



НИУ ИТМО

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2**

“Преобразования Фурье”

Выполнил:

**Александр Иванов, R3238, ЧМ 1.2**

Преподаватель:

**Перегудин А. А.**

Санкт-Петербург, 2024

# Содержание

<b>1. Преобразование Фурье</b>	<b>4</b>
<b>2. Вещественные функции</b>	<b>4</b>
2.1. Прямоугольная функция . . . . .	4
2.1.1. Графики исходных функций . . . . .	4
2.1.2. Нахождение образа функции . . . . .	6
2.1.3. Графики образов функций . . . . .	7
2.1.4. Проверка равенства Парсеваля . . . . .	9
2.1.5. Анализ результатов . . . . .	9
2.2. Треугольная функция . . . . .	10
2.2.1. Графики исходных функций . . . . .	10
2.2.2. Нахождение образа функции . . . . .	12
2.2.3. Графики образов функций . . . . .	12
2.2.4. Проверка равенства Парсеваля . . . . .	14
2.2.5. Анализ результатов . . . . .	15
2.3. Кардинальный синус . . . . .	15
2.3.1. Графики исходных функций . . . . .	15
2.3.2. Нахождение образа функции . . . . .	17
2.3.3. Графики образов функций . . . . .	17
2.3.4. Проверка равенства Парсеваля . . . . .	19
2.3.5. Анализ результатов . . . . .	20
2.4. Функция Гаусса . . . . .	20
2.4.1. Графики исходных функций . . . . .	20
2.4.2. Нахождение образа функции . . . . .	22

2.4.3.	Графики образов функций . . . . .	22
2.4.4.	Проверка равенства Парсеваля . . . . .	24
2.4.5.	Анализ результатов . . . . .	25
2.5.	Двустороннее затухание . . . . .	25
2.5.1.	Графики исходных функций . . . . .	25
2.5.2.	Нахождение образа функции . . . . .	27
2.5.3.	Графики образов функций . . . . .	27
2.5.4.	Проверка равенства Парсеваля . . . . .	29
2.5.5.	Анализ результатов . . . . .	30
<b>3.</b>	<b>Комплексная функция</b>	<b>30</b>
3.1.	Сдвинутая прямоугольная функция . . . . .	30
3.1.1.	Графики исходных функции . . . . .	30
3.1.2.	Нахождение образа функции . . . . .	32
3.1.3.	Графики образов функций . . . . .	33
3.1.4.	Проверка равенства Парсеваля . . . . .	36
3.1.5.	Анализ результатов . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Анализ аккорда</b>	<b>37</b>
4.1.	Аккорд 23 . . . . .	37
4.1.1.	Графики исходной записи . . . . .	37
4.1.2.	Фурье преобразование . . . . .	37
4.1.3.	Анализ звуков . . . . .	39

# 1. Преобразование Фурье

Рассмотрим унитарное преобразование Фурье к угловой частоте  $\omega$ :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3)$$

## 2. Вещественные функции

### 2.1. Прямоугольная функция

Рассмотрим семейство функций

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \quad (4)$$

#### 2.1.1. Графики исходных функций

Графики данной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 1, 2 и 3.

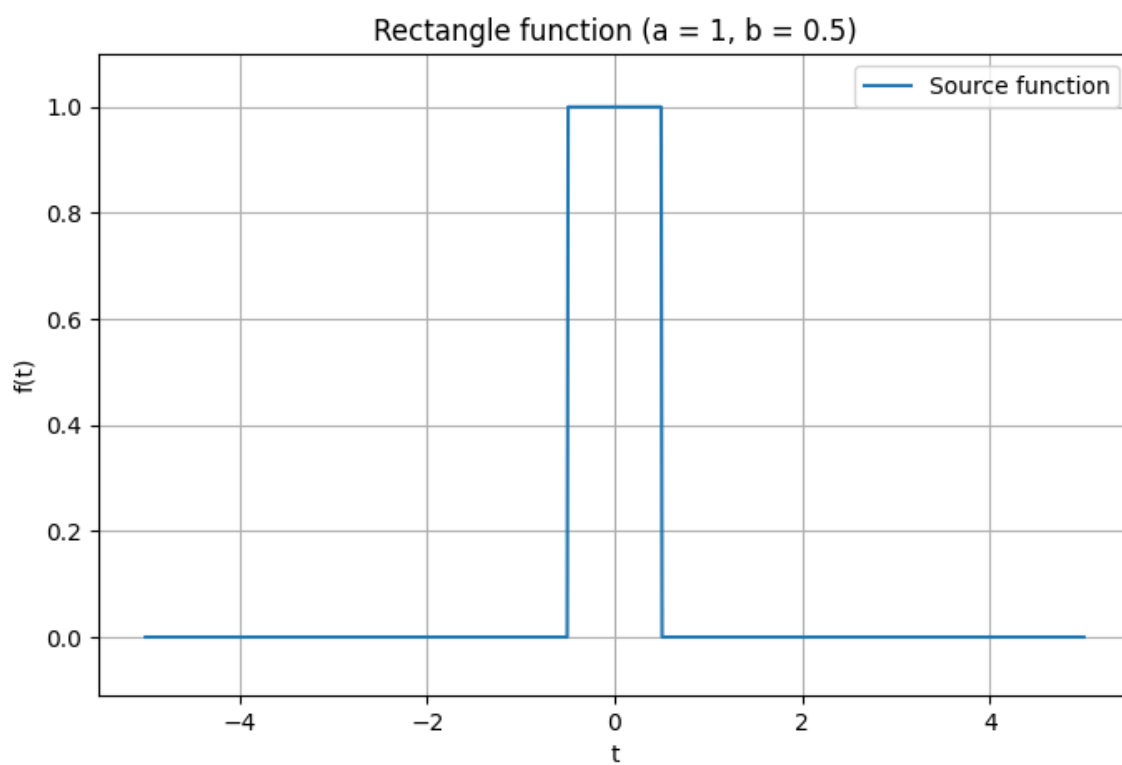


Рис. 1: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

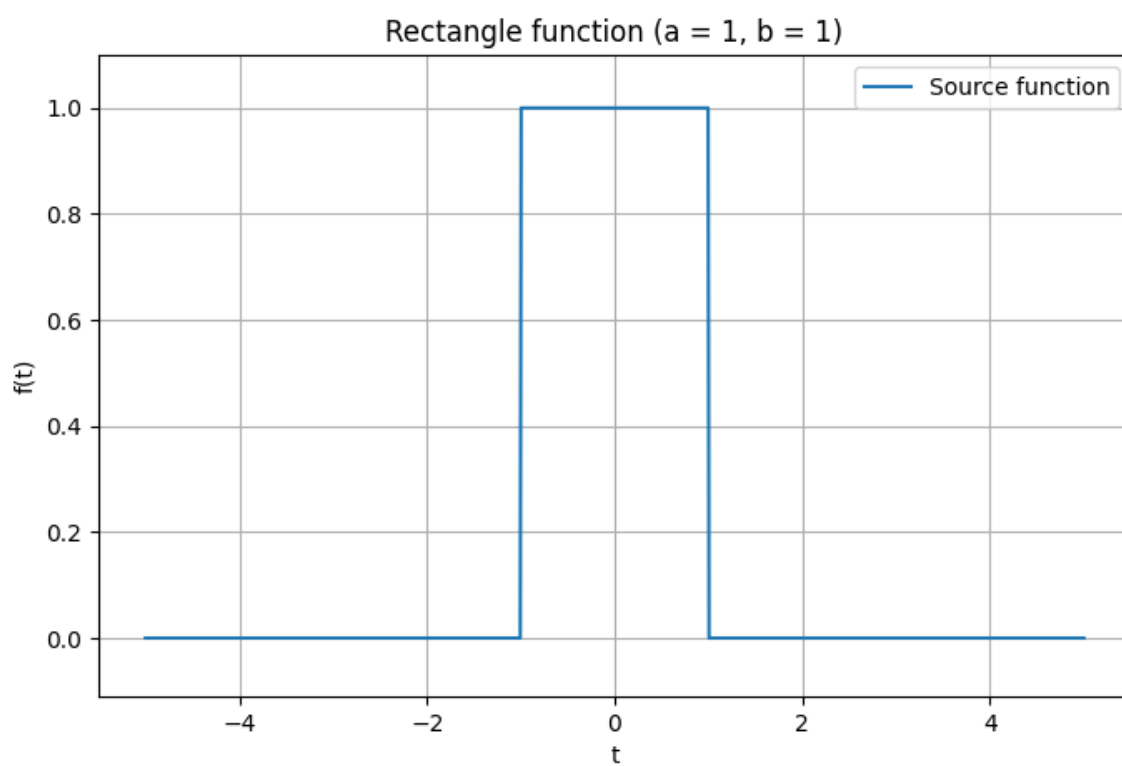


Рис. 2: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

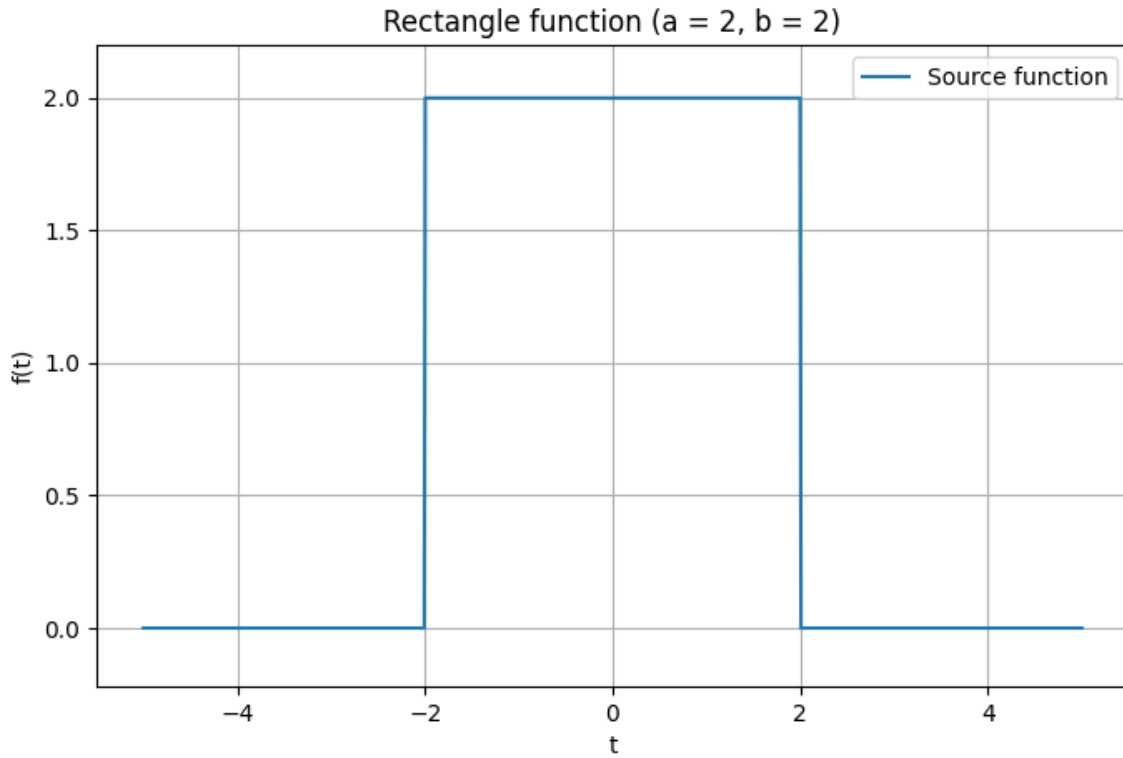


Рис. 3: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

### 2.1.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $f(t)$  задается следующим выражением:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega \sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \Big|_{-b}^b = \frac{a(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b})}{\omega i \sqrt{2\pi}} \quad (5)$$

Применив формулу Эйлера, получим:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega b) \quad (6)$$

для  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ :

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega/2) \quad (7)$$

для  $a = 1$ ,  $b = 1$ :

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega) \quad (8)$$

для  $a = 2$ ,  $b = 2$ :

$$\hat{f}_3(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(2\omega) \quad (9)$$

### 2.1.3. Графики образов функций

Графики образов прямоугольной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 4, 5 и 6.

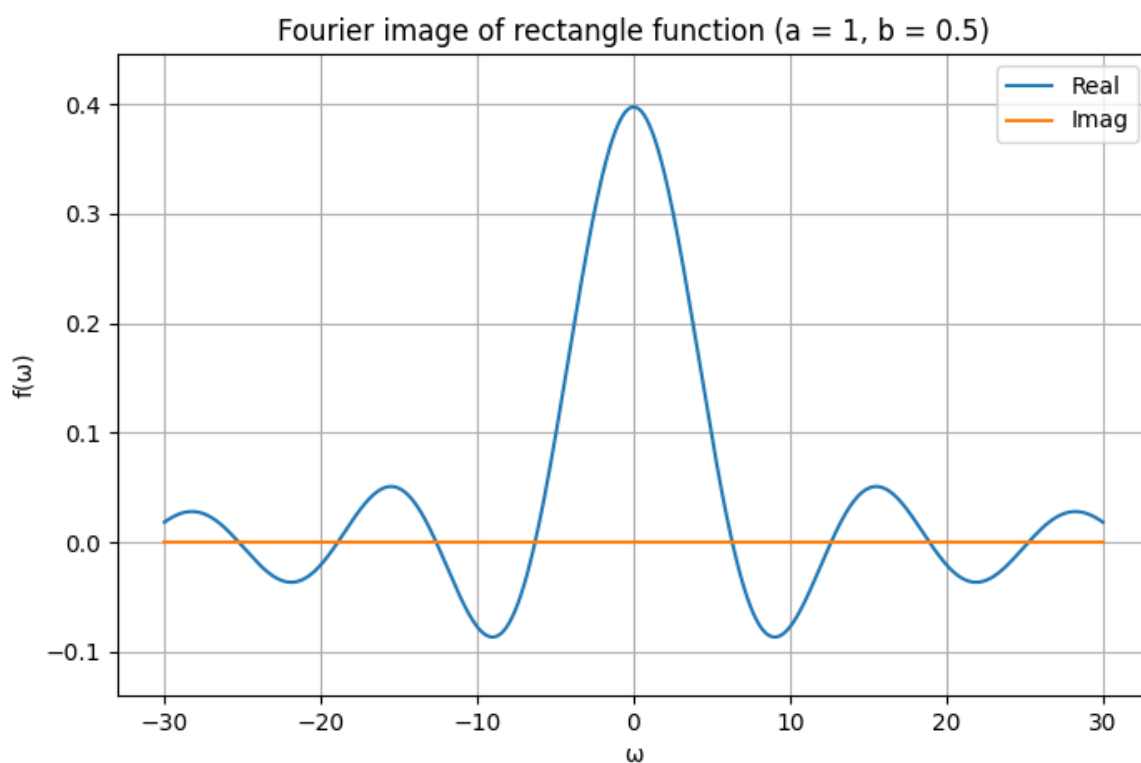


Рис. 4: График преобразования Фурье  $\hat{f}_1(\omega)$  прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

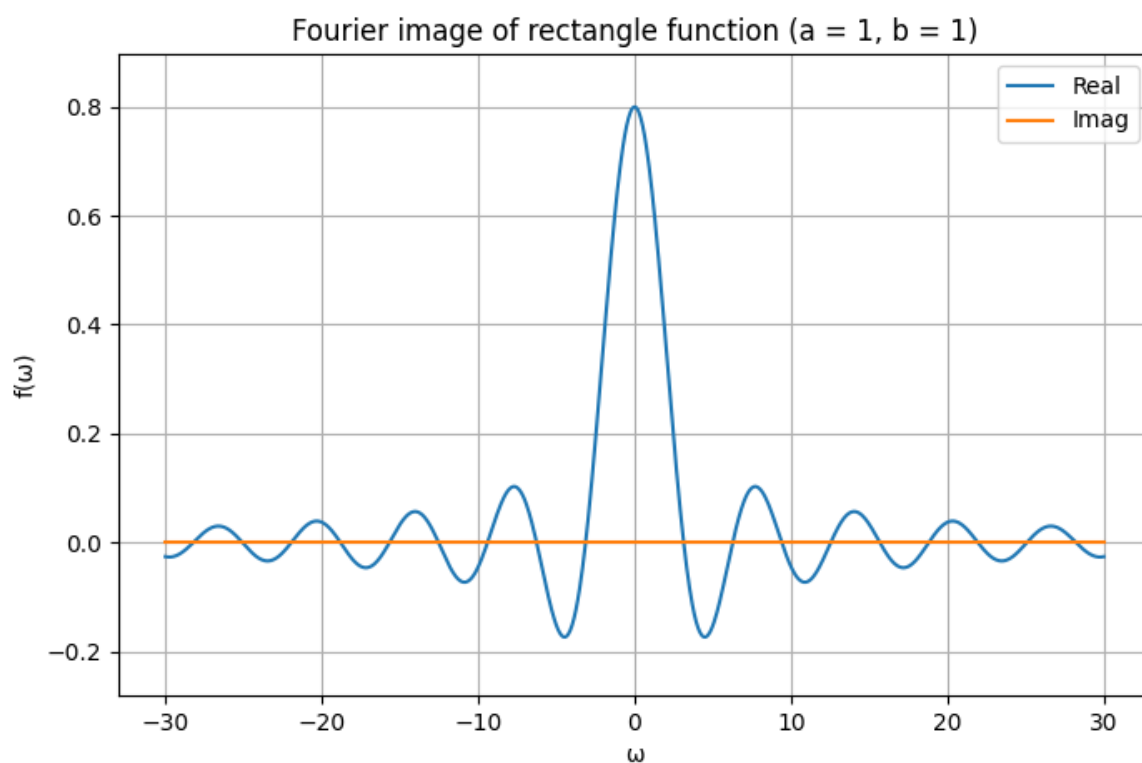


Рис. 5: График преобразования Фурье  $\hat{f}_2(\omega)$  прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 1$

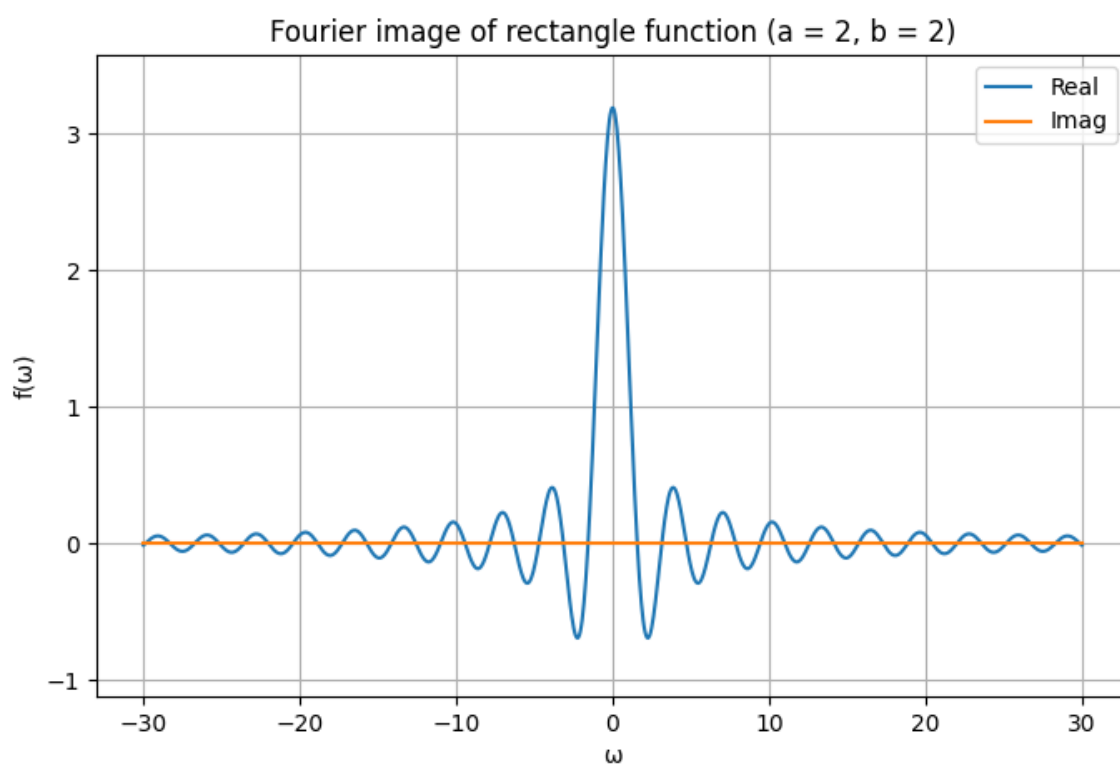


Рис. 6: График преобразования Фурье  $\hat{f}_3(\omega)$  прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$



#### 2.1.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля (см. формулу (3)). Для этого воспользуемся функцией `parseval_check`.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_1(\omega) ^2$
1.00010	0.99376

Таблица 1: Результаты проверки равенства Парсеваля для прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_2(\omega) ^2$
2.00020	1.99386

Таблица 2: Результаты проверки равенства Парсеваля для прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 1$

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_3(\omega) ^2$
16.00160	15.97619

Таблица 3: Результаты проверки равенства Парсеваля для прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

Видим, что во всех случаях значения почти не отличаются друг от друга. Различие, по большей части, обусловлено тем, что в программе нельзя найти интеграл по бесконечности, поэтому просто берется достаточно большой интервал интегрирования.

#### 2.1.5. Анализ результатов

Влияние параметров  $a$  и  $b$  на графики прямоугольной функции и ее образа можно понять из соответствующих формул (см. формулы (4) и (6)). В исходной функции  $f(t)$  параметр  $a$  отвечает за высоту прямоугольника, а  $b$  за его ширину. В образе  $\hat{f}(\omega)$  параметр  $a$  отвечает за амплитуду колебаний, а  $b$  за частоту колебаний.

Принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что нельзя одновременно точно определить положение и импульс частицы. В данном случае, чем меньше ширина прямоугольника, тем больше ширина его образа, и наоборот.

## 2.2. Треугольная функция

Рассмотрим семейство функций

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases} \quad (10)$$

### 2.2.1. Графики исходных функций

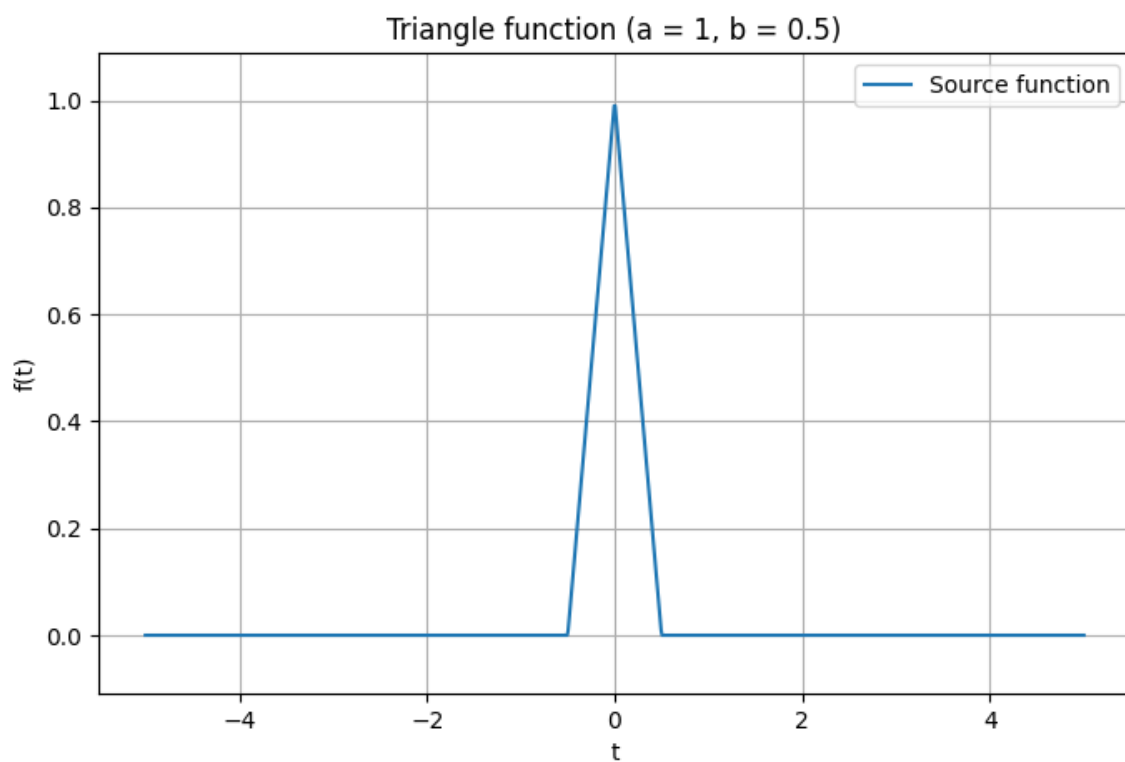


Рис. 7: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

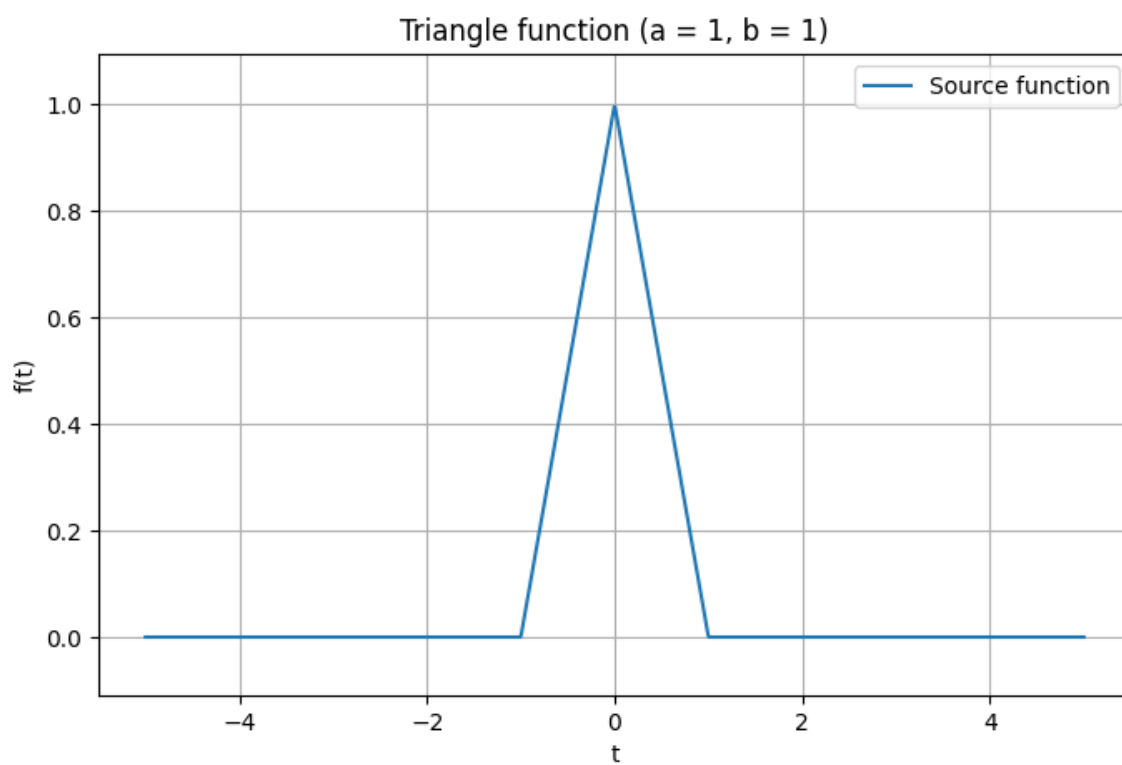


Рис. 8: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

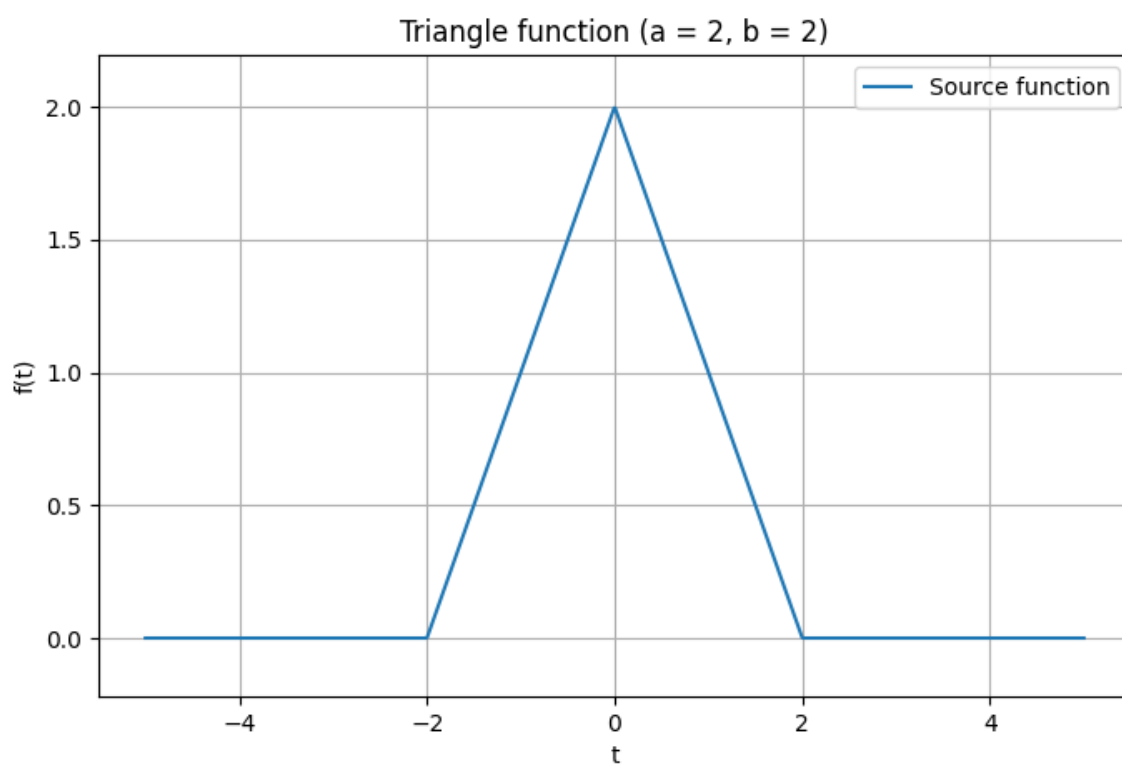


Рис. 9: График прямоугольной функции  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

### 2.2.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $f(t)$  задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b (a - |at/b|) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-b}^0 \left(a + \frac{at}{b}\right) e^{-i\omega t} dt + \int_0^b \left(a - \frac{at}{b}\right) e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a(ib\omega - e^{ib\omega} + 1)}{b\omega^2} + \frac{a(-ib\omega - e^{-ib\omega} + 1)}{b\omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a(-e^{ib\omega} - e^{-ib\omega} + 2)}{b\omega^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4a \sin^2(\frac{b\omega}{2})}{b\omega^2} = \frac{4a \sin^2(\frac{b\omega}{2})}{\sqrt{2\pi} b\omega^2} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{b\omega}{2}\right) \quad (11)\end{aligned}$$

для  $a = 1, b = 0.5$ :

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (12)$$

для  $a = 1, b = 1$ :

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (13)$$

для  $a = 2, b = 2$ :

$$\hat{f}_3(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2(\omega) \quad (14)$$

### 2.2.3. Графики образов функций

Графики образов треугольной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 10, 11 и 12.

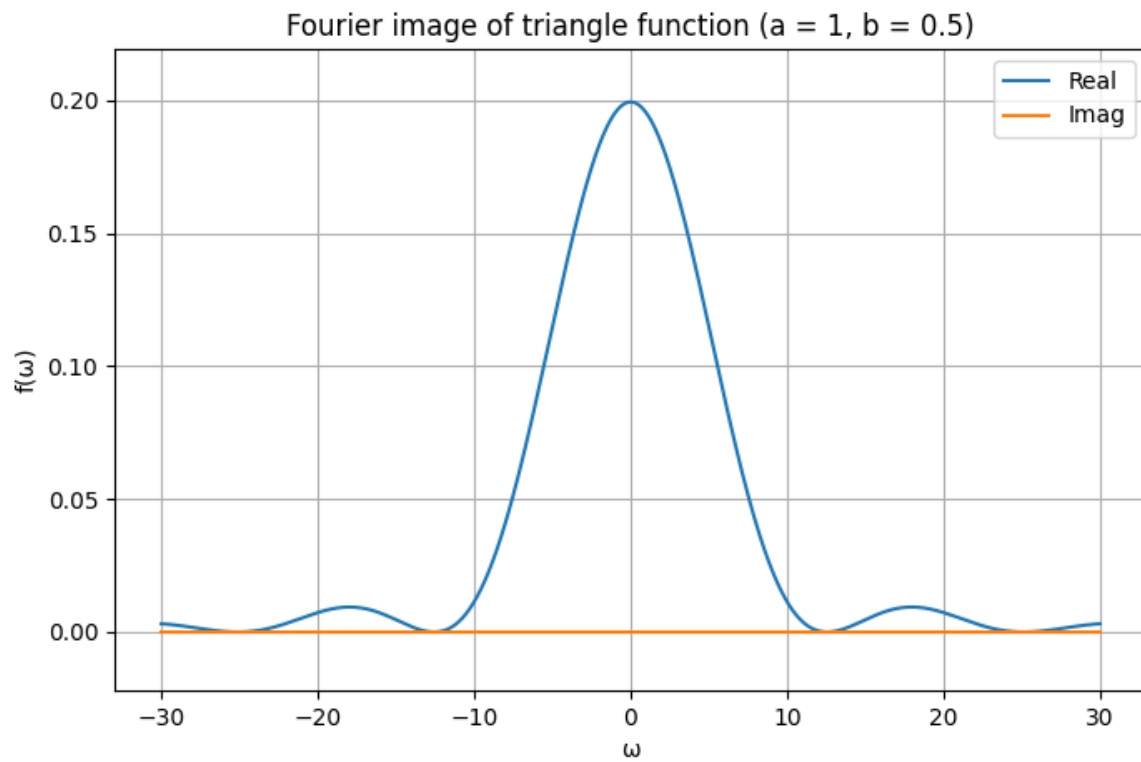


Рис. 10: График Фурье образа треугольной функции  $\hat{f}(\omega)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

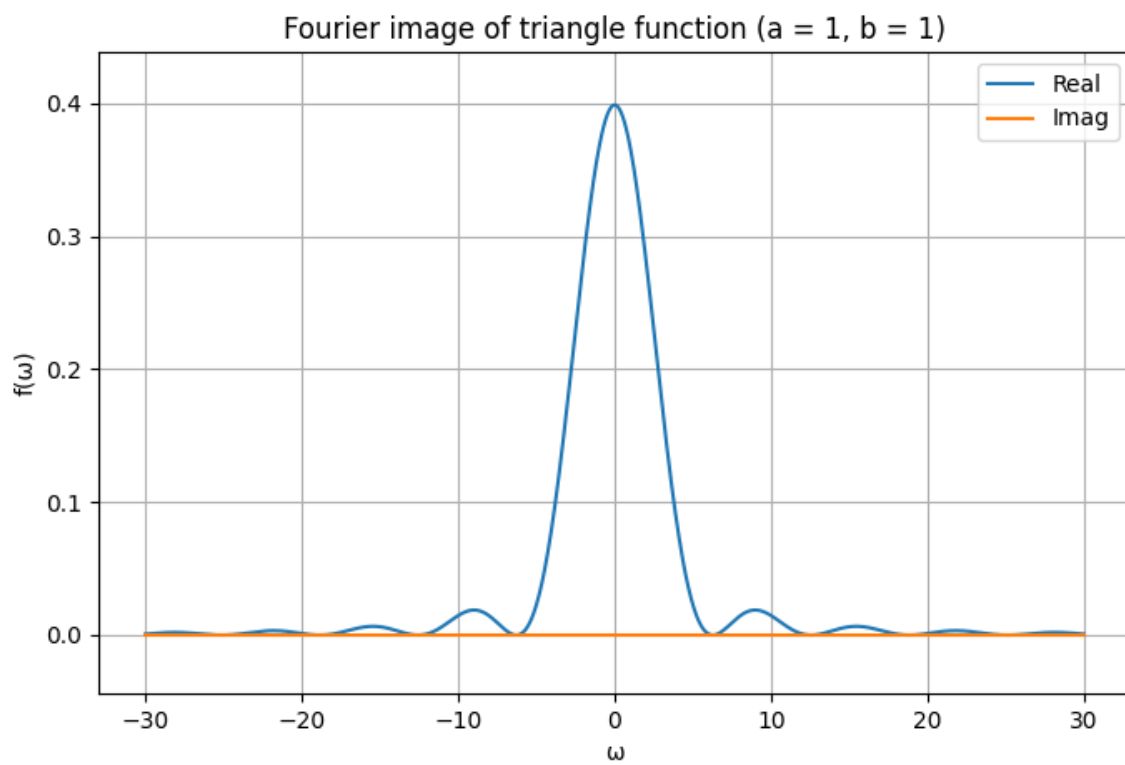


Рис. 11: График Фурье образа треугольной функции  $\hat{f}(\omega)$  при  $a = 1$ ,  $b = 1$

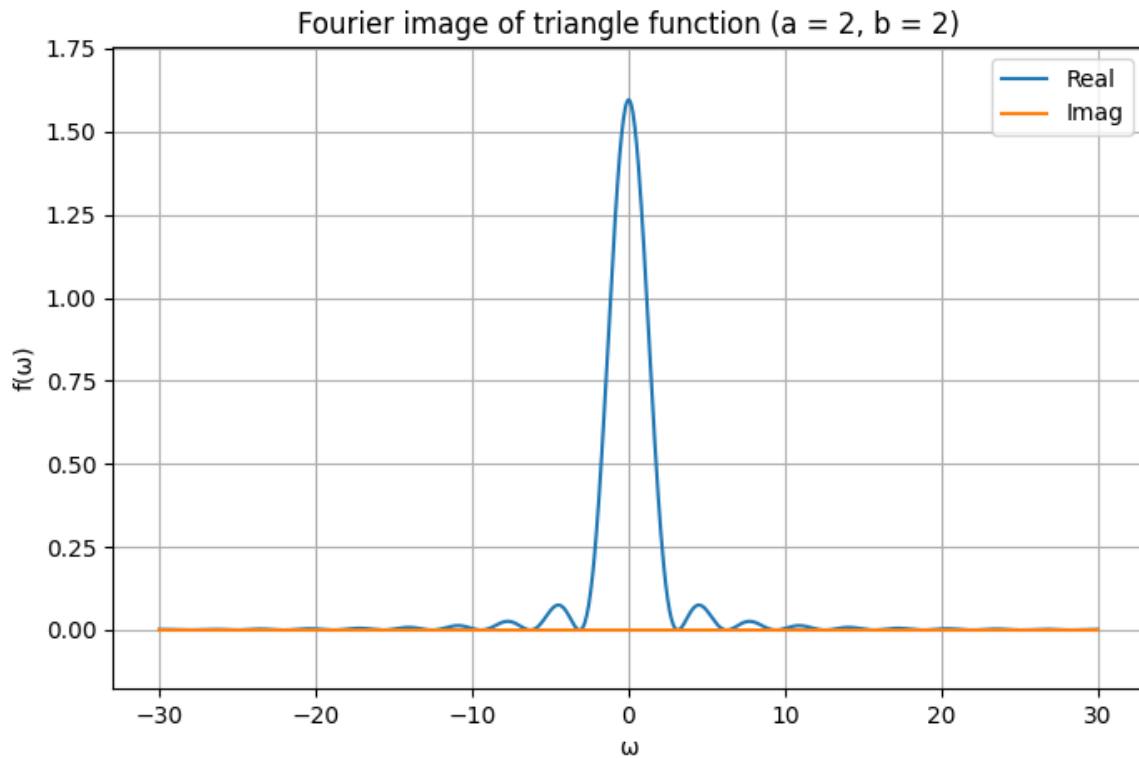


Рис. 12: График Фурье образа треугольной функции  $\hat{f}(\omega)$  при  $a = 2, b = 2$

#### 2.2.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля (см. формулу (3)). Для этого воспользуемся функцией `parseval_check`.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_1(\omega) ^2$
0.3333	0.3333

Таблица 4: Результаты проверки равенства Парсеваля для треугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_2(\omega) ^2$
0.6666	0.6666

Таблица 5: Результаты проверки равенства Парсеваля для треугольной функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

Видим, что во всех случаях равенство Парсеваля выполняется с высокой точностью.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_3(\omega) ^2$
5.3333	5.3333

Таблица 6: Результаты проверки равенства Парсеваля для треугольной функции  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

### 2.2.5. Анализ результатов

Влияние параметров  $a$  и  $b$  на исходную функцию и ее Фурье образ определяются из формулы (10) и выражения для Фурье образа (11). Параметр  $a$  определяет высоту треугольной функции, а параметр  $b$  — ширину основания. В образе функции видно, что при увеличении параметра  $a$  амплитуда образа увеличивается, а при увеличении параметров  $a$  и  $b$  амплитуда увеличивается, при увеличении параметра  $b$  увеличивается частота.

Принцип неопределенности, как и с прошлым случае, можно наблюдать как уменьшение ширины образа при увеличении основания треугольника.

## 2.3. Кардинальный синус

Рассмотрим семейство функций

$$f(t) = a \operatorname{sinc}(bt) \quad (15)$$

### 2.3.1. Графики исходных функций

Графики данной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 13, 14 и 15.

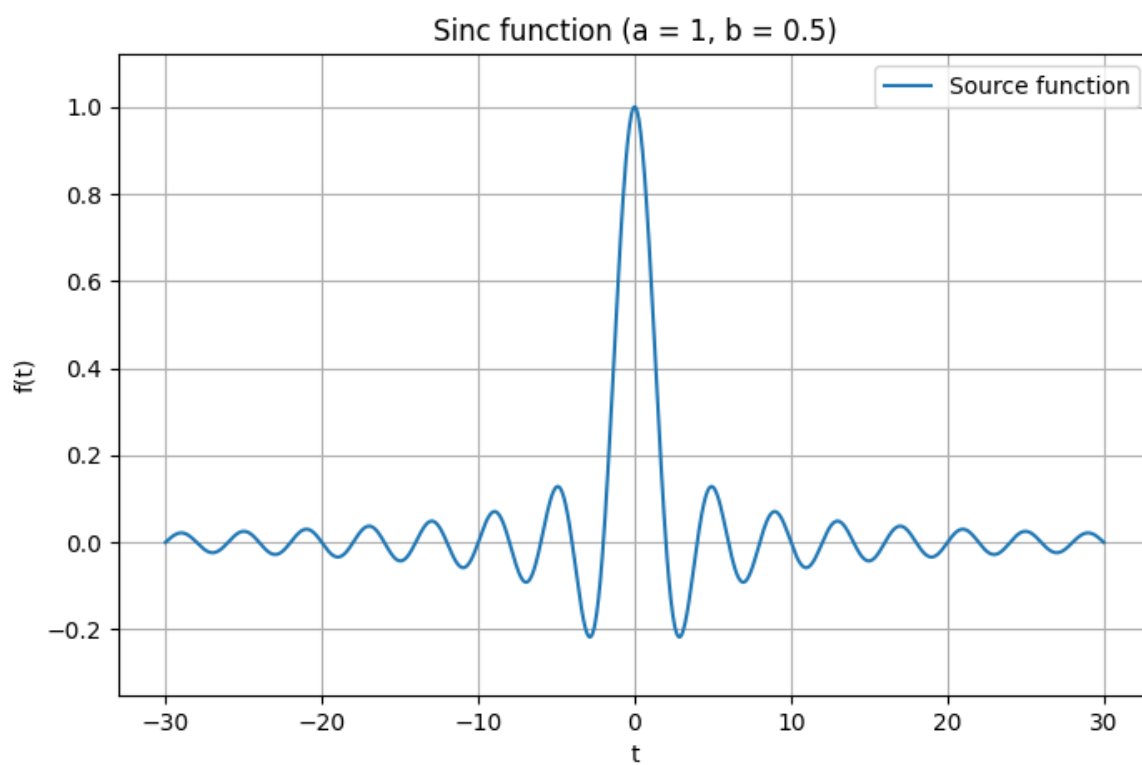


Рис. 13: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

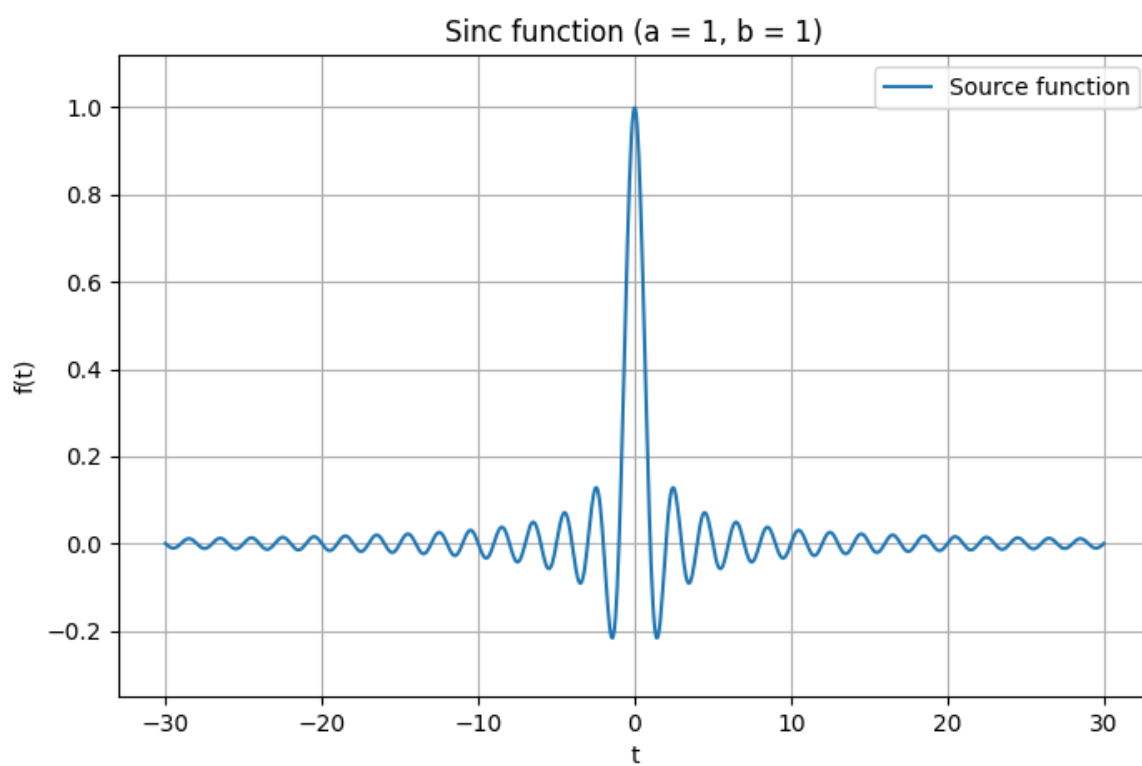


Рис. 14: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$



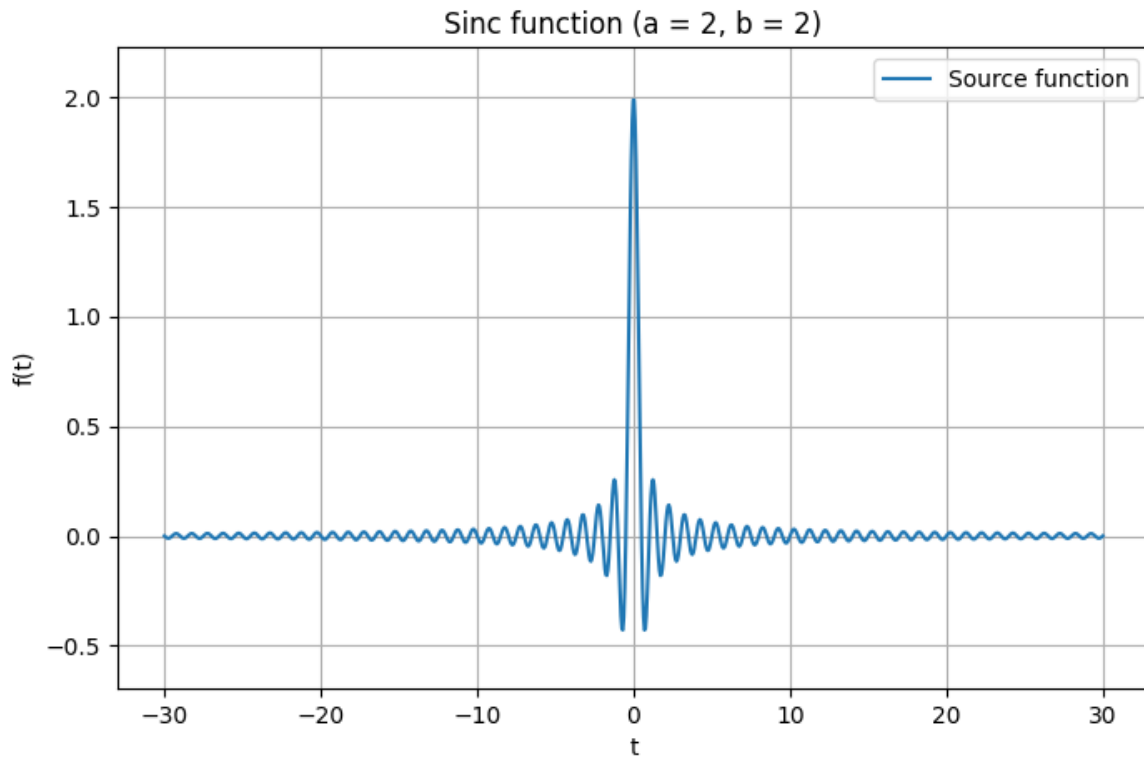


Рис. 15: График функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

### 2.3.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $f(t)$  задается следующим выражением:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}(bt) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(bt) e^{-i\omega t} dt =$$

$$\frac{\pi a}{\sqrt{2\pi}|b|} \cdot \begin{cases} 0, & \frac{b^2}{\omega^2} \leq 1 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

### 2.3.3. Графики образов функций

Графики образов функции (15) при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 16, 17 и 18.

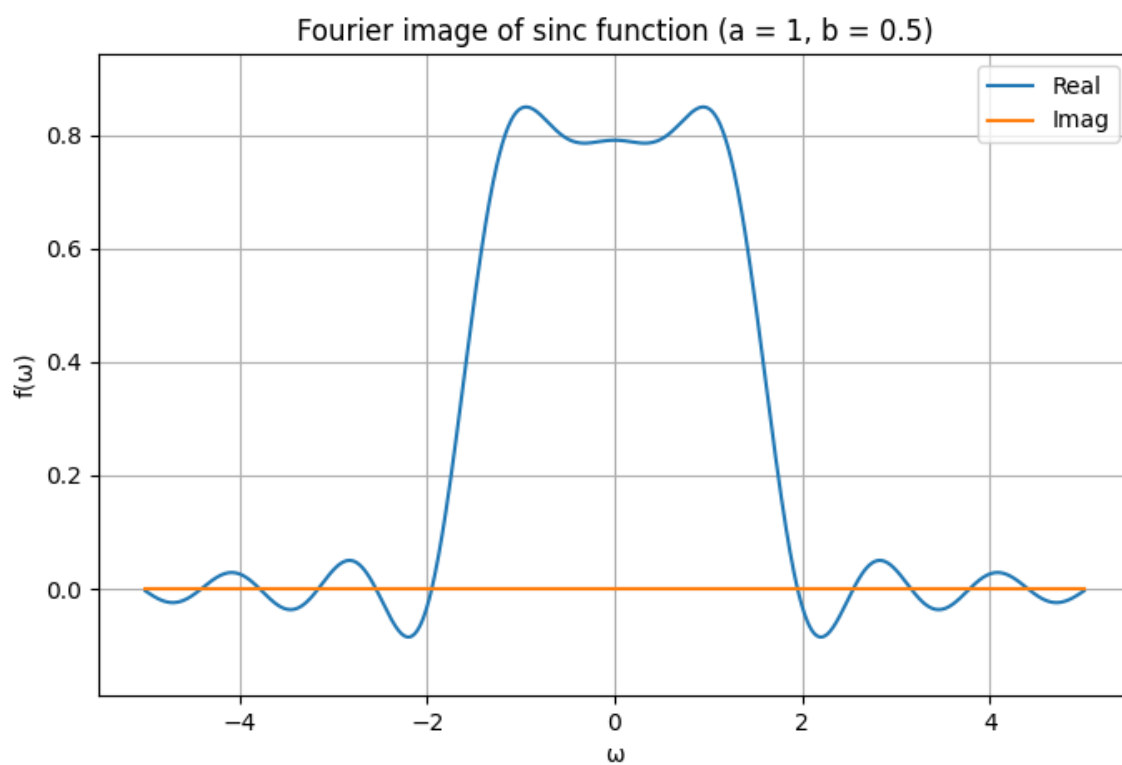


Рис. 16: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

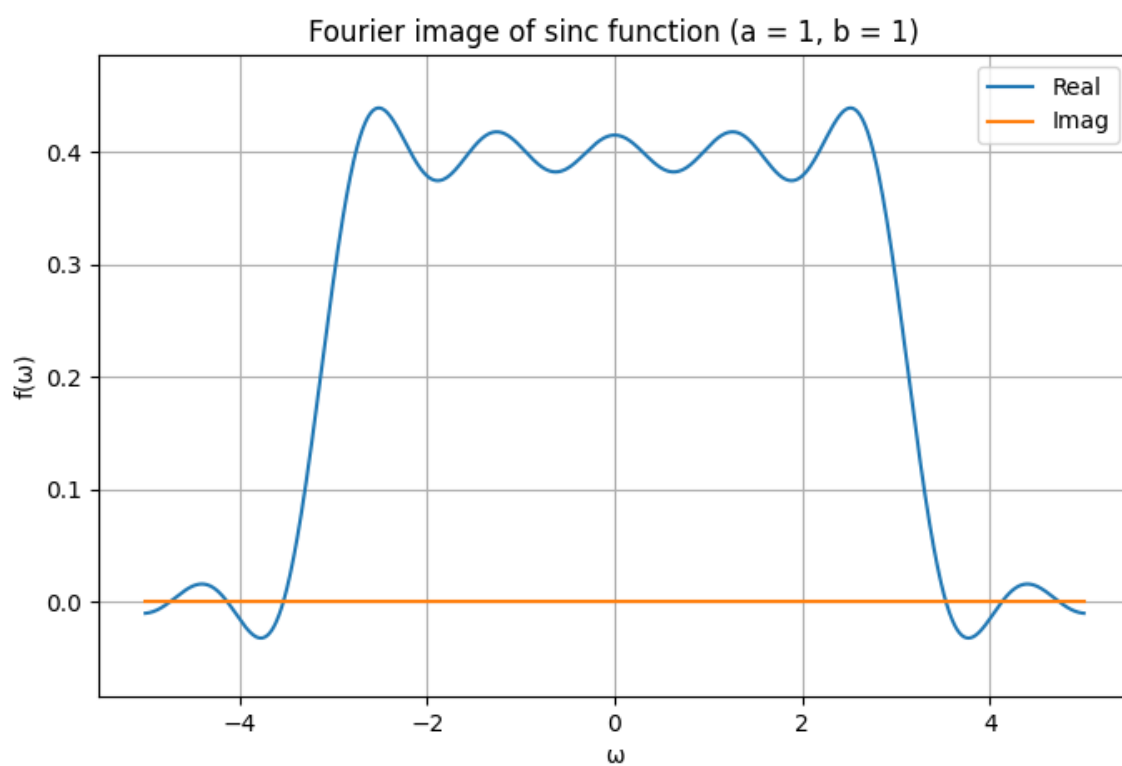


Рис. 17: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

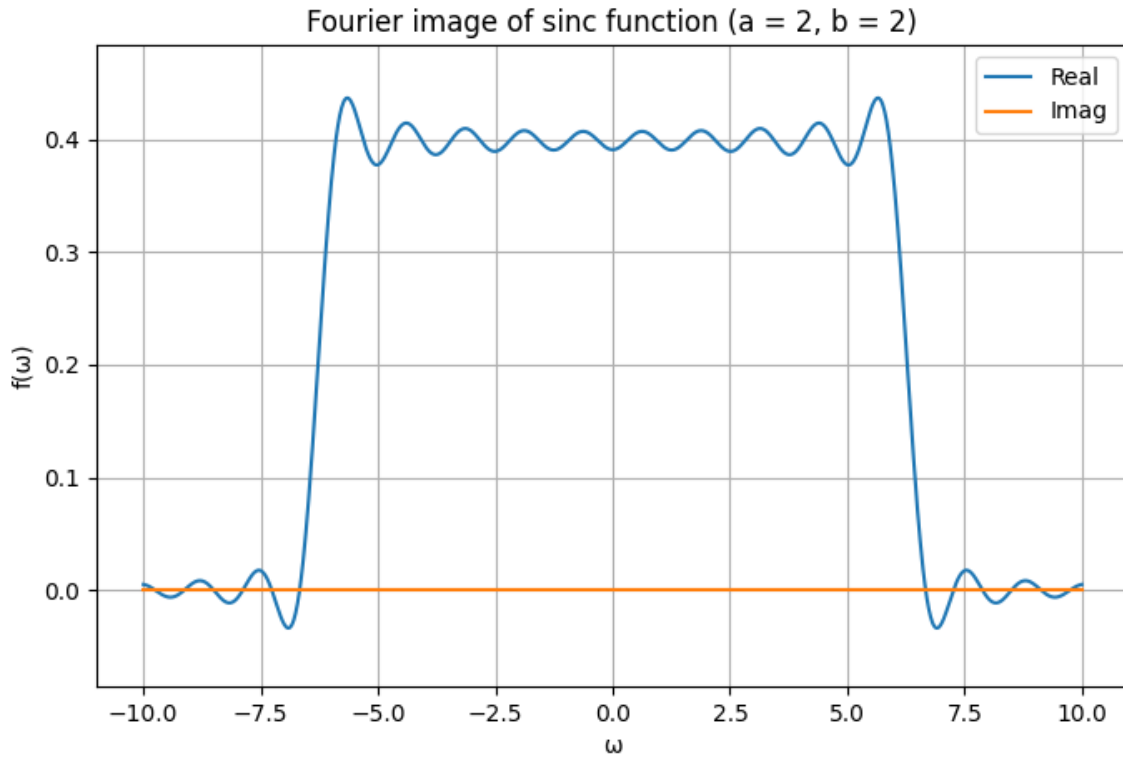


Рис. 18: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

#### 2.3.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля (см. формулу (3)). Для этого воспользуемся функцией `parseval_check`.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_1(\omega) ^2$
1.9959	1.9957

Таблица 7: Результаты проверки равенства Парсеваля для кардинального синуса  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_2(\omega) ^2$
0.9989	0.9982

Таблица 8: Результаты проверки равенства Парсеваля для кардинального синуса  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

Видим, что во всех случаях равенство Парсеваля выполняется с хорошей точностью.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_3(\omega) ^2$
1.9989	1.9996

Таблица 9: Результаты проверки равенства Парсеваля для кардинального синуса  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

### 2.3.5. Анализ результатов

Коэффициент  $a$  влияет на амплитуду функции, а коэффициент  $b$  влияет на частоту колебаний. При увеличении  $a$  амплитуда увеличивается, при увеличении  $b$  частота увеличивается. Видим, что график образа функции похож на график квадратичной функции, это связано с тем, что образ квадратичной функции как раз является кардинальным синусом, а значит, что образ кардинального синуса является квадратичной функцией.

Принцип неопределенности проявляется здесь ровно так же, как и в случае с квадратичной функцией. При уменьшении ширины кардинального синуса увеличивается ширина его образа.

## 2.4. Функция Гаусса

Рассмотрим семейство функций

$$f(t) = ae^{-bt^2} \quad (17)$$

### 2.4.1. Графики исходных функций

Графики данной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 19, 20 и 21.

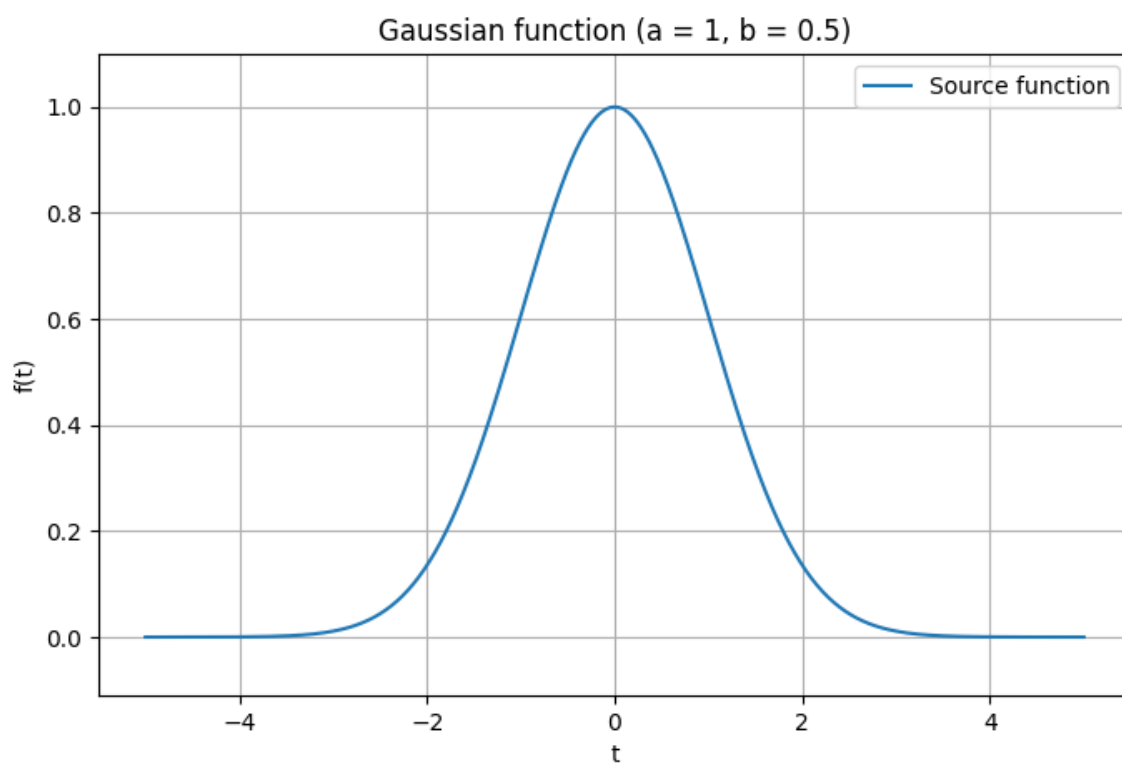


Рис. 19: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

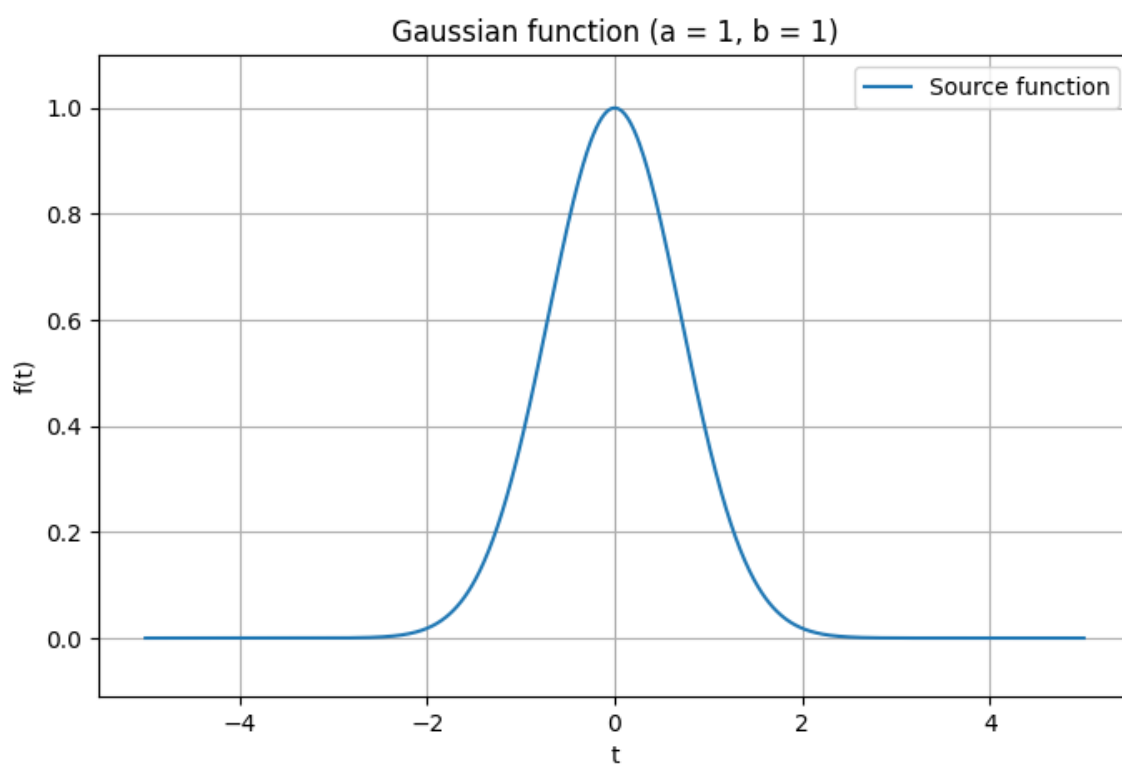


Рис. 20: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

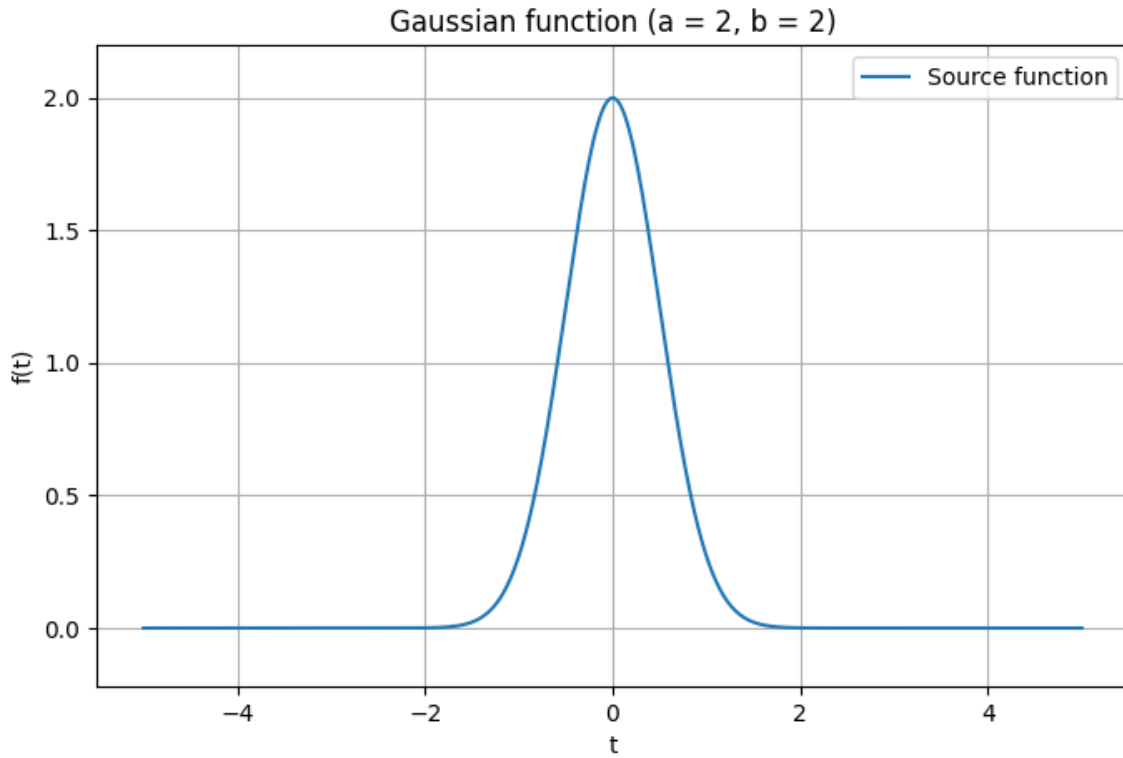


Рис. 21: График функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

#### 2.4.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $f(t)$  задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(bt+i\omega)} dt = \frac{ae^{-\frac{\omega^2}{4b}}}{\sqrt{2b}} \quad (18) \end{aligned}$$

#### 2.4.3. Графики образов функций

Графики образов функции (17) при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 22, 23 и 24.

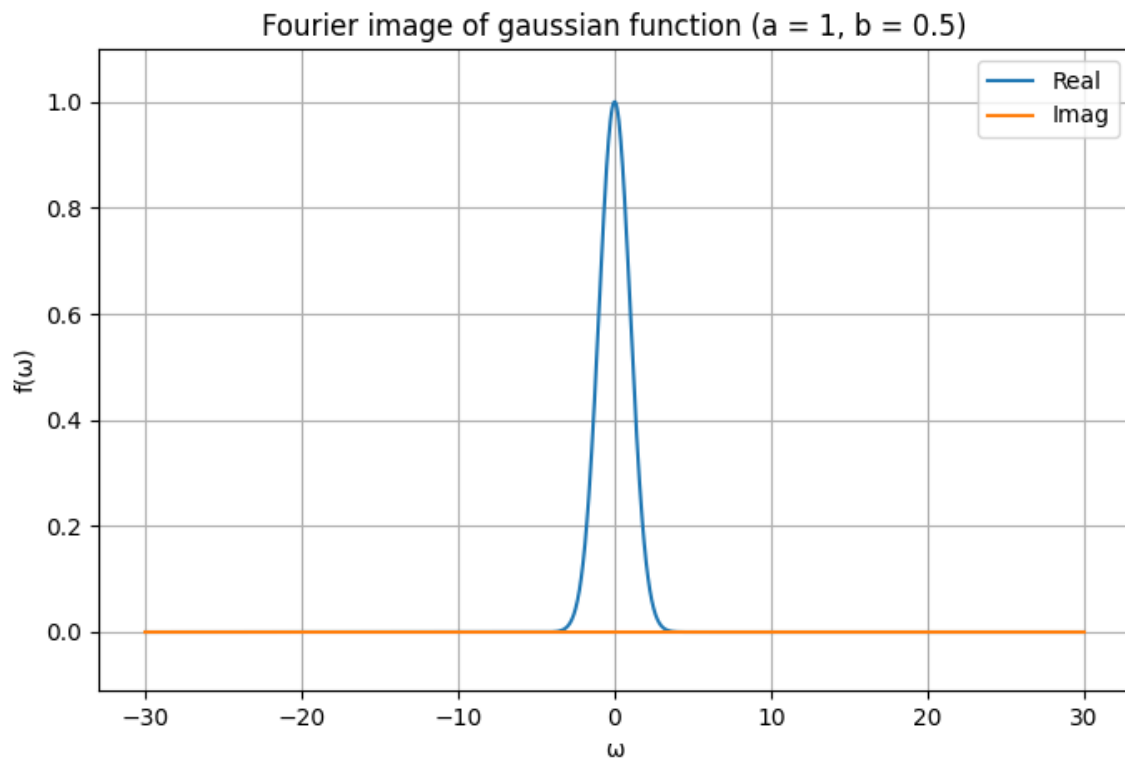


Рис. 22: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

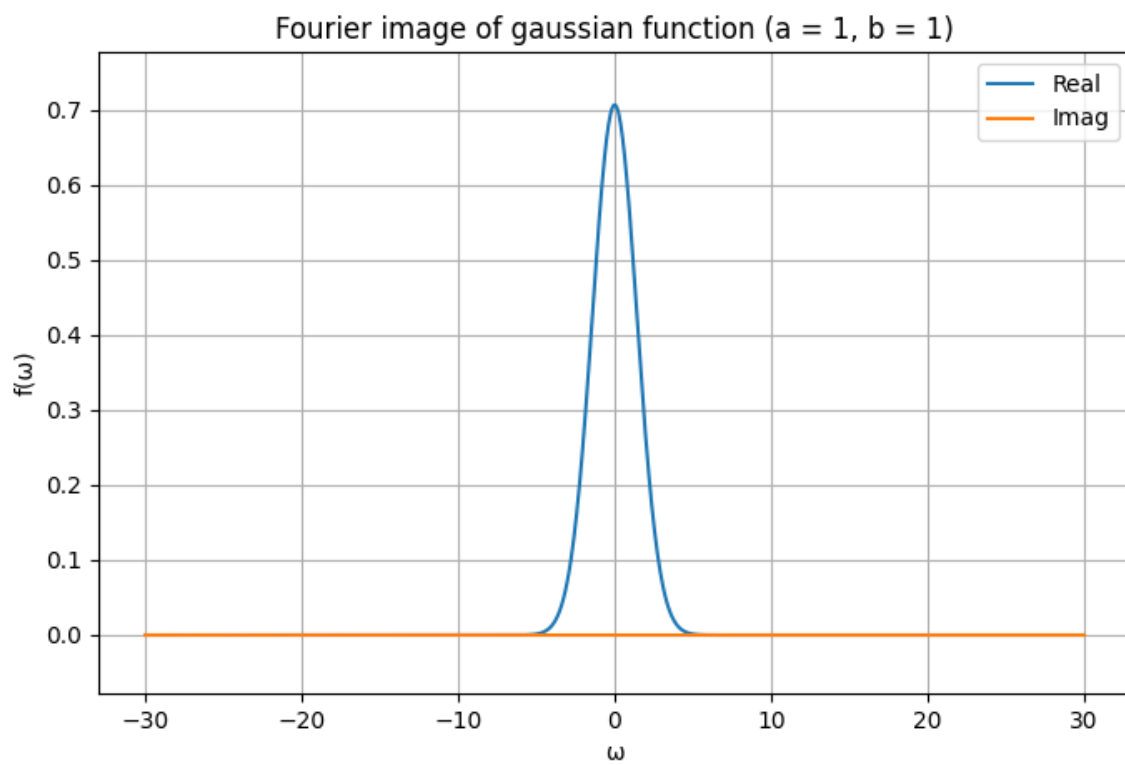


Рис. 23: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 1$

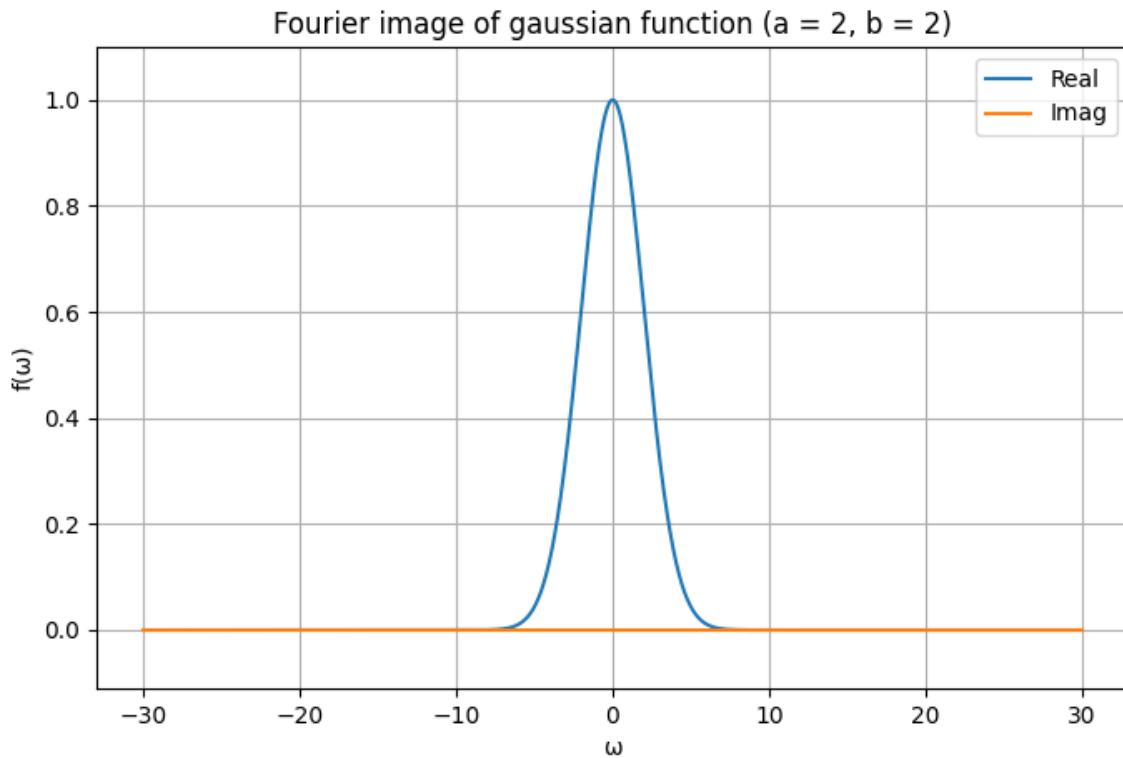


Рис. 24: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

#### 2.4.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим выполнение равенства Парсеваля для функции (17) при  $a = 1$ ,  $b = 1$ :

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_1(\omega) ^2$
1.7724	1.7724

Таблица 10: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции Гаусса  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$

Видим, что равенство Парсеваля выполняется для всех значений  $a$  и  $b$  с точностью до способа вычисления интегралов.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_2(\omega) ^2$
1.2533	1.2533

Таблица 11: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции Гаусса  $f(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 1$



$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_3(\omega) ^2$
3.5449	3.5449

Таблица 12: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции Гаусса  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

#### 2.4.5. Анализ результатов

Влияние параметров  $a$  и  $b$  на функцию Гаусса можно понять по формулам (17) и (1). Параметр  $a$  отвечает за амплитуду функции, а параметр  $b$  за ширину исходной функции. При увеличении  $a$  амплитуда функции увеличивается, при увеличении  $b$  функция становится уже. Эти выводы подтверждаются графиками исходной функции и ее образа.

Данная функция является единственной из рассмотренных, у которой образ может быть в точности равен исходной функции.

$$ae^{-bt^2} = \frac{ae^{-\frac{\omega^2}{4b}}}{\sqrt{2b}} \quad (19)$$

Решив это уравнение, получим корни  $a$  — любое,  $b = \frac{1}{2}$ . Таким образом, при данных параметрах образ функции Гаусса будет равен исходной функции.

### 2.5. Двустороннее затухание

Рассмотрим семейство функций

$$f(t) = ae^{-b|t|} \quad (20)$$

#### 2.5.1. Графики исходных функций

Графики данной функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 25, 26 и 27.

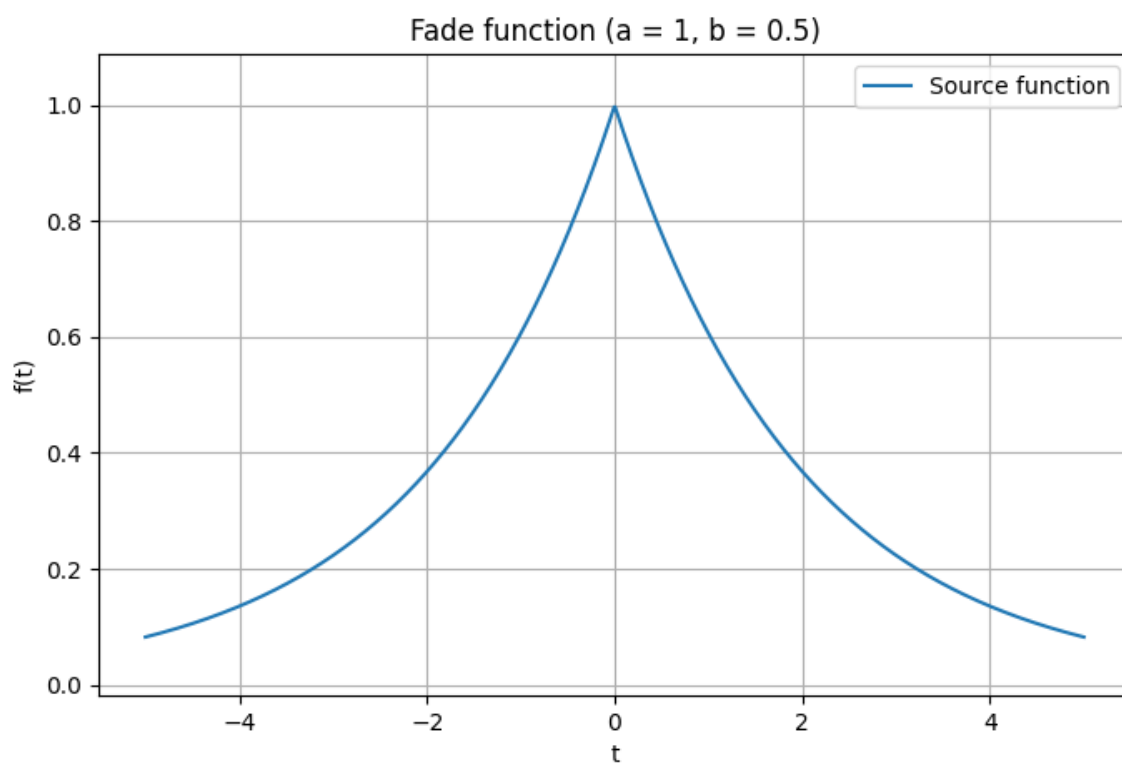


Рис. 25: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

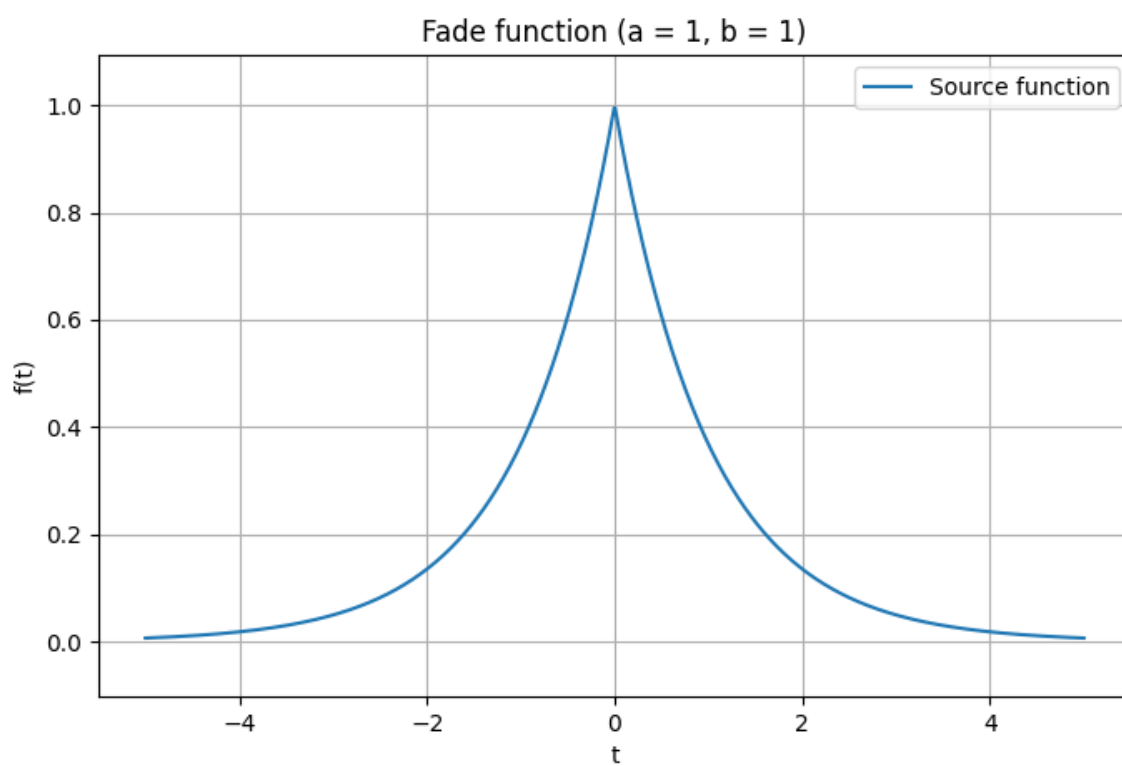


Рис. 26: График функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

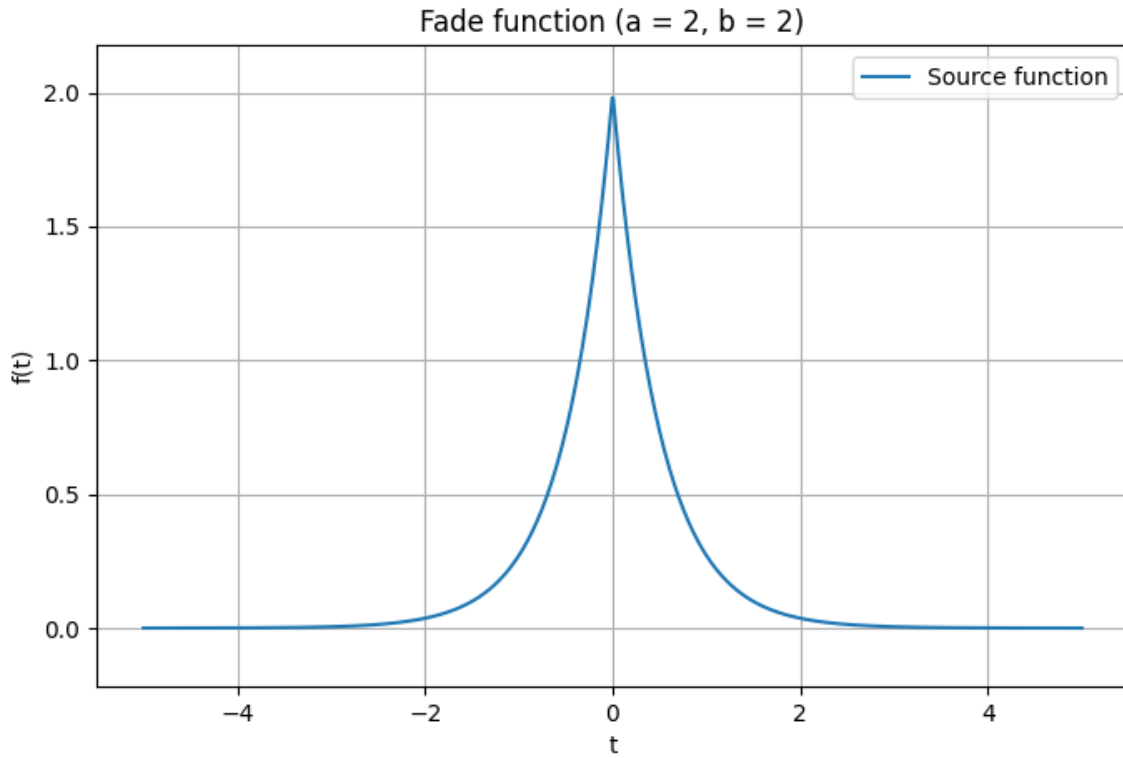


Рис. 27: График функции  $f(t)$  при  $a = 2$ ,  $b = 2$

### 2.5.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $f(t)$  задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 a e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} a e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{t(b-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{t(-b-i\omega)} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{\sqrt{2/\pi} ab}{b^2 + \omega^2} \quad (21) \end{aligned}$$

### 2.5.3. Графики образов функций

Графики образов функции при различных значениях  $a$  и  $b$  представлены на рисунках 28, 29 и 30.

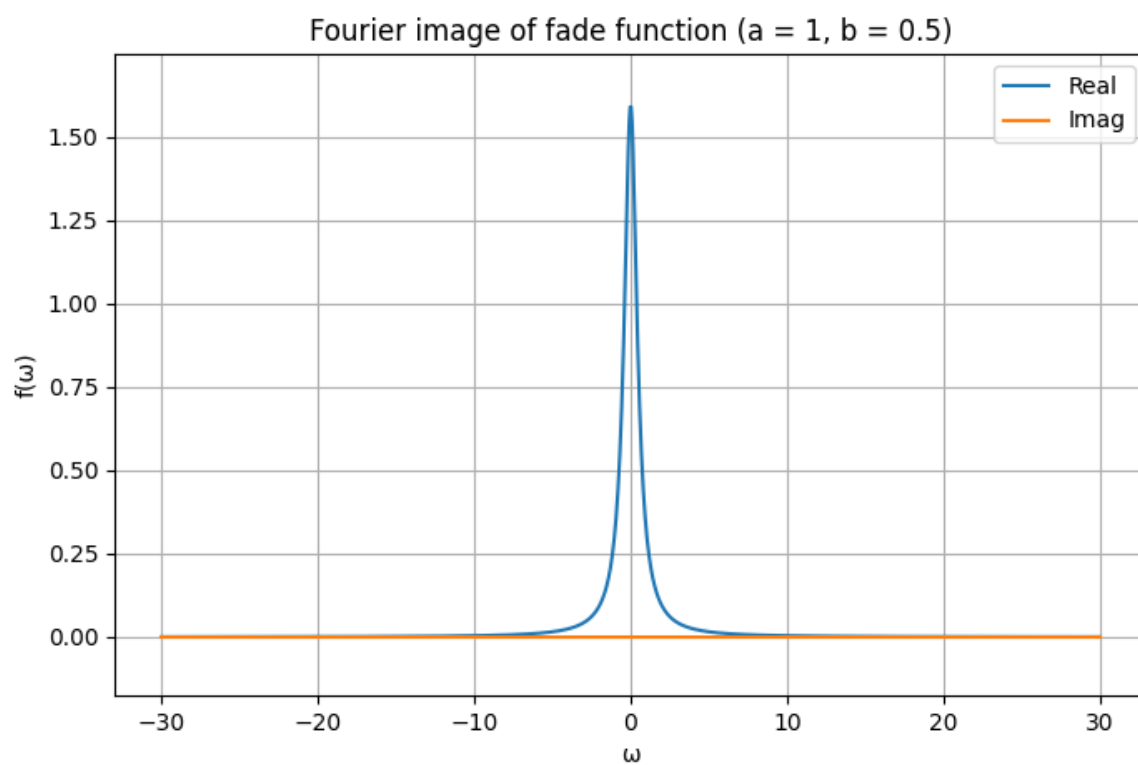


Рис. 28: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

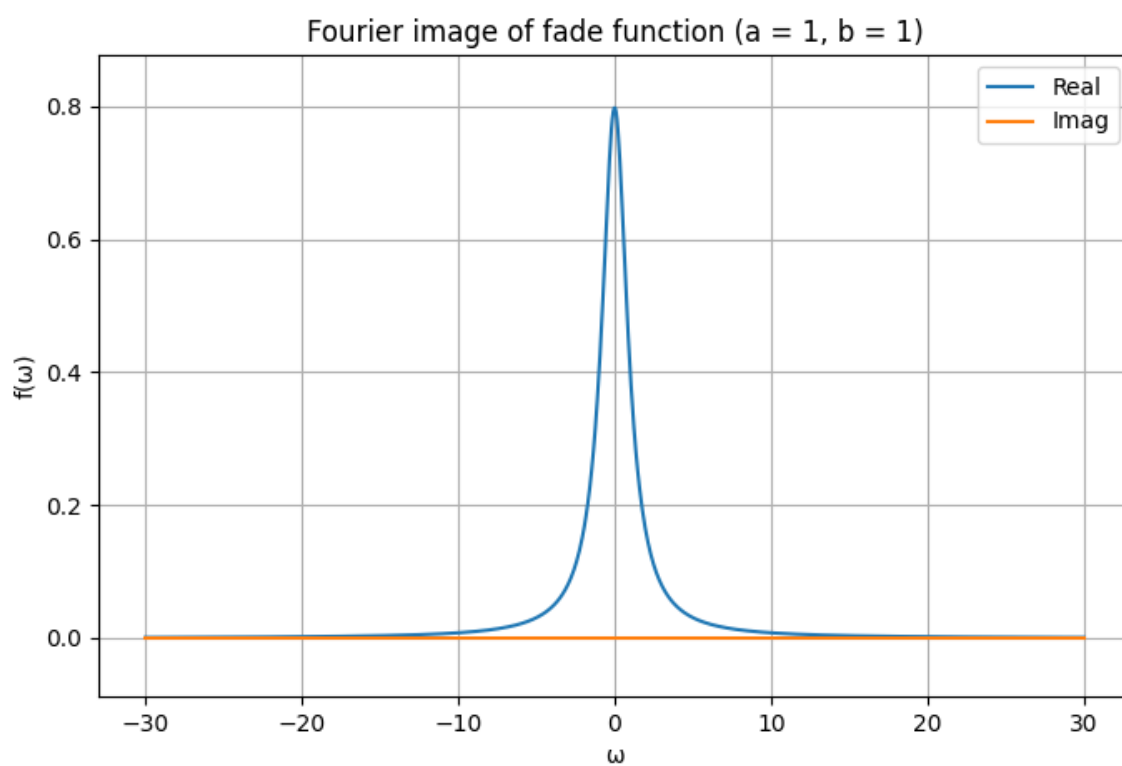


Рис. 29: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

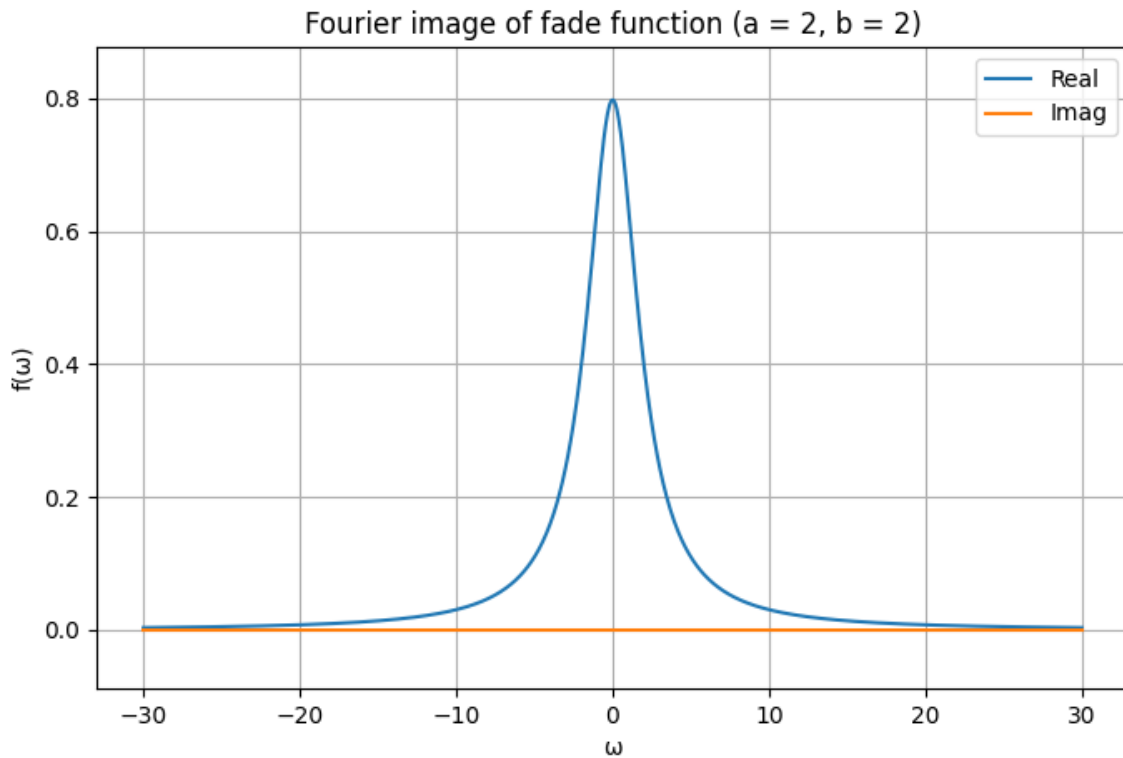


Рис. 30: График образа функции  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

#### 2.5.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля (см. формулу (3)). Для этого воспользуемся функцией `parseval_check`.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_1(\omega) ^2$
1.9998	1.9998

Таблица 13: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции затухания  $f(t)$  при  $a = 1, b = 0.5$

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_2(\omega) ^2$
0.9997	0.9997

Таблица 14: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции затухания  $f(t)$  при  $a = 1, b = 1$

Видим, что во всех случаях значения почти не отличаются друг от друга. Различие, по большей части, обусловлено тем, что в программе нельзя найти интеграл по бесконечности, поэтому просто берется достаточно большой интервал интегрирования.

$\int_{-100}^{100}  f(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{f}_3(\omega) ^2$
1.9978	1.9978

Таблица 15: Результаты проверки равенства Парсеваля для функции затухания  $f(t)$  при  $a = 2, b = 2$

### 2.5.5. Анализ результатов

Влияние параметров  $a$  и  $b$  на графики функции и ее образа можно описать следующим образом, в соответствии с формулами (20) и (21):  $a$  отвечает за амплитуду функции, а  $b$  за скорость затухания. При увеличении  $a$  амплитуда функции увеличивается, а при увеличении  $b$  функция затухает быстрее.

## 3. Комплексная функция

### 3.1. Сдвинутая прямоугольная функция

Рассмотрим прямоугольную функцию из первого задания (см. формулу (4)). Примем  $a = 1, b = 0.5$ . Рассмотрим *сдвинутую функцию*  $g(t) = f(t + c)$

#### 3.1.1. Графики исходных функции

Графики данной функции при различных значениях  $c$  представлены на рисунках 31, 32 и 33.

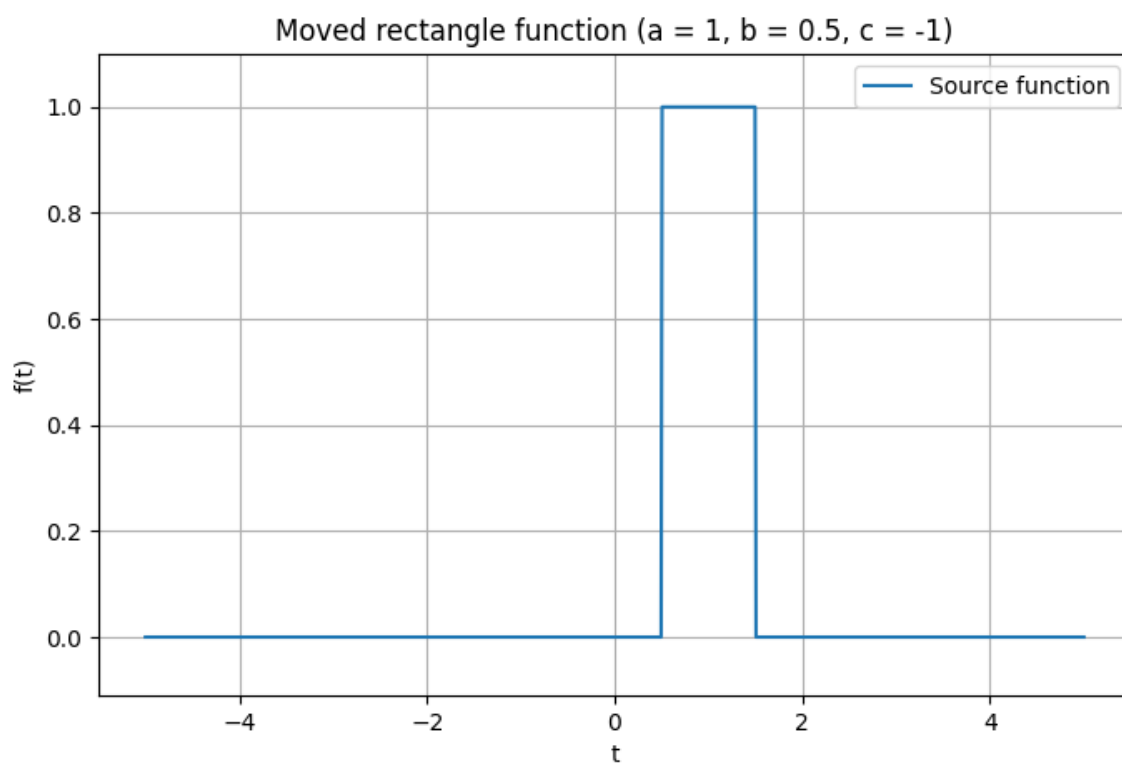


Рис. 31: График функции  $g(t)$  при  $c = -1$

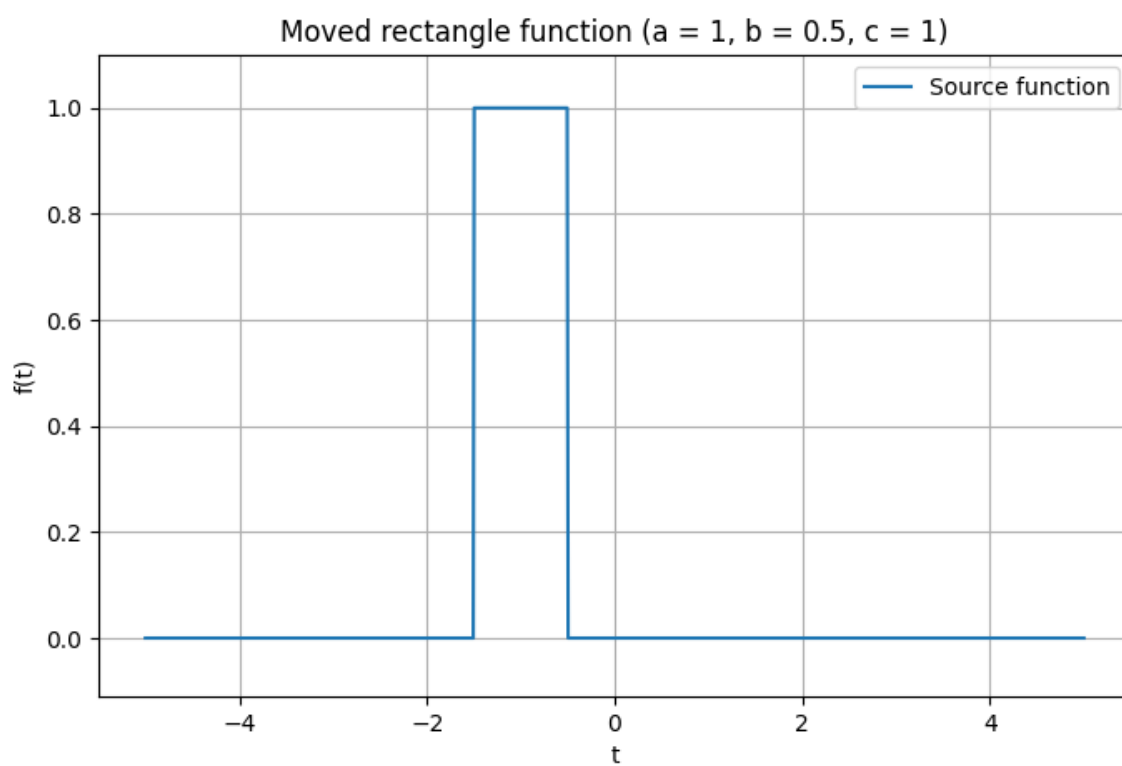


Рис. 32: График функции  $g(t)$  при  $c = 1$

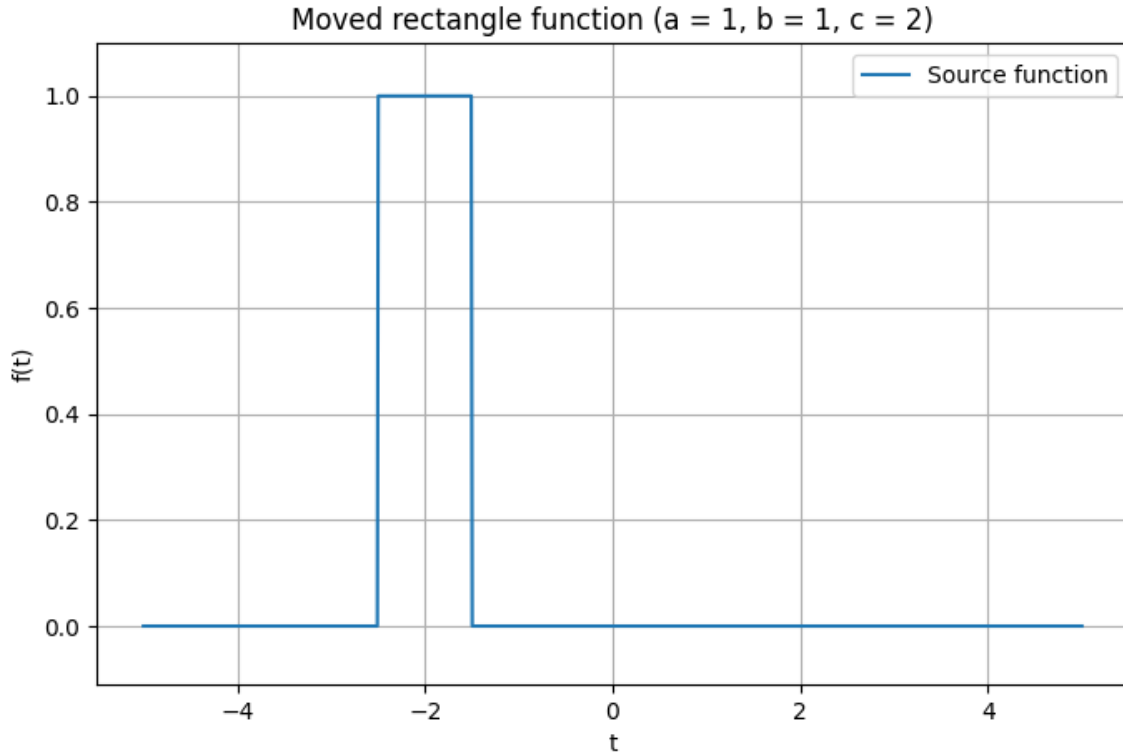


Рис. 33: График функции  $g(t)$  при  $c = 2$

### 3.1.2. Нахождение образа функции

Согласно формуле (1), Фурье образ функции  $g(t)$  задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+c) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-c)} dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega(t-c)} d(t-c) = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(t-c)} \Big|_{-b}^b = \frac{a(e^{i\omega(b+c)} - e^{-i\omega(b-c)})}{i\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{ae^{i\omega c}(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b})}{i\omega\sqrt{2\pi}} = \\
 &= \frac{2ae^{i\omega c} \sin \omega b}{\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{2abe^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc } \omega b \quad (22)
 \end{aligned}$$

Заметим, что относительно прошлого образа функции (см. формулу (6)) добавился множитель  $e^{i\omega c}$ . Он отвечает за *поворот* образа в комплексной плоскости. Таким образом, образ сдвинутой функции является комплексным.



### 3.1.3. Графики образов функций

Графики образов функции при различных значениях  $c$  представлены на рисунках 34, 35 и 36.

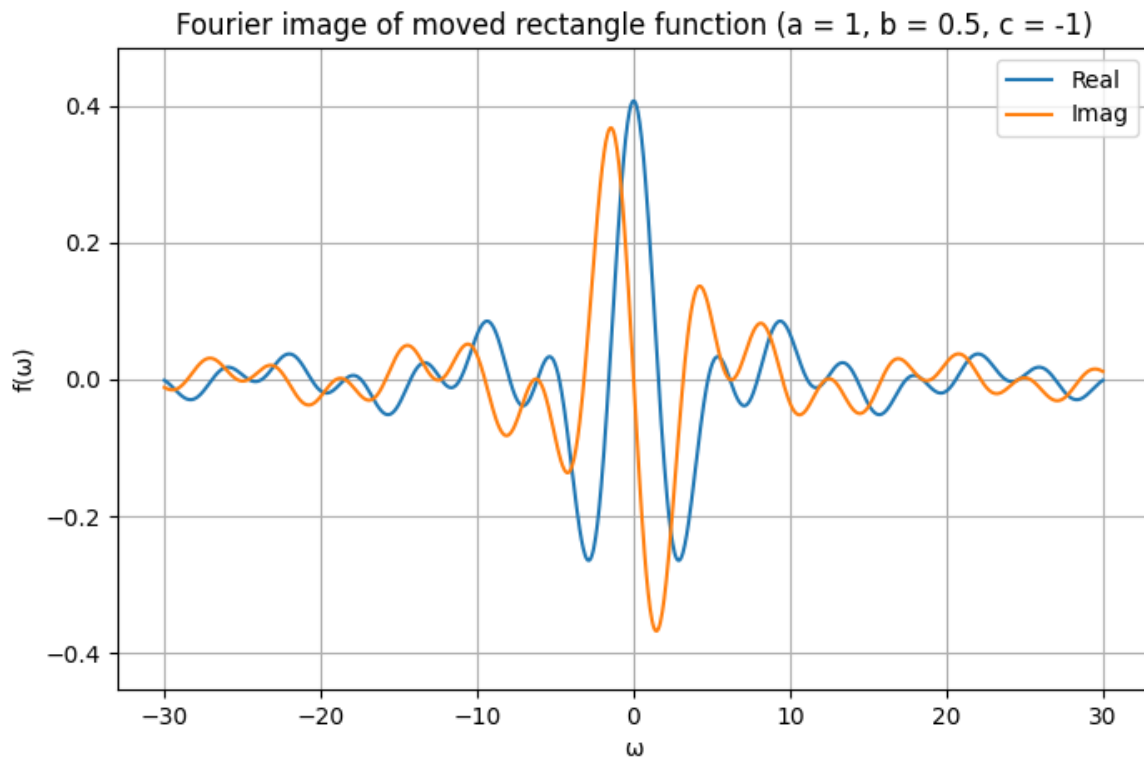


Рис. 34: График образа функции  $g(t)$  при  $c = -1$

Кроме того, рассмотрим графики модуля образа функции на рисунках 37, 38 и 39.

Видим, что графики модуля образа функции не отличаются в зависимости от значения  $c$ . Это связано с тем, что модуль комплексного числа не зависит от его аргумента.

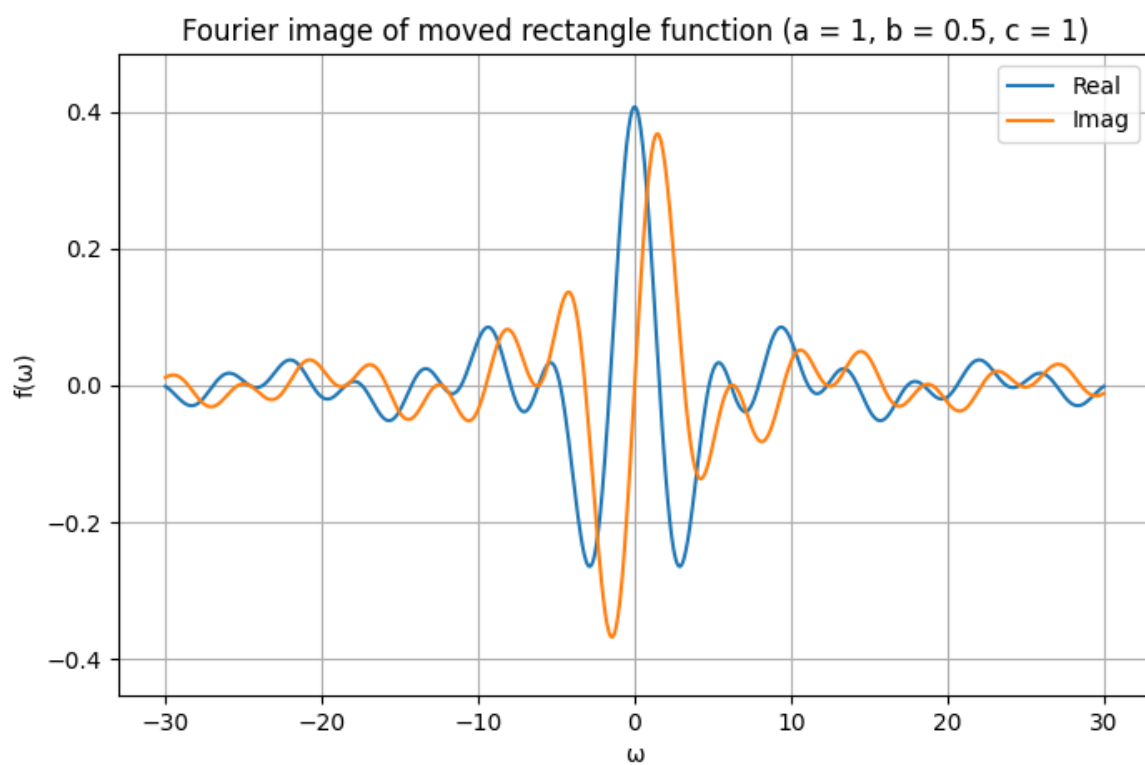


Рис. 35: График образа функции  $g(t)$  при  $c = 1$

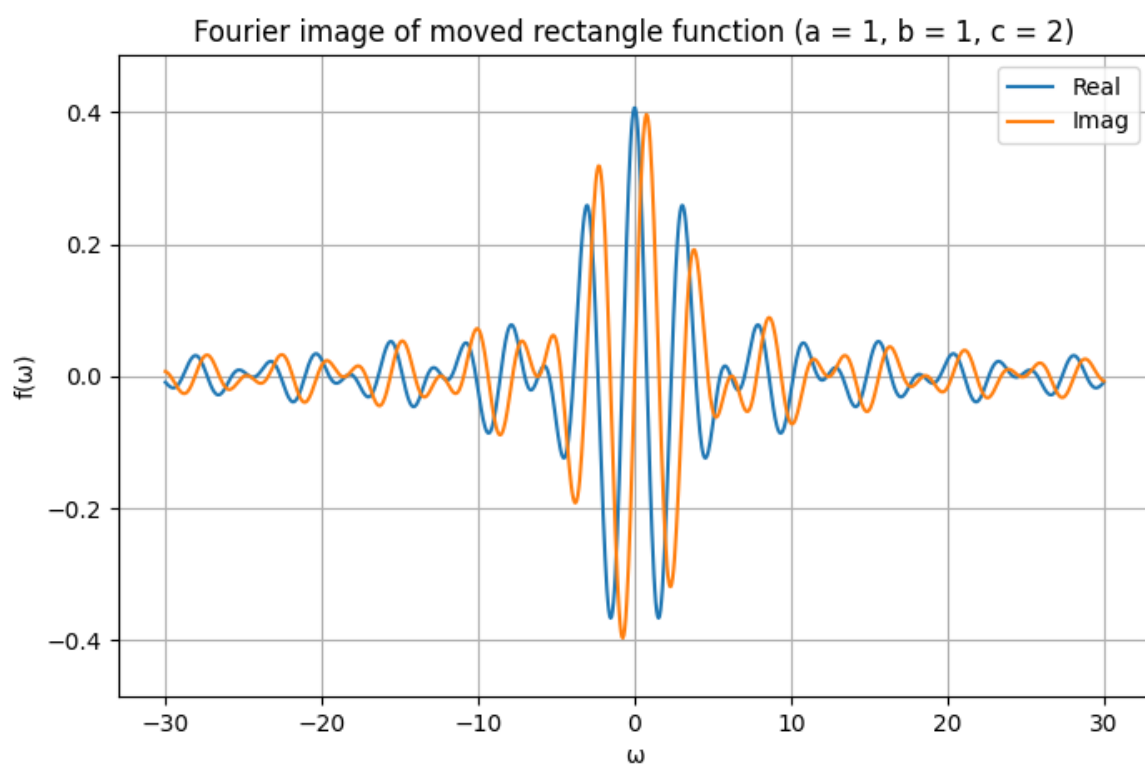


Рис. 36: График образа функции  $g(t)$  при  $c = 2$

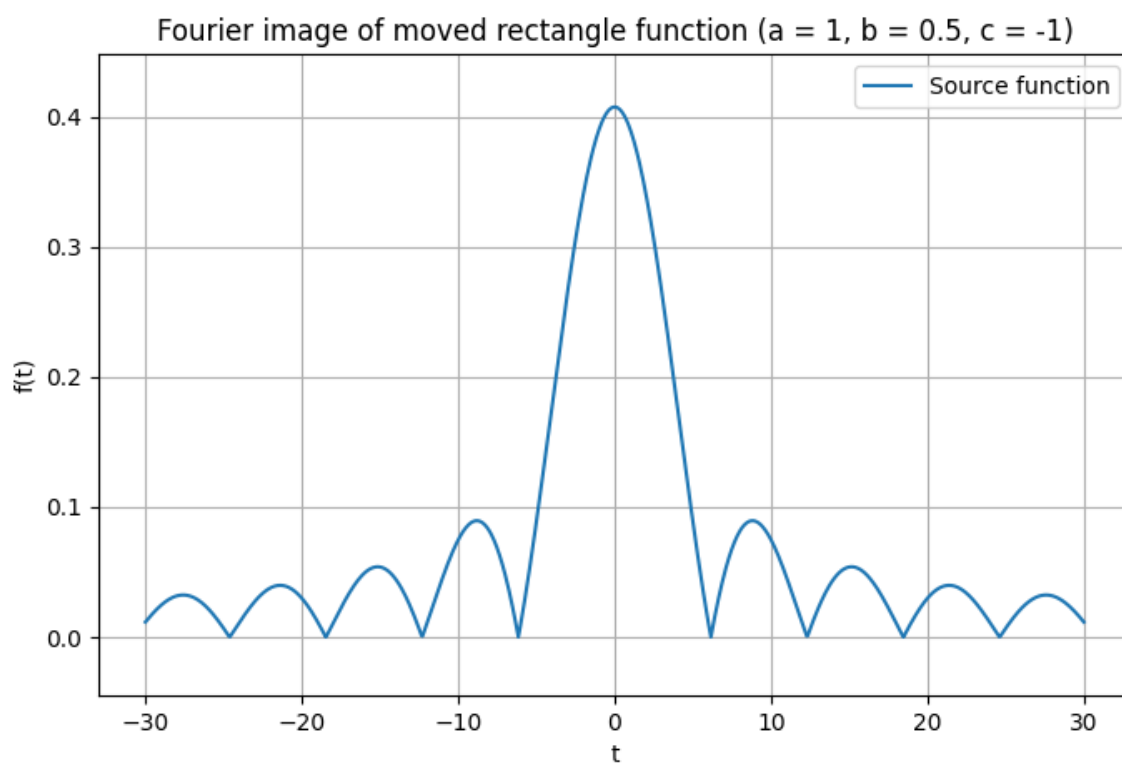


Рис. 37: График модуля образа функции  $g(t)$  при  $c = -1$

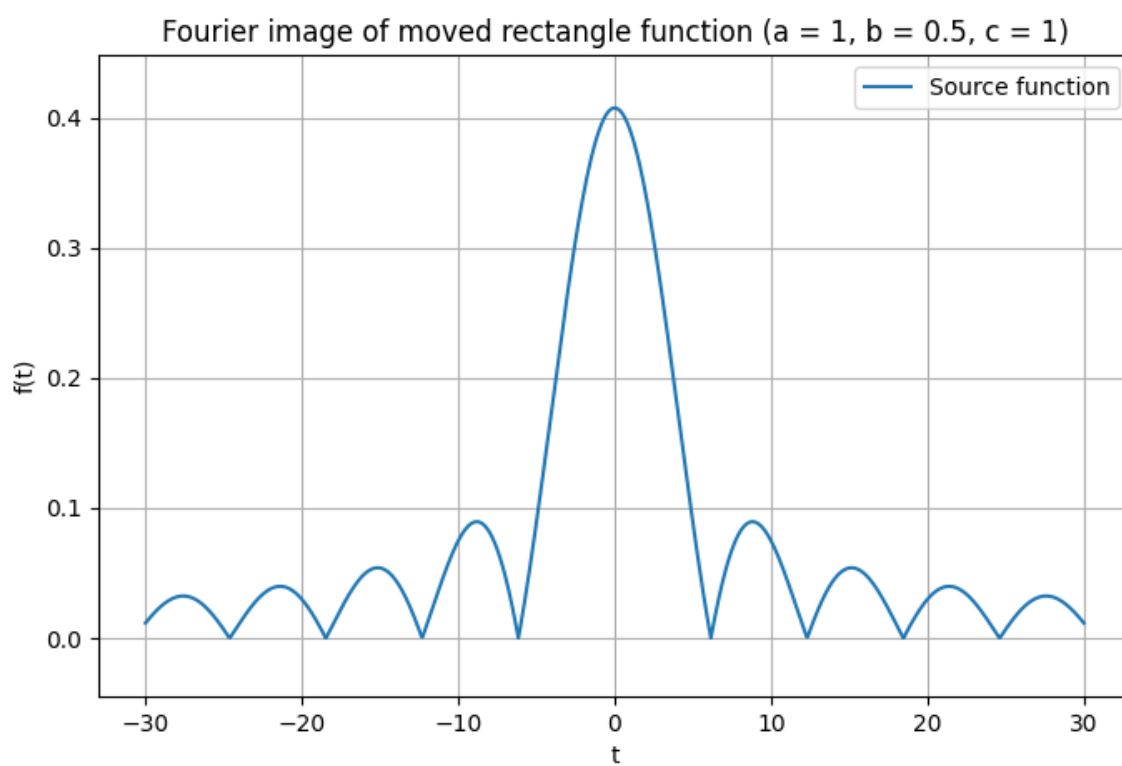


Рис. 38: График модуля образа функции  $g(t)$  при  $c = 1$

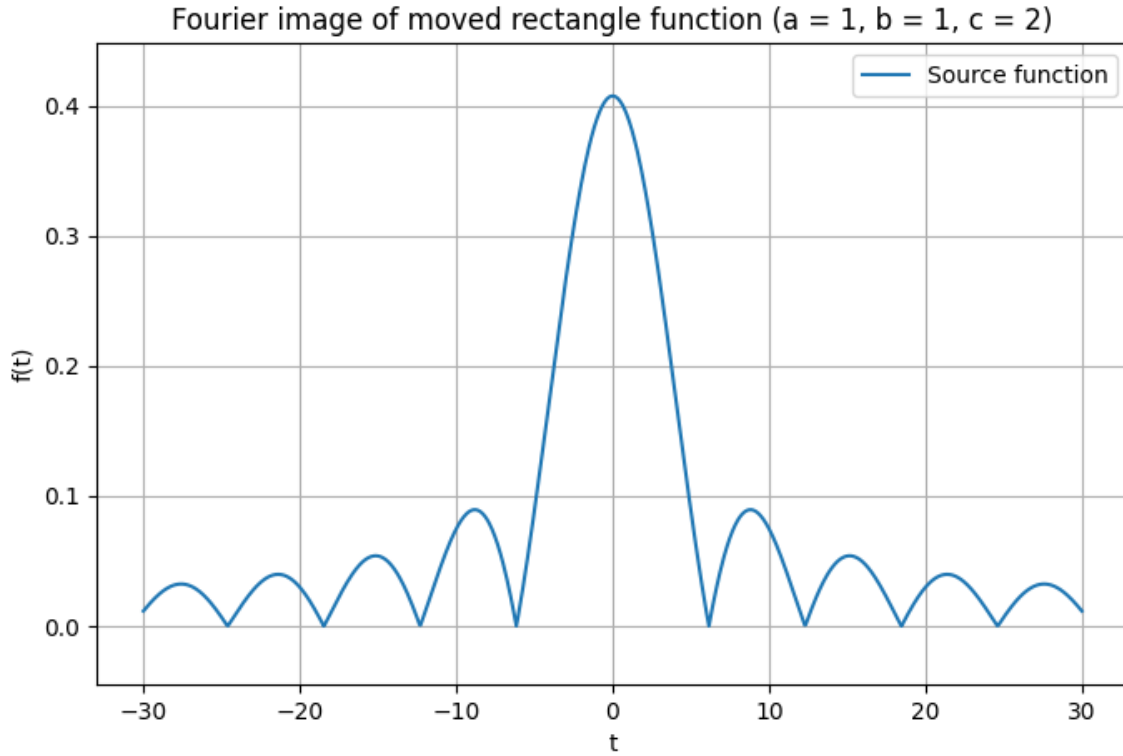


Рис. 39: График модуля образа функции  $g(t)$  при  $c = 2$

### 3.1.4. Проверка равенства Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля (см. формулу (3)). Для этого воспользуемся функцией `parseval_check`.

$\int_{-100}^{100}  g(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{g}_1(\omega) ^2$
1.0010	0.9946

Таблица 16: Результаты проверки равенства Парсеваля для сдвинутой прямоугольной функции  $g(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = -1$

$\int_{-100}^{100}  g(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{g}_2(\omega) ^2$
1.00100	0.9946

Таблица 17: Результаты проверки равенства Парсеваля для сдвинутой прямоугольной функции  $g(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 1$

$\int_{-100}^{100}  g(t) ^2$	$\int_{-100}^{100}  \hat{g}_3(\omega) ^2$
0.5005	0.49417

Таблица 18: Результаты проверки равенства Парсеваля для сдвинутой прямоугольной функции  $g(t)$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 2$

Видим, что полученные значения практически равны. Разница, как и в случае с *не сдвинутыми* функциями обусловлена интегрированием не по всей числовой прямой, а лишь по ее части.

### **3.1.5. Анализ результатов**

Видим, что при увеличении значения  $c$  график исходной функции, очевидно, сдвигается, а график ее образа *сжимается*, при этом амплитуда остается неизменной.

## **4. Анализ аккорда**

### **4.1. Аккорд 23**

Для обработки мною был выбран аккорд номер 23.

#### **4.1.1. Графики исходной записи**

График зависимости уровня громкости от времени для исходной записи представлен на рисунке 40.

Данный график обрезан по времени до 2 секунд, так как далее уровень громкости практически не изменяется.

#### **4.1.2. Фурье преобразование**

Теперь посмотрим на график образа данной записи в частотной области. Для этого применим к исходной записи преобразование Фурье. График зависимости уровня громкости от частоты представлен на рисунке 41.

Для Нахождения образа использовались первые 0.1 секунда записи для того, чтобы график был более наглядным. На графики представлены частоты от 0 до 4000 Гц.

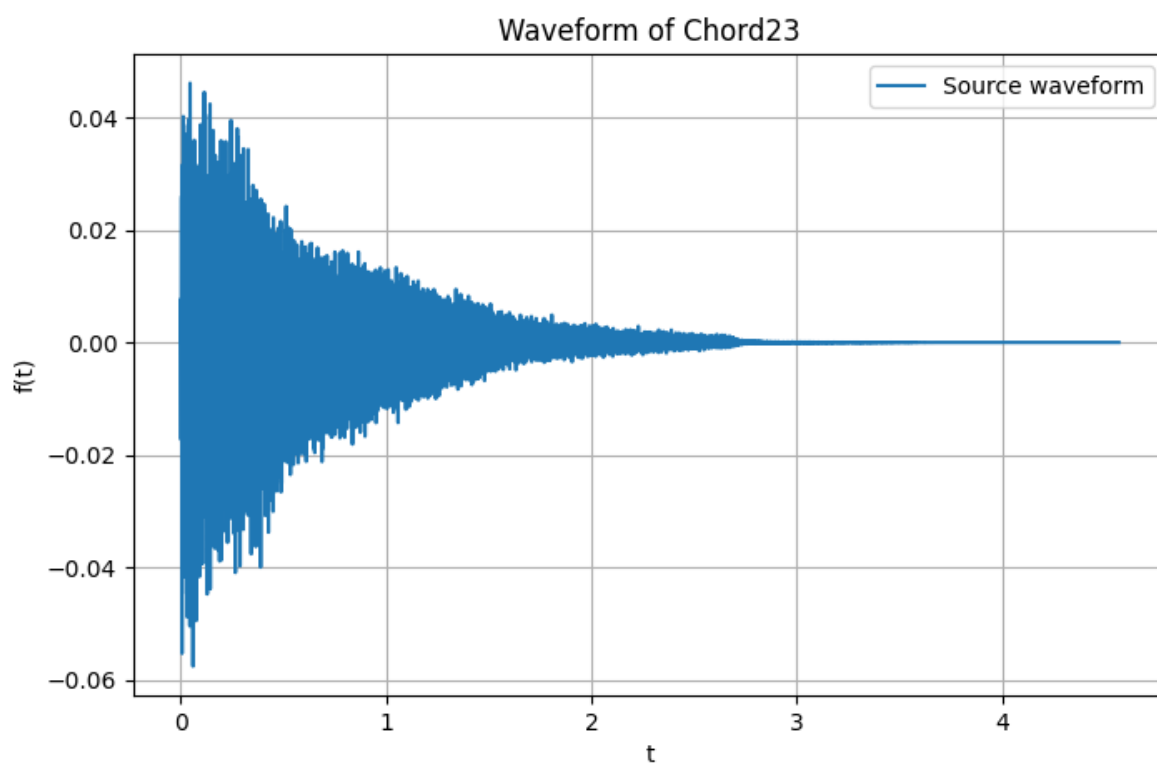


Рис. 40: График зависимости уровня громкости от времени для исходной записи

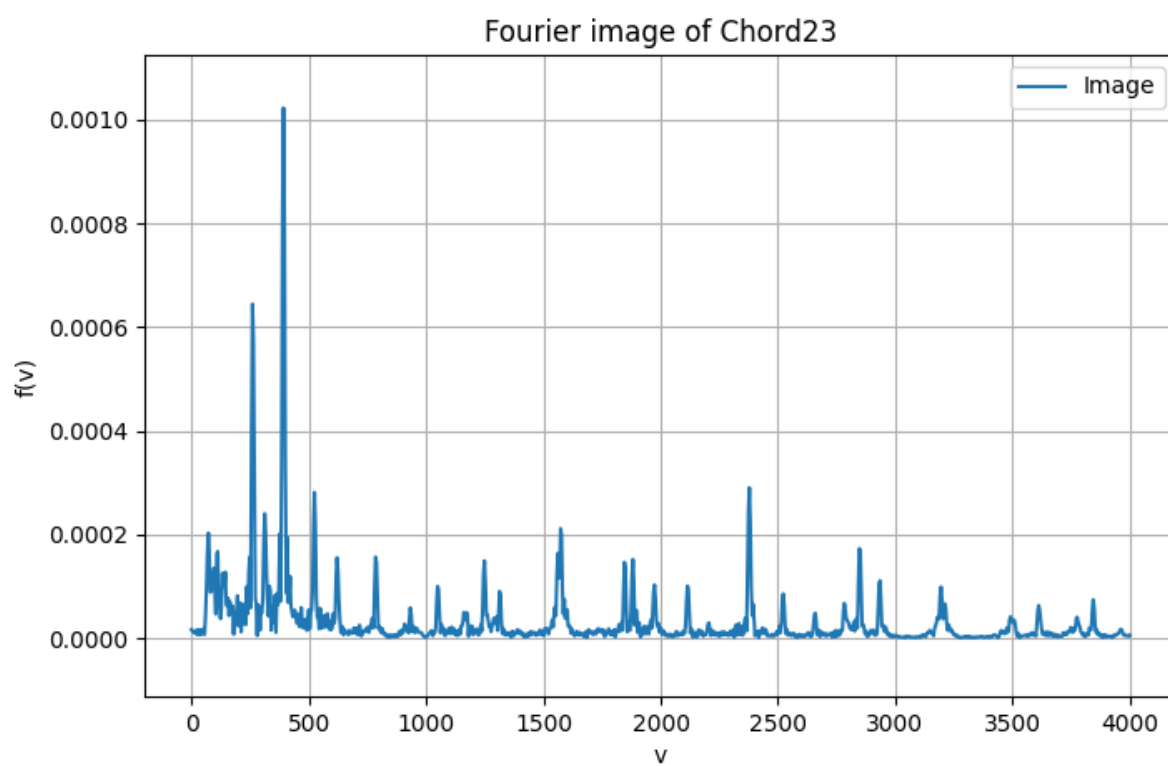


Рис. 41: График зависимости уровня громкости от частоты для исходной записи

#### 4.1.3. Анализ звуков

На графике 41 заметны явные пики, которые соответствуют доминирующим частотам. Наиболее выраженные пики находятся на частотах 262 Гц, 311 Гц и 392 Гц, что соответствует нотам C, D $\sharp$  и G соответственно. Таким образом, исходный аккорд – **До минор**.