



НИУ ИТМО

## ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Управляемость и наблюдаемость”

Вариант 30

Выполнил:

**Александр Иванов, R3338**

Преподаватели:

**Перегудин А.А.**

**Пашенко А.В.**

Санкт-Петербург, 2025

# Содержание

<b>1. Исследование управляемости</b>	<b>4</b>
1.1. Управляемость системы . . . . .	4
1.1.1. Матрица управляемости . . . . .	4
1.1.2. Управляемость собственных значений . . . . .	4
1.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	5
1.2. Грамиан управляемости . . . . .	6
1.3. Управление системой . . . . .	6
1.4. Вывод . . . . .	7
<b>2. Управляемое подпространство</b>	<b>8</b>
2.1. Управляемость системы . . . . .	8
2.1.1. Матрица управляемости . . . . .	8
2.1.2. Управляемость собственных значений . . . . .	9
2.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	9
2.2. Грамиан управляемости . . . . .	10
2.3. Управляемое подпространство . . . . .	10
2.4. Управление системой . . . . .	11
2.5. Вывод . . . . .	11
<b>3. Исследование наблюдаемости</b>	<b>13</b>
3.1. Наблюдаемость системы . . . . .	13
3.1.1. Матрица наблюдаемости . . . . .	13
3.1.2. Наблюдаемость собственных значений . . . . .	14
3.1.3. Диагональная форма системы . . . . .	14

3.2. Грамиан наблюдаемости . . . . .	15
3.3. Наблюдение системы . . . . .	16
3.4. Вывод . . . . .	16

# 1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

## 1.1. Управляемость системы

### 1.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости  $U = [B, AB, A^2B]$ :

$$U = \left[ \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right] \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} -7 & 31 & -43 \\ -5 & 15 & -5 \\ 7 & -21 & 23 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 3 \quad (4)$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то система является полностью управляемой согласно критерию Калмана.

### 1.1.2. Управляемость собственных значений

Найдем спектр матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{-3, -1 - 2j, -1 + 2j\} \quad (5)$$

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$  и определим ее ранг:

1.  $\lambda_1 = -3$ :  $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_1) = 3$ , собственное значение управляемо.
2.  $\lambda_2 = -1 - 2j$ :  $H_2 = \begin{bmatrix} 6 + 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 + 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 + 2j & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_2) = 3$ , собственное значение управляемо.
3.  $\lambda_3 = -1 + 2j$ :  $H_3 = \begin{bmatrix} 6 - 2j & -2 & 8 & -7 \\ 4 & -2 - 2j & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 - 2j & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_3) = 3$ , собственное значение управляемо.

Так как выше было показано, что система является полностью управляемой, то каждое собственное значение матрицы  $A$  является управляемым.

### 1.1.3. Диагональная форма системы

Найдем диагональную форму системы:

$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \quad (6)$$

Где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ . Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 + j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 - j \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Тогда матрица  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 + j & -3 - j \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Система преобразуется к виду:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2j & 0 \\ 0 & 0 & -1+2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5-5j}{4} \\ \frac{5+5j}{4} \end{bmatrix} u \quad (9)$$

Так как все элементы  $P^{-1}B$  не равны нулю, то система является полностью управляемой, каждая мода системы управляема.

## 1.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости  $P(t_1)$ :

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (10)$$

Вычислим грамиан управляемости для  $t_1 = 3$  с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 18.12 & 10.97 & -11.64 \\ 10.97 & 7.48 & -8.48 \\ -11.64 & -8.48 & 10.14 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Найдем собственные числа Грамиана управляемости:

$$\sigma(P(3)) = \{0.05, 1.94, 33.74\} \quad (12)$$

Все собственные числа Грамиана управляемости положительны, что говорит о том, что система является управляемой.

## 1.3. Управление системой

Найдем управление  $u(t)$ , которое будет переводить систему из состояния  $x(0) = 0$  в состояние  $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$ .

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (13)$$

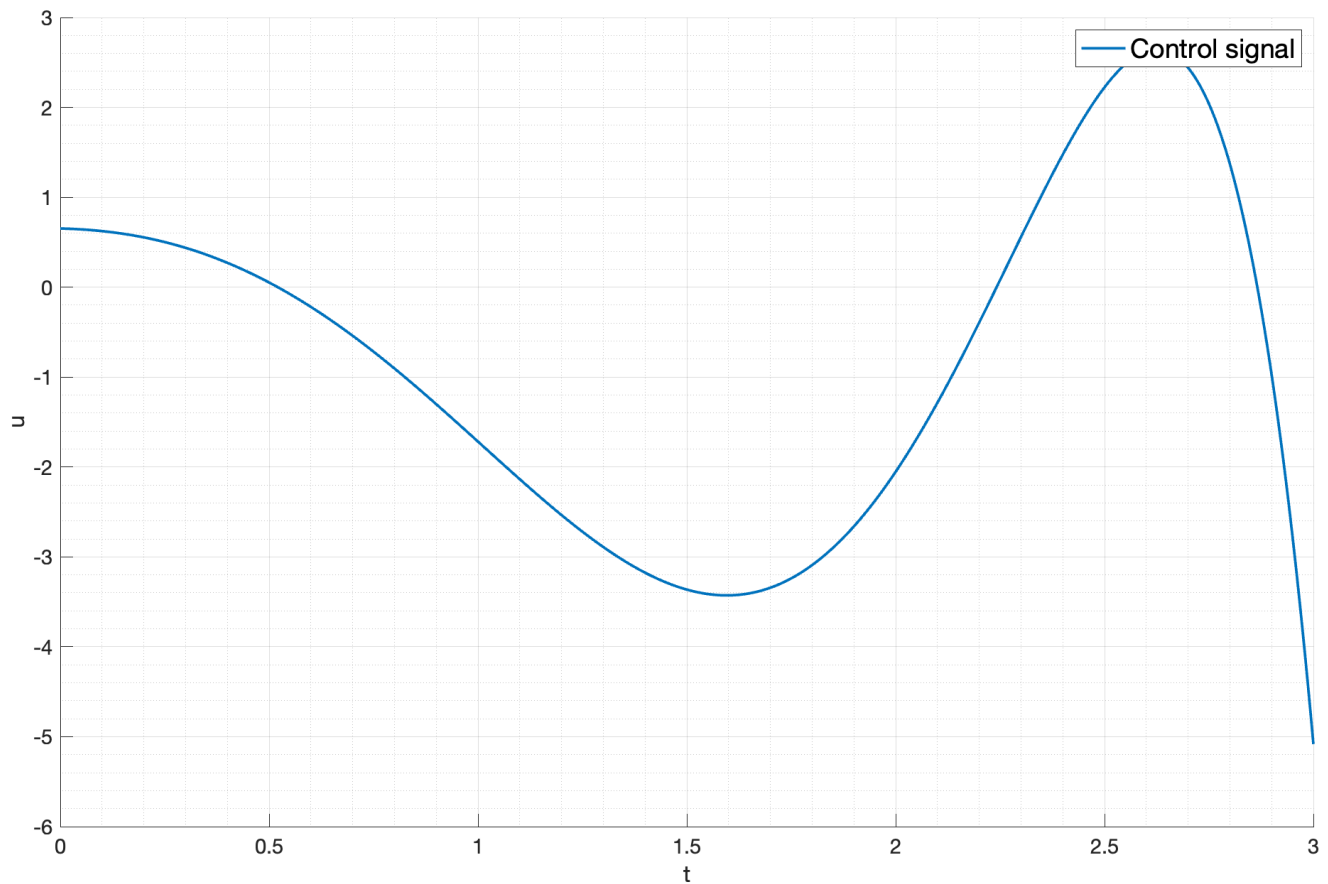


Рис. 1: Управление системой

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 1 изображено управление системой. На рисунке 2 изображено состояние системы.

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.

#### 1.4. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом заднии, удалось показать, что она является полностью управляемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через управляемость собственных значений и диагональную форму системы. Также был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты моделирования показали, что система управляема и управление работает корректно.

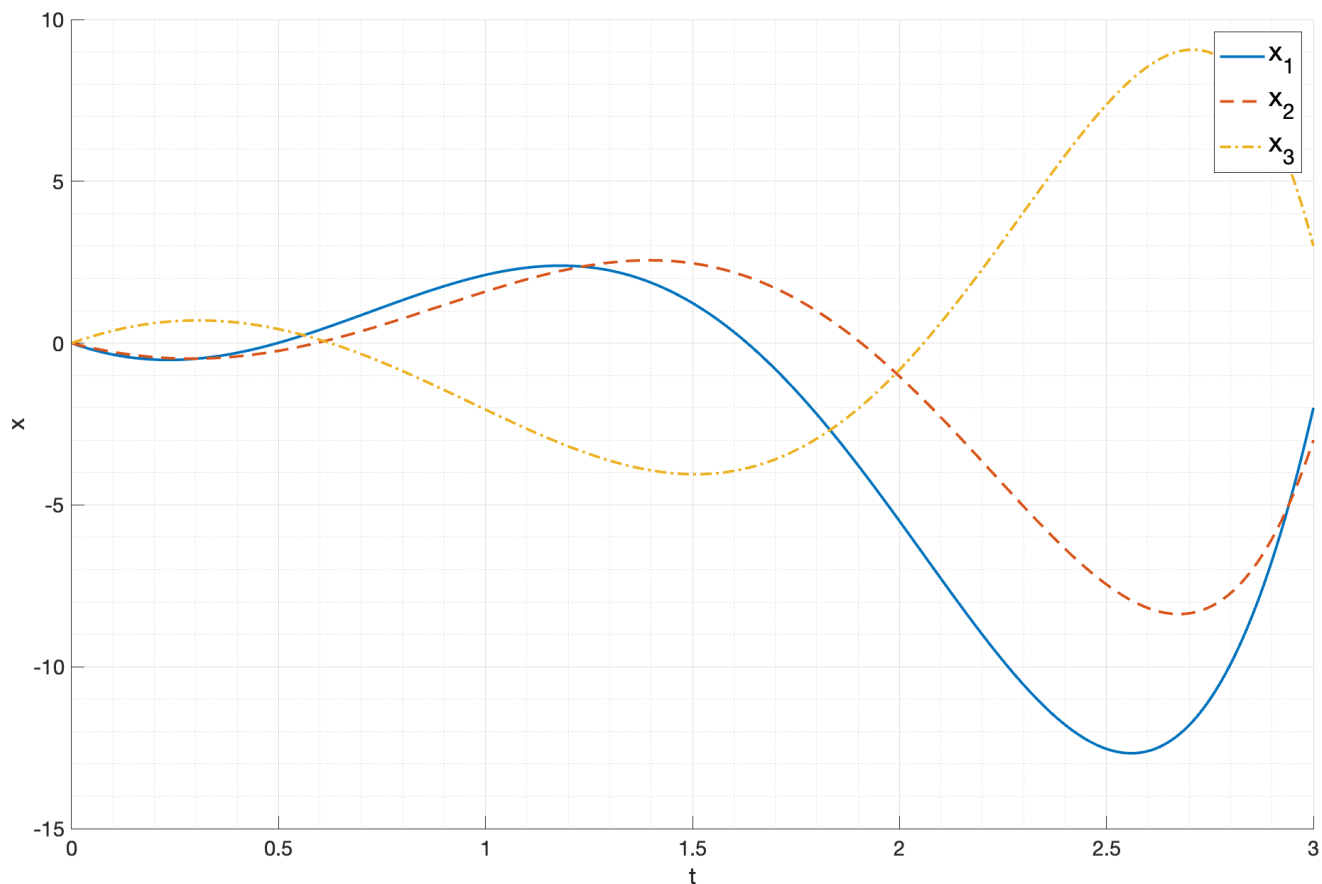


Рис. 2: Состояние системы

## 2. Управляемое подпространство

Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

### 2.1. Управляемость системы

#### 2.1.1. Матрица управляемости

Найдем матрицу управляемости  $U = [B, AB, A^2B]$ :

$$U = \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \quad (15)$$



$$U = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 \\ -3 & 17 & -19 \\ 3 & -17 & 19 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Определим ранг матрицы управляемости:

$$\text{rank}(U) = 2 \quad (17)$$

Так как ранг матрицы управляемости меньше размерности матрицы  $A$ , система не является полностью управляемой.

### 2.1.2. Управляемость собственных значений

Определим управляемость собственных значений матрицы  $A$ . Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix}$  и определим ее ранг:

1.  $\lambda_1 = -3$ :  $H_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_1) = 2$ , собственное значение не управляемо.
2.  $\lambda_2 = -1 - 2j$ :  $H_2 = \begin{bmatrix} 6 + 2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2 + 2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6 + 2j & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_2) = 3$ , собственное значение управляемо.
3.  $\lambda_3 = -1 + 2j$ :  $H_3 = \begin{bmatrix} 6 - 2j & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -2 - 2j & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -6 - 2j & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}(H_3) = 3$ , собственное значение управляемо.

### 2.1.3. Диагональная форма системы

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 2j & 0 \\ 0 & 0 & -1 + 2j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3-7j}{4} \\ \frac{3+7j}{4} \end{bmatrix} u \quad (18)$$

Первое число в векторе  $P^{-1}B$  равно нулю, значит, что первое состояние системы не является

управляемым. Результаты совпали с результатами, полученными при анализе управляемости собственных значений через матрицу Хаутуса.

## 2.2. Грамиан управляемости

Найдем грамиан управляемости  $P(t_1)$ :

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (19)$$

Вычислим грамиан управляемости для  $t_1 = 3$  с помощью функции **gram**:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 26.65 & 13.37 & -13.37 \\ 13.37 & 8.28 & -8.28 \\ -13.37 & -8.28 & 8.28 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Найдем собственные числа Грамиана управляемости:

$$\sigma(P(3)) = \{0, 2.03, 41.17\} \quad (21)$$

Первое собственное число равно нулю, что говорит о том, что система не является полностью управляемой.

## 2.3. Управляемое подпространство

Выясним, принадлежат ли точки  $x'_1$  и  $x''_1$  управляемому подпространству:

$$x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x''_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Для этого можно записать расширенную матрицу управляемости  $U'$  и найти ранг этой

матрицы:

$$U' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -2 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{rank}(U') = 2 \quad (24)$$

$$U'' = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -45 & -3 \\ -3 & 17 & -19 & -3 \\ 3 & -17 & 19 & 4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{rank}(U'') = 3 \quad (26)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а точка  $x''_1$  не принадлежит. В дальнейшем будем обозначать  $x'_1$  как  $x_1$ .

## 2.4. Управление системой

Найдем управление  $u(t)$ , которое будет переводить систему из состояния  $x(0) = 0$  в состояние  $x_1 = x(t_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$ .

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} P(t_1)^{-1} x_1 \quad (27)$$

Реализуем данное управление в MATLAB и проведем моделирование системы. На рисунке 1 изображено управление системой. На рисунке 2 изображено состояние системы.

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние.

## 2.5. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом задании, получилось доказать, что она не является полностью управляемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через управляемость собственных значений и диагональную форму системы. При

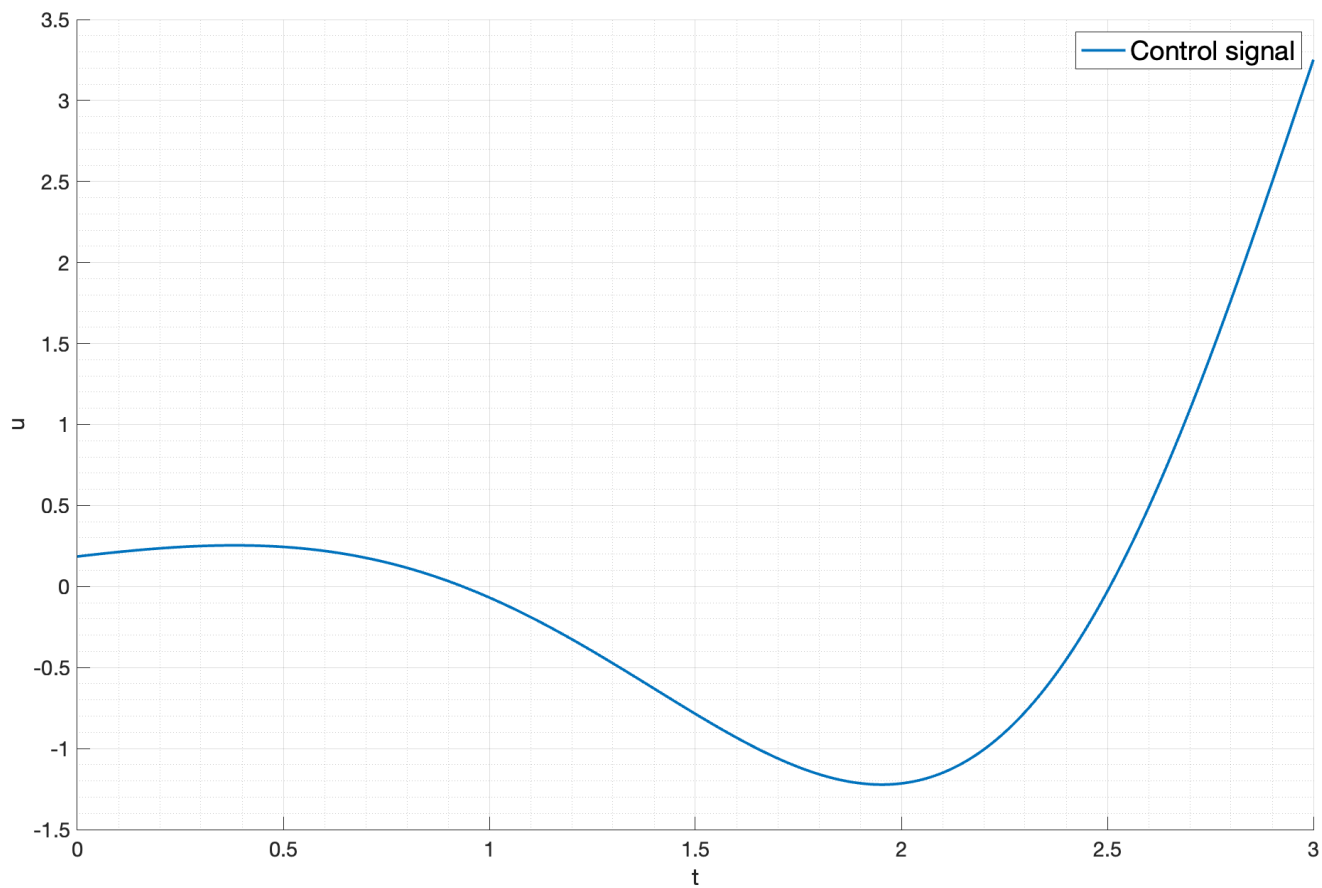


Рис. 3: Управление системой

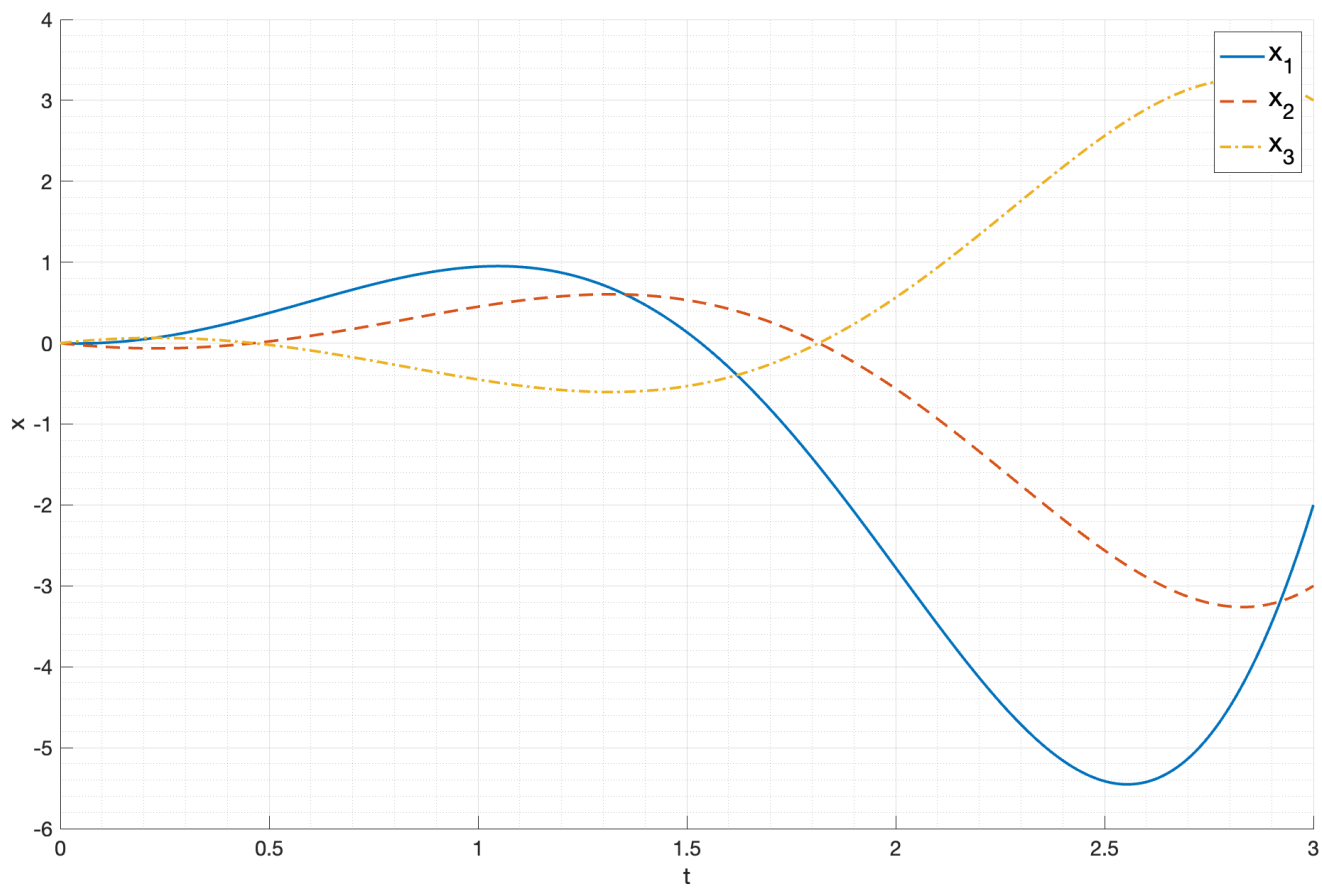


Рис. 4: Состояние системы

этом оказалось, что собственное число  $\lambda_1 = -3$  не является управляемым. Также был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Одно из собственных чисел равно нулю, что говорит о том, что система не является полностью управляемой.

Были рассмотрены две точки  $x'_1$  и  $x''_1$  и проверена их принадлежность управляемому подпространству. Точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а точка  $x''_1$  не принадлежит. Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты моделирования показали, что система управляема и управление работает корректно.

### 3. Исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -18 \\ -3 & -4 & -8 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

#### 3.1. Наблюдаемость системы

##### 3.1.1. Матрица наблюдаемости

Найдем матрицу наблюдаемости  $W = [C, CA, CA^2]^T$ :

$$W = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 22 & 19 & 43 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Определим ранг матрицы наблюдаемости:

$$\text{rank}(W) = 3 \quad (31)$$

Таким образом, система является полностью наблюдаемой.

### 3.1.2. Наблюдаемость собственных значений

Найдем спектр матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{1, -2 - 5j, -2 + 5j\} \quad (32)$$

Для каждого собственного значения найдем матрицу Хаутуса  $H_i = [A - \lambda_i, C]^T$ :

$$\begin{aligned} 1. \lambda_1 = 1: H_1 &= \begin{bmatrix} -11 & -7 & -18 \\ -3 & -5 & -8 \\ 8 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_1) = 3, \text{собственное значение наблюдаемо.} \\ 2. \lambda_2 = -2 - 5j: H_2 &= \begin{bmatrix} -8 + 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 + 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 + 5j \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_2) = 3, \text{собственное значение} \\ &\text{наблюдаемо.} \\ 3. \lambda_3 = -2 + 5j: H_3 &= \begin{bmatrix} -8 - 5j & -7 & -18 \\ -3 & -2 - 5j & -8 \\ 8 & 2 & 13 - 5j \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}(H_3) = 3, \text{собственное значение} \\ &\text{наблюдаемо.} \end{aligned}$$

Все собственные значения наблюдаемы, что сходится с результатом, полученным при анализе матрицы наблюдаемости.

### 3.1.3. Диагональная форма системы

Найдем диагональную форму системы:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} \\ y = CP\hat{x}, \end{cases} \quad (33)$$

где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ . Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1.5 - 0.5j \\ -1.5 - 0.5j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1.5 + 0.5j \\ -1.5 + 0.5j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Тогда матрица  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 - 0.5j & -1.5 + 0.5j \\ -1 & -1.5 - 0.5j & -1.5 + 0.5j \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - 5j & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 5j \end{bmatrix} \hat{x} \\ y = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 + 0.5j & -0.5 - 0.5j \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases} \quad (36)$$

Так как все элементы матрицы  $P$  не равны нулю, система является полностью наблюдаемой.

### 3.2. Грамиан наблюдаемости

Найдем грамиан наблюдаемости  $Q(t_1)$ :

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (37)$$

Вычислим грамиан наблюдаемости для  $t_1 = 3$ :

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 804.17 & -804.51 & 804.12 \\ -804.51 & 805.18 & -804.28 \\ 804.12 & -804.28 & 804.22 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Найдем собственные числа грамиана наблюдаемости:

$$\sigma(Q(3)) = \{0.013, 0.42, 2413.13\} \quad (39)$$

Все собственные числа грамиана наблюдаемости положительны, что говорит о том, что система является наблюдаемой.

### 3.3. Наблюдение системы

Будем считать, что выход системы соответствует функции  $y(t)$ :

$$y(t) = e^{-2t} \cos(5t) - 2e^{-2t} \sin(5t) \quad (40)$$

Найдем начальные условия  $x(0)$  такие, чтобы выход системы совпадал с функцией  $y(t)$ :

$$x(0) = Q(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \quad (41)$$

Получаем вектор начальных условий:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

Проведем моделирование системы с начальными условиями  $x(0)$  и входом  $u(t) = 0$ : На рисунке 5 изображены состояния системы. На рисунке 6 изображен выход системы. Видно, что выход системы совпадает с функцией  $y(t)$ . На рисунке 7 изображена ошибка наблюдения. Видно, что ошибка наблюдения стремится к нулю и не превышает  $10^{-11}$ .

### 3.4. Вывод

При исследовании системы, рассматриваемой в этом задании, удалось показать, что она является полностью наблюдаемой. Это было продемонстрировано с помощью матрицы наблюдаемости, через наблюдаемость собственных значений и диагональную форму системы. Также был найден грамиан наблюдаемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с начальными условиями, при которых выход системы совпадает с заданной функцией. Результаты моделирования показали, что система наблюдаема и наблюдение работает корректно.



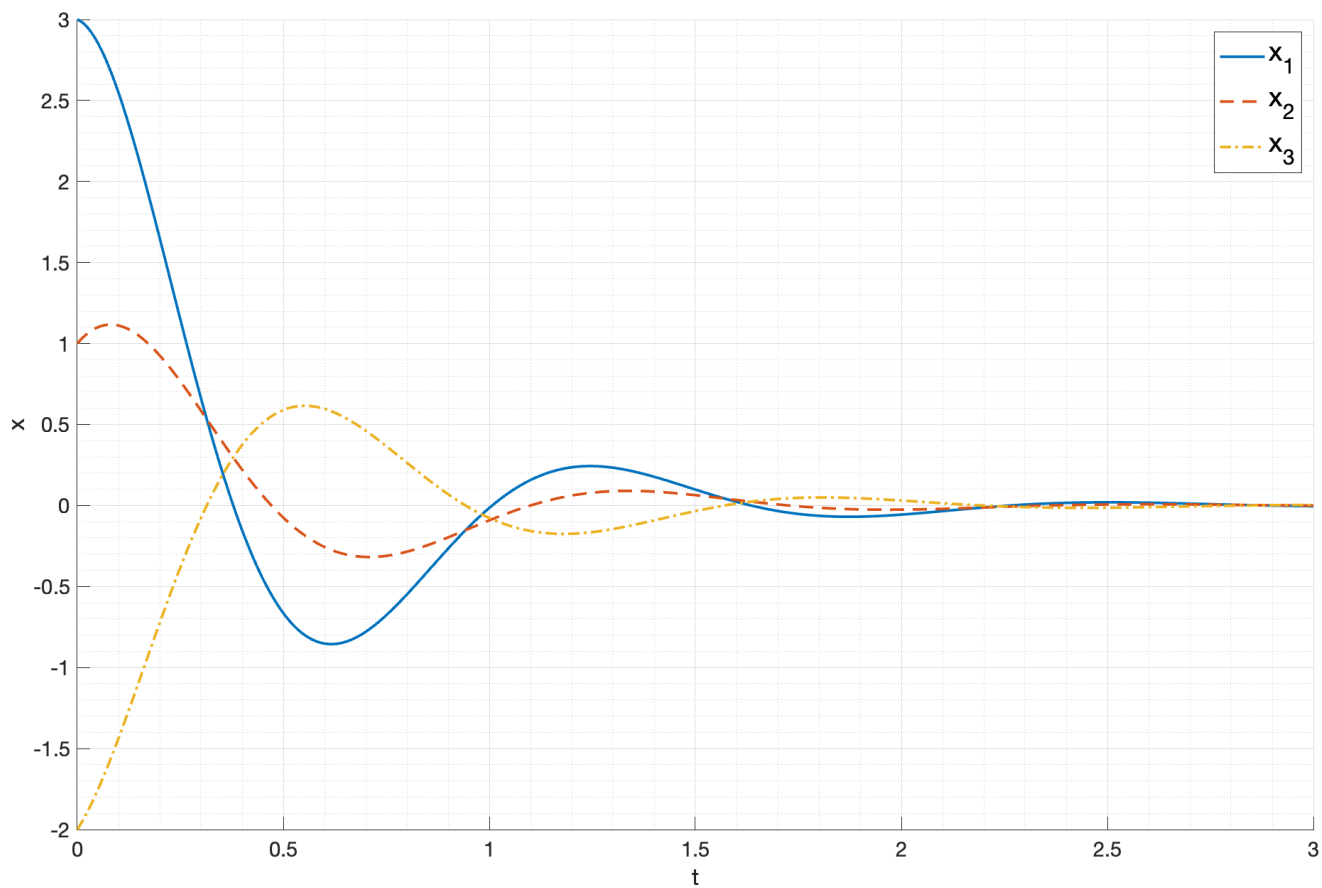


Рис. 5: Состояния системы

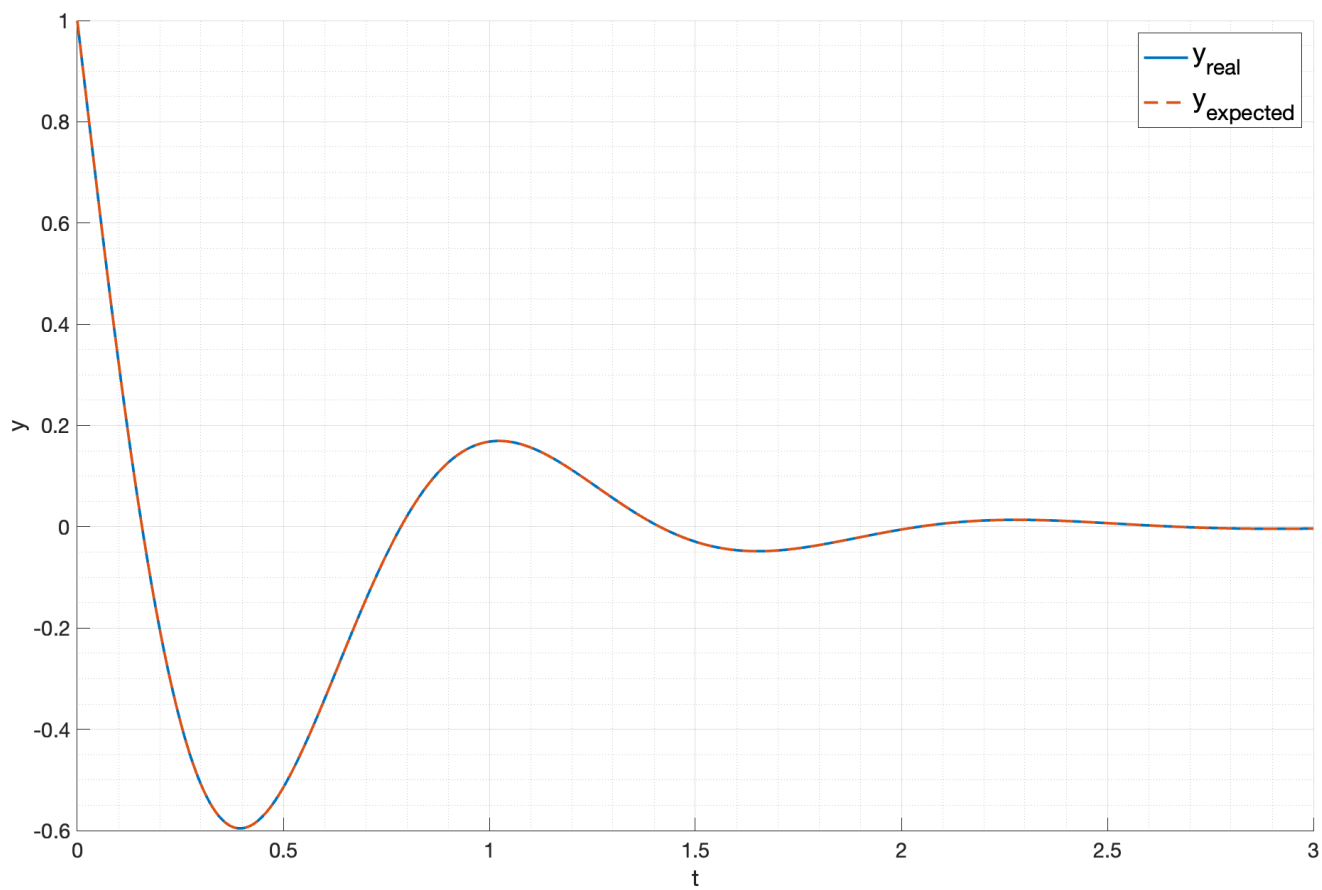


Рис. 6: Выход системы

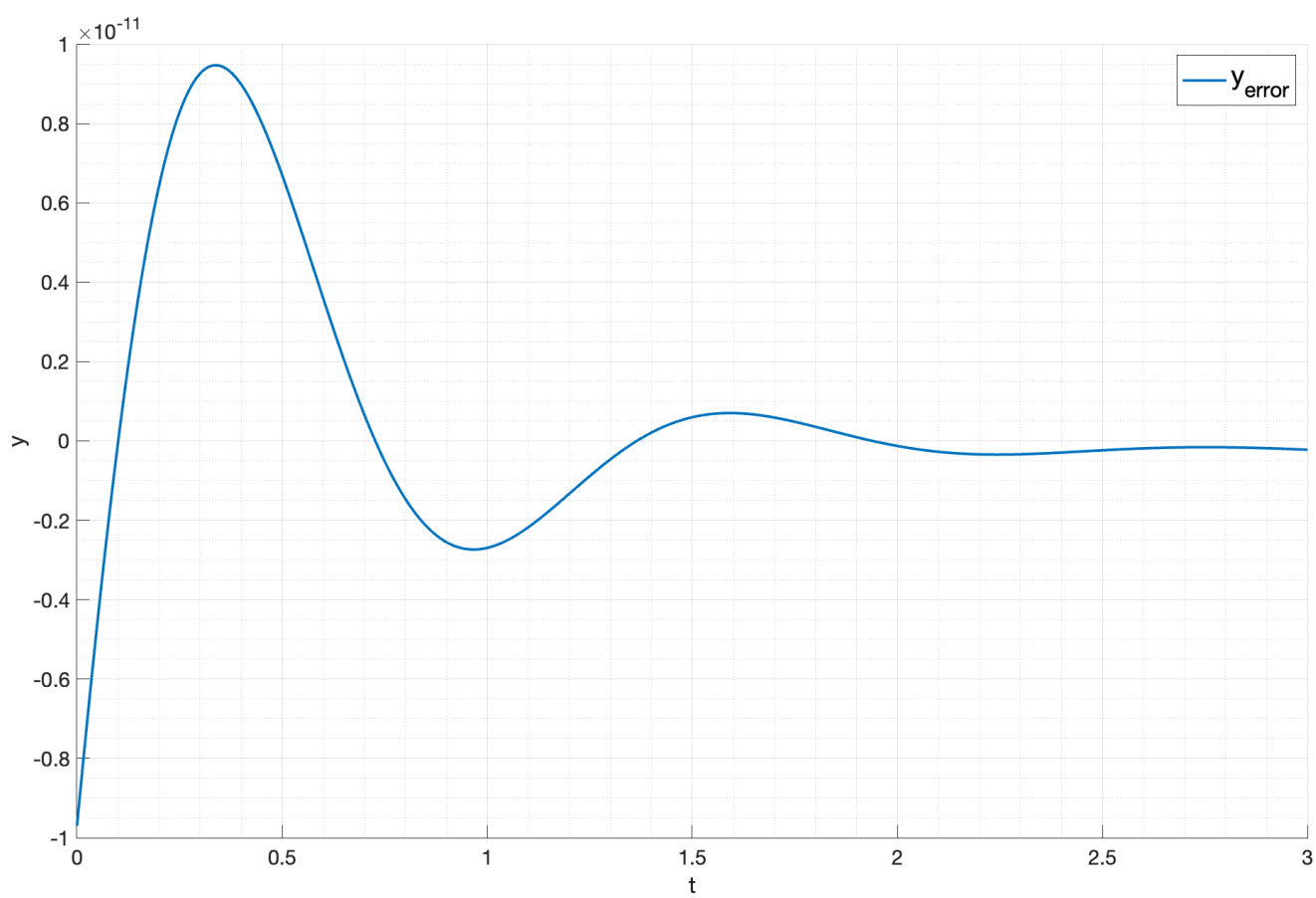


Рис. 7: Ошибка наблюдения