



НИУ ИТМО

## ОТЧЕТ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

По дисциплине "ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

“Стабилизация перевернутого маятника”

Выполнил:

**Александр Иванов, R3338**

Преподаватели:

**Перегудин А.А.**

**Пашенко А.В.**

Санкт-Петербург, 2025



# Содержание

<b>1. Физическая модель маятника</b>	<b>3</b>
1.1. Уравнения движения . . . . .	3
1.2. Точки равновесия . . . . .	5
1.3. Линейная модель . . . . .	6
<b>2. Анализ математической модели</b>	<b>7</b>
2.1. Устойчивость системы . . . . .	7
2.1.1. Управляемость системы . . . . .	8
2.1.2. Наблюдаемость системы . . . . .	9
2.1.3. Итоги анализа . . . . .	9
2.2. Передаточные функции . . . . .	9
2.3. Моделирование систем . . . . .	11
2.4. Итоги моделирования . . . . .	17

# 1. Физическая модель маятника

Рассмотрим систему, состоящую из тележки массой  $M$ , движущейся по горизонтальной оси, и маятника с равномерно распределенной массой  $m$  и длиной  $l_{\text{pend}}$ , закрепленного на шарнире на тележке. Примем за  $x$  координату тележки, а за  $\theta$  угол отклонения маятника от вертикали. Схема системы представлена на рисунке 1.

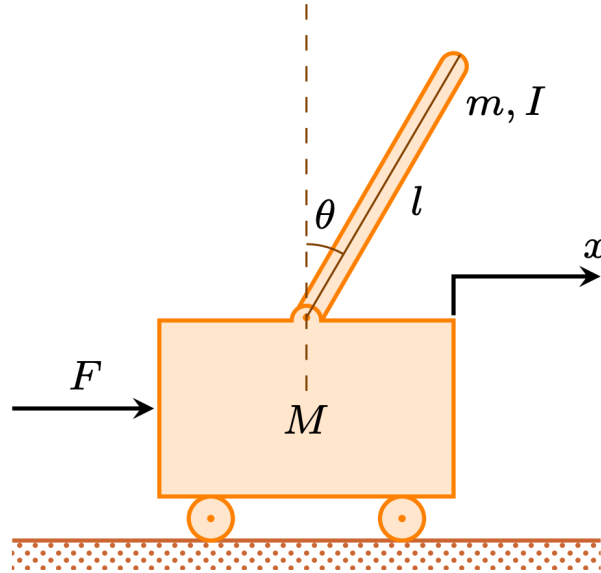


Рис. 1: Схема маятника на тележке

## 1.1. Уравнения движения

Используем законы Лагранжа для записи уравнений движения системы.

Так как кинетическая и потенциальная зависят от центра масс тележки и маятника, введем в рассмотрение расстояние  $l$  от точки подвеса маятника до его центра масс. При этом  $l = l_{\text{pend}}/2$  для равномерно распределенной массы маятника.

Напишем уравнения для координат центра масс маятника  $x_m$  и  $y_m$  и продифференцировав их по времени, получим скорости центра масс маятника:

$$\begin{cases} x_m = x + l \sin \theta, \\ y_m = l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta, \\ v_y = -l\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Общая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергии маятника и кинетической энергии тележки:

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$U = mgl \cos \theta \quad (3)$$

Записывая функция Лагранжа  $L = T - U$ , получаем:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (4)$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Q_x$  и  $Q_\theta$  – обобщенные силы, действующие на тележку и маятник соответственно. В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = Q_x, \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = Q_\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) представляет собой уравнения баланса сил, приложенных к тележке и моментов, действующих на маятник.

Запишем эти уравнения разрешив их относительно высших производных. Заметим, что вторые производные входят в эти уравнения линейно. С учетом этого приведем уравнения к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} ml^2 & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & M + m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl \sin \theta + Q_\theta \\ ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \end{bmatrix} \quad (7)$$

Убедимся в существовании и единственности решения системы:

$$D = ml^2(M + m) - m^2l^2 \cos^2 \theta = ml^2(M + m - m \cos^2 \theta) > 0 \quad (8)$$

Решая систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\Delta_{\ddot{\theta}} = \begin{vmatrix} mgl \sin \theta + Q_{\theta} & ml \cos \theta \\ ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x & M + m \end{vmatrix} = (mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) \quad (9)$$

$$\Delta_{\ddot{x}} = \begin{vmatrix} ml^2 & mgl \sin \theta + Q_{\theta} \\ ml \cos \theta & ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x \end{vmatrix} = ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta}) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \end{cases} \quad (11)$$

Можно записать систему в пространстве состояний  $X$  в форме Коши:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Измеряемым выходом системы будет считать вектор  $Y$ , состоящий из координат тележки и угла отклонения маятника от вертикали:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (13)$$

## 1.2. Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы в отсутствие внешних сил ( $Q_x = Q_{\theta} = 0$ ). Для этого приравняем к нулю правые части уравнений движения, решим систему уравнений:

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{\theta} = 0, \\ \frac{(mgl \sin \theta + Q_{\theta})(M + m) - ml \cos \theta (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x)}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} = 0 \\ \frac{ml^2 (ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + Q_x) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta + Q_{\theta})}{ml^2 (M + m - m \cos^2 \theta)} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Упростив, получаем:

$$\begin{cases} \sin \theta (g(M+m) - \cos \theta (ml)) = 0 \\ \sin \theta (ml - \cos \theta g) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \quad (16)$$

Таким образом, точки равновесия системы определяются углом отклонения маятника от вертикали  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , что соответствует наивысшему и наинизшему положению маятника соответственно, что сходится с ожидаемым результатом.

### 1.3. Линейная модель

Для дальнейшего анализа системы ее необходимо линеаризовать. Линеаризацию необходимо проводить в точках равновесия системы, которые были найдены в предыдущем пункте, в противном случае отклонения линейной модели от реальной системы будут велики. Линеаризуем систему в точке равновесия  $\theta = 0$  и  $x = 0$ , используя то, что  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1$ ,  $x^{n+1} \approx 0, n \in N$  при малых  $x$ .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{lQ_x - mgl\theta - Q_\theta}{lM} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(g\theta + \frac{Q_\theta}{ml})(M+m) - Q_x}{lM} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Запишем систему в матричном виде, принимая за управление обобщенную силу, приложенную на каретку, а за внешнее возмущение обобщенную силу, приложенную на маятник  $u = Q_x, f = Q_\theta$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} \times Q_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix} \times Q_\theta \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрицы системы примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{lM} \\ 0 \\ \frac{M+m}{ml^2M} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 2. Анализ математической модели

### 2.1. Устойчивость системы

Для дальнейшего анализа системы выберем случайным образом параметры системы:

$$M = 255.169, \quad m = 8.328, \quad l = 0.769 \quad (21)$$

Подставив эти значения в матрицы системы (18), получаем:

$$A = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.32 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 13.17 & 0.00 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -0.01 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \\ 0.00 \\ 0.84 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Проведем анализ полученной системы. Для этого, в первую очередь, найдем собственные



числа матрицы  $A$ .

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 3.63 \\ -3.63 \end{bmatrix} \quad (23)$$

В матрице системы есть два нулевых собственных числа, один отрицательный (устойчивый) и один положительный (неустойчивый). Наличие хотя бы одного положительного собственного числа говорит о том, что система неустойчива. При этом наличие двух нулевых собственных чисел свидетельствует о колебательной природе системы.

Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}^T, \quad V_3 = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.02 \\ 0.27 \\ 0.96 \end{bmatrix}^T, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.27 \\ 0.96 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

### 2.1.1. Управляемость системы

Найдем матрицу управляемости системы  $U$  и определим ее ранг.

$$U = [B, AB, A^2B, A^3B] \quad (25)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.02 \\ 0.00 & -0.01 & 0.05 & -0.07 \\ -0.01 & 0.05 & -0.07 & 0.68 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(U) = 4 \quad (26)$$

Поскольку ранг матрицы управляемости равен количеству переменных системы, то система является полностью управляемой. Поскольку система является полностью управляемой, то нет необходимости проверять управляемость каждого собственного числа по отдельности.

### 2.1.2. Наблюдаемость системы

Найдем матрицу наблюдаемости системы  $W$  и определим ее ранг.

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 12.85 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 12.85 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(W) = 4 \quad (28)$$

Поскольку ранг матрицы наблюдаемости равен количеству переменных системы, то система является полностью наблюдаемой, так же пропустим этап проверки наблюдаемости каждого собственного числа по отдельности.

### 2.1.3. Итоги анализа

В ходе анализа линеаризованной около верхней точки равновесия системы было установлено, что система является неустойчивой из-за наличия одного положительного собственного числа и двух нулевых собственных чисел, при этом система является полностью управляемой и наблюдаемой, что дает возможность синтезировать регуляторы для данной системы.

## 2.2. Передаточные функции

Так как выход системы является вектором размерности 2, то передаточная функция (матрица)  $W_{u \rightarrow y}(s)$  по управлению  $u(t)$  и выходу  $y(t)$  и передаточная функция (матрица)  $W_{f \rightarrow y}(s)$  по возмущению  $f(t)$  и выходу  $y(t)$  системы будут иметь размерность  $2 \times 1$  и могут быть получены из матричного уравнения состояния (18) системы следующим образом:

Пологая нулевые начальные условия, применим преобразование Лапласа к обоим частям

уравнения (18):

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) + DF(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases} \quad (29)$$

где  $X(s)$ ,  $Y(s)$  и  $U(s)$ ,  $D(s)$  - векторные функции Лапласа, соответствующие вектору состояния  $x(t)$ , выходу  $y(t)$  и входу  $u(t)$ ,  $f(t)$  системы соответственно.

Разрешим систему относительно  $X(s)$ :

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}DF(s) \quad (30)$$

Подставим полученное выражение в уравнение для выхода  $Y(s)$ :

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}DF(s) \quad (31)$$

Теперь, полагая  $U(s) = U_0(s)$  и  $F(s) = F_0(s)$  получим передаточные матрицы системы по входу и внешнему возмущению соответственно:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (32)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D \quad (33)$$

Подставив в уравнения полученные ранее матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  получим:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0013s+0.0033}{s^4+s^3-26.3392s^2} \\ \frac{0.0039s-0.0102}{s^2+s-26.3392} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.0102s^2}{s^4+26.3392s^2} \\ \frac{0.8383}{s^2-26.3392} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Определим динамические порядки полученных передаточных функций. Принимая то, что динамический порядок системы с несколькими выходами определяется как наибольший из динамических порядков передаточных функций звеньев, получаем, для первой передаточной функции  $W_{u \rightarrow y}(s)$  динамический порядок равен 4, для второй передаточной функции  $W_{f \rightarrow y}(s)$  динамический порядок равен 4.

Относительный динамический порядок для первого выхода передаточной функции

$W_{u \rightarrow y}(s)$  равен 3, для второго выхода передаточной функции  $W_{f \rightarrow y}(s)$  равен 1. Для второй передаточной функции  $W_{f \rightarrow y}(s)$  относительный динамический порядок обоих выходов равен 2.

Таким образом, рассматриваемая система является системой четвертого порядка с относительным динамическим порядком равным 3 и 1 для первой передаточной функции и 2 для второй передаточной функции.

Определим нули и полюса полученных передаточных функций. Для этого найдем корни полиномов числителя и знаменателя полученных передаточных функций.

### 2.3. Моделирование систем

Создадим блоки, имитирующие поведение начальной системы (11) и ее линеаризованной модели (18) в среде MATLAB Simulink. На вход блоков будут подаваться управляющее воздействие  $u(t)$  и внешнее возмущение  $f(t)$ , а на выходе будет получаться вектор измеряемых величин  $y(t)$ . Схемы блоков представлены на рисунке 2 и 3.

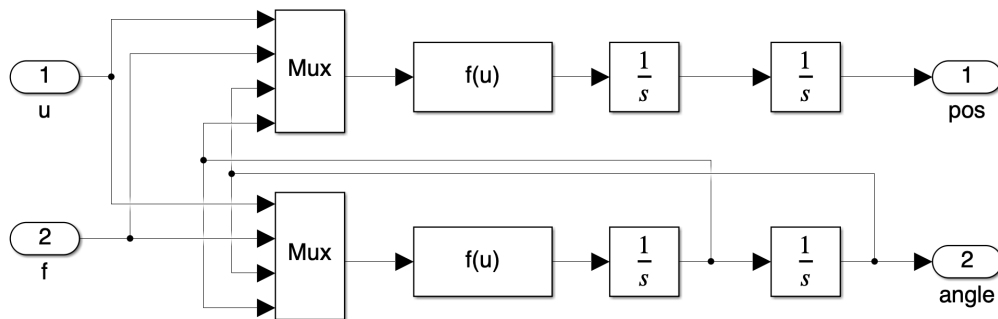


Рис. 2: Схема блока нелинейной модели системы

Уравнения в блоках **fcn** представляют собой уравнения (11) системы.

Проведем моделирование свободного движения системы в отсутствии внешнего возмущения с различными начальными условиями: будем изменять начальное положение маятника (его отклонение от верхнего положения равновесия), все остальные параметры системы оставим равными нулю. В качестве начального условия выберем угол отклонения маятника из множества  $[0, 0.1, -0.1, 0.3, \pi/2, \pi]$ . Результаты моделирования представлены на рисунке 4 и 5.

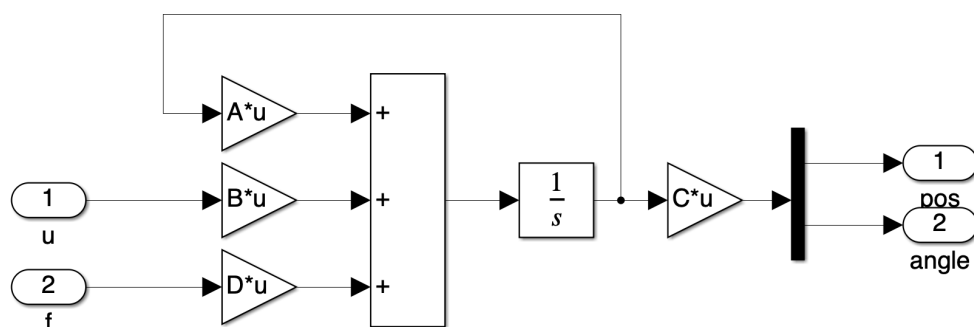


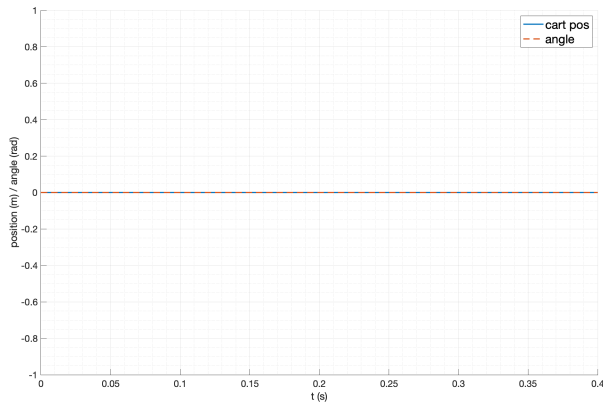
Рис. 3: Схема блока линейной модели системы

На рисунках 4 и 5 видно, что при отсутствии отклонения от вертикального положения маятник остается в покое, при отклонении от вертикального положения маятник начинает движение, причем направление движения зависит от направления отклонения. При отклонении равным  $\pi$ , что соответствует нижнему положению равновесия, в случае нелинейной модели, остается неподвижным, в то время как в случае линеаризованной модели маятник начинает движение, что связано с тем, что линеаризация проводилась в окрестности верхней точки равновесия, а не нижней. Сравним результаты моделирования нелинейной и линеаризованной моделей. Графики различия движения приведены на рисунке 6.

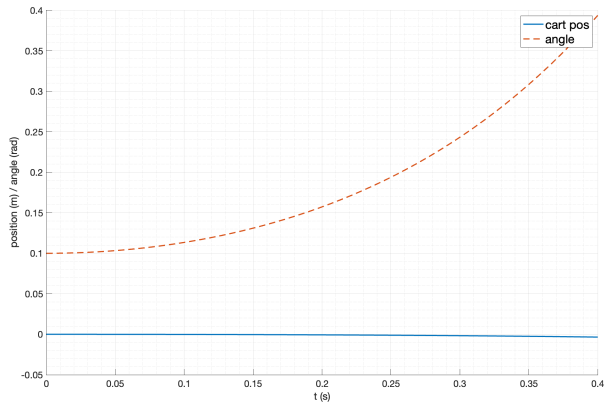
Видно, что при отклонениях  $\theta_0 = 0.1$ ,  $\theta_0 = -0.1$  и  $\theta_0 = 0.3$  различия в движении незначительны, при этом увеличиваются с увеличением модуля отклонения. При отклонении  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  различия в движении уже становятся существенными, что, опять же, связано с линеаризацией вблизи верхней точки равновесия.

Проведем моделирование системы с начальным отклонением  $\theta_0 = 0.1$  на более длительном промежутке времени. Результаты моделирования представлены на рисунке 8, 7.

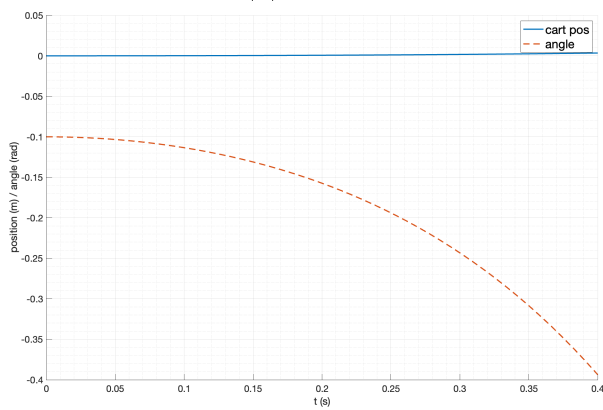
На графиках 7 и 8 видно, что в случае нелинейной модели система колебалась с затухающими колебаниями, что является ожидаемым результатом движения маятника, в то время как в случае линеаризованной модели система не является колебательной и выход системы стремится к бесконечности, это связано с тем, что линеаризованная модель способна давать корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия, а при больших отклонениях от вертикального положения.



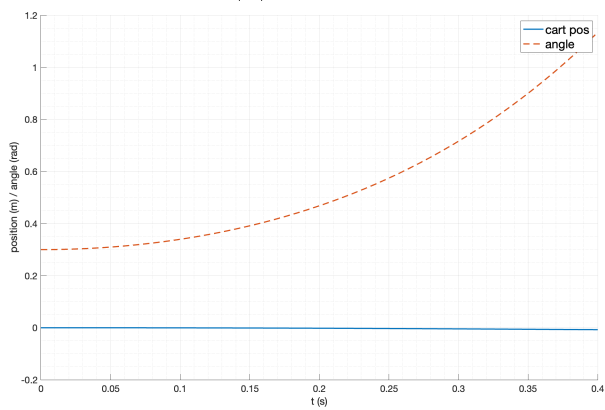
(a)  $\theta_0 = 0$



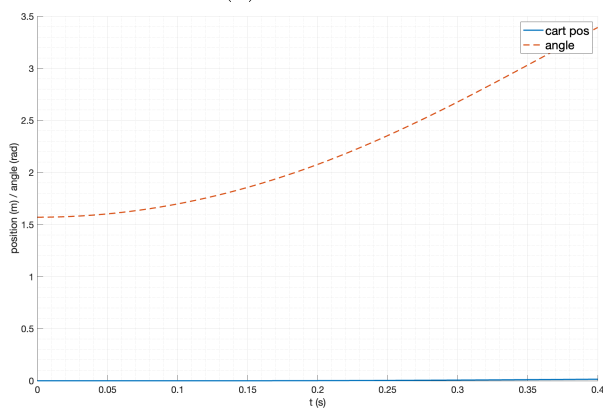
(b)  $\theta_0 = 0.1$



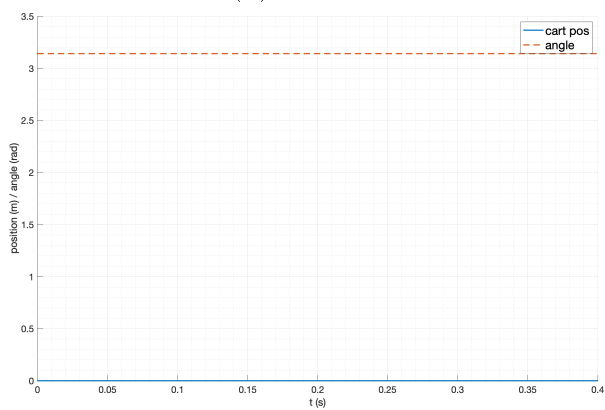
(c)  $\theta_0 = -0.1$



(d)  $\theta_0 = 0.3$

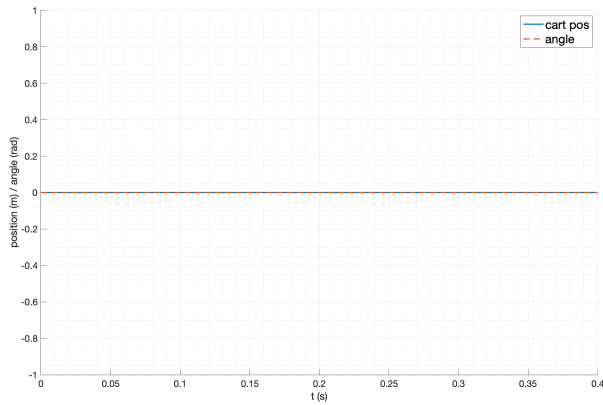


(e)  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

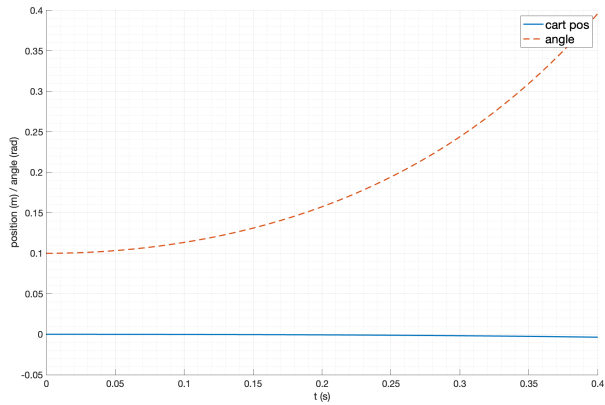


(f)  $\theta_0 = \pi$

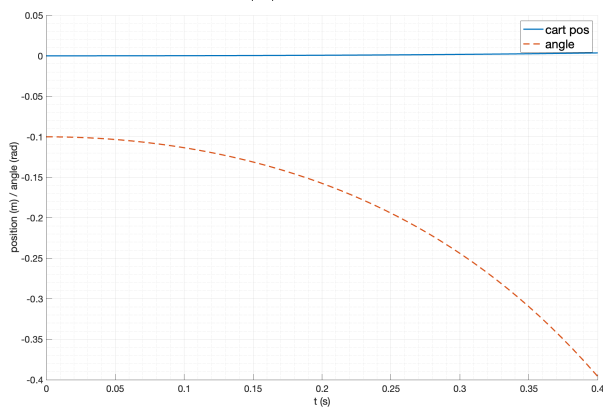
Рис. 4: Свободное движение маятника (нелинейная модель)



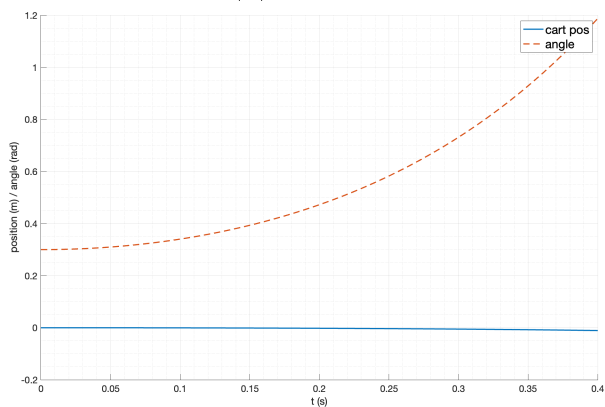
(a)  $\theta_0 = 0$



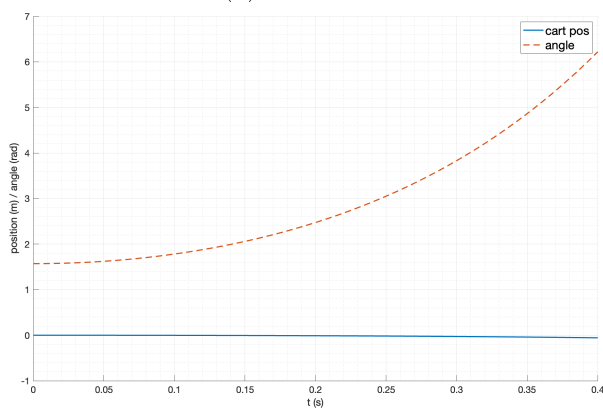
(b)  $\theta_0 = 0.1$



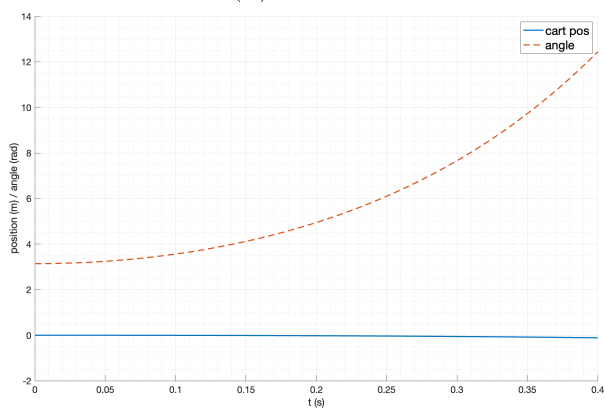
(c)  $\theta_0 = -0.1$



(d)  $\theta_0 = 0.3$

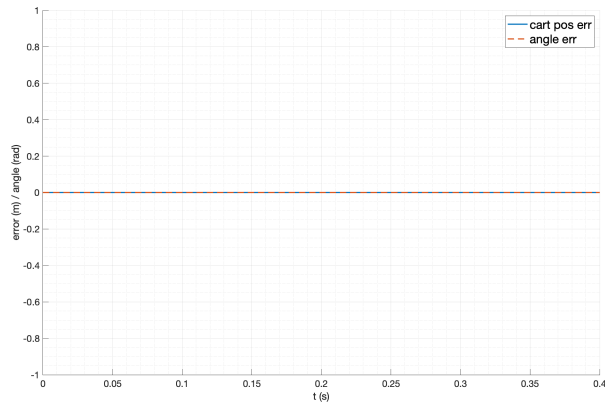


(e)  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

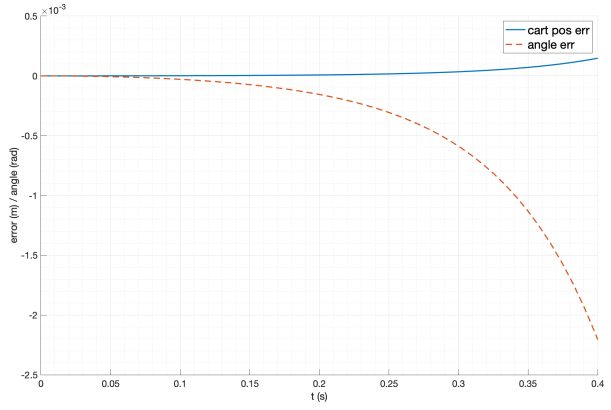


(f)  $\theta_0 = \pi$

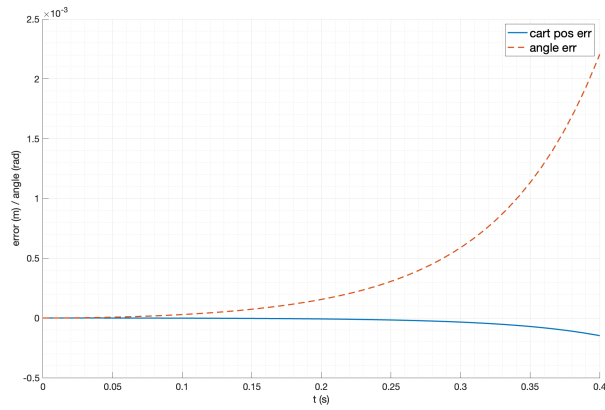
Рис. 5: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)



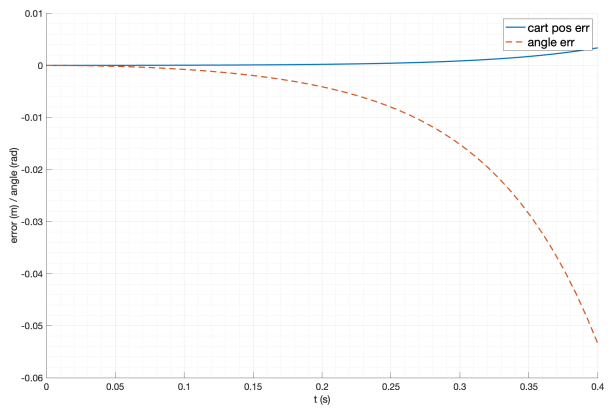
(a)  $\theta_0 = 0$



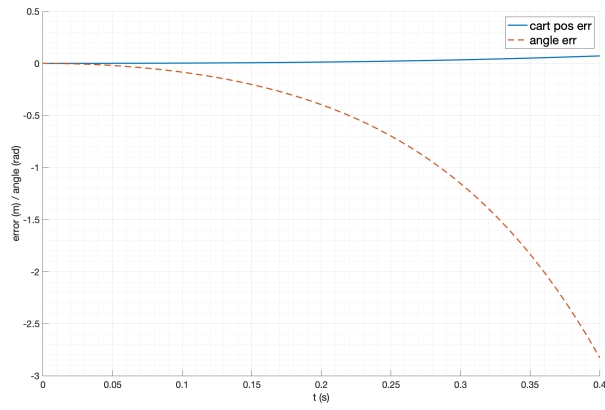
(b)  $\theta_0 = 0.1$



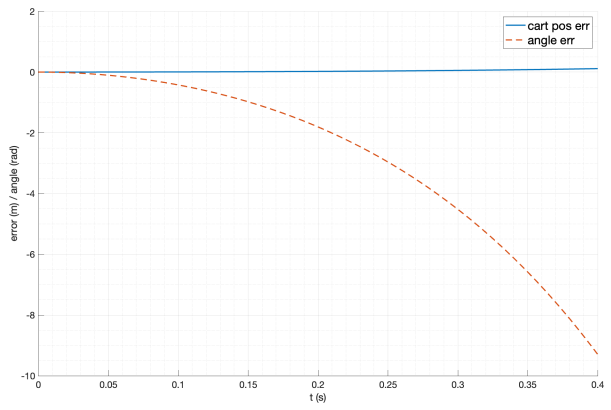
(c)  $\theta_0 = -0.1$



(d)  $\theta_0 = 0.3$



(e)  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$



(f)  $\theta_0 = \pi$

Рис. 6: Различия в движении маятника (нелинейная и линеаризованная модели)



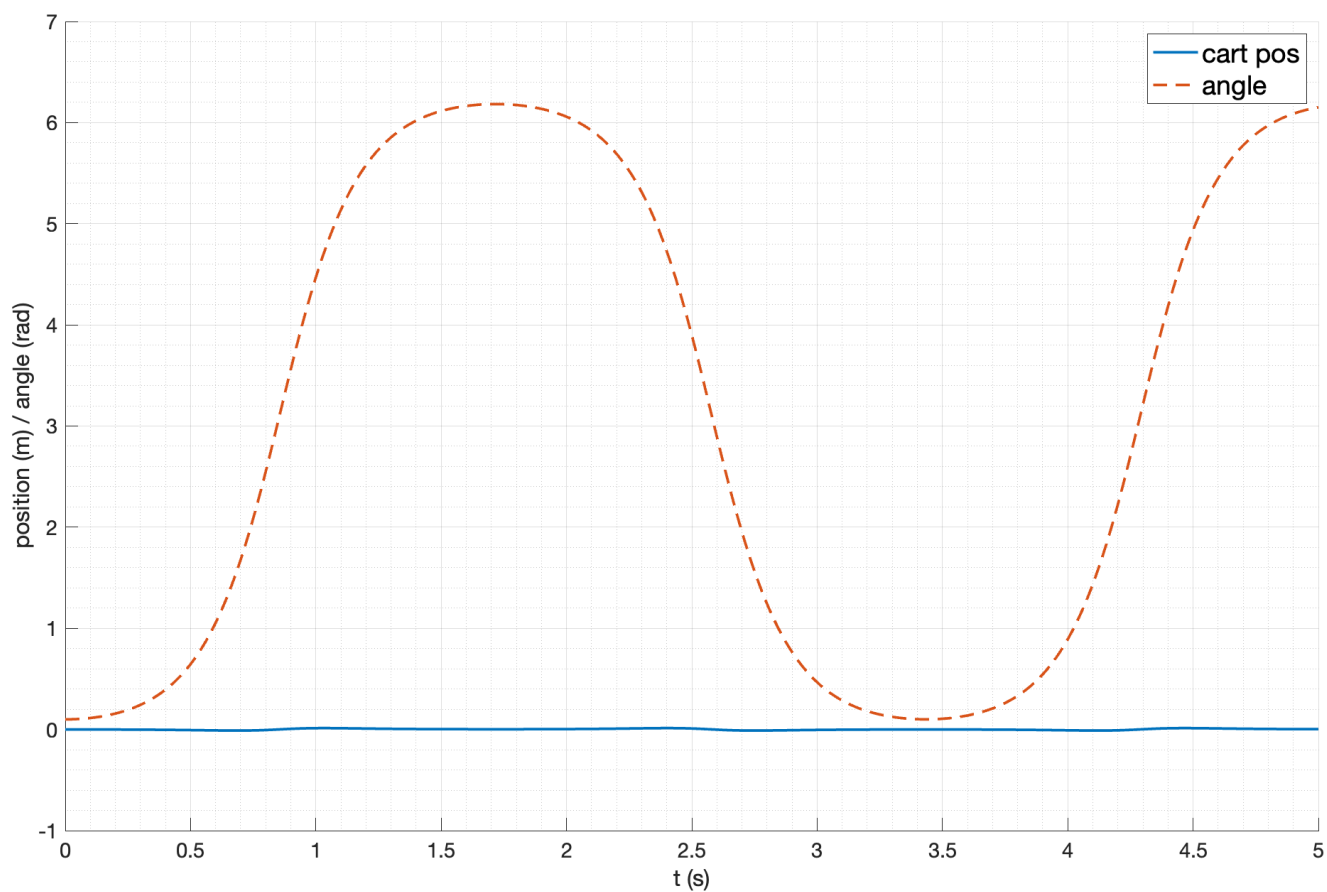


Рис. 7: Свободное движение маятника (нелинейная модель)

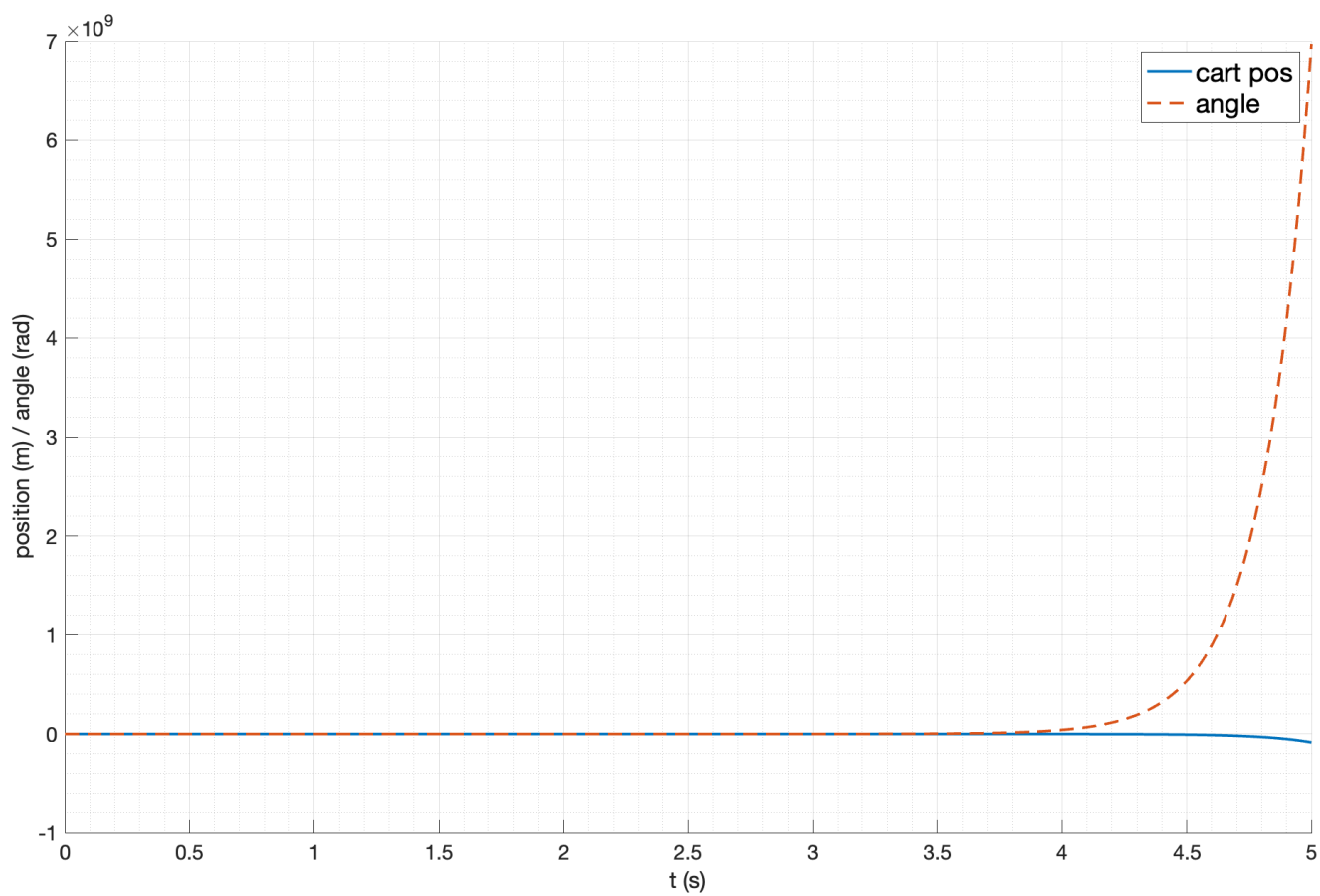


Рис. 8: Свободное движение маятника (линеаризованная модель)

## 2.4. Итоги моделирования

В ходе анализа и моделирования модели системы перевернутого маятника на тележке и ее линеаризованной модели при небольших отклонениях от вертикального положения было показано, что линейная модель является хорошим приближением нелинейной модели в окрестности верхней точки равновесия, что позволяет использовать ее для дальнейшего синтеза. Можно, изменив способ задания угла отклонения, получить линейную модель, описывающую движение маятника в окрестности нижней точки равновесия, что может быть использовано для создания модели козлового крана.

Из-за того, что линеаризованная модель дает корректные результаты только в окрестности верхней точки равновесия, асимптотическое ее поведение сильно отличается от асимптотического поведения нелинейной модели, так же как в случае существенных отклонений от вертикального положения.