НИУ ИТМО

Отчет по лабораторной работе №1

По дисциплине "Линейные системы автоматического управления"

“Формы представления линейных динамических систем”

Вариант 17

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1. Одноканальная система в форме вход-выход

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u \tag{1}$$

Перепишем его в операторной форме:

$$p^3 y + a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_2 p^2 u + b_1 p u + b_0 u \tag{2}$$

Упростим уравнение, выразив y:

$$y = \frac{1}{p}(b_2 u - a_2 y + \frac{1}{p}(b_1 u - a_1 y + \frac{1}{p}(b_0 u - a_0 y))) \tag{3}$$

Теперь, имея данное уравнение, можно построить схему моделирования в Matlab Simulink (рис. 1).

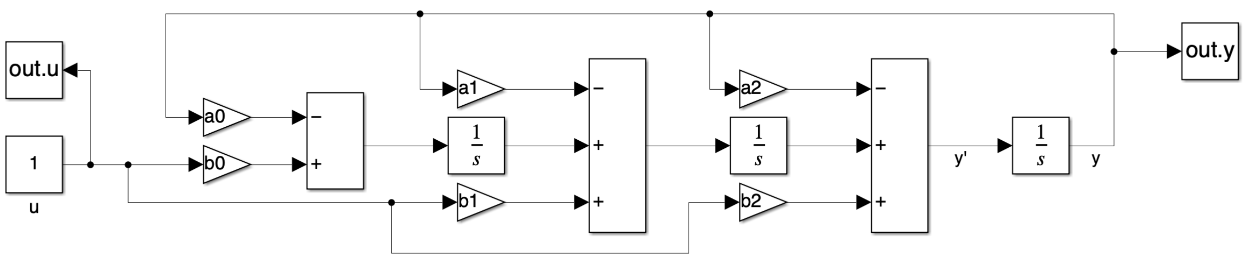

Рис. 1: Схема моделирования одноканальной системы в форме вход-выход

При этом, начальные условия $\dddot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ задаются в блоках *Integrator*.

Промоделировав данную систему получим графики $y(t)$ и $u(t)$ (рис. 2, 3).

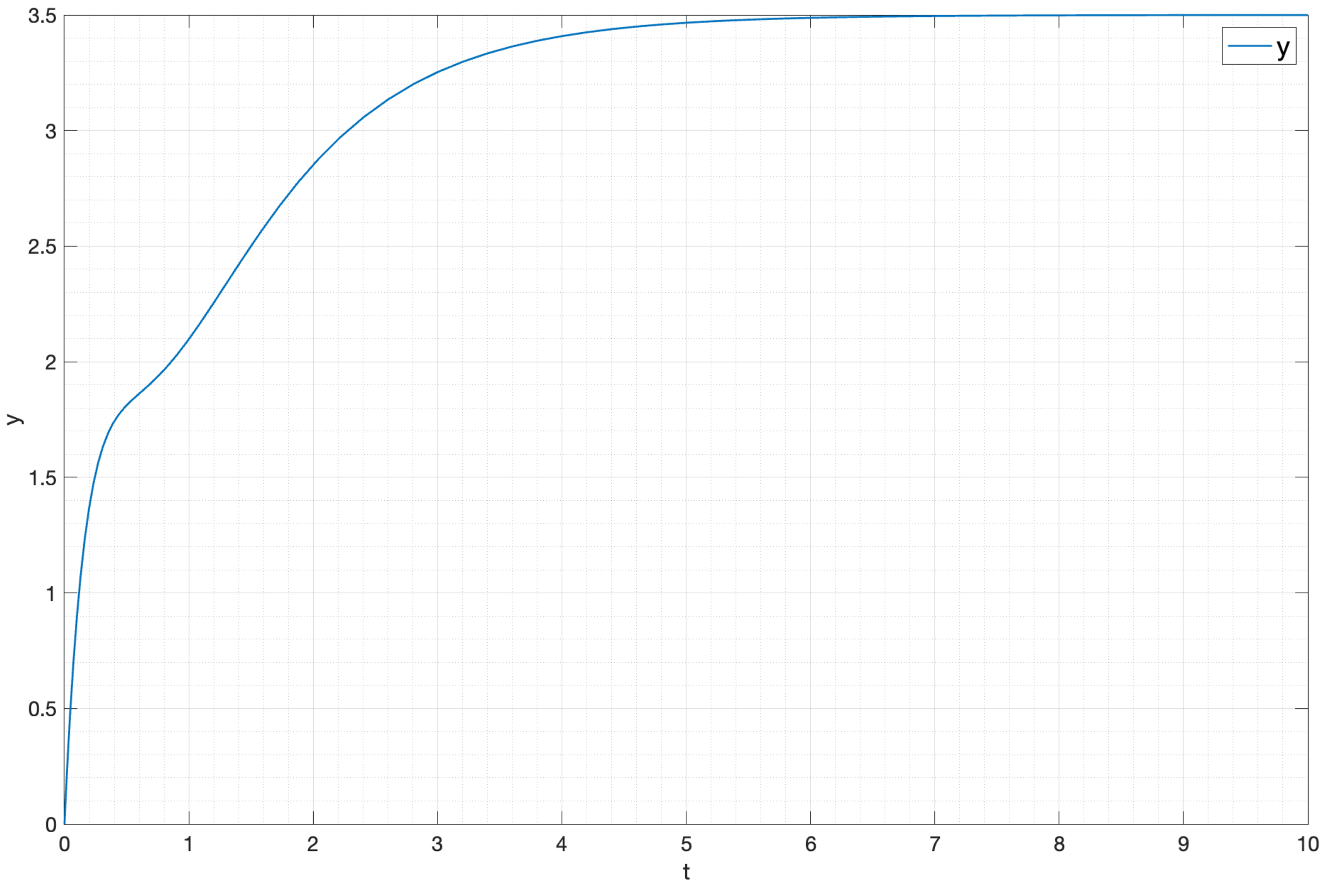

Рис. 2: График $y(t)$

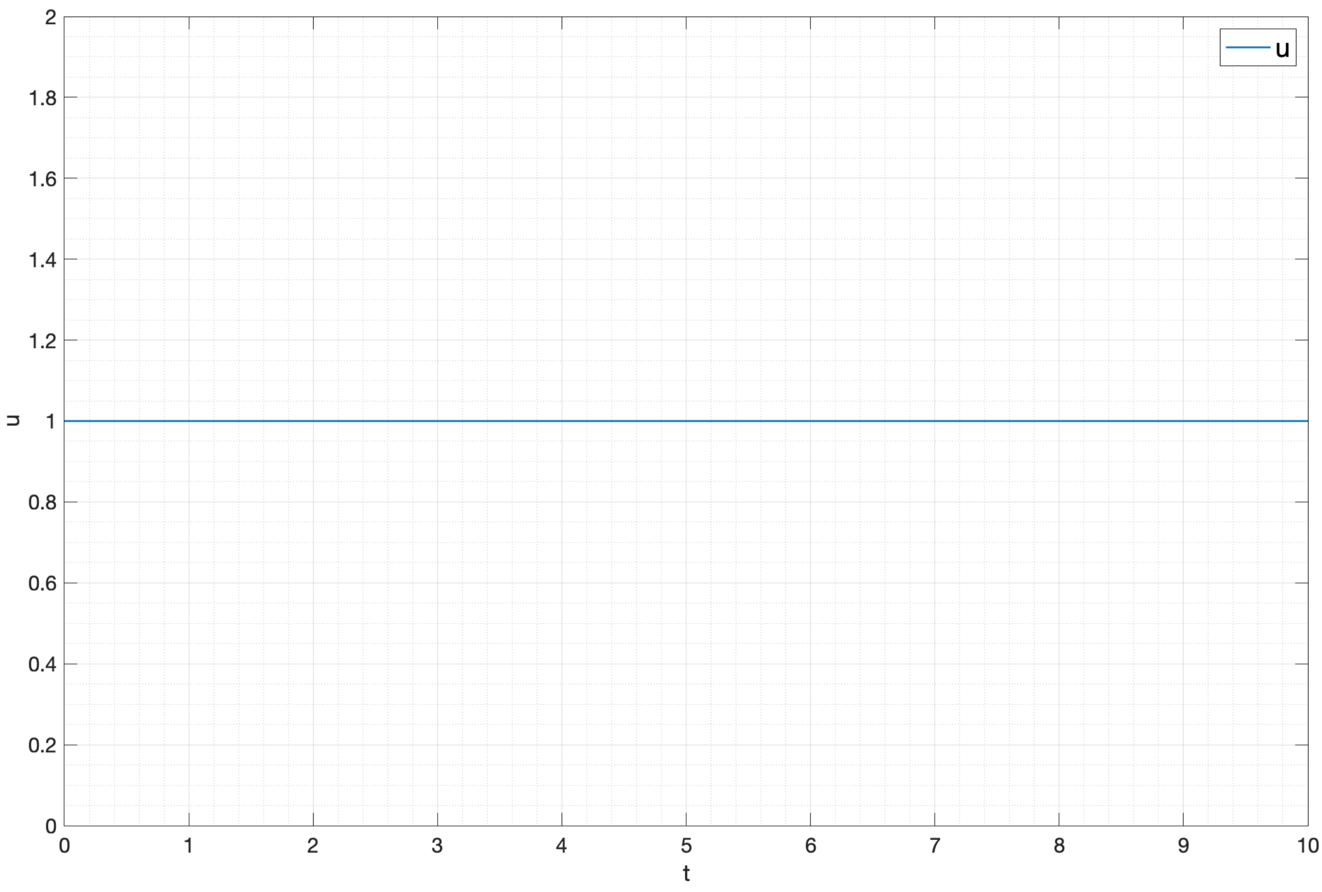

Рис. 3: График $u(t)$

2. Переход от формы В-В к форме В-С-В

В общем виде наблюдаемая форма для системы третьего порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{cases} \tag{4}$$

где x_1, x_2, x_3 – вектор состояния, y – выходной сигнал, u – входной сигнал.

Или, в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{5}$$

Для уравнения 1 перейдем к форме В-С-В. Для этого определим передаточную функцию $W(p)$:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0} + S \tag{6}$$

где S – общее решение однородного уравнения $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0$. Так как у нас нет начальных условий, то $S = 0$.

2.1. Каноническая наблюдаемая форма

Для перехода от формы В-В к форме В-С-В воспользуемся следующими соотношениями:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u \\ y = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{cases} \tag{8}$$

Построим схему моделирования в Matlab Simulink (рис. 4).

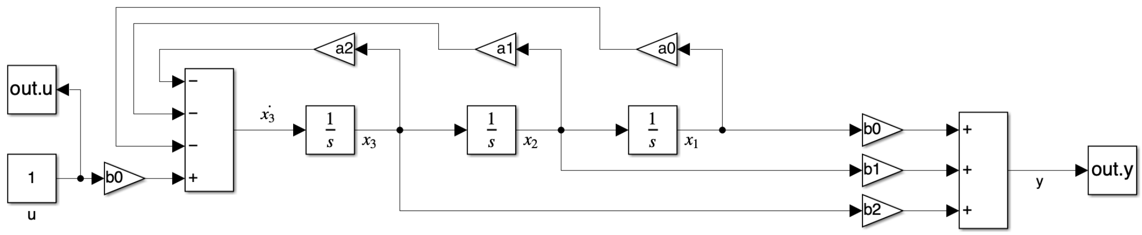

Рис. 4: Схема моделирования одноканальной системы в форме В-С-В (каноническая наблюдаемая форма)

Промоделировав данную систему получим график $y(t)$ (рис. 5).

На сравнительном графике $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (рис. 6), видно, что выходной сигнал для системы в форме В-С-В по амплитуде больше, чем для системы в форме В-В, но по форме сигналы совпадают. Убедиться в этом можно сравнив масштабированные графики (рис. 7).

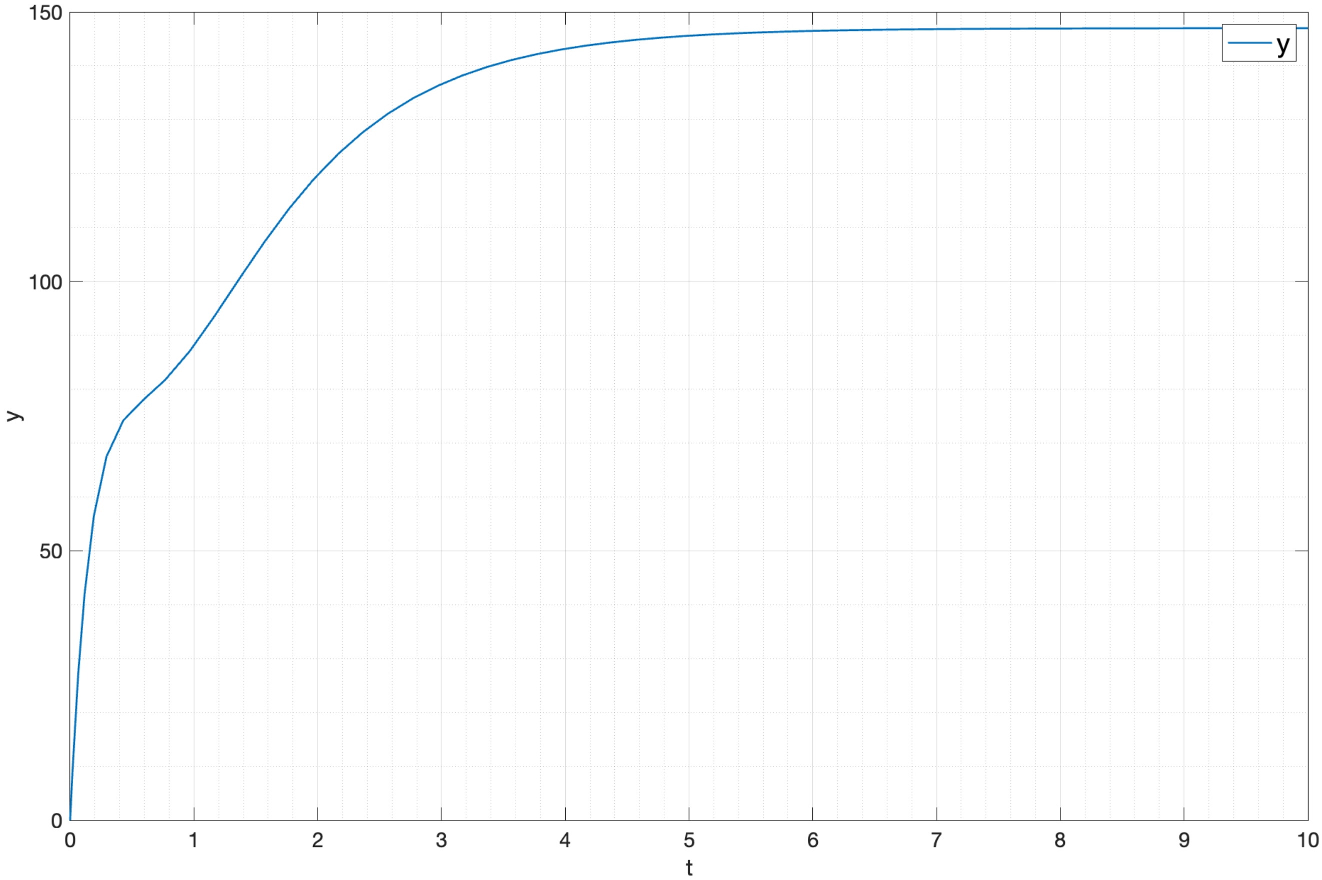

Рис. 5: График $y(t)$

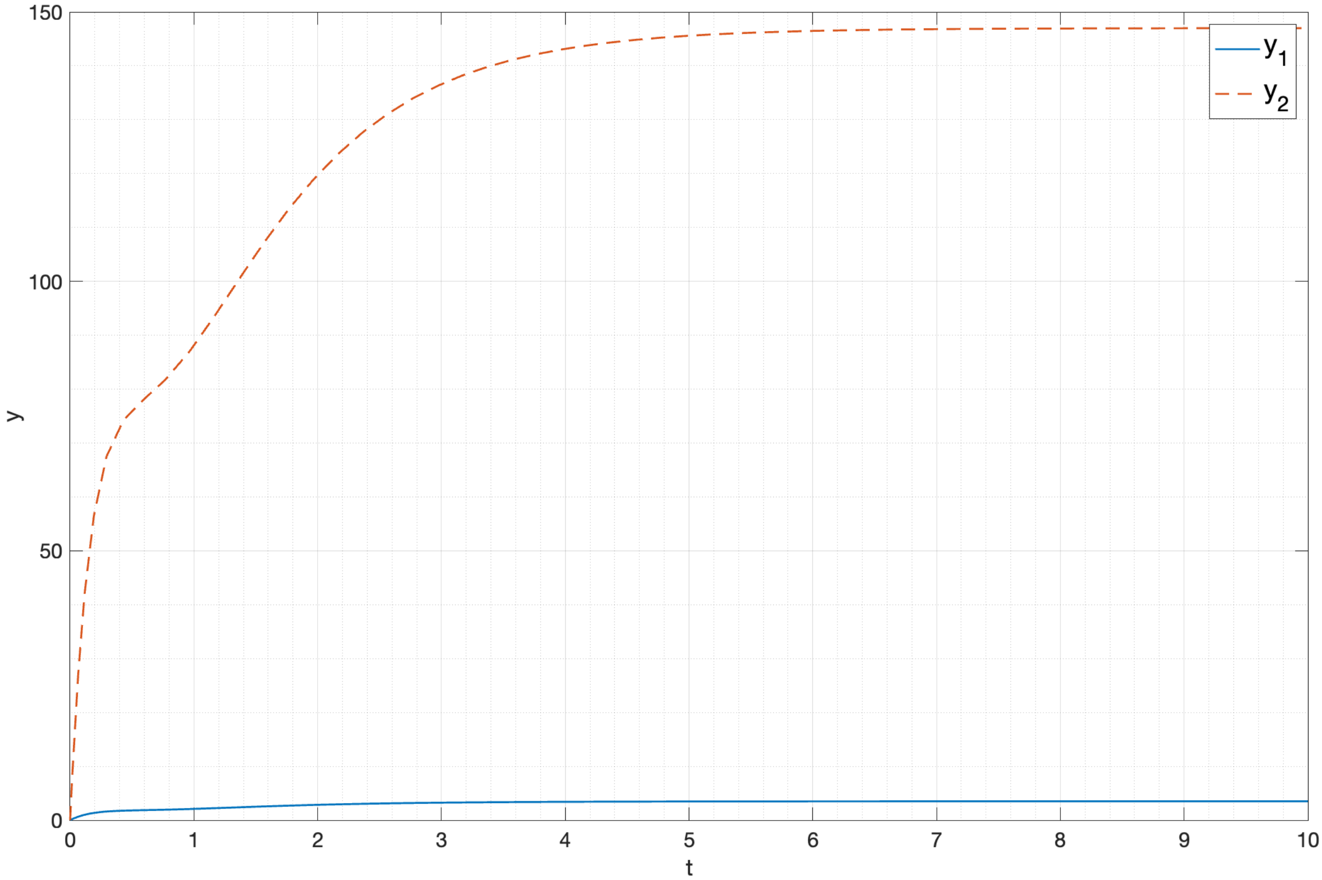

Рис. 6: Сравнительный график $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В
где $y_1(t)$ – график для системы в форме В-В, $y_2(t)$ – график для системы в форме В-С-В.

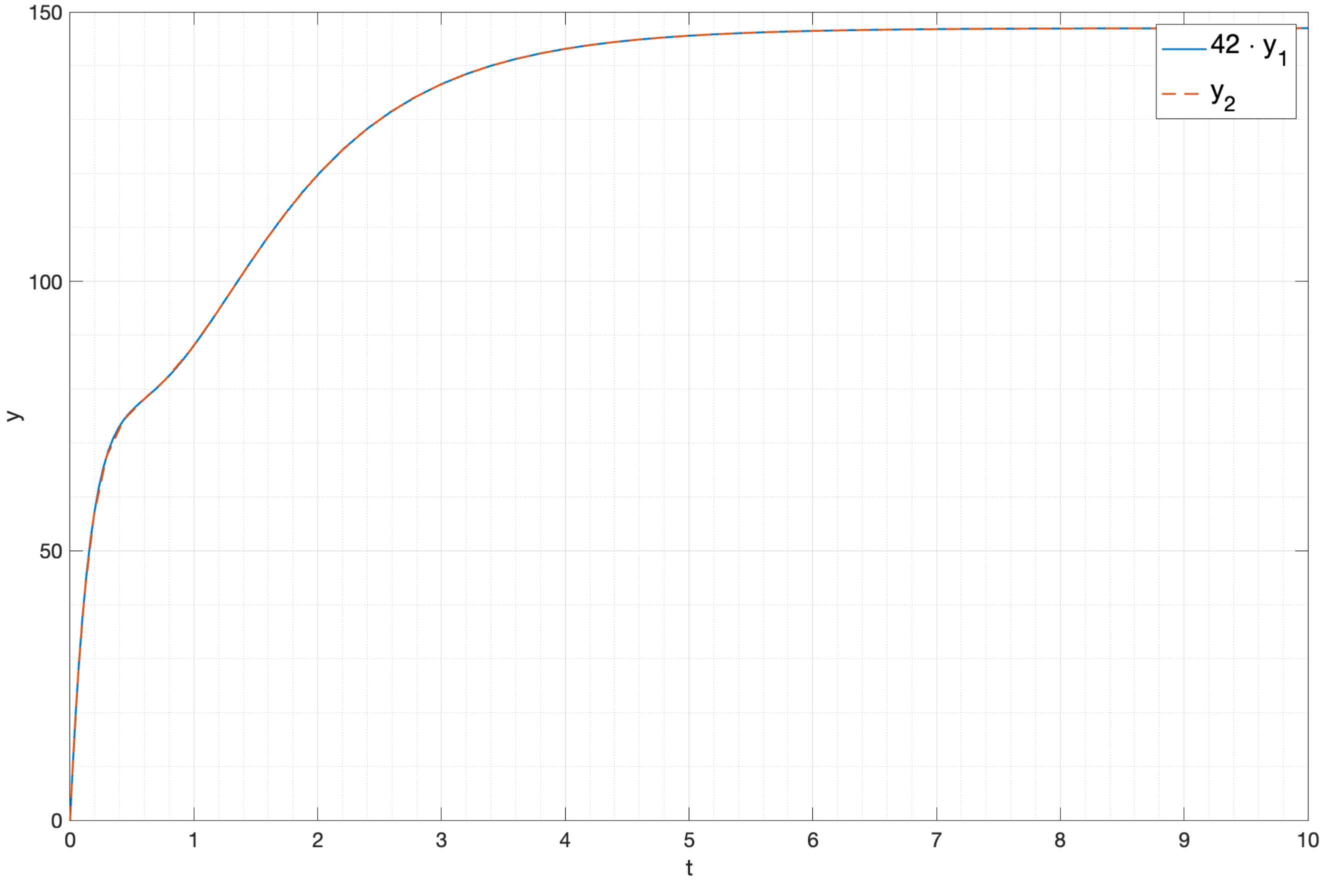

Рис. 7: Сравнительный график $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (масштабированный)

2.2. Каноническая управляемая форма

Для перехода от формы В-В к форме В-С-В (каноническая управляемая форма) воспользуемся следующими соотношениями:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0 x_3 + b_0 u \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_3 + x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_3 = -a_2 x_3 + x_2 + b_2 u \\ y = x_3 \end{cases} \tag{10}$$

Построим схему моделирования в Matlab Simulink (рис. 8).

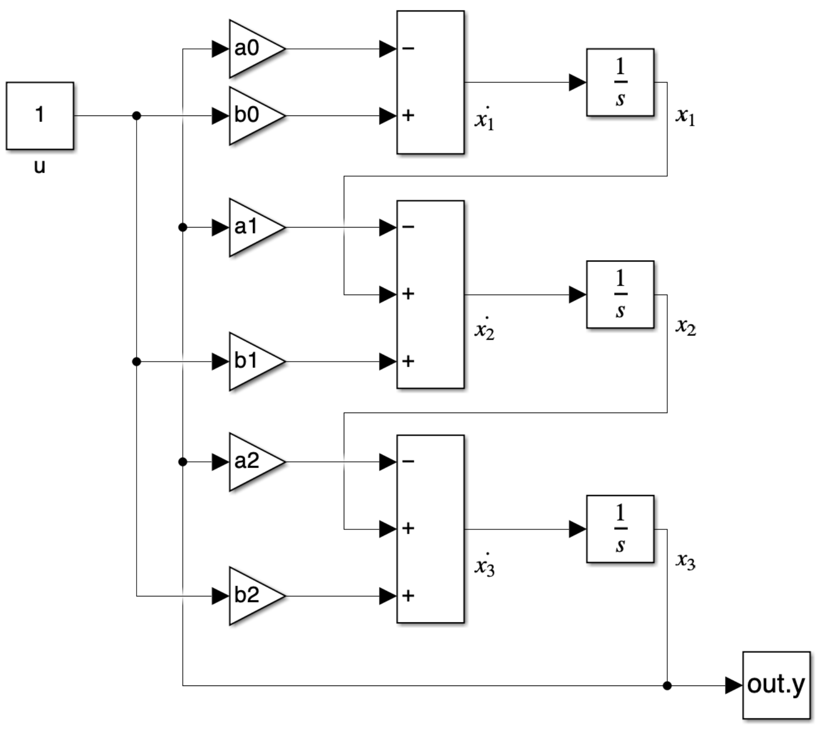

Рис. 8: Схема моделирования одноканальной системы в форме В-С-В (каноническая управляемая форма)

Промоделировав данную систему получим график $y(t)$ (рис. 9).

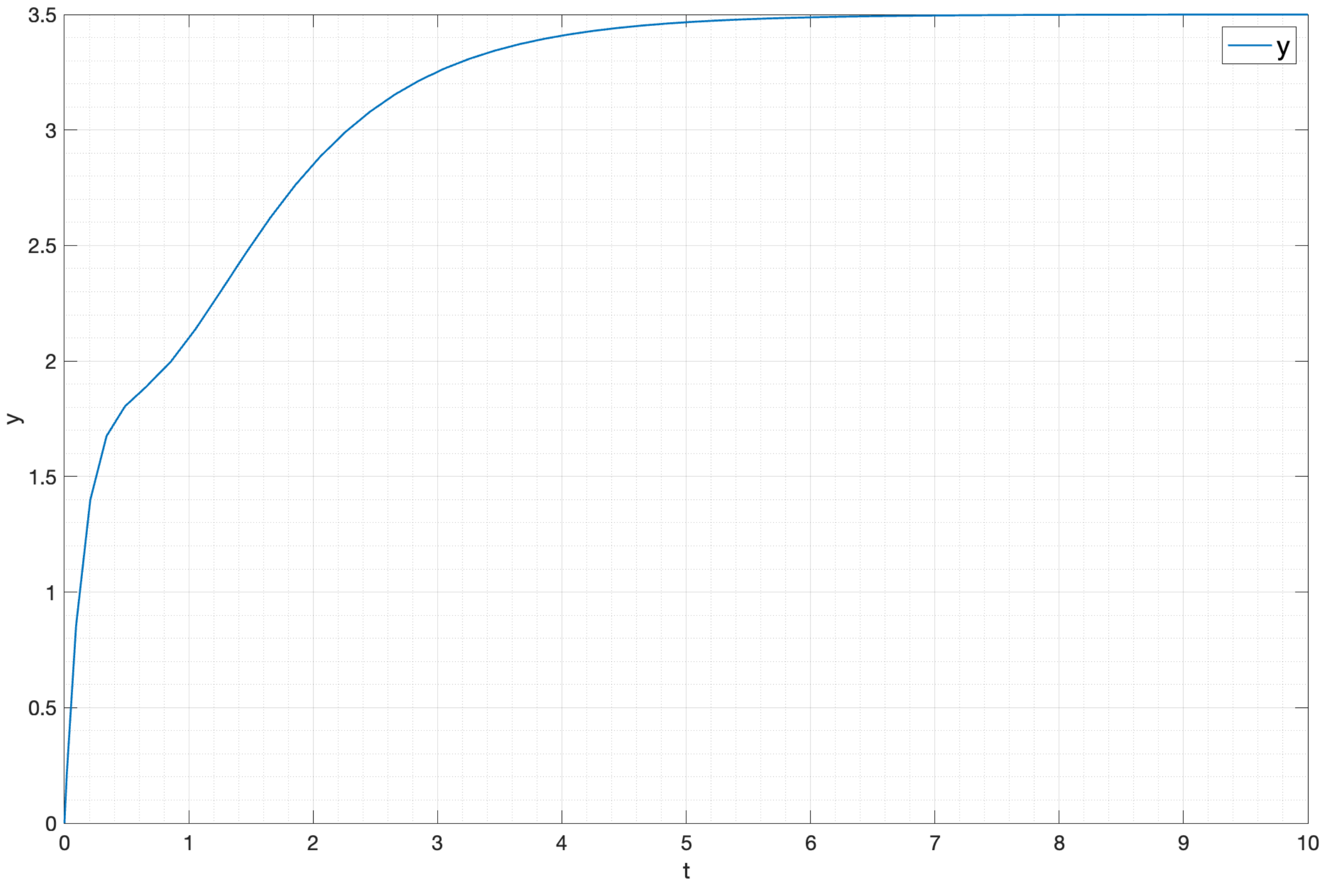

Рис. 9: График $y(t)$

На сравнительном графике $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (каноническая управляемая форма) (рис. 10), видно, что выходные сигналы совпадают.

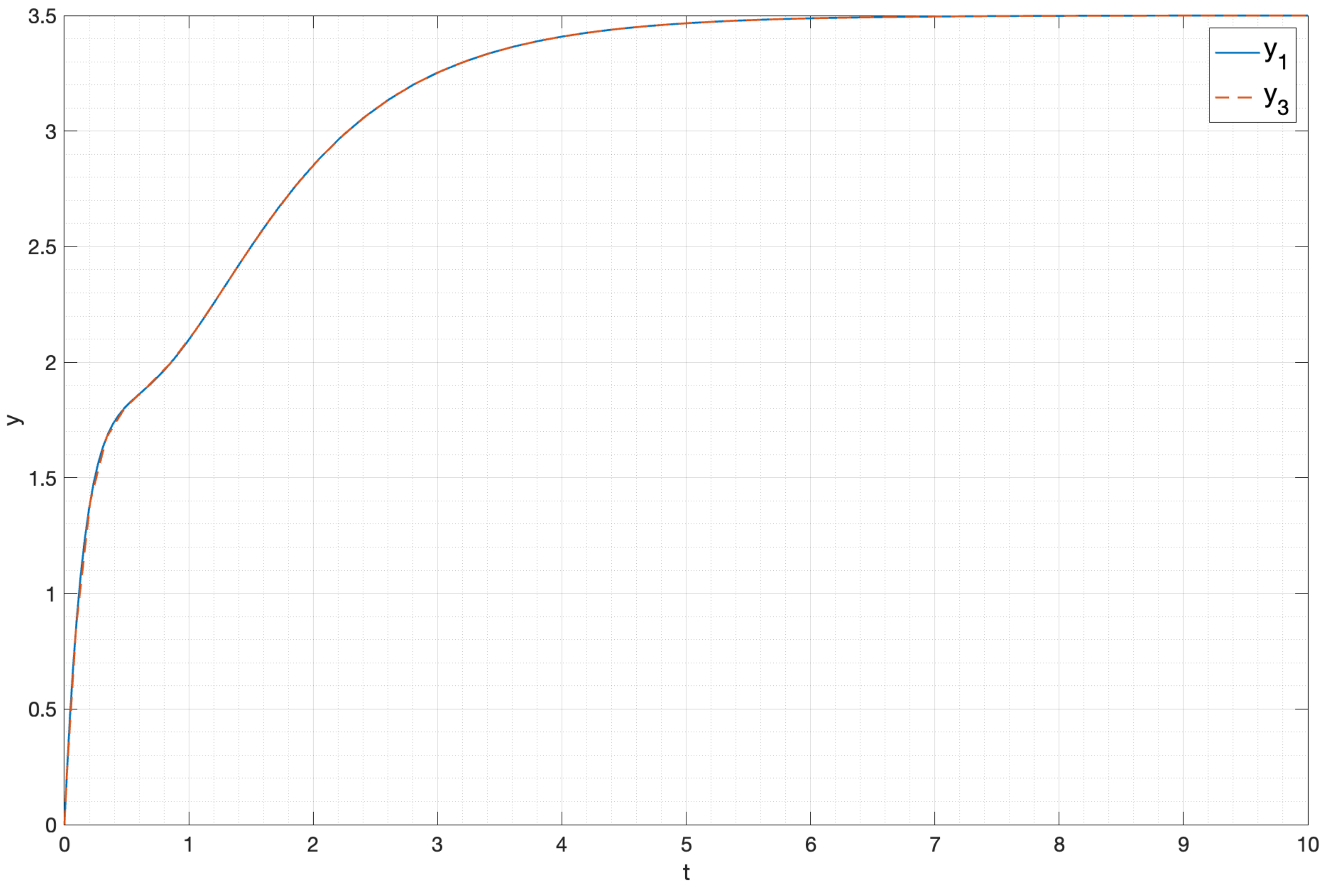

Рис. 10: Сравнительный график $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (каноническая управляемая форма)
где $y_1(t)$ – график для системы в форме В-В, $y_2(t)$ – график для системы в форме В-С-В (каноническая управляемая форма).

2.3. Диагональная форма

Для перехода от формы В-В к форме В-С-В (диагональная форма) воспользуемся следующими соотношениями:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

где λ, β, χ находятся из разложение передаточной функции $W(p)$ на простейшие дроби.

$$W(p) = \frac{\beta_1\chi_1}{p-\lambda_1} + \frac{\beta_2\chi_2}{p-\lambda_2} + \frac{\beta_3\chi_3}{p-\lambda_3} \tag{12}$$

Разложим передаточную функцию $W(p)$ на простейшие дроби:

$$W(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0} = \frac{12p^2 + 24p + 42}{p^3 + 8p^2 + 19p + 12} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p+3}. \quad (13)$$

Найдя коэффициенты A, B, C методом неопределенных коэффициентов, получим:

$$W(p) = \frac{5}{p+1} + \frac{46}{p+4} + \frac{-39}{p+3} \quad (14)$$

Можно представить в требуемом виде следующим образом:

$$W(p) = \frac{1 \cdot 5}{p+1} + \frac{1 \cdot 46}{p+4} + \frac{1 \cdot (-39)}{p+3} \quad (15)$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -4x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - u \\ y = 5x_1 + 46x_2 - 39x_3 \end{cases} \quad (16)$$

Построим схему моделирования в Matlab Simulink (рис. 11).

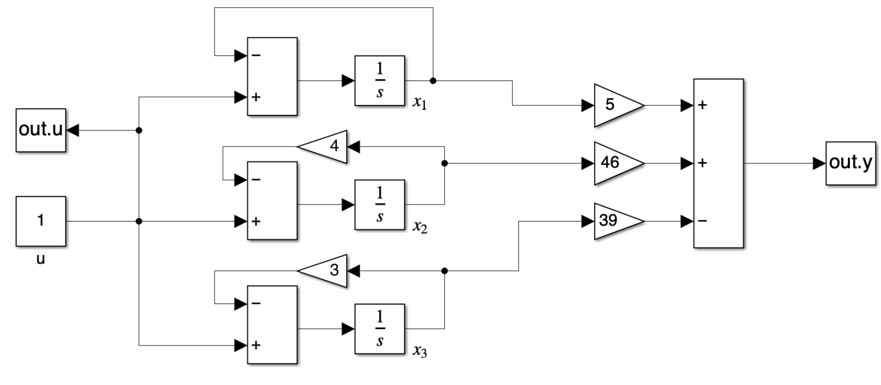

Рис. 11: Схема моделирования одноканальной системы в форме В-С-В (диагональная форма)

Промоделировав данную систему получим график $y(t)$ (рис. 12).

На сравнительном графике $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (диагональная форма) (рис. 13), видно, что выходные сигналы совпадают.

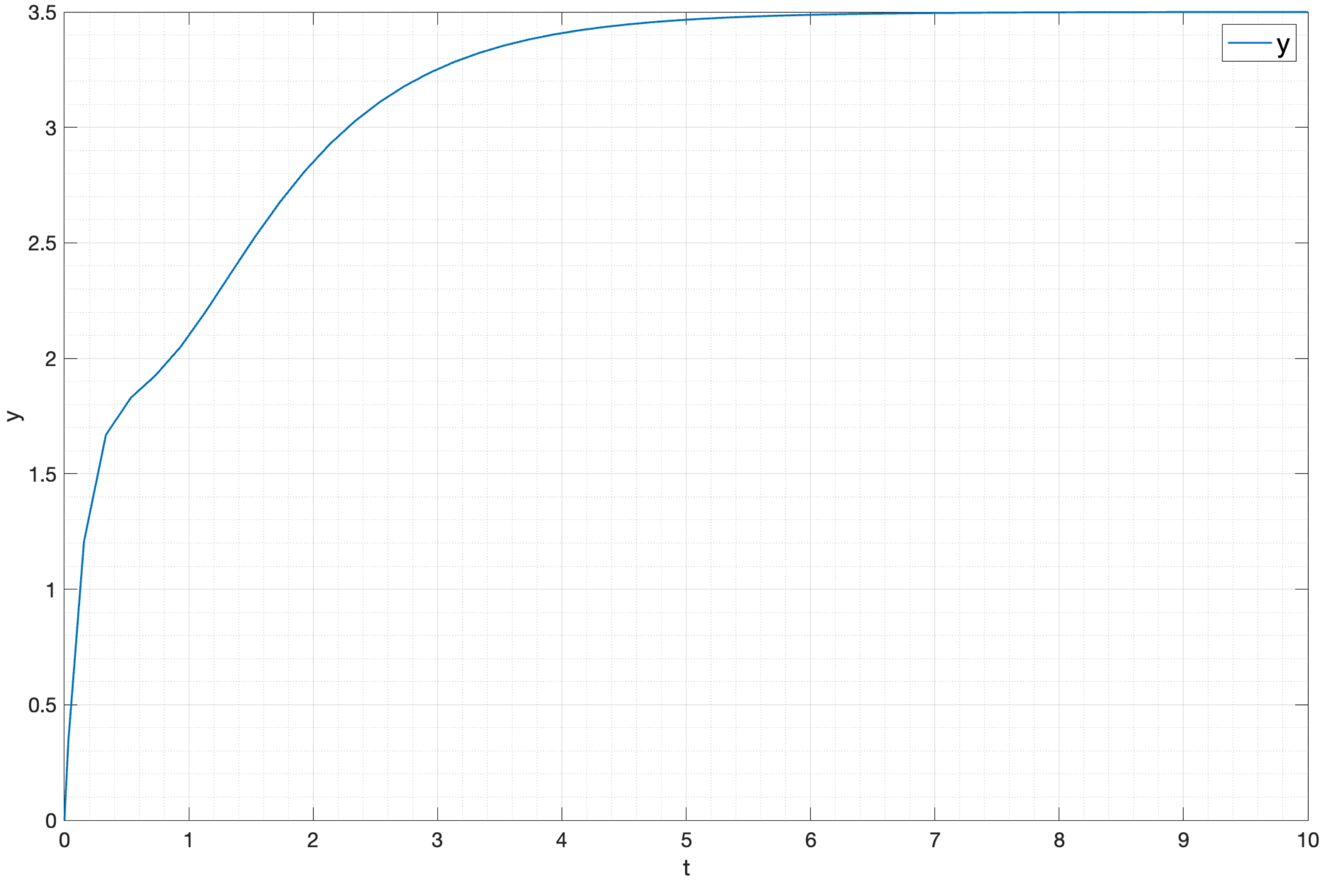

Рис. 12: График $y(t)$

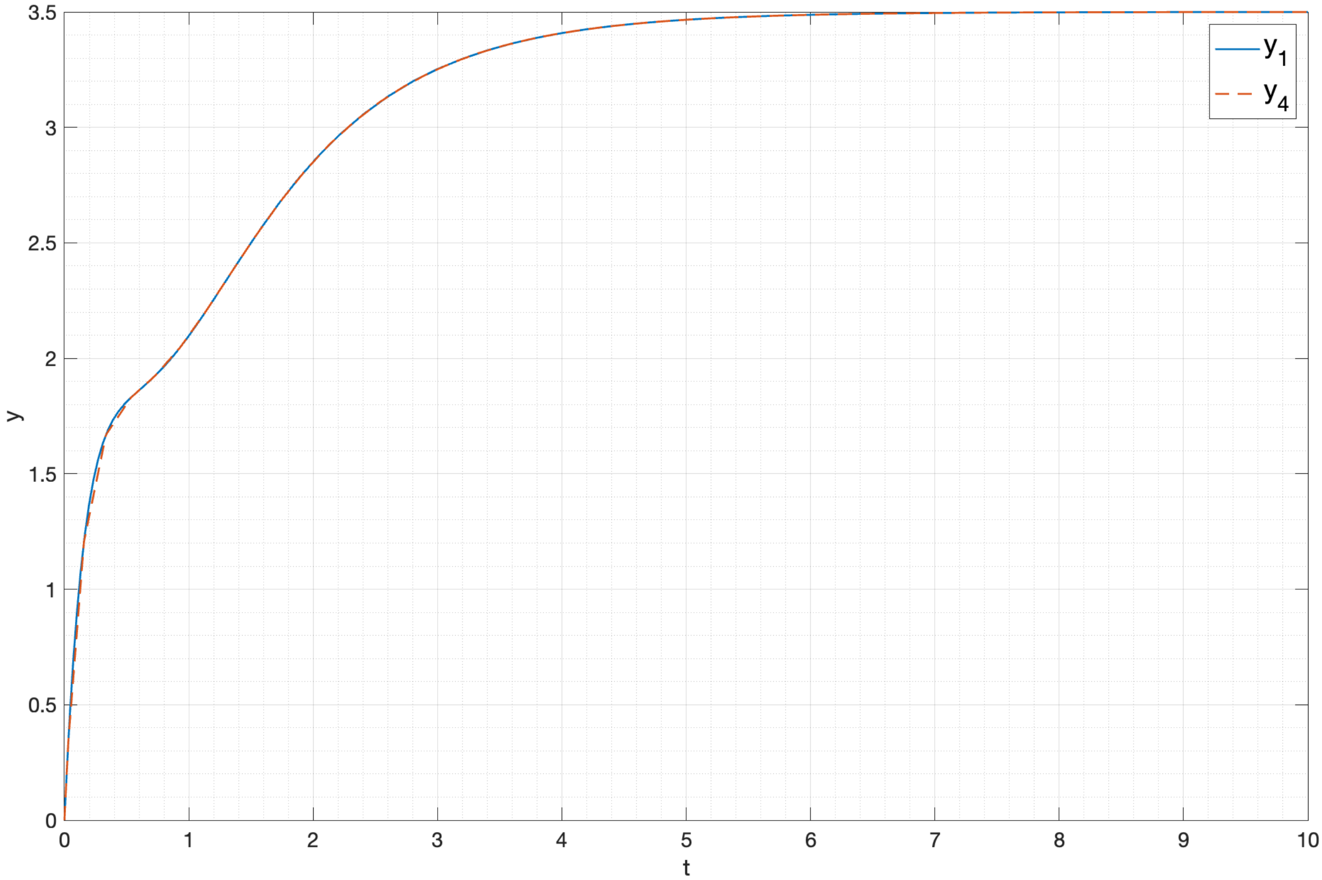

Рис. 13: Сравнительный график $y(t)$ для системы в форме В-В и В-С-В (диагональная форма) где $y_1(t)$ – график для системы в форме В-В, $y_2(t)$ – график для системы в форме В-С-В (диагональная форма).

Таким образом, можно сделать вывод, что одна и та же система может быть представлена в различных формах, но при этом выходные сигналы будут совпадать (или отличаться только по амплитуде). Кроме того, модель в форме В-С-В позволяет оценивать внутреннее состояние системы, что может быть полезно при проектировании систем.

3. Многоканальная система в форме вход-выход

Рассмотрим следующую систему:

$$A(p) \times y(t) = B(p) \times u(t) \tag{17}$$

$$A = \begin{bmatrix} p+11 & p+2 \\ p+2 & p+6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Можно выразить $y(t)$ следующим образом:

$$y(t) = A^{-1}(p) \times B(p) \times u(t) \tag{19}$$

При этом сразу появляется выражение для вычисления передаточной матрицы:

$$W(p) = A^{-1}(p) \times B(p) \tag{20}$$

Найдем численные значения:

$$A^{-1}(p) = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{bmatrix} p+6 & -p-2 \\ -p-2 & p+11 \end{bmatrix} = \frac{1}{13p+62} \times \begin{bmatrix} p+6 & -p-2 \\ -p-1 & p+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+6}{13p+62} & \frac{-p-2}{13p+62} \\ \frac{-p-2}{13p+62} & \frac{p+11}{13p+62} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$W(p) = A^{-1}(p) \times B(p) = \begin{bmatrix} \frac{8p+52}{13p+62} & \frac{32}{13p+62} \\ \frac{-8p-7}{13p+62} & \frac{72}{13p+62} \end{bmatrix} \tag{22}$$

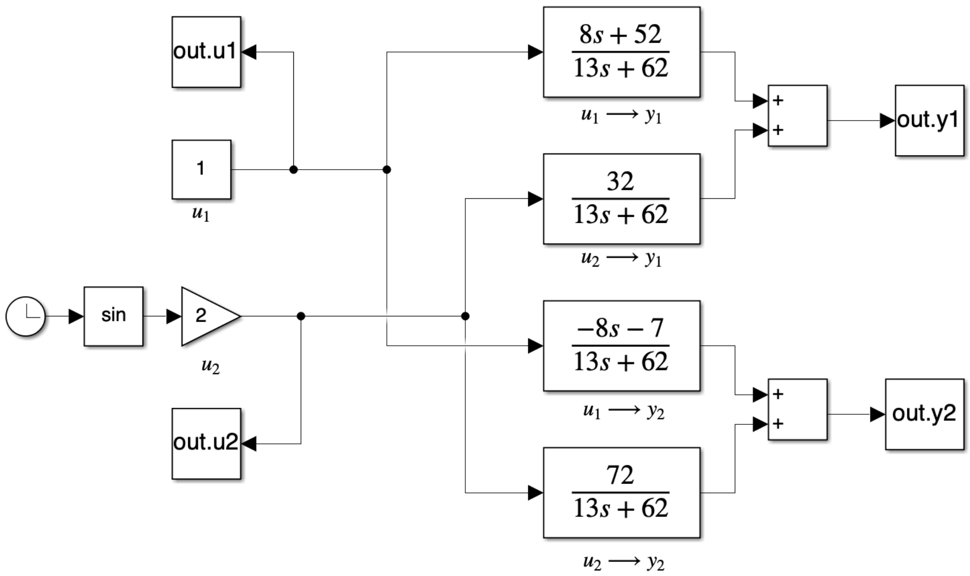

Рис. 14: Схема многоканальной системы в форме вход-выход

Можно расписать выход в виде:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8p+52}{13p+62} & \frac{32}{13p+62} \\ \frac{-8p-7}{13p+62} & \frac{72}{13p+62} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

Запишем в виде отдельных уравнений для каждого выхода:

$$y_1(t) = \frac{8p+52}{13p+62} \times u_1(t) + \frac{32}{13p+62} \times u_2(t) \tag{24}$$

$$y_2(t) = \frac{-8p-7}{13p+62} \times u_1(t) + \frac{72}{13p+62} \times u_2(t) \tag{25}$$

Теперь, имея данные уравнения, можно построить схему многоканальной системы в форме вход-выход в среде Simulink.

Промоделировав данную систему, получим графики $y_1(t)$ и $y_2(t)$, $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

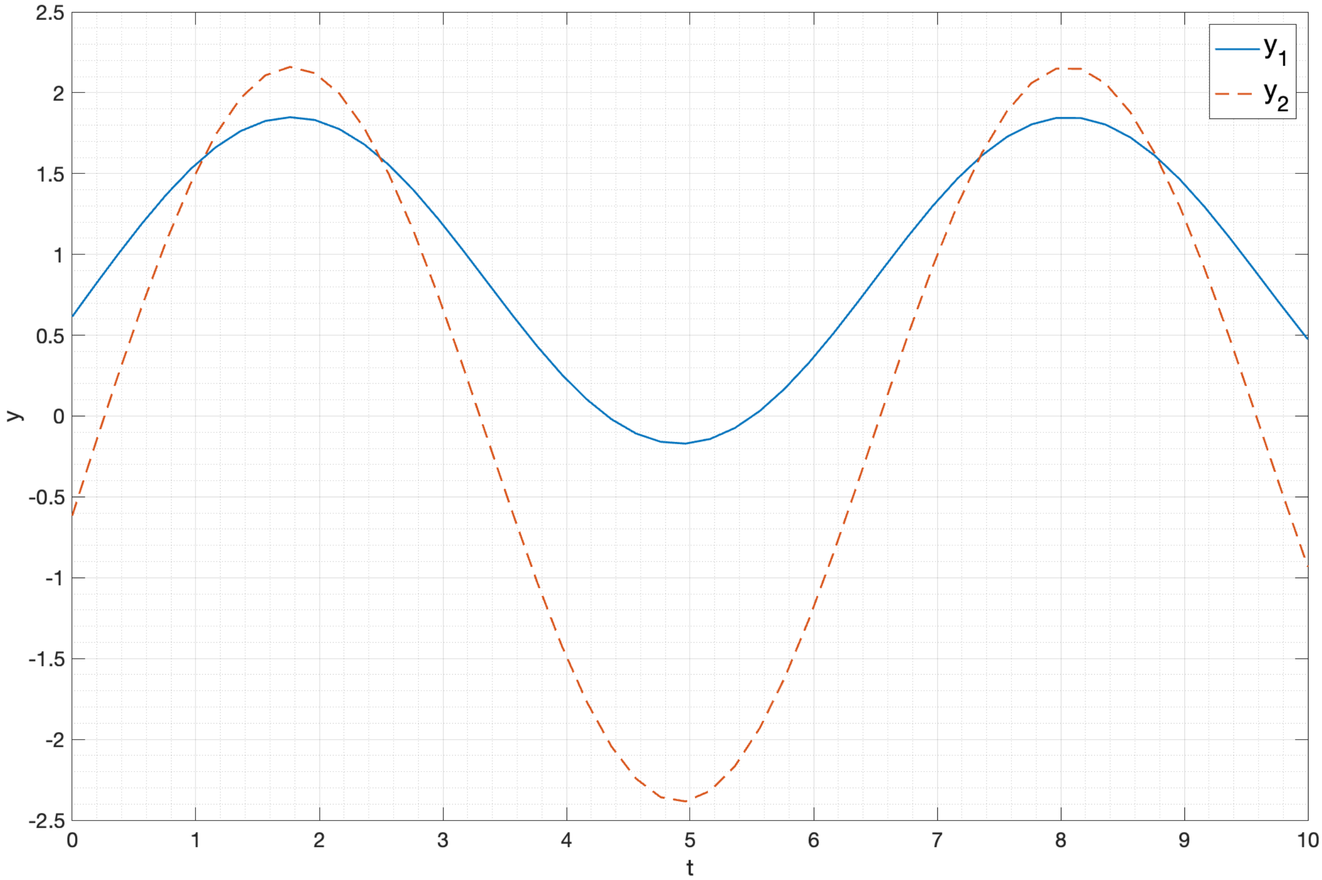

Рис. 15: Графики $y_1(t)$ и $y_2(t)$

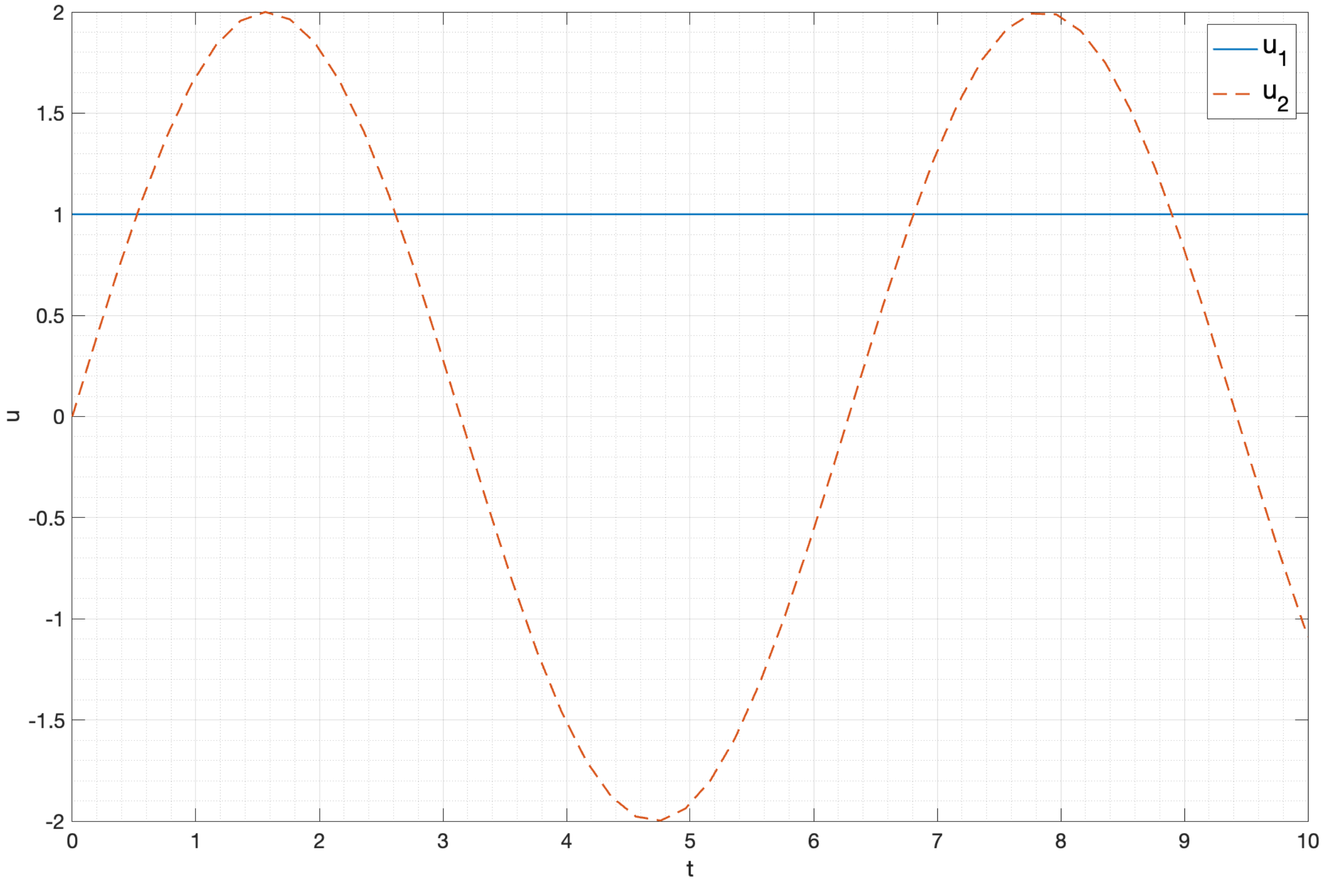

Рис. 16: Графики $u_1(t)$ и $u_2(t)$

4. Многоканальная система в форме вход-состояние-выход

Рассмотрим следующую систему:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax + Bu \\
y(t) = Cx
\end{cases}
\tag{26}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}
\tag{27}
$$

Распишем систему в виде уравнений:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -9x_2 + -9u_1 + 5u_2 \\
\dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 2u_1 + 11u_2 \\
y_1 = 5x_1 + 6x_2 \\
y_2 = 3x_1 + 8x_2
\end{cases}
\tag{28}
$$

Теперь построим схему моделирования в Simulink.

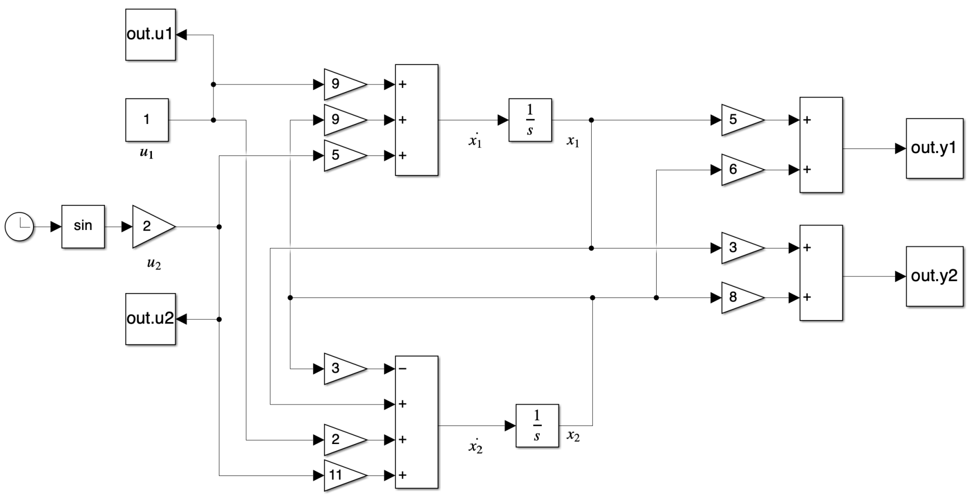

Рис. 17: Схема многоканальной системы в форме вход-состояние-выход

Промоделировав данную систему, получим графики $y_1(t)$ и $y_2(t)$, $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

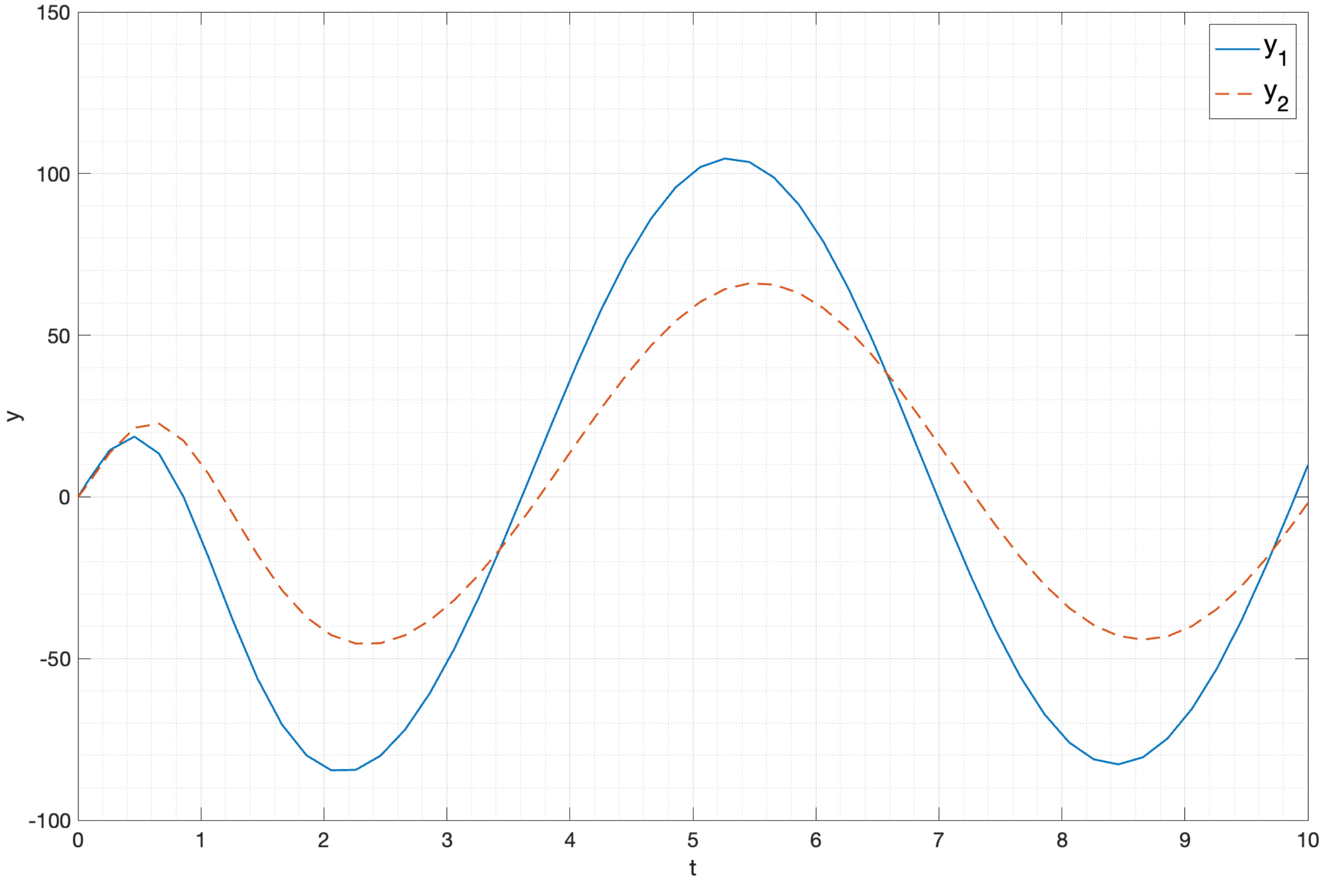

Рис. 18: Графики $y_1(t)$ и $y_2(t)$

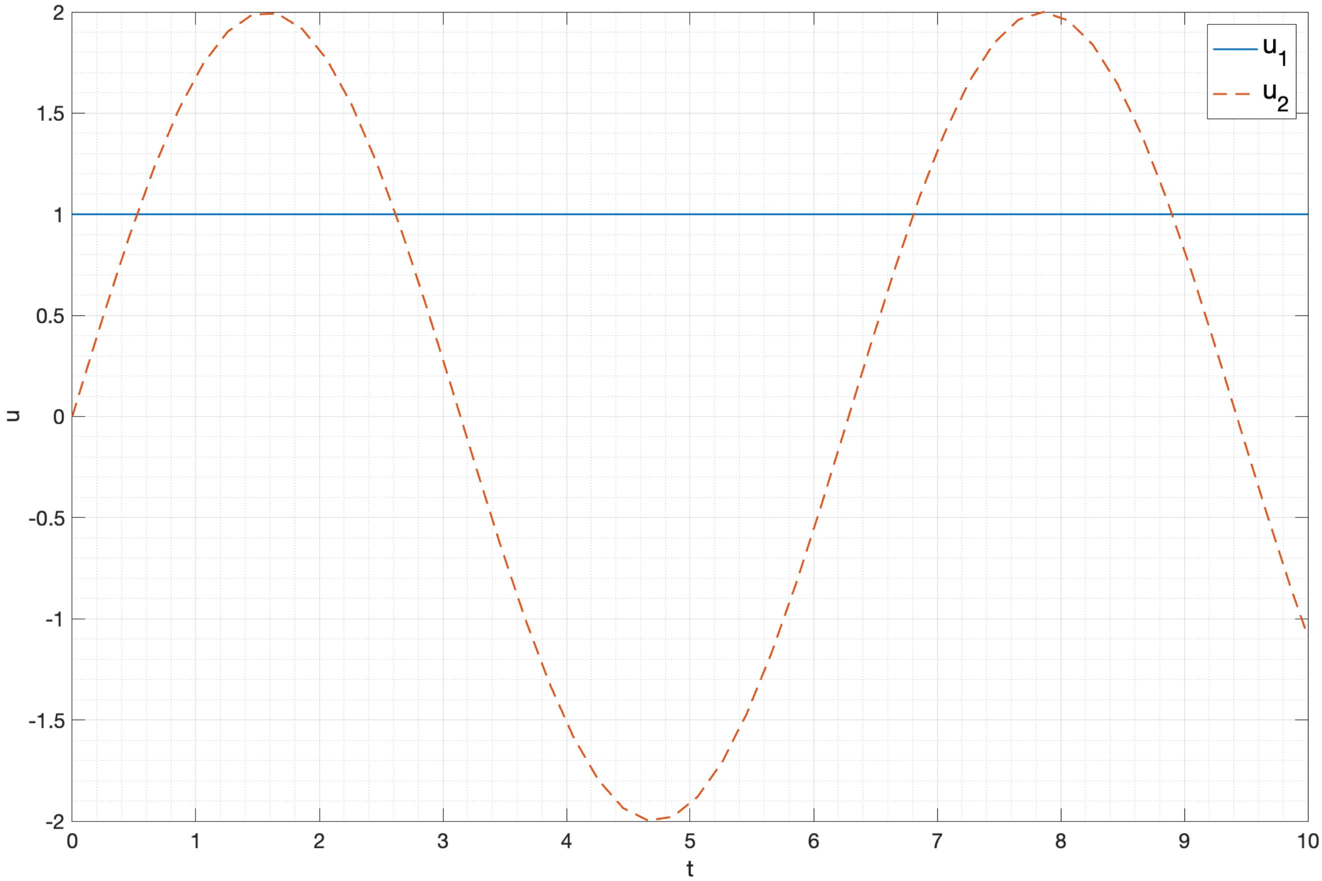

Рис. 19: Графики $u_1(t)$ и $u_2(t)$

5. Выводы

В первом и втором задании рассматривались системы в форме вход-выход и вход-состояние-выход (каноническая наблюдаемая форма, каноническая управляемая форма и диагональная форма). В каждом из этих вариантов были получены идентичные (за исключением амплитуды) выходные сигналы, что подтверждает то, что одна и та же система может быть представлена множеством различных форм.

Кроме того, были рассмотрены многоканальные системы, которые удалось разбить на несколько одноканальных систем, что позволило упростить моделирование системы.