НИУ ИТМО

Отчет по курсовому проекту

По дисциплине "Теория автоматического управления"

“Стабализация перевернутого маятника”

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Физическая модель маятника

Рассмотрим систему, состоящую из тележки массой M, движущейся по горизонтальной оси, и маятника с равномерно распределенной массой m и длиной l_{pend}, закрепленного на шарнире на тележке. Примем за x координату тележки, а за θ угол отклонения маятника от вертикали.

1.1. Уравнения движения

Используем законы Лагранжа для записи уравнений движения системы.

Так как кинетическая и потенциальная зависят от центра масс тележки и маятника, введем в рассмотрение расстояние l от точки подвеса маятника до его центра масс. При этом $l = l_{\text{pend}}/2$ для равномерно распределенной массы маятника.

Напишем уравнения для координат центра масс маятника x_m и y_m и продифференцировав их по времени, получим скорости центра масс маятника:

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta, \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, \\ v_y = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

Общая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергии маятника и кинетической энергии тележки:

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$U = mgl\cos\theta \tag{3}$$

Записывая функция Лагранжа $L = T - U$, получаем:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \tag{4}$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \end{aligned} \tag{5}$$

где Q_x и Q_θ – обобщенные силы, действующие на тележку и маятник соответственно. В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = Q_x, \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta = Q_\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) представляет собой уравнения баланса сил, приложенных к тележке и моментов, действующих на маятник.

Запишем этм уравнения разрешив их относительно высших производных. Заметим, что вторые производные входят в эти уравнения линейно. С учетом этого приведем уравнения к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & M+m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mgl\sin\theta + Q_\theta \\ ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x \end{bmatrix} \tag{7}$$

Убедимся в существовании и единственности решения системы:

$$D = ml^2(M+m) - m^2l^2\cos^2\theta = ml^2(M+m-m\cos^2\theta) > 0 \tag{8}$$

Решая систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{\ddot{x}} = \begin{vmatrix} -mgl\sin\theta + Q_\theta & ml\cos\theta \\ ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x & M+m \end{vmatrix} &= (-mgl\sin\theta + Q_\theta)(M+m) - ml\cos\theta(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) = \\ &= -mgl\sin\theta M - m^2gl\sin\theta + (M+m)Q_\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - mlQ_x\cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta_{\ddot{\theta}} = \begin{vmatrix} ml^2 & -mgl\sin\theta + Q_\theta \\ ml\cos\theta & ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x \end{vmatrix} = ml^2(ml\dot{\theta}^2\sin\theta + Q_x) - ml\cos\theta(-mgl\sin\theta + Q_\theta) \tag{10}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{Q_x - \frac{Q_\theta\cos\theta}{l} - mg\sin\theta\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}, \\ \ddot{\theta} = \frac{-Q_x\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \end{cases} \tag{11}$$