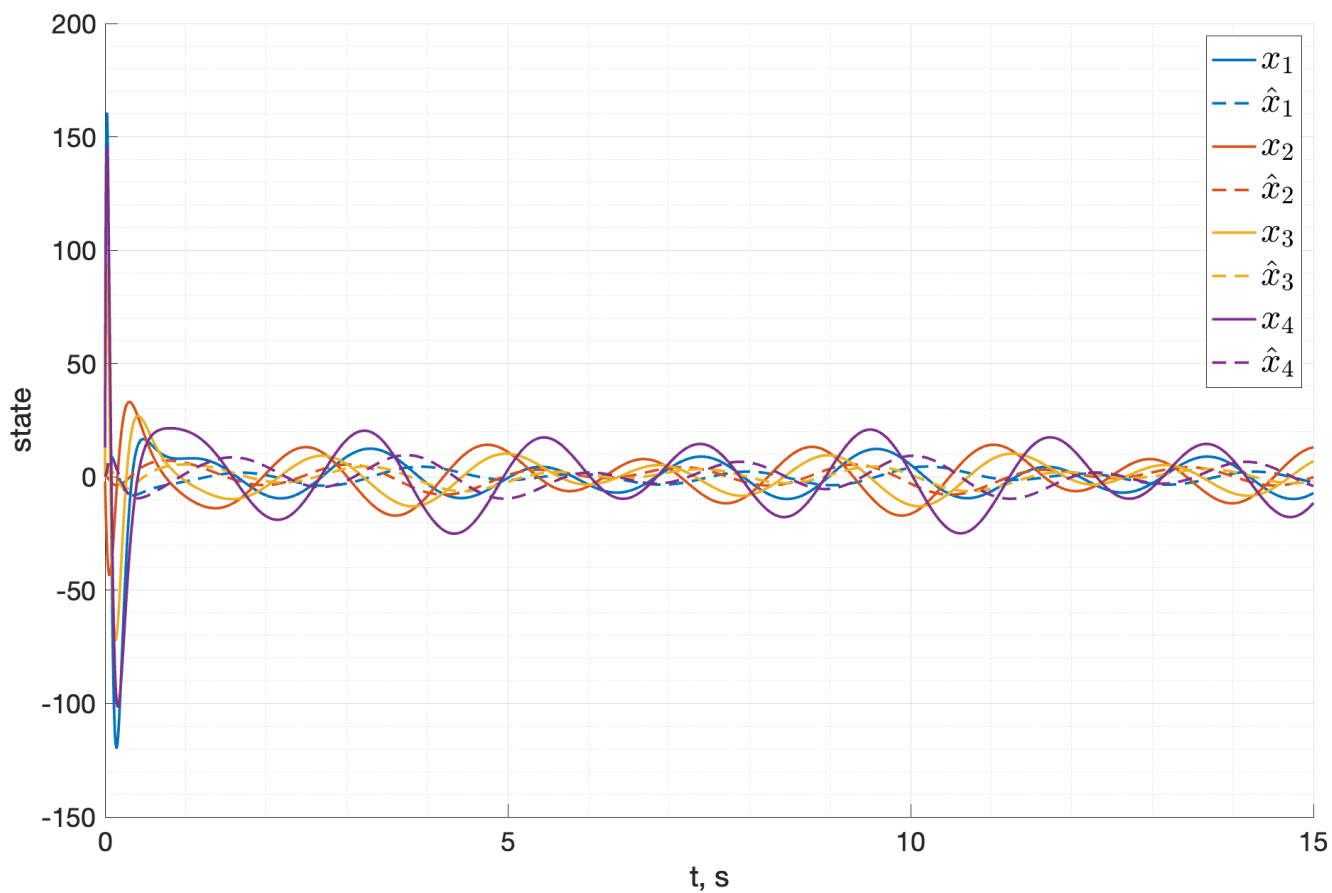


Рис. 23: Сравнение состояния системы и оценки состояния

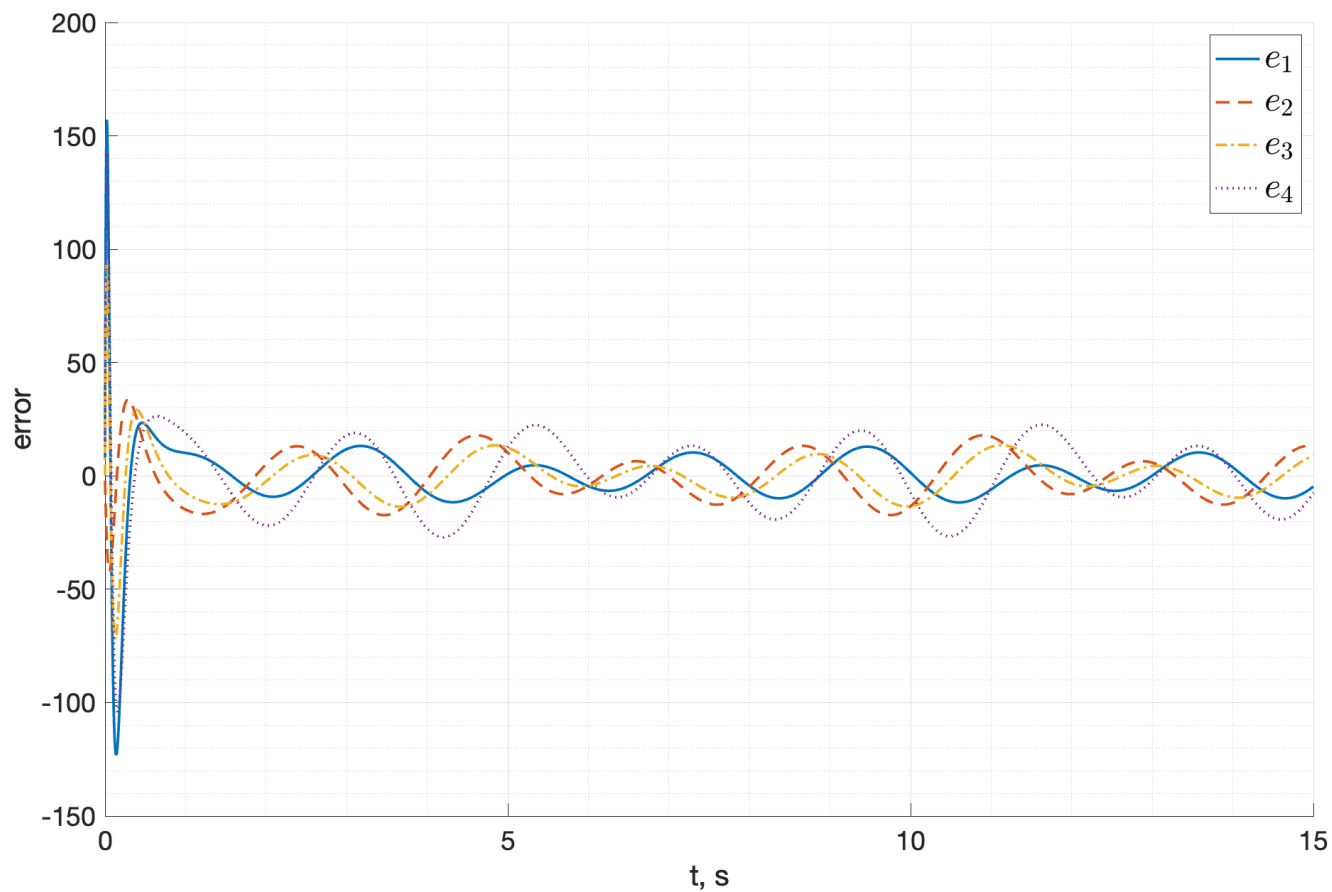


Рис. 24: Ошибка оценки состояния

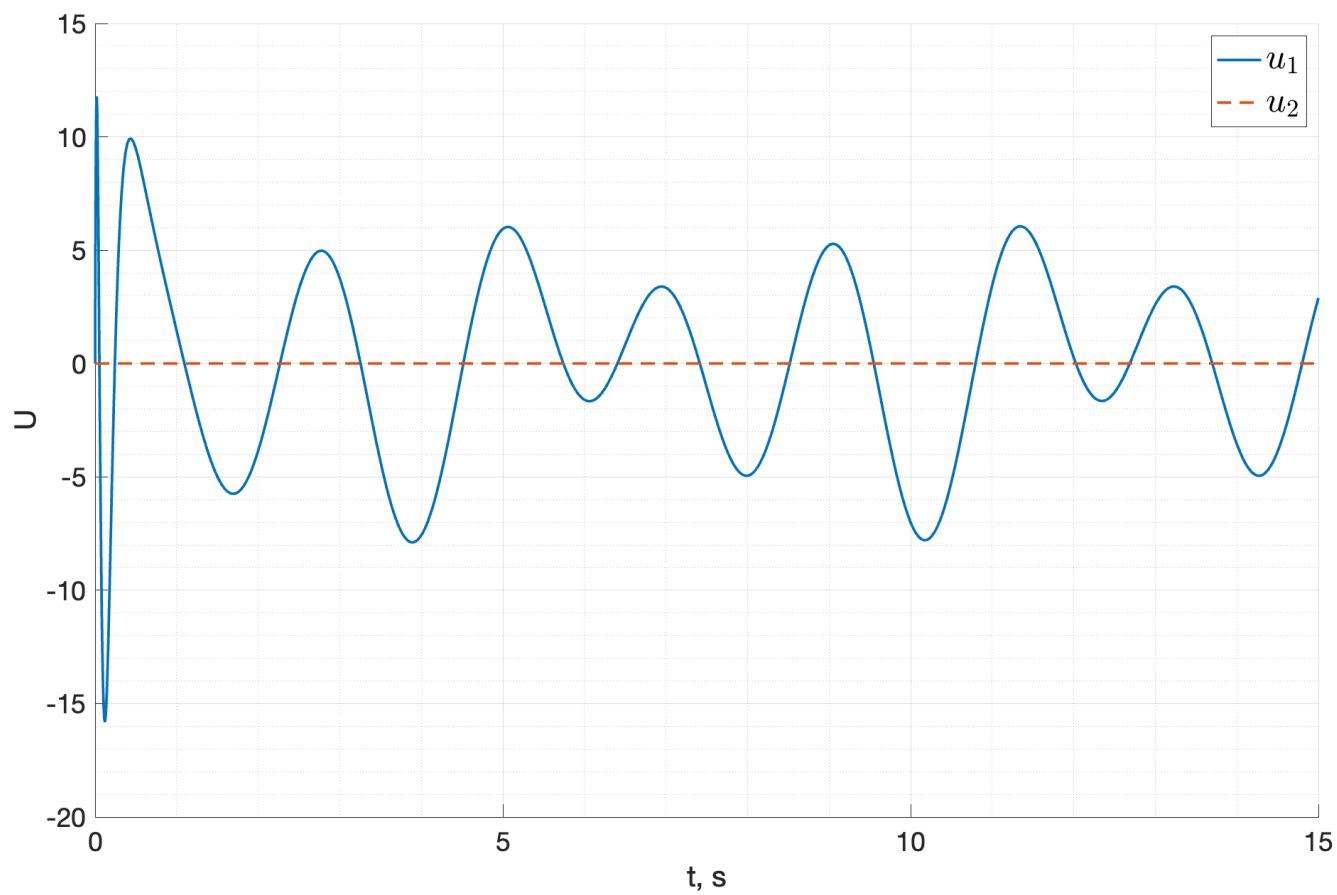


Рис. 25: Управляющее воздействие на систему

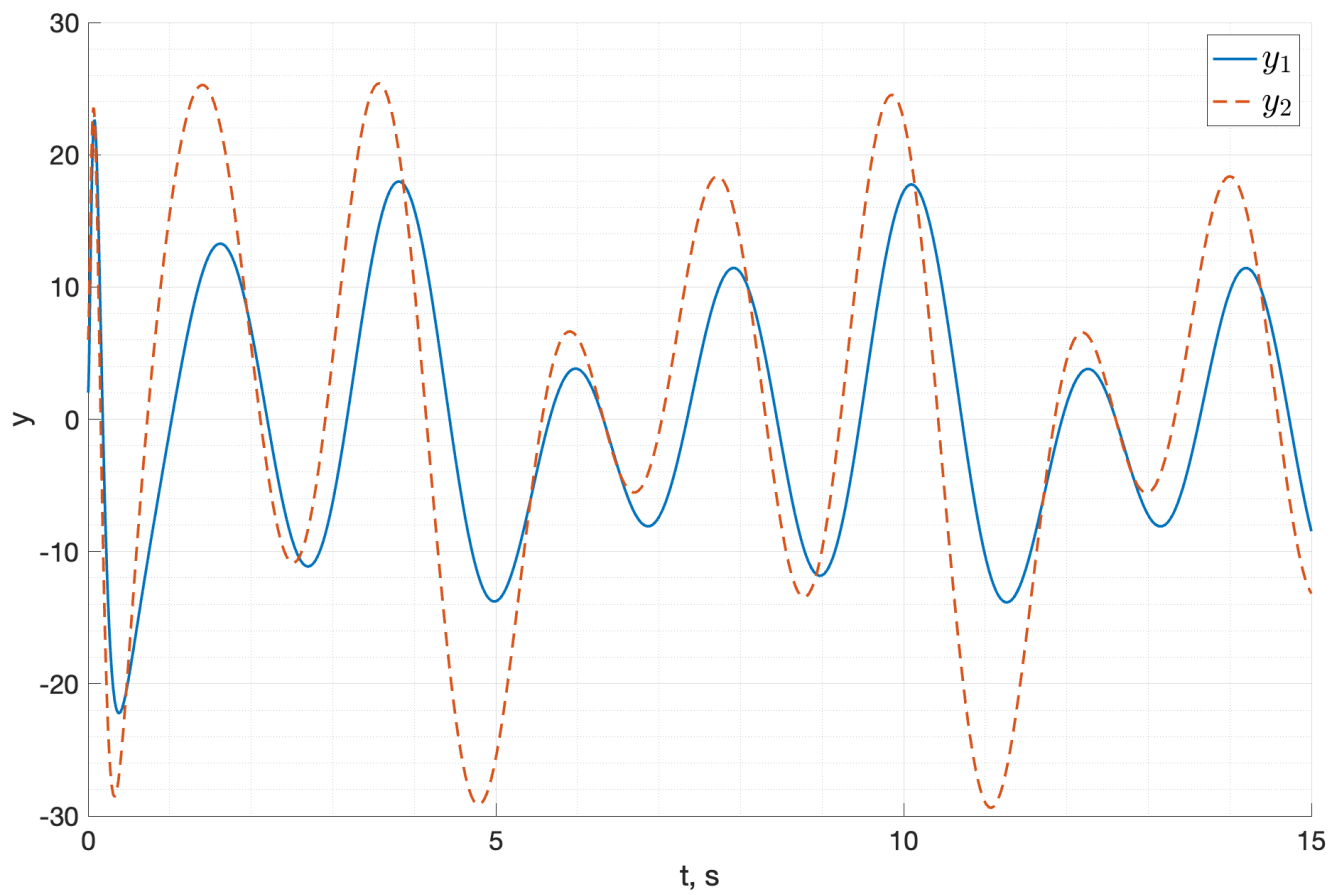


Рис. 26: Выход системы

3.3. Выводы

К сожалению, добиться полной стабилизации системы не удалось. Это связано с тем, что на систему действуют внешние возмущения, которые выводят ее из положения равновесия. К тому же, оценка состояния системы наблюдателем так же не является точной, в ошибке оценки состояния присутствуют колебания, которые также вызваны внешними возмущениями и шумом измерений, что также приводит к неустойчивости системы. При этом, если посмотреть на собственные числа матрицы A , то можно заметить, что система не является устойчивой по Ляпунову сама по себе, и должна *разваливаться* без управления. Отсюда можно сделать вывод, что LQR регулятор не может полностью стабилизировать систему, но может значительно улучшить ее поведение.

4. Выводы

В данной работе была рассмотрены и исследованы LQR-регулятор, фильтр Калмана и их совместная работа в LQG-регуляторе. Данные регуляторы и наблюдатели позволяют получить оптимальное управление системой и оценку состояния системы по заранее заданным критериям. В работе были рассмотрены как детерминированные, так и случайные помехи.