



НИУ ИТМО

ОТЧЕТ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Стабилизация перевернутого маятника”

Выполнил:

Александр Иванов, R3338

Преподаватели:

Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1. Физическая модель маятника	3
1.1. Уравнения движения	3
1.2. Точки равновесия	5
1.3. Линейная модель	6
2. Анализ математической модели	7
2.1. Устойчивость системы	7
2.1.1. Управляемость системы	8
2.1.2. Наблюдаемость системы	9
2.1.3. Итоги анализа	9
2.2. Передаточные функции	9
2.3. Моделирование систем	11
2.3.1. Итоги моделирования	17
3. Модальное управление	17

1. Физическая модель маятника

Рассмотрим систему, состоящую из тележки массой M , движущейся по горизонтальной оси, и маятника с равномерно распределенной массой m и длиной l_{pend} , закрепленного на шарнире на тележке. Примем за x координату тележки, а за θ угол отклонения маятника от вертикали. Схема системы представлена на рисунке 1.

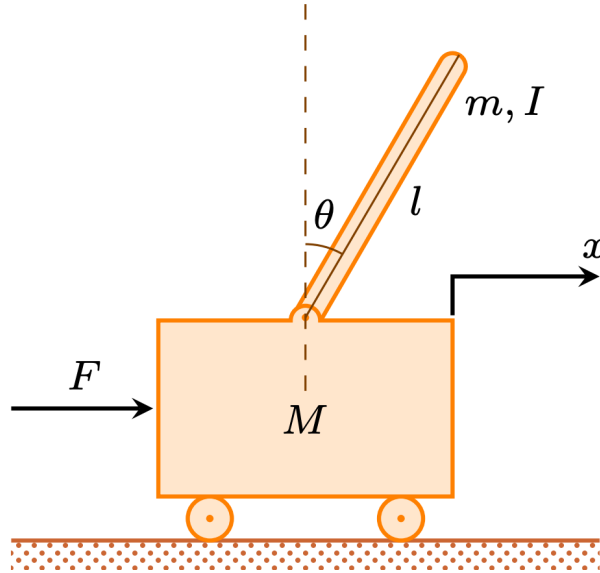


Рис. 1: Схема маятника на тележке

1.1. Уравнения движения

Используем законы Лагранжа для записи уравнений движения системы.

Так как кинетическая и потенциальная зависят от центра масс тележки и маятника, введем в рассмотрение расстояние l от точки подвеса маятника до его центра масс. При этом $l = l_{\text{pend}}/2$ для равномерно распределенной массы маятника.

Напишем уравнения для координат центра масс маятника x_m и y_m и продифференцировав их по времени, получим скорости центра масс маятника:

$$\begin{cases} x_m = x + l \sin \theta, \\ y_m = l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta, \\ v_y = -l\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Общая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергии маятника и кинетической энергии тележки:

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$U = mgl \cos \theta \quad (3)$$

Записывая функция Лагранжа $L = T - U$, получаем:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (4)$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

где Q_x и Q_θ – обобщенные силы, действующие на тележку и маятник соответственно. В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = Q_x, \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = Q_\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) представляет собой уравнения баланса сил, приложенных к тележке и моментов, действующих на маятник.

Запишем эти уравнения разрешив их относительно высших производных. Заметим, что вторые производные входят в эти уравнения линейно. С учетом этого приведем уравнения к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & M + m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl \sin \theta + Q_\theta \\ ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \end{bmatrix} \quad (7)$$

Убедимся в существовании и единственности решения системы:

$$D = ml^2(M + m) - m^2l^2 \cos^2 \theta = ml^2(M + m - m \cos^2 \theta) > 0 \quad (8)$$

Решая систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\Delta_{\ddot{\theta}} = \begin{vmatrix} mgl \sin \theta + Q_{\theta} & ml \cos \theta \\ ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x & M + m \end{vmatrix} = (mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) \quad (9)$$

$$\Delta_{\ddot{x}} = \begin{vmatrix} ml^2 & mgl \sin \theta + Q_{\theta} \\ ml \cos \theta & ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \end{vmatrix} = ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta}) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \end{cases} \quad (11)$$

Можно записать систему в пространстве состояний X в форме Коши:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Измеряемым выходом системы будет считать вектор Y , состоящий из координат тележки и угла отклонения маятника от вертикали:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (13)$$

1.2. Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы в отсутствие внешних сил ($Q_x = Q_{\theta} = 0$). Для этого приравняем к нулю правые части уравнений движения, решим систему уравнений:

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} = 0 \\ \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Упростив, получаем:

$$\begin{cases} \sin \theta (g(M+m) - \cos \theta (ml)) = 0 \\ \sin \theta (ml - \cos \theta g) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \quad (16)$$

Таким образом, точки равновесия системы определяются углом отклонения маятника от вертикали $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что соответствует наивысшему и наинизшему положению маятника соответственно, что сходится с ожидаемым результатом.

1.3. Линейная модель

Для дальнейшего анализа системы ее необходимо линеаризовать. Линеаризацию необходимо проводить в точках равновесия системы, которые были найдены в предыдущем пункте, в противном случае отклонения линейной модели от реальной системы будут велики. Линеаризуем систему в точке равновесия $\theta = 0$ и $x = 0$, используя то, что $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$, $x^{n+1} \approx 0, n \in N$ при малых x .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{lQ_x - mgl\theta - Q_\theta}{lM} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(g\theta + \frac{Q_\theta}{ml})(M+m) - Q_x}{lM} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Запишем систему в матричном виде, принимая за управление обобщенную силу, приложенную на каретку, а за внешнее возмущение обобщенную силу, приложенную на маятник $u = Q_x, f = Q_\theta$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \times Q_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix} \times Q_\theta \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрицы системы примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

2. Анализ математической модели

2.1. Устойчивость системы

Для дальнейшего анализа системы выберем случайным образом параметры системы:

$$M = 255.169, \quad m = 8.328, \quad l = 0.769 \quad (21)$$

Подставив эти значения в матрицы системы (18), получаем:

$$A = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.32 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 13.17 & 0.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.01 \\ 0.00 \\ -0.01 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \\ 0.00 \\ 0.84 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Проведем анализ полученной системы. Для этого, в первую очередь, найдем собственные

числа матрицы A .

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 3.63 \\ -3.63 \end{bmatrix} \quad (23)$$

В матрице системы есть два нулевых собственных числа, один отрицательный (устойчивый) и один положительный (неустойчивый). Наличие хотя бы одного положительного собственного числа говорит о том, что система неустойчива. При этом наличие двух нулевых собственных чисел свидетельствует о колебательной природе системы.

Найдем собственные векторы матрицы A :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_3 = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.02 \\ 0.27 \\ 0.96 \end{bmatrix}^T, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.27 \\ 0.96 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

2.1.1. Управляемость системы

Найдем матрицу управляемости системы U и определим ее ранг.

$$U = [B, AB, A^2B, A^3B] \quad (25)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.02 \\ 0.00 & -0.01 & 0.05 & -0.07 \\ -0.01 & 0.05 & -0.07 & 0.68 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(U) = 4 \quad (26)$$

Поскольку ранг матрицы управляемости равен количеству переменных системы, то система является полностью управляемой. Поскольку система является полностью управляемой, то нет необходимости проверять управляемость каждого собственного числа по отдельности.

2.1.2. Наблюдаемость системы

Найдем матрицу наблюдаемости системы W и определим ее ранг.

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 12.85 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 12.85 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(W) = 4 \quad (28)$$

Поскольку ранг матрицы наблюдаемости равен количеству переменных системы, то система является полностью наблюдаемой, так же пропустим этап проверки наблюдаемости каждого собственного числа по отдельности.

2.1.3. Итоги анализа

В ходе анализа линеаризованной около верхней точки равновесия системы было установлено, что система является неустойчивой из-за наличия одного положительного собственного числа и двух нулевых собственных чисел, при этом система является полностью управляемой и наблюдаемой, что дает возможность синтезировать регуляторы для данной системы.

2.2. Передаточные функции

Так как выход системы является вектором размерности 2, то передаточная функция (матрица) $W_{u \rightarrow y}(s)$ по управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ и передаточная функция (матрица) $W_{f \rightarrow y}(s)$ по возмущению $f(t)$ и выходу $y(t)$ системы будут иметь размерность 2×1 и могут быть получены из матричного уравнения состояния (18) системы следующим образом:

Пологая нулевые начальные условия, применим преобразование Лапласа к обоим частям

уравнения (18):

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) + DF(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases} \quad (29)$$

где $X(s)$, $Y(s)$ и $U(s)$, $F(s)$ - образы Лапласа, соответствующие вектору состояния $x(t)$, выходу $y(t)$ и входу $u(t)$, $f(t)$ системы соответственно.

Разрешим систему относительно $X(s)$:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}DF(s) \quad (30)$$

Подставим полученное выражение в уравнение для выхода $Y(s)$:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}DF(s) \quad (31)$$

Теперь, полагая $U(s) = 0$ и $F(s) = 0$ получим передаточные матрицы системы по входу и внешнему возмущению соответственно:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (32)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D \quad (33)$$

Подставив в уравнения полученные ранее матрицы A , B , C и D получим:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0013s+0.0033}{s^4+s^3-26.3392s^2} \\ \frac{0.0039s-0.0102}{s^2+s-26.3392} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0102s^2}{s^4+26.3392s^2} \\ \frac{0.8383}{s^2-26.3392} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Определим динамические порядки полученных передаточных функций. Принимая то, что динамический порядок системы с несколькими выходами определяется как наибольший из динамических порядков передаточных функций звеньев, получаем, для первой передаточной функции $W_{u \rightarrow y}(s)$ динамический порядок равен 4, для второй передаточной функции $W_{f \rightarrow y}(s)$ динамический порядок равен 4.

Относительный динамический порядок для первого выхода передаточной функции

$W_{u \rightarrow y}(s)$ равен 3, для второго выхода передаточной функции $W_{f \rightarrow y}(s)$ равен 1. Для второй передаточной функции $W_{f \rightarrow y}(s)$ относительный динамический порядок обоих выходов равен 2.

Таким образом, рассматриваемая система является системой четвертого порядка с относительным динамическим порядком равным 3 и 1 для первой передаточной функции и 2 для второй передаточной функции.

Определим нули и полюса полученных передаточных функций. Для этого найдем корни полиномов числителя и знаменателя полученных передаточных функций.

2.3. Моделирование систем

Создадим блоки, имитирующие поведение начальной системы (11) и ее линеаризованной модели (18) в среде MATLAB Simulink. На вход блоков будут подаваться управляющее воздействие $u(t)$ и внешнее возмущение $f(t)$, а на выходе будет получаться вектор измеряемых величин $y(t)$. Схемы блоков представлены на рисунке 2 и 3.

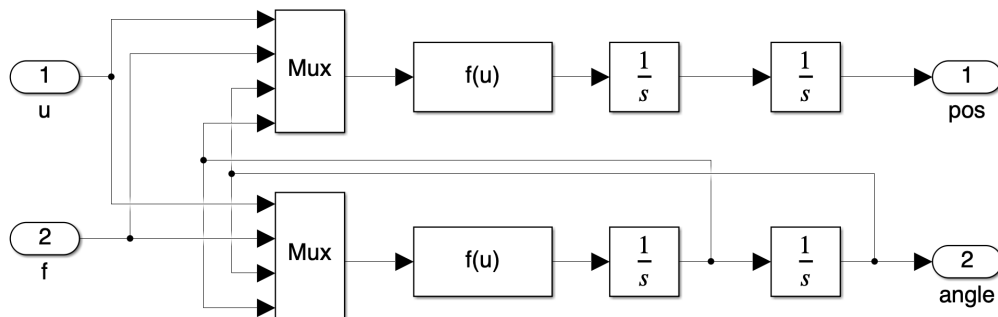


Рис. 2: Схема блока нелинейной модели системы

Уравнения в блоках **fcn** представляют собой уравнения (11) системы.

Проведем моделирование свободного движения системы в отсутствии внешнего возмущения с различными начальными условиями: будем изменять начальное положение маятника (его отклонение от верхнего положения равновесия), все остальные параметры системы оставим равными нулю. В качестве начального условия выберем угол отклонения маятника из множества $[0, 0.1, -0.1, 0.3, \pi/2, \pi]$. Результаты моделирования представлены на рисунке 4 и 5.

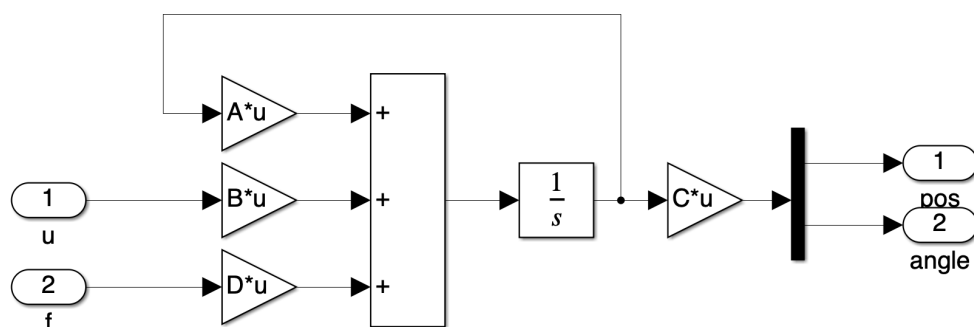


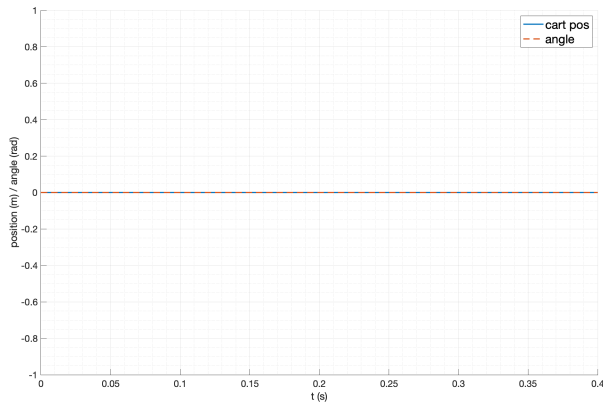
Рис. 3: Схема блока линейной модели системы

На рисунках 4 и 5 видно, что при отсутствии отклонения от вертикального положения маятник остается в покое, при отклонении от вертикального положения маятник начинает движение, причем направление движения зависит от направления отклонения. При отклонении равным π , что соответствует нижнему положению равновесия, в случае нелинейной модели, остается неподвижным, в то время как в случае линеаризованной модели маятник начинает движение, что связано с тем, что линеаризация проводилась в окрестности верхней точки равновесия, а не нижней. Сравним результаты моделирования нелинейной и линеаризованной моделей. Графики различия движения приведены на рисунке 6.

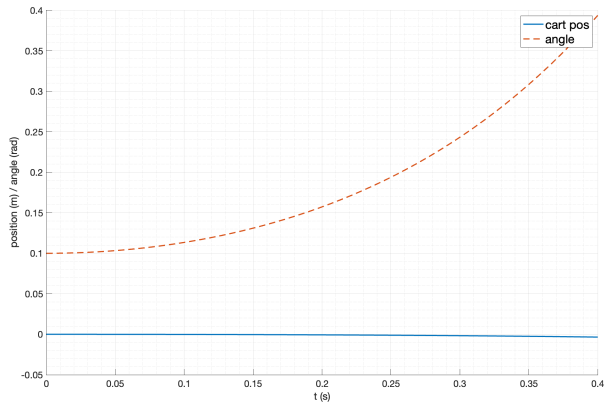
Видно, что при отклонениях $\theta_0 = 0.1$, $\theta_0 = -0.1$ и $\theta_0 = 0.3$ различия в движении незначительны, при этом увеличиваются с увеличением модуля отклонения. При отклонении $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ различия в движении уже становятся существенными, что, опять же, связано с линеаризацией вблизи верхней точки равновесия.

Проведем моделирование системы с начальным отклонением $\theta_0 = 0.1$ на более длительном промежутке времени. Результаты моделирования представлены на рисунке 8, 7.

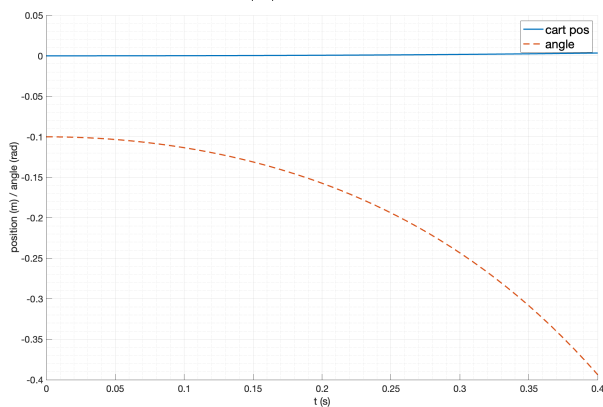
На графиках 7 и 8 видно, что в случае нелинейной модели система колебалась с затухающими колебаниями, что является ожидаемым результатом движения маятника, в то время как в случае линеаризованной модели система не является колебательной и выход системы стремится к бесконечности, это связано с тем, что линеаризованная модель способна давать корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия, а при больших отклонениях от вертикального положения.



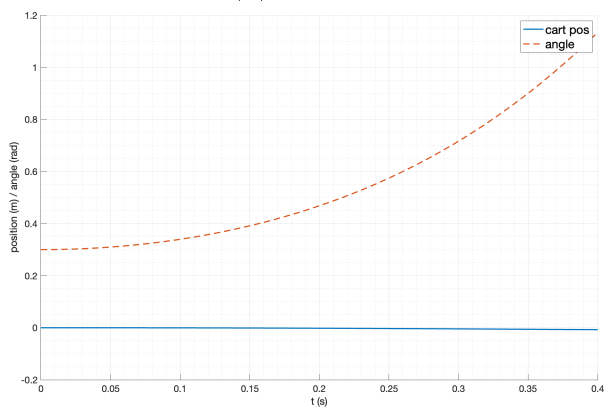
(a) $\theta_0 = 0$



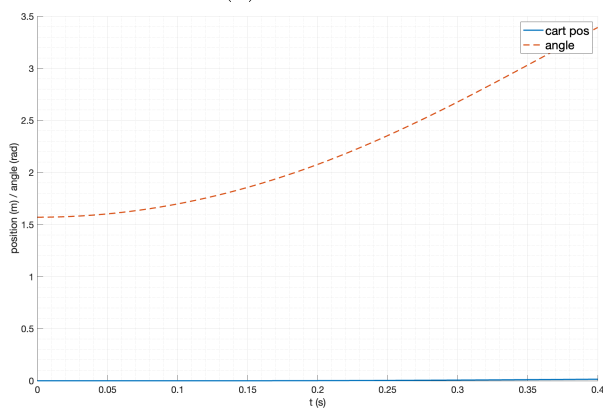
(b) $\theta_0 = 0.1$



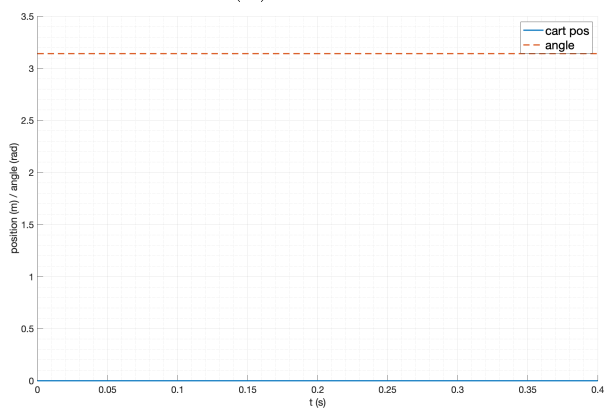
(c) $\theta_0 = -0.1$



(d) $\theta_0 = 0.3$

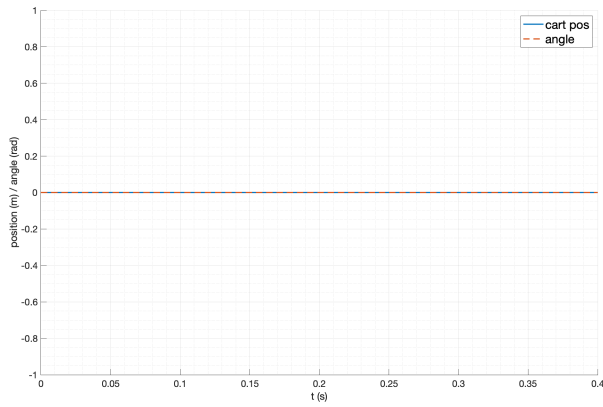


(e) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

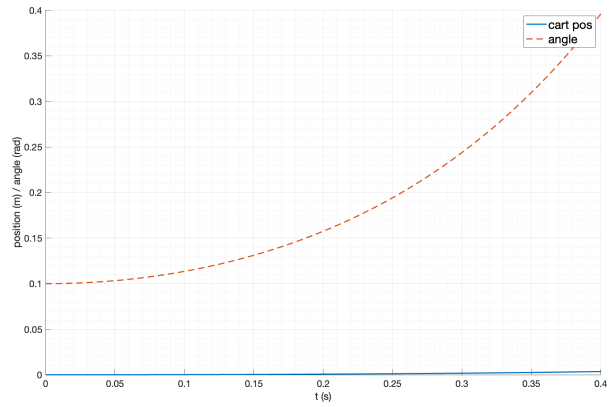


(f) $\theta_0 = \pi$

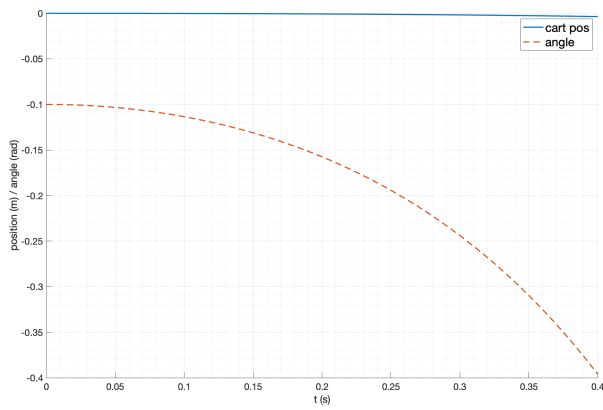
Рис. 4: Свободное движение маятника (нелинейная модель)



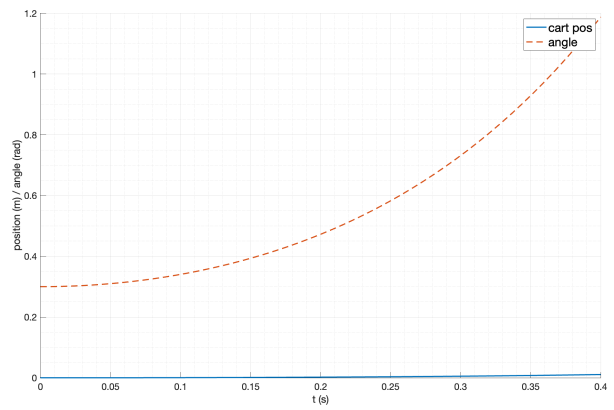
(a) $\theta_0 = 0$



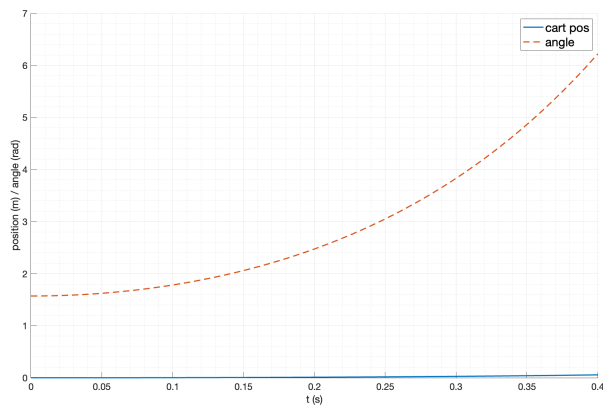
(b) $\theta_0 = 0.1$



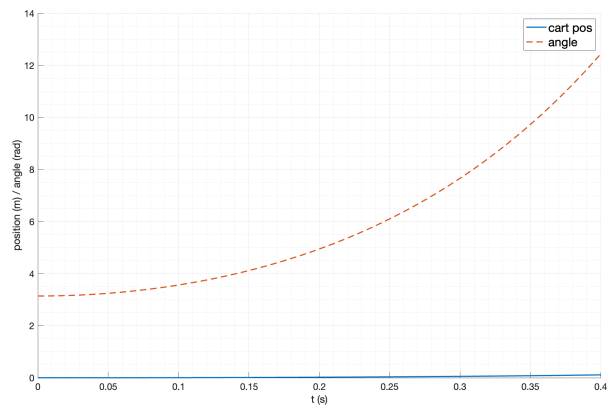
(c) $\theta_0 = -0.1$



(d) $\theta_0 = 0.3$

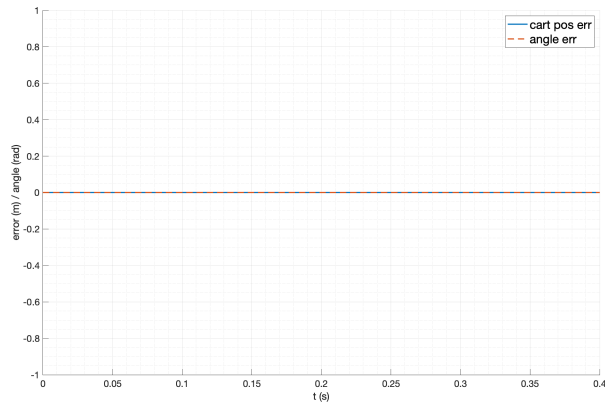


(e) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

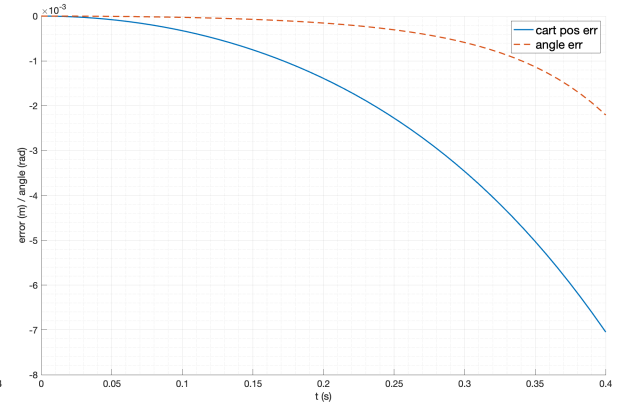


(f) $\theta_0 = \pi$

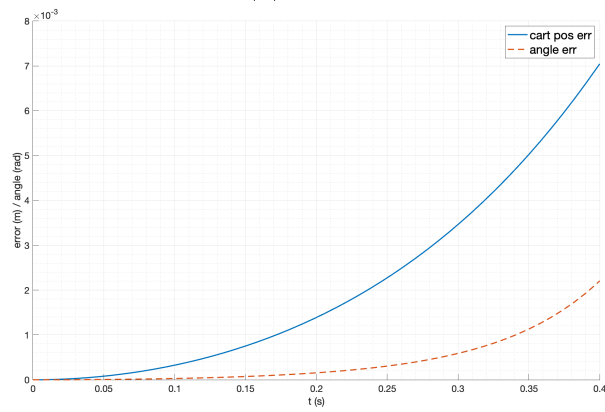
Рис. 5: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)



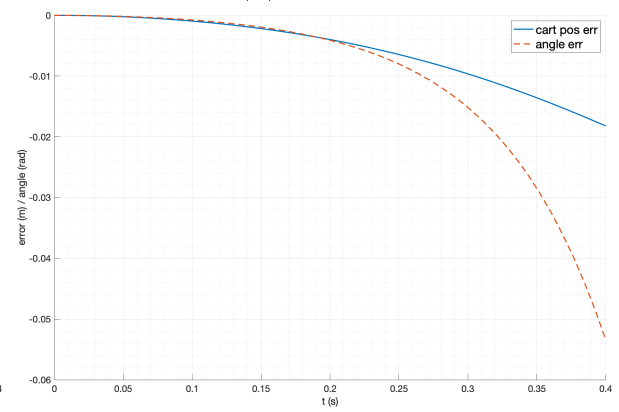
(a) $\theta_0 = 0$



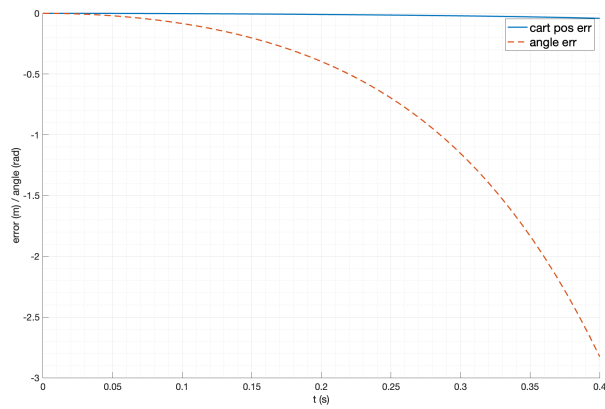
(b) $\theta_0 = 0.1$



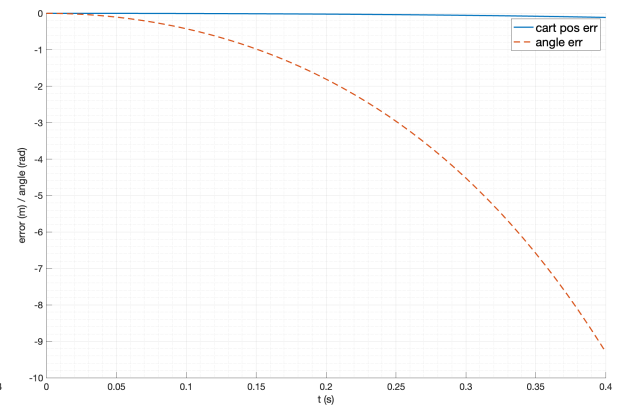
(c) $\theta_0 = -0.1$



(d) $\theta_0 = 0.3$



(e) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$



(f) $\theta_0 = \pi$

Рис. 6: Различия в движении маятника (нелинейная и линеаризованная модели)

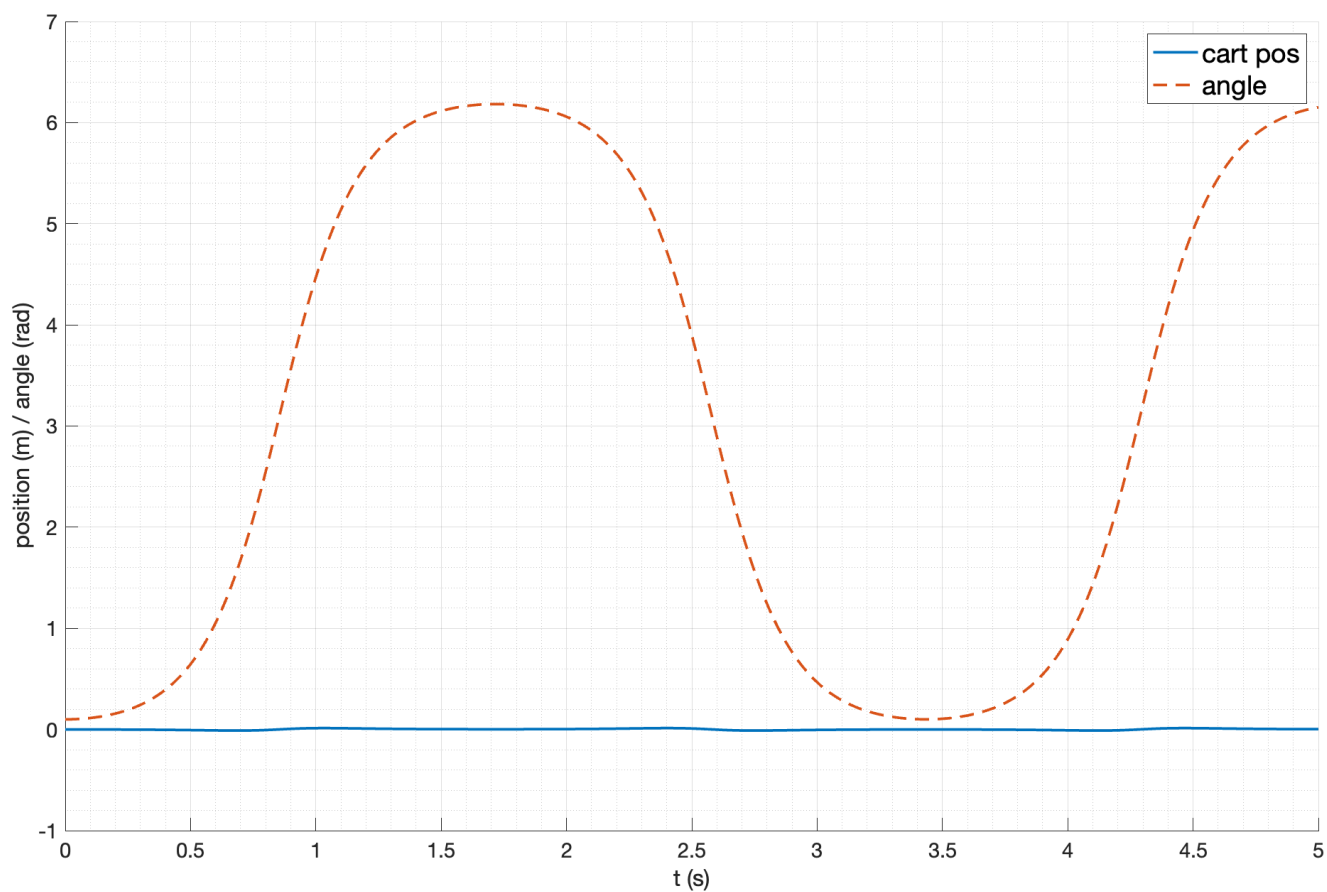


Рис. 7: Свободное движение маятника (нелинейная модель)

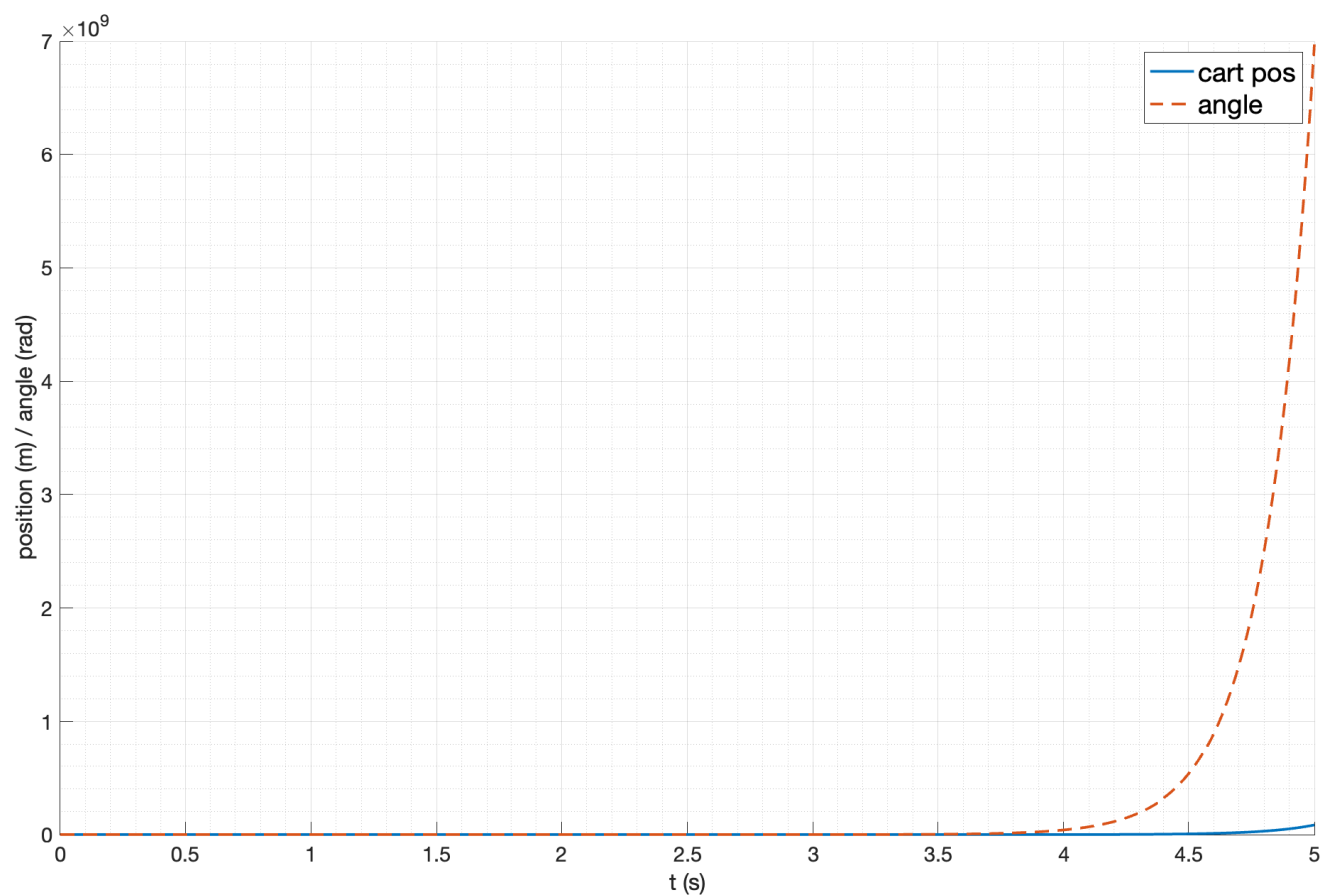


Рис. 8: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)

2.3.1. Итоги моделирования

В ходе анализа и моделирования модели системы перевернутого маятника на тележке и ее линеаризованной модели при небольших отклонениях от вертикального положения было показано, что линейная модель является хорошим приближением нелинейной модели в окрестности верхней точки равновесия, что позволяет использовать ее для дальнейшего синтеза. Можно, изменив способ задания угла отклонения, получить линейную модель, описывающую движение маятника в окрестности нижней точки равновесия, что может быть использовано для создания модели козлового крана.

Из-за того, что линеаризованная модель дает корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия, асимптотическое ее поведение сильно отличается от асимптотического поведения нелинейной модели, так же как в случае существенных отклонений от вертикального положения.

3. Модальное управление

Рассмотрим модальный регулятор вида $u = Kx$. Согласно (26), система является полностью управляемой. Таким образом, любой спектр замкнутой системы является достижимым. Выберем желаемый спектр для замкнутой регулятор системы $\sigma_1 = [-3 \ -3 \ -2 \ -2]$. Для реализации регулятора, обеспечивающего заданный спектр, воспользуемся уравнением Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (36)$$

где Γ – матрица с желаемым спектром. Решение данного уравнения существует, при условии того, что пара (Y, Γ) является наблюдаемой.

Решим данное уравнение с помощью пакета `cvx` в MATLAB, в результате получаем матрицу регулятора K :

$$K = \begin{bmatrix} -11035.11 & -22635.99 & -6541.54 & -1534.51 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Проверим правильность полученного результата, вычислив собственные числа замкнутой системы $A + BK$:

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} -3.00 \\ -3.00 \\ -2.00 \\ -2.00 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Получены желаемые собственные числа, что подтверждает правильность полученного результата. Рассмотрим работу регулятора на линейной модели системы при отсутствии внешних возмущений и небольшом начальном отклонении от равновесного состояния ($\theta_0 = 0.2$). Схема моделирования приведена на рисунке 9. Результаты моделирования приведены на рисунке 10.

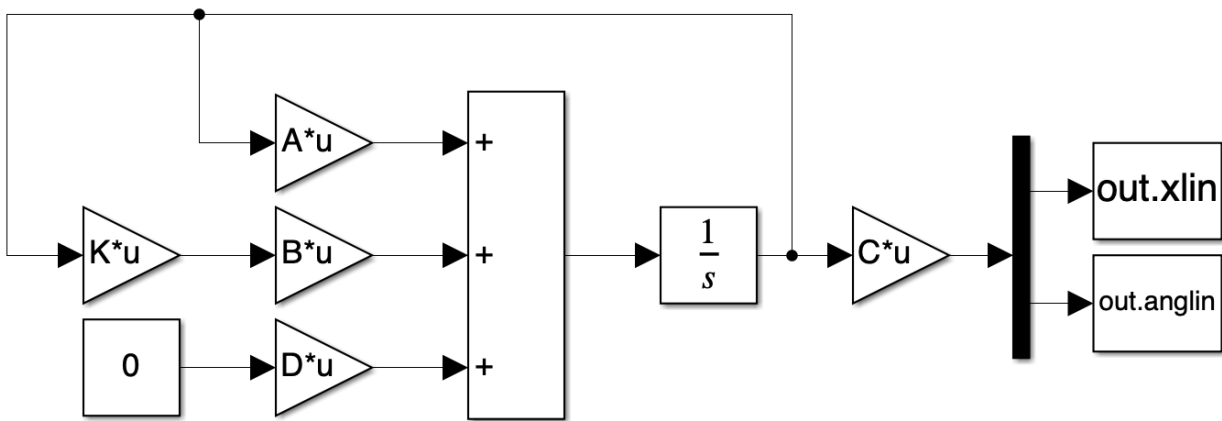


Рис. 9: Схема моделирования линейной модели системы с модальным регулятором

Можно заметить, что приходит в равновесное состояние. Теперь попробуем использовать этот же модальный регулятор на нелинейной модели системы. Схема моделирования приведена на рисунке ???. Результаты моделирования приведены на рисунке ???.

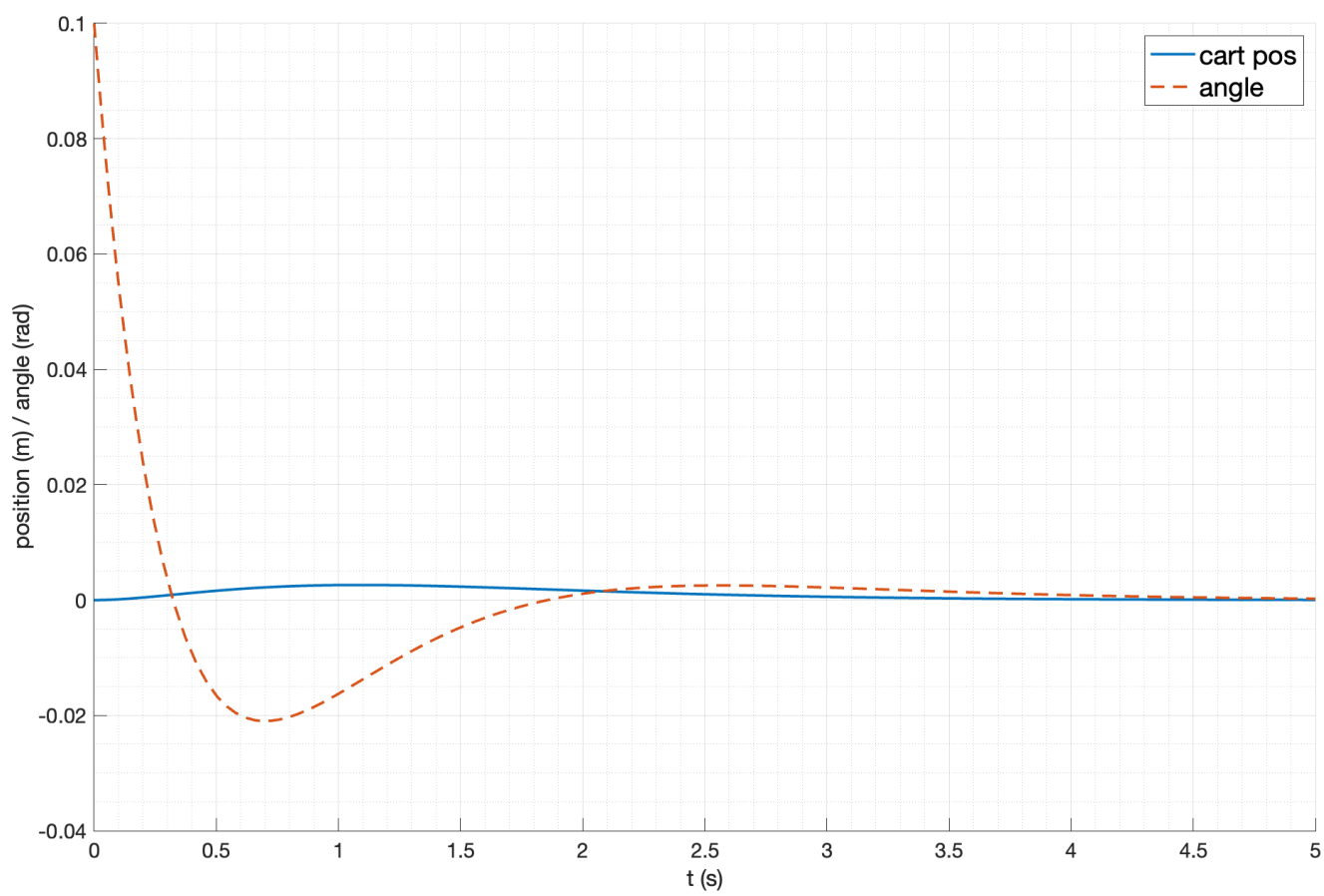


Рис. 10: Результаты моделирования линейной модели системы с модальным регулятором