



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Слежение и компенсация: виртуальный выход”

Вариант 30

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Компенсирующий регулятор	3
1.1. Анализ внешнего возмущения	4
1.2. Синтез регулятора	6
1.2.1. Управляемость системы	6
1.2.2. Feedback компонента	7
1.2.3. Feedforward компонента	10
1.3. Выводы	14

1. Компенсирующий регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + B_f w_f, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

с генератором внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \quad w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

и виртуальным выходом

$$z = C_z x \quad (3)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}^T, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & 7 \\ -64 & 25 & 14 & 12 \\ -26 & 11 & 7 & 3 \\ -48 & 18 & 14 & 8 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Схема моделирования этой системы приведена на рисунке 1.

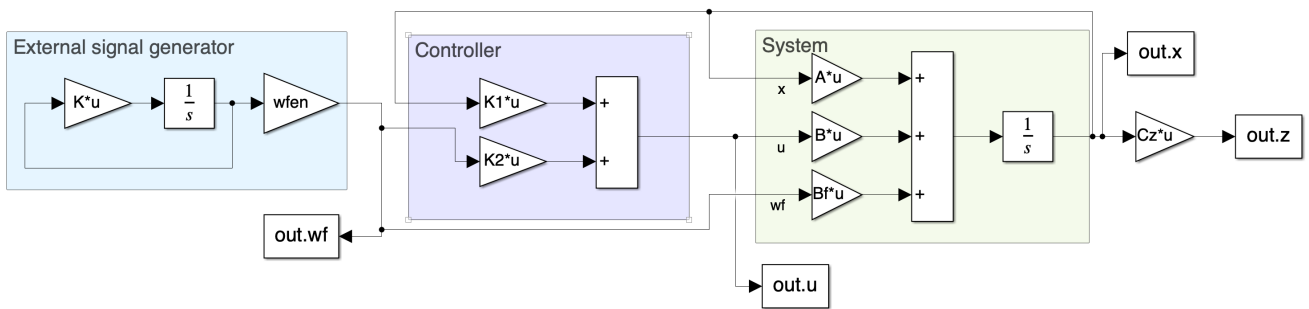


Рис. 1: Схема моделирования системы

1.1. Анализ внешнего возмущения

Так как внешнее возмущение задается линейной системой, можно найти его собственные числа, из которых будет понятен общий вид его выражения.

$$\sigma(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 \pm 3j & 0 \pm 2j \end{bmatrix} \quad (5)$$

Таким образом, так как вещественная часть всех собственных чисел матрицы равны нулю, в комплексные части являются попарно сопряженными, то можно сказать, что внешнее возмущение будет иметь гармонический характер, состоящий из двух частотных составляющих.

Можно найти уравнение внешнего возмущения:

$$w_f = e^{\Gamma t} \cdot w_f(0) \quad (6)$$

График внешнего возмущения приведен на рисунке 2. Реакция разомкнутой системы ($u = 0$)

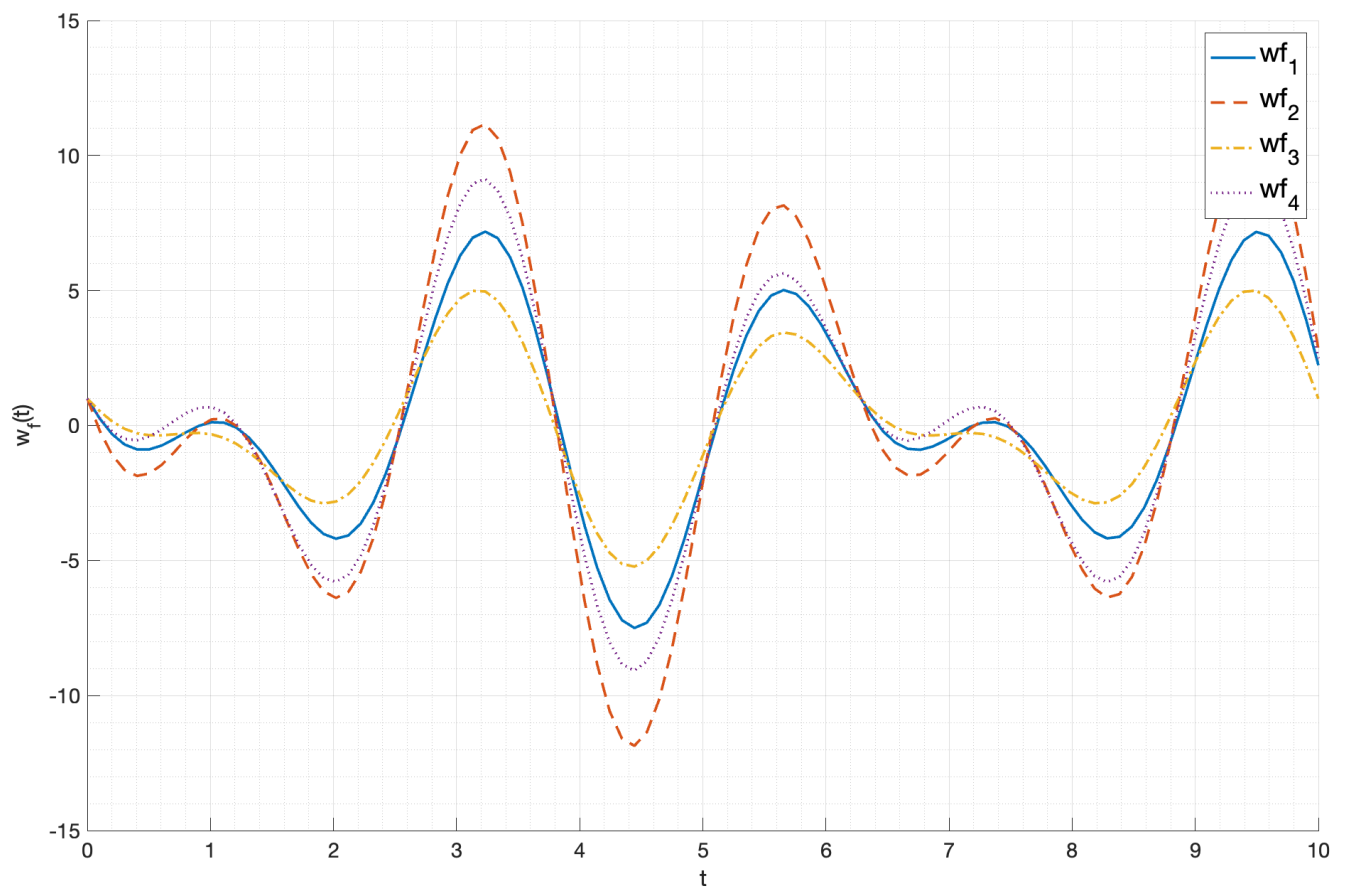


Рис. 2: График внешнего возмущения

при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ на внешнее возмущение приведена на рисунках 3, 4 (состояние системы и виртуальный выход соответственно). Как видно на графиках, система

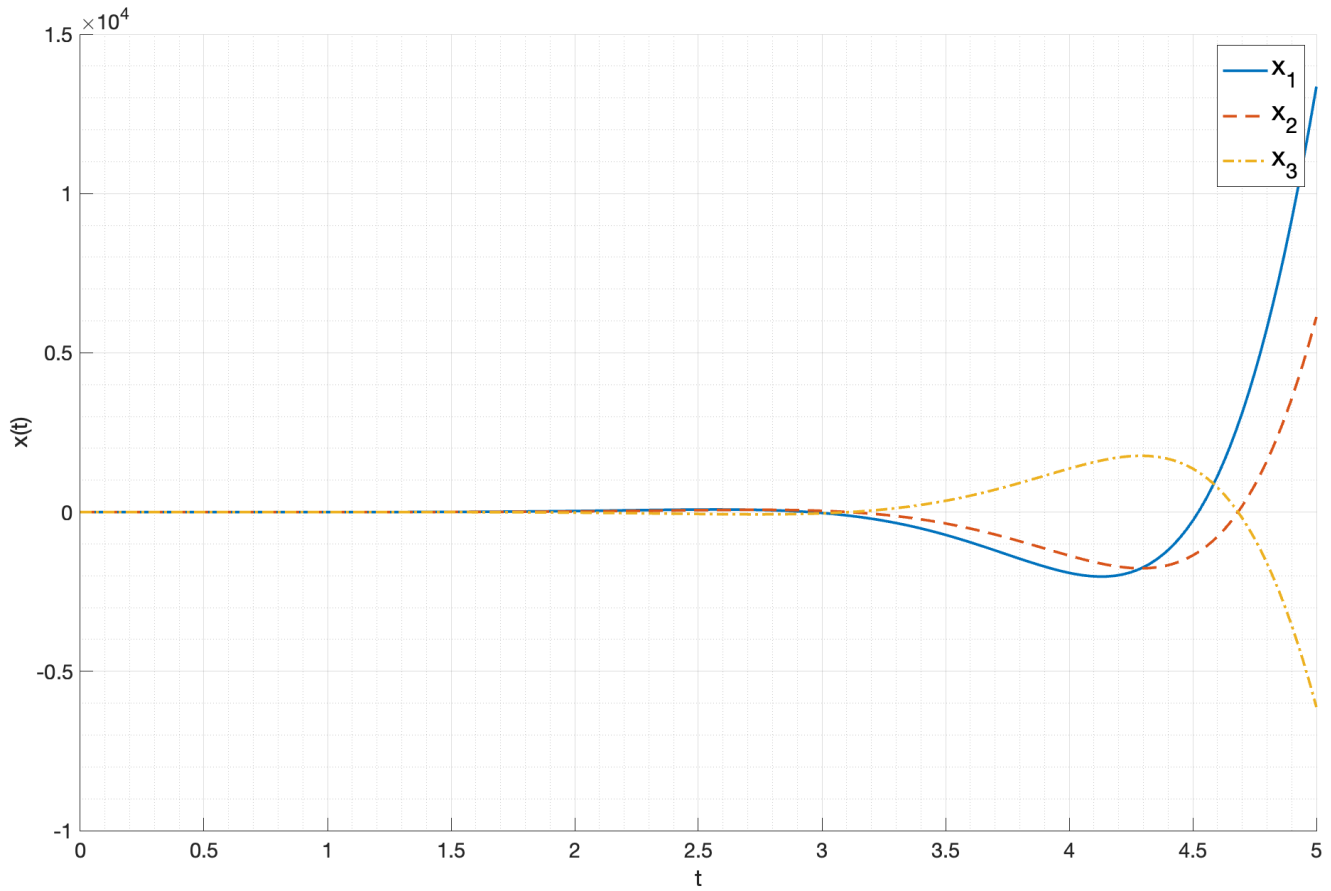


Рис. 3: Реакция разомкнутой системы на внешнее возмущение (состояние системы)

не является устойчивой. Это связано и с тем, что собственные числа матрицы A имеют положительную вещественную часть, и с тем, что внешнее возмущение имеет гармонический характер.

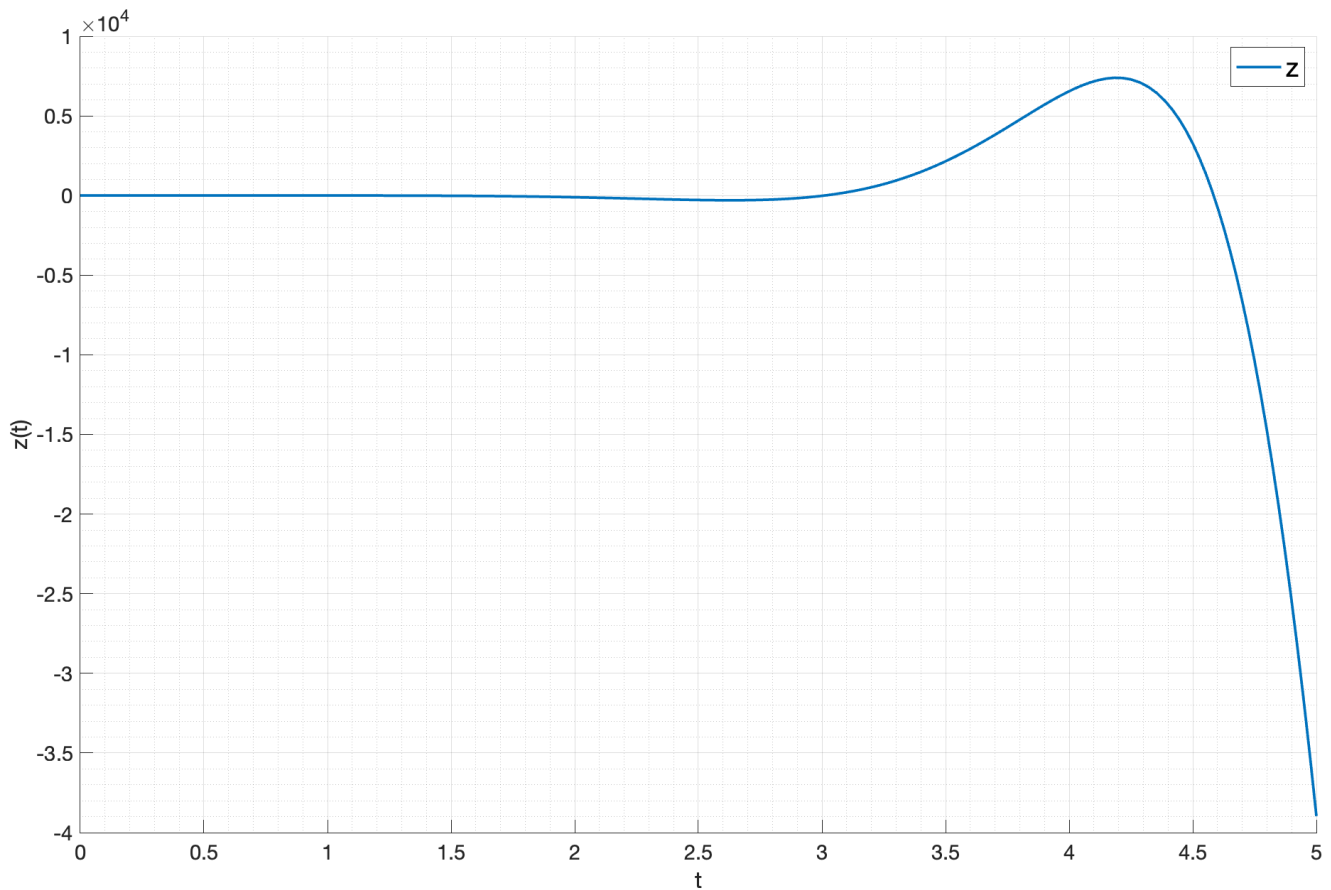


Рис. 4: Реакция разомкнутой системы на внешнее возмущение (виртуальный выход)

1.2. Синтез регулятора

Синтез регулятора, способного компенсировать внешнее возмущение, будет состоять из двух частей. Первая – синтез feedback компоненты, которая обеспечит стабилизацию системы. Для его синтеза можно воспользоваться модальными или немодальными методами. Вторая – синтез feedforward компоненты, которая обеспечит компенсацию внешнего возмущения.

1.2.1. Управляемость системы

Перед тем, как приступить к синтезу регулятора, проверим управляемость собственных чисел системы. Для этого найдем диагональную форму системы без внешнего возмущения.

$$A_j = \begin{bmatrix} -3.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 2.00 & 2.00 \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} -0.00 \\ 2.12 \\ 4.95 \end{bmatrix} \quad (7)$$

собственное число $\lambda_1 = -3$ не является управляемым, но является стабилизируемым. Собственные числа $\lambda_2 = 2 \pm 2j$ являются управляемыми.

1.2.2. Feedback компонента

Для синтезе регулятора вида $u = K_1 x$ воспользуемся методом немодального синтеза решением матричного неравенства Ляпунова с минимизацией нормы управления. Подробно синтез такого регулятора был рассмотрен в прошлой работе.

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad H = YP^{-1}, \quad P \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x(0)^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (8)$$

где μ – ограничение на управление $\mu \geq \|u(t)\|_2$. Минимизируя μ при заданной степени устойчивости $\alpha = 3$ и начальном состоянии $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, получаем следующий регулятор:

$$K_1 = [-4.57 \quad 0.29 \quad -4.57] \quad (9)$$

Собственные числа системы, замкнутой регулятором K_1 :

$$\sigma(A + BK_1) = \begin{bmatrix} -3.00 + 4.55j \\ -3.00 - 4.55j \\ -3.00 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Можно сделать вывод, что регулятор K_1 синтезирован корректно. Проведем промежуточные исследования системы. Про моделируем систему с регулятором K_1 без внешнего возмущения и с ним. В качестве начальных условий возьмем $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$. График состояния системы без внешнего возмущения приведен на рисунке 5 (состояние системы) и 6 (виртуальный выход), а с внешним возмущением на рисунке 7 (состояние системы) и 8 (виртуальный выход).

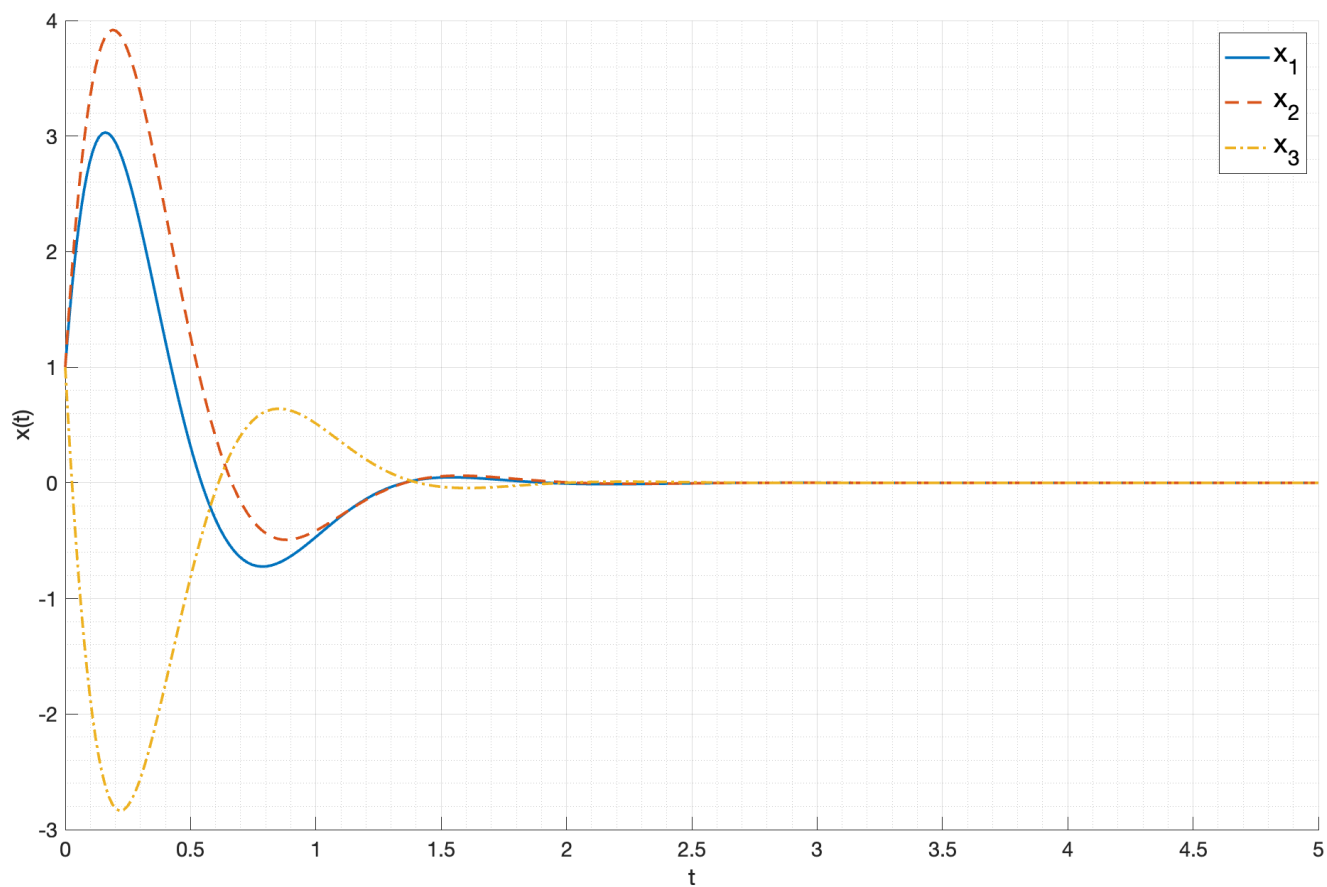


Рис. 5: Состояние системы с регулятором K_1 без внешнего возмущения

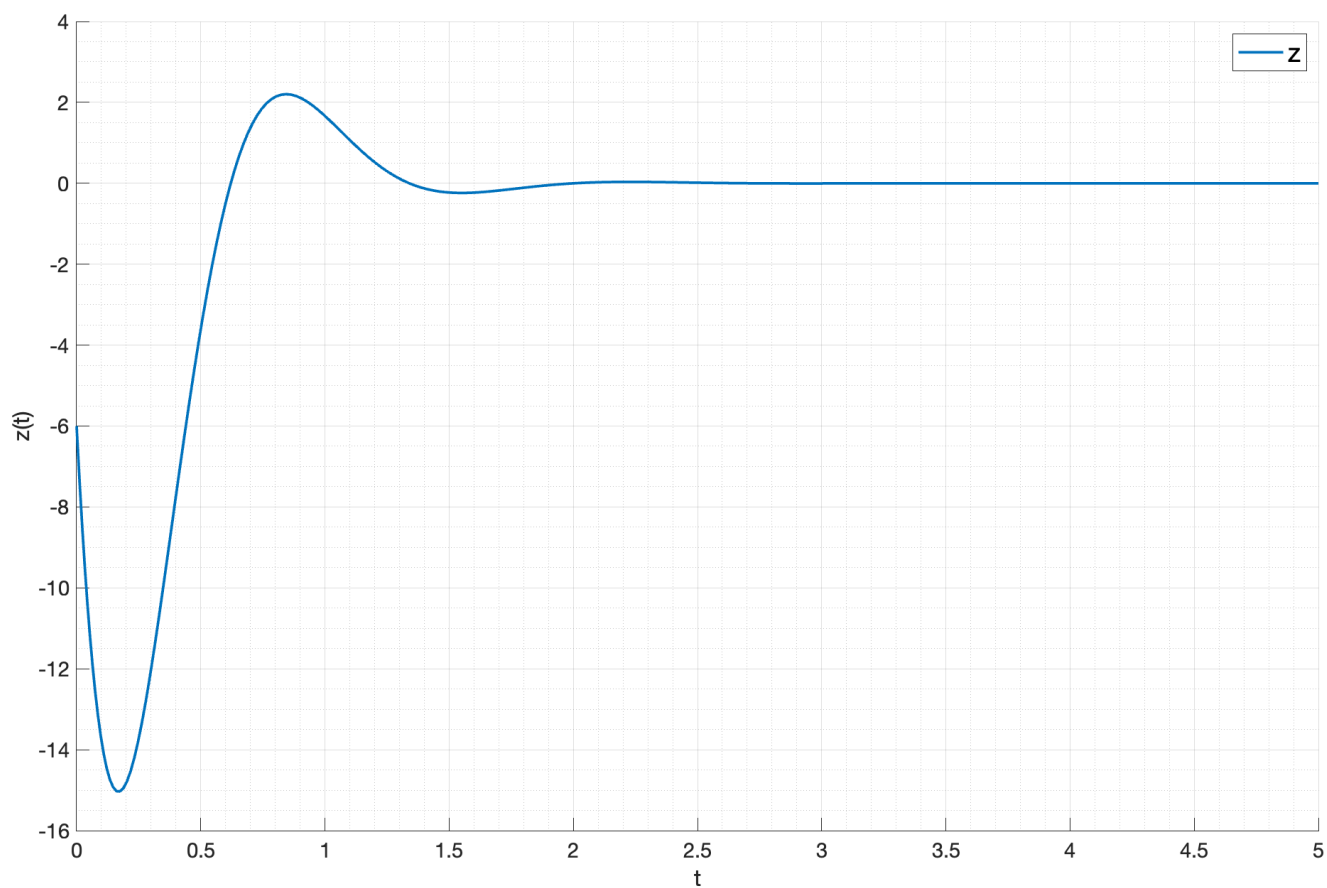


Рис. 6: Выход системы с регулятором K_1 без внешнего возмущения

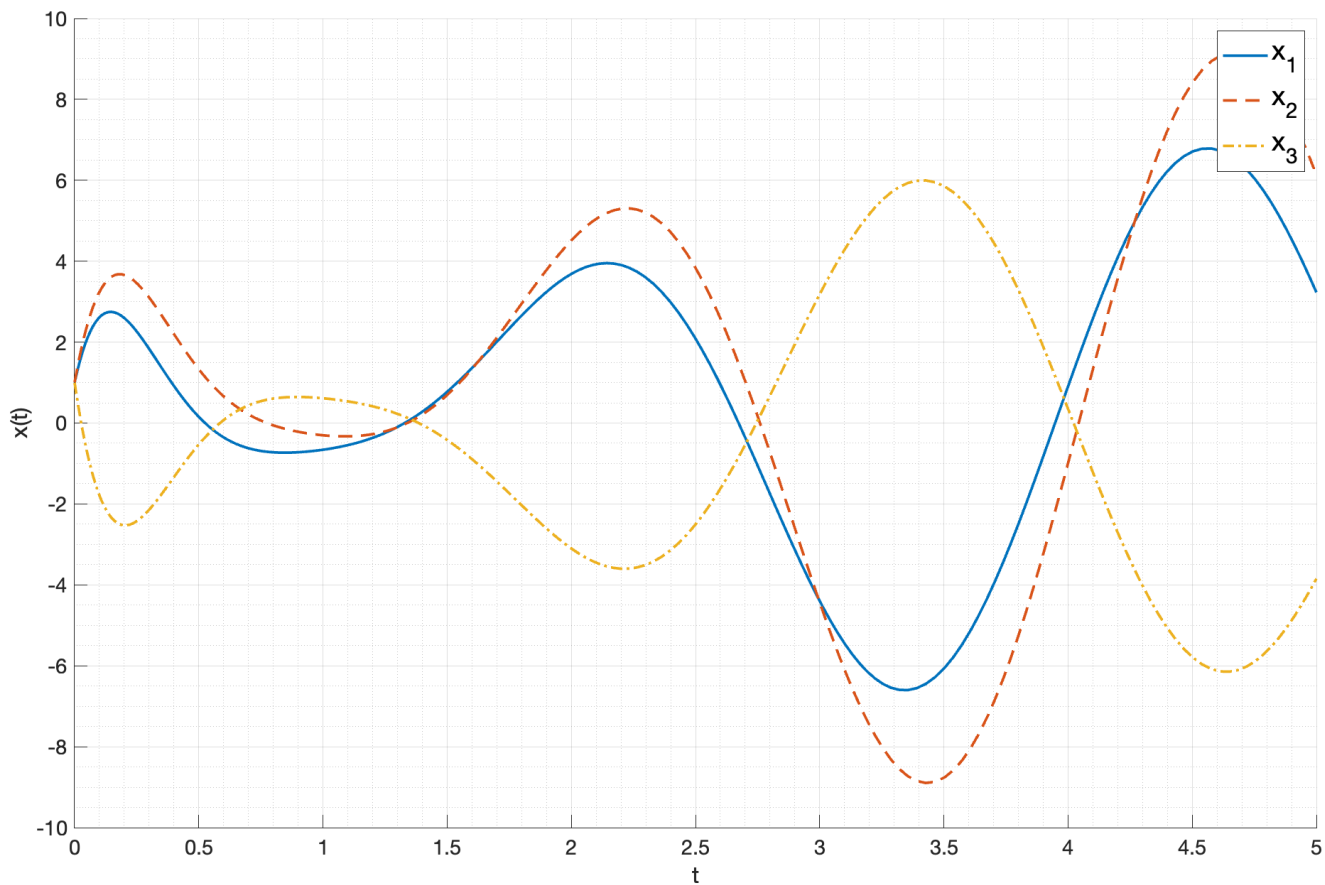


Рис. 7: Состояние системы с регулятором K_1 с внешним возмущением

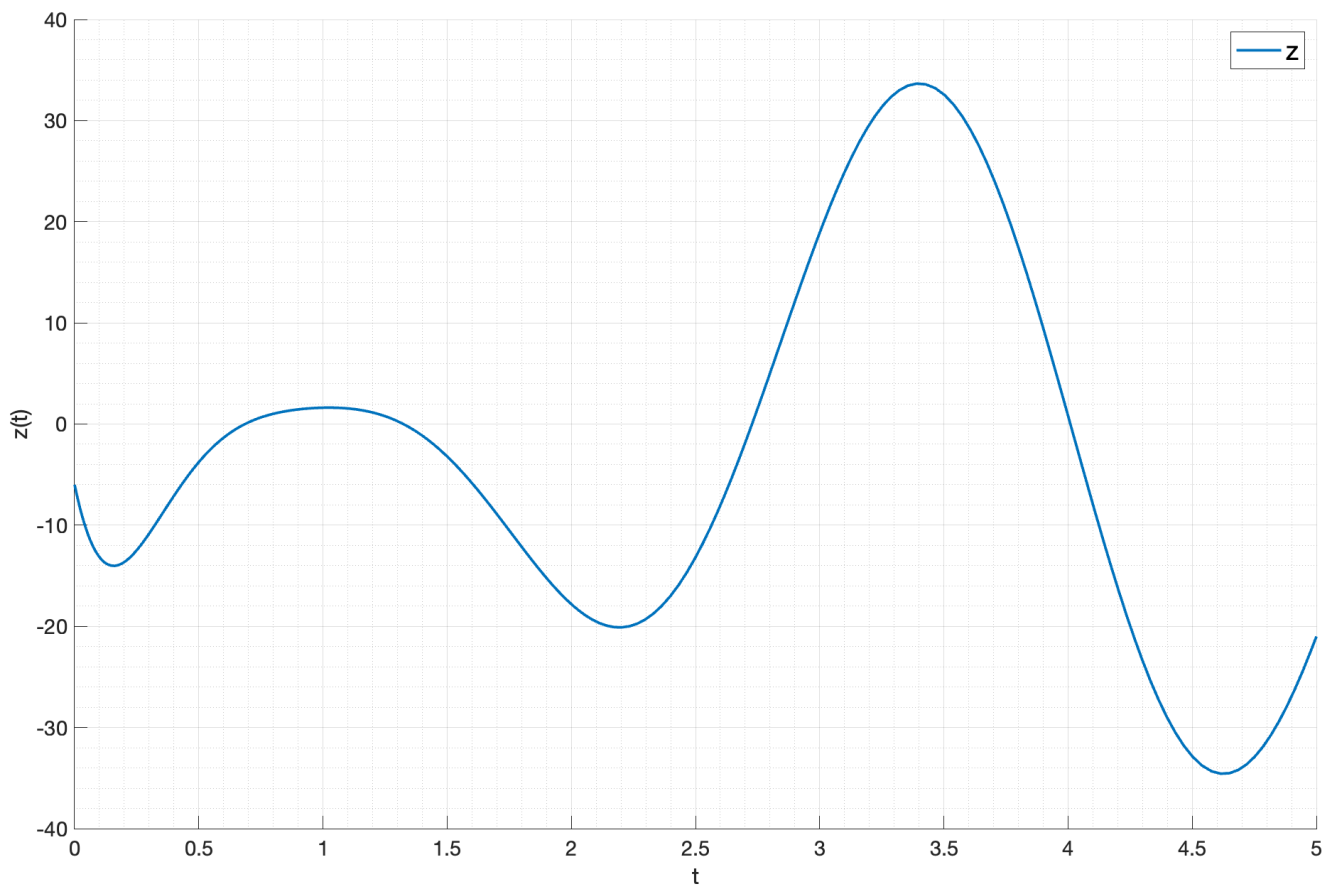


Рис. 8: Выход системы с регулятором K_1 с внешним возмущением

Видно, что система, замкнутая регулятором K_1 без внешнего воздействия сходится к нулю, что подтверждает корректность синтеза регулятора. Но при этом система с внешним возмущением не имеет устойчивого состояния.

1.2.3. Feedforward компонента

Для синтеза следящего регулятора воспользуемся уравнениями:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases} \quad (11)$$

Условием существования такого регулятора является принадлежность собственных чисел внешнего возмущения правой комплексной полуплоскости и принадлежность корней системы, замкнутой регулятором, левой комплексной полуплоскости. Оба эти условия выполняются. Решим систему с помощью пакета `cvx` в MATLAB, в результате получаем:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -5.96 & 2.25 & 2.72 & 1.48 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Проверим синтезированный регулятор на устойчивость при внешнем возмущении. График моделирования системы с внешним воздействием и начальными условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ с использованием *полного* регулятора $u = K_1 x + K_2 w_f$ приведен на рисунках 9 (состояние системы) и 10 (виртуальный выход). График управления, полученного с помощью полных регуляторов $K_1 + K_2$ приведен на рисунке 11. Видно, что выход системы сходится к нулю, что подтверждает корректность синтеза регулятора.

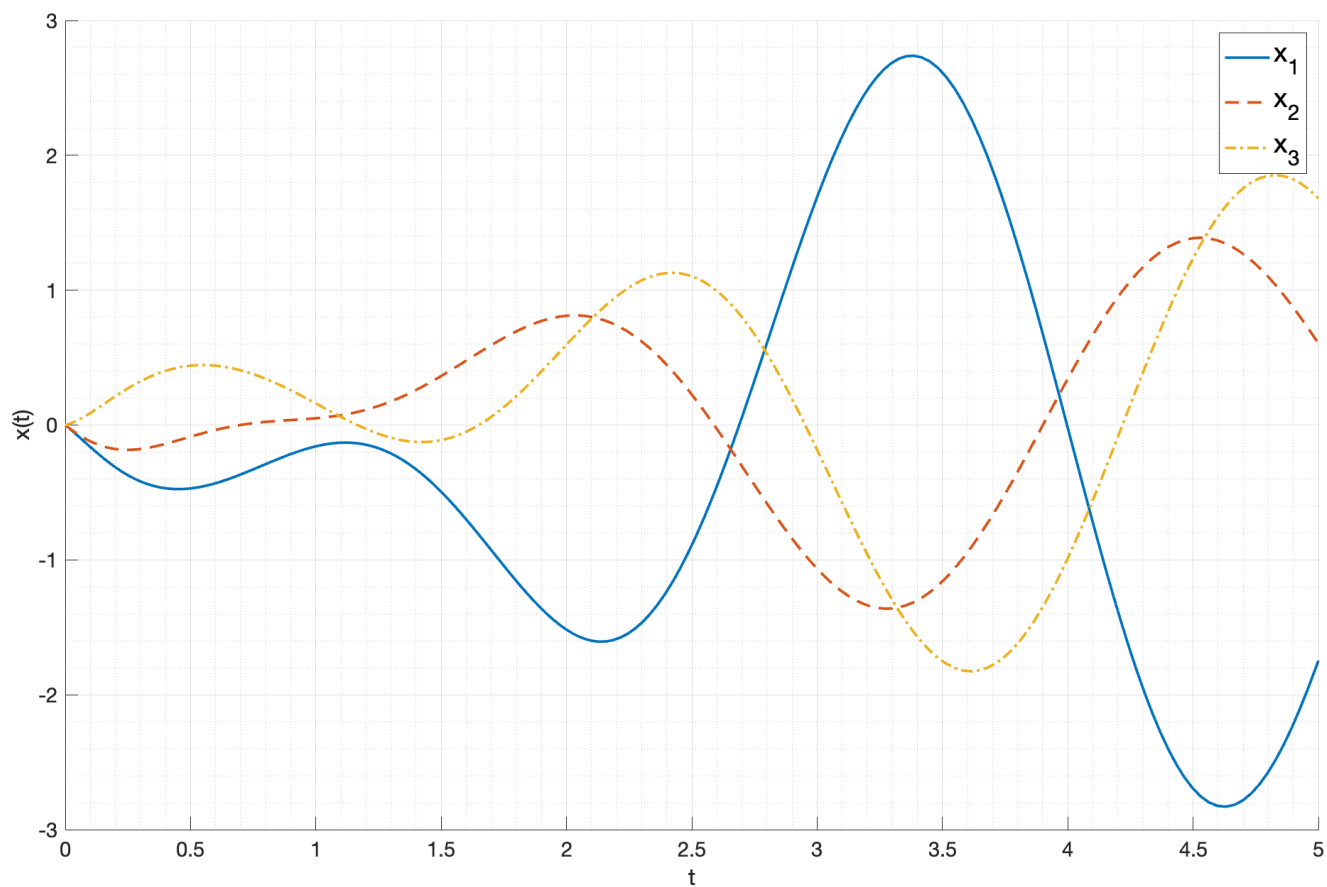


Рис. 9: Состояние системы с полным регулятором $K_1 + K_2$

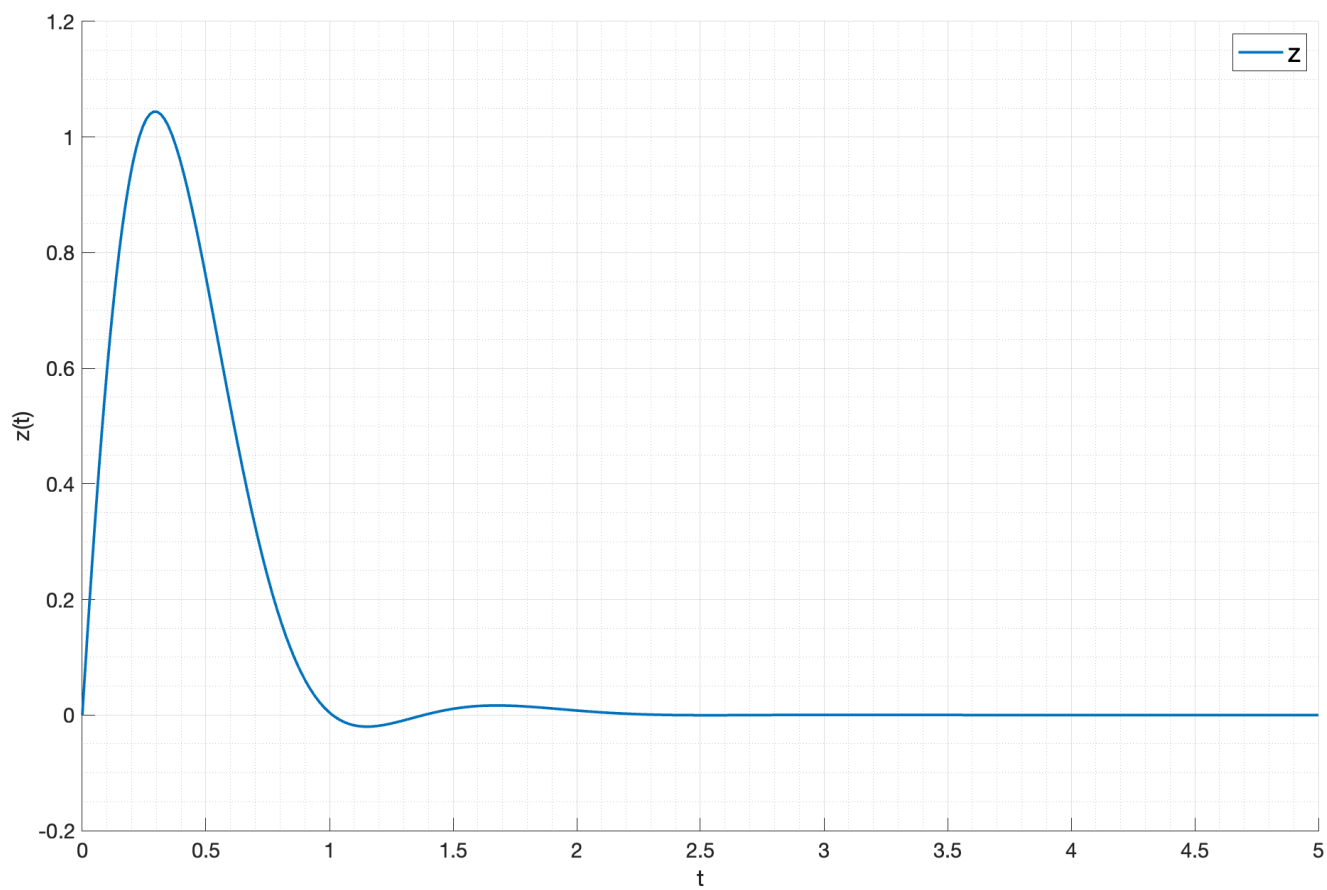


Рис. 10: Выход системы с полным регулятором $K_1 + K_2$

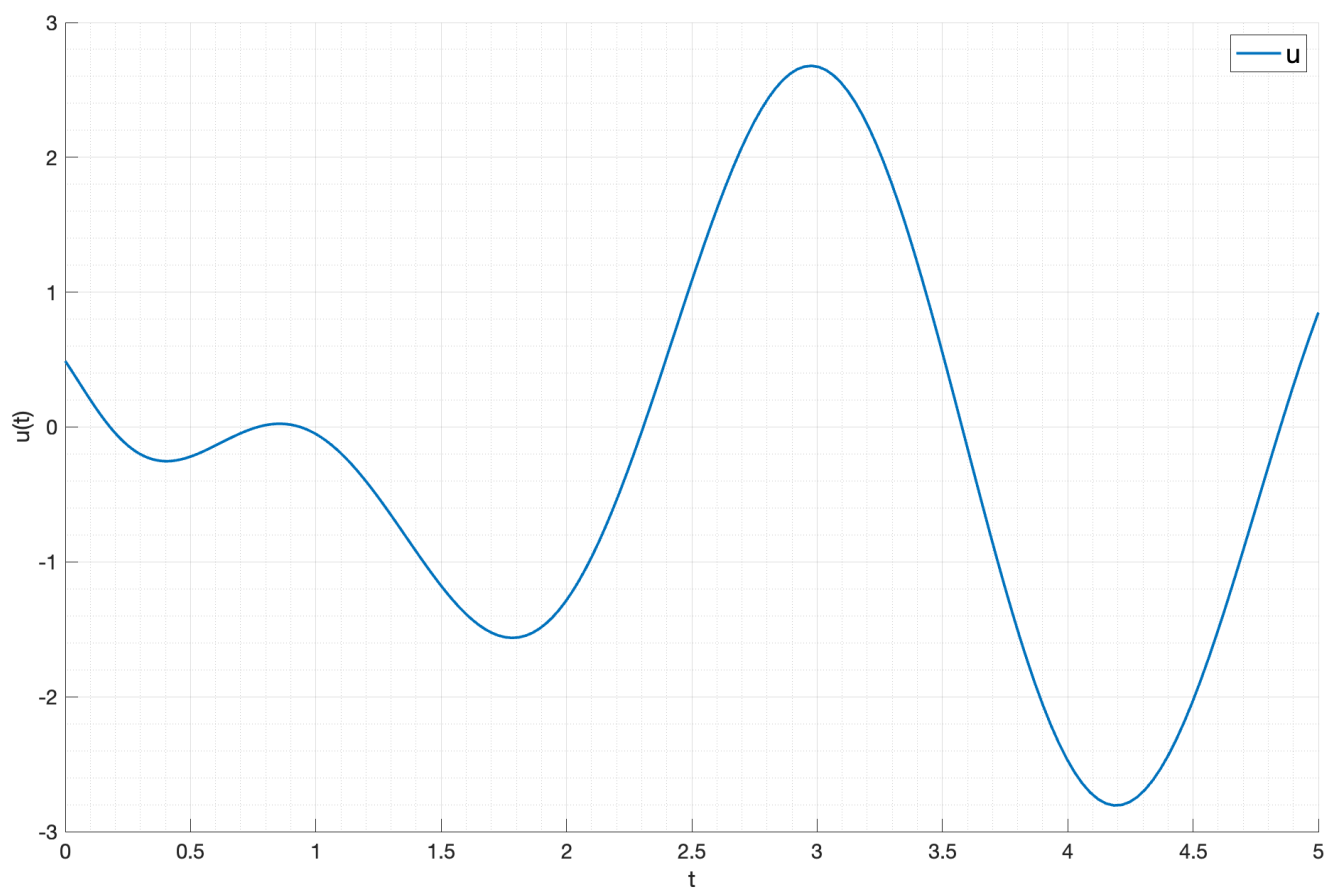


Рис. 11: Управление системы с полным регулятором $K_1 + K_2$

Сравнительные графики управления, формируемого разными регуляторами приведены на рисунке 12. где u_1 – управление, формируемое регулятором K_1 без внешнего воздействия, u_2 –

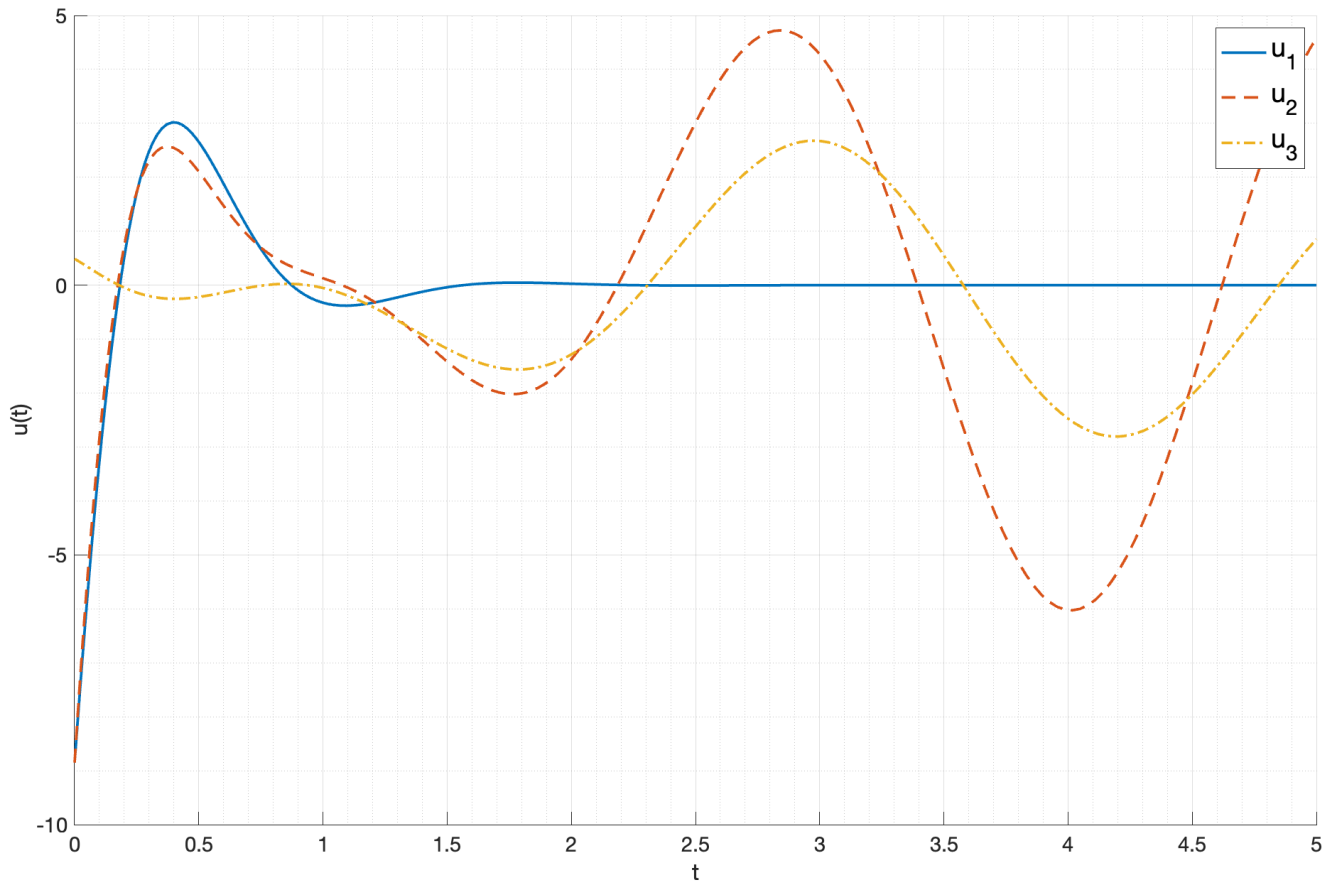


Рис. 12: Сравнение управления, формируемого разными регуляторами

управление, формируемое полным регулятором K_1 с внешним воздействием, u_3 – управление, формируемое полным регулятором $K_1 + K_2$ с внешним воздействием.

Сравнительные графики виртуального выхода, формируемого разными регуляторами приведены на рисунке 13. где z_1 – выход системы с полным регулятором K_1 с внешним воздействием, z_2 – выход системы с полным регулятором $K_1 + K_2$ с внешним воздействием.

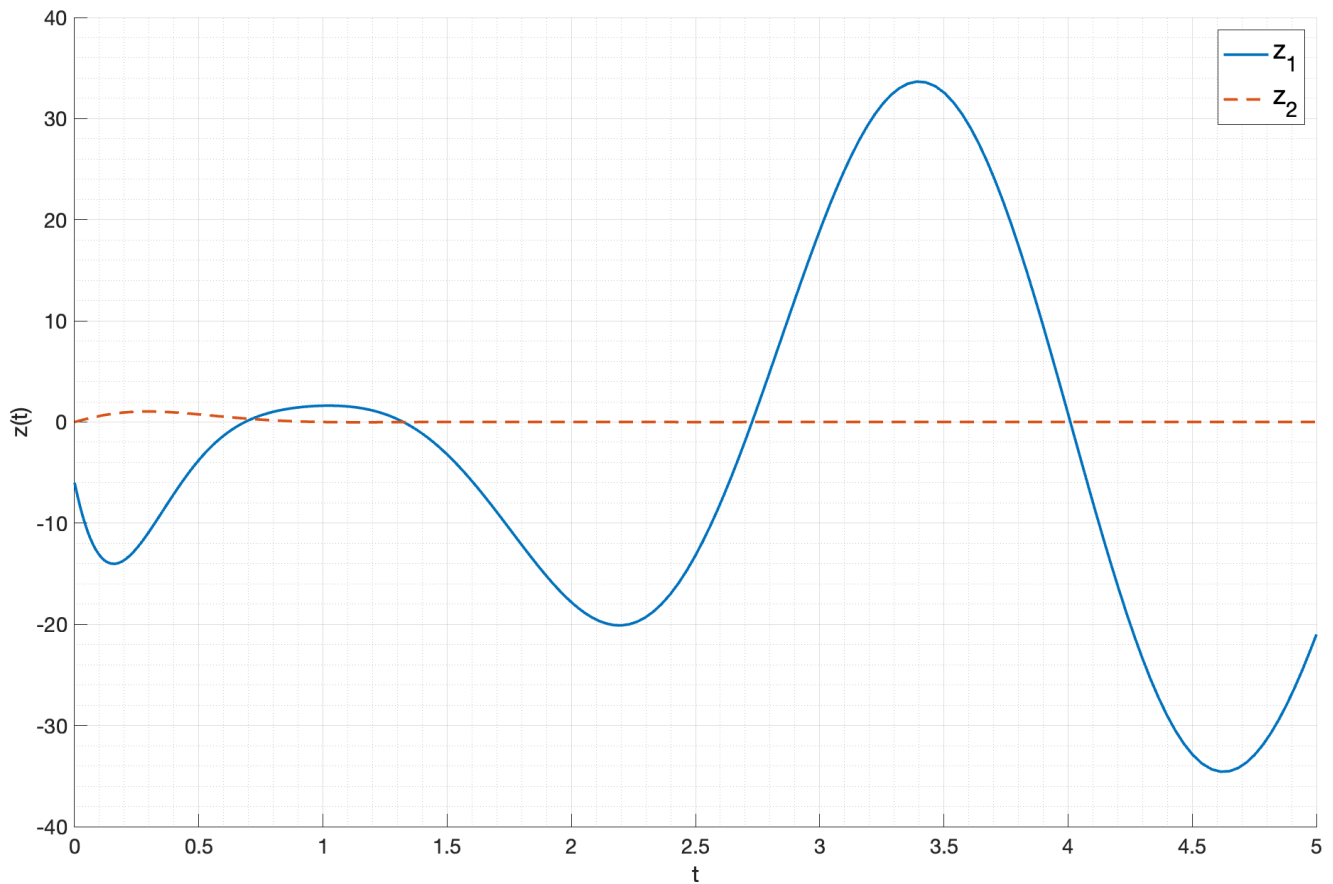


Рис. 13: Сравнение виртуального выхода, формируемого разными регуляторами

1.3. Выводы

В результате исследования системы с внешним возмущением и различными регуляторами можно сделать следующие выводы: система с *классическим* немодальным регулятором K_1 не является устойчивой при наличии внешнего возмущения, содержащего гармонические составляющие. Система с *полным* регулятором $K_1 + K_2$ является устойчивой при наличии внешнего возмущения. При этом состояние системы с полным регулятором не сходится к нулю, компенсируя внешнее возмущение.