Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Университет ИТМО

Отчет по проекту

по теме «Моделирование силовых линий и сечений эквипотенциальных поверхностей электрического поля для нескольких точечных зарядов»

по дисциплине Электричество и магнетизм

Выполнили:
Иванов А. К., 368220
Велюго К. О., 367971
ЭМ СУиР ПРО 1.1

Преподаватель:
Смирнов Александр Витальевич

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1 Введение

Электрическое поле играет ключевую роль во многих областях физики, включая электродинамику, электростатику. Понимание свойств электрического поля, в частности, распределения силовых линий и эквипотенциальных поверхностей, является важным аспектом изучения этих дисциплин.

В этом проекте мы стремимся смоделировать электрическое поле, создаваемое несколькими точечными зарядами, расположенными в вершинах правильного многоугольника. Это позволит нам более глубоко понять взаимодействие между зарядами и влияние их расположения на общую картину электрического поля.

2 Цели

Создание компьтерной программы, которая моделирует силовые линии и сечения эквипотенциальных поверхностей электрического поля для нескольких точечных зарядов.

3 Задачи

1. Проанализировать силы, действующие на заряды.
2. Написать программу, строящую векторное поле электрического поля нескольких зарядов.
3. Модернизоровать программу так, чтобы она строила силовые линии.
4. Добавить постренение эквипотенциальных поверхностей электрического поля.

4 Общие сведения

Разберемся, что из себя представляют электрические заряды, как они взаимодействуют. Обсудим закон Кулона.

4.1 Закон Кулона

Все частицы, обладающие электрическим зарядом, принимают участие в электромганитном взаимодействии. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величине и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

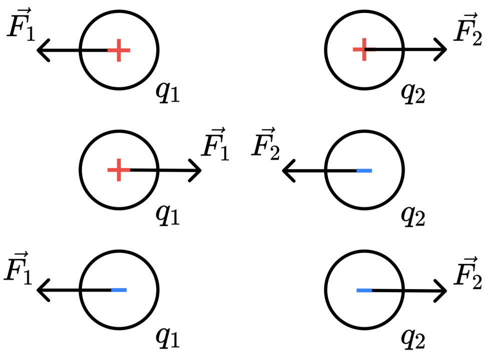


Рис. 1. Взаимодействие точечных зарядов

Тогда сформулируем закон Кулона:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}, \tag{1}$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon)$ – постоянная, q_1 и q_2 – количества каждого из взаимодействующих зарядов, r_{12} – расстояние между зарядами.

Полученная величина является скалярной, нам же необходимо учесть направление силы, то есть величина F должна быть векторной. Для этого домножим на единичный вектор $\vec{e_{12}}$.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e_{12}} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}} = k\frac{q_1 q_2 \vec{r_{12}}}{r_{12}^3} \qquad (2)$$

Принцип суперпозиции, которому подчиняются кулоновские силы и электрическое поле, позволяет распространить закон Кулона на любое количество точечных зарядов. Сила, действующая на точечный заряд от системы других точечных зарядов, представляет собой векторную сумму сил, действующих по отдельности на этот точечный заряд от каждого из остальных зарядов. Вектор результирующей силы, действующей на точечный заряд в данной точке, параллелен вектору электрического поля, создаваемого в этой точке всеми остальными зарядами и представляющего собой векторную сумму электрических полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности.

Принцип суперпопозиции для рассматриваемого заряда можно записать в виде:

$$\vec{F} = q_0 \sum_i k\frac{q_i \vec{r_i}}{r_i^3}, \qquad (3)$$

где q_0 – величиная пробного заряда (электрически заряженная материальная точка).

4.2 Напряженность электрического поля

Для количетсвенного определения электрического поля введем силовую характеристику – напряженность электрического поля. Напряженностьью электрического поля назовем физическую величину, равную отношению силы, с которой поле действует на пробный заряд, помещенный в данную точку пространства, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (4)$$

Направление вектора $\vec{E}$ в каждой точке пространства совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов в данной точке пространства, равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых в той же точке зарядами в отдельности (принцип суперпозиции). Тогда подставив $\vec{F}$ (3) в формулу напряженности $\vec{E}$ (4) получим:

$$\vec{E} = \sum_i k \frac{q_i \vec{r_i}}{r_i^3} \tag{5}$$

Для наглядности электрического поля будем использовать силовые линии (Рисунок 2). Эти линии необходимо проводить так, чтобы направление вектора $\vec{E}$ в каждой точке совпадало с направлением касательной к силовой линии.

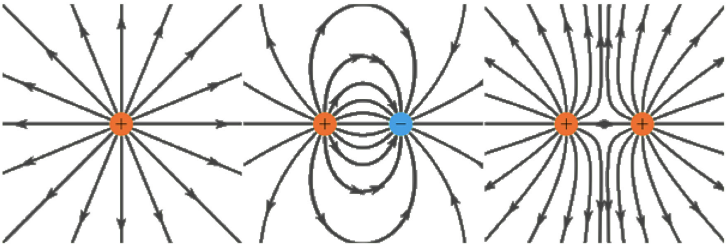


Рис. 2. Примеры силовых линий электрического поля

4.3 Потенциал электрического поля

Помимо напряженности, электростатическое поле имеет следующую характеристику – потенциал. Потенциалом будем называть склаярную энергетическую характеристику электростатического поля, определяющую потенциальную энергию, которой обладает единичный положительный пробный заряд, помещённый в данную точку поля.

Электростатический потенциал равен отношению потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем к величине этого заряда:

$$\phi = \frac{W}{q}, \tag{6}$$

где W – потенциальная энергия точечных зарядов.

Если два точечных заряда расположены на расстоянии друг от друга, то их потенциальная энергия взаимодействия описывается формулой:

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r} \tag{7}$$

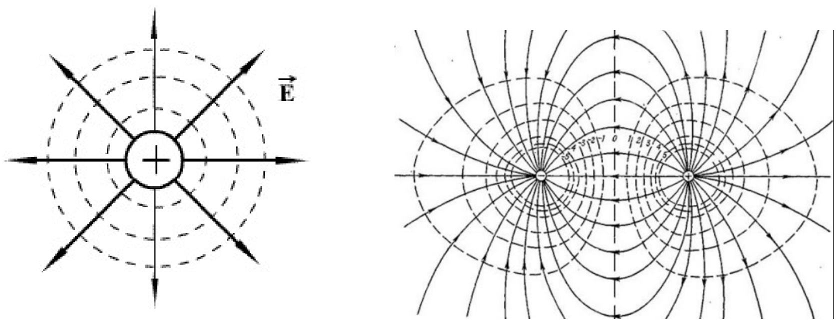
Подставим W (7) в ϕ (6) и получим формулу для нахождения потенциала точечного заряда q:

$$\phi = k\frac{q}{r} \tag{8}$$

Если рассмотреть поле, создаваемое точечным зарядом, то его напряженность падает по мере удаления от заряда в любом направлении. Следовательно, по мере удаления происходит и уменьшение потенциала поля. При этом в пространстве вокруг заряда можно указать ряд точек, обладающих одинаковым потенциалом.

Точки вокруг точечного заряда, обладающие одним и тем же потенциалом, будут образовывать сферу с центром, лежащим в точечном заряде.

При перемещении заряда по этой сфере работа поля равна нулю, поскольку потенциальная энергия во всех точках этой поверхности одинакова. Стоит так же отметить, что вектор напряженности перпендикулярен этой сфере (а значит, и направлению перемещения).



(a) Для точечного заряда *(b) Для двух точечных зарядов*

Рис. 3. Эквипотенциальные поверхности

5 Практическая часть

Для моделирования данного явления был использован язык Python.

5.1 Исходный код

Для того, чтобы избежать работы со слишком большими и малыми числами, электрическая постоянная в программа прияната равной 9, в отличии от ее норамльного значения $9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$. Таким образом, заряды, определяемые в конфигурационном файле предосталяются в нКл.

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

charges = []
with open('charges.txt') as f:
        lines = f.readlines()
        for line in lines:
                if line.startswith("#"): continue
                x, y, charge = map(int, line.split())
                charges.append([np.array([x, y]),
                    charge])

epsilon = 1


x_min = -8
x_max = 8
y_min = -8
y_max = 8



def vector_from_points(point1, point2):
        return point2 - point1


def vector_length(vec):
        return math.sqrt(vec[0] ** 2 + vec[1] ** 2)
```

```


def F(pos): # Coulombs force
        k = 1 / epsilon
        force = np.array([0.0, 0.0])

        for i in range(len(charges)): # sum force from
            each charge
                x, y, charge = charges[i][0][0],
                    charges[i][0][1], charges[i][1]
                R = vector_from_points(charges[i][0],
                    pos) # vector from charge to test
                    charge
                if(not vector_length(R)): return np.
                    array([0.0, 0.0]) # to avoid
                    division by zero if point and
                    charge at the same place
                force += k * charge * R /
                    vector_length(R) ** 3 # Coloumbs
                    law
        return force


def pot(pos, charges):
        phi = 0
        k = 1 / epsilon
        for i in range(len(charges)): # sum potentian
           from each charge
                x, y, charge = charges[i][0][0],
                    charges[i][0][1], charges[i][1]
                R = vector_from_points(charges[i][0],
                    pos) # vector from charge to test
                    charge
                if(not vector_length(R)): return 0
                phi += k / (4 * 3.14) * charge /
                    vector_length(R)
        return phi


# configure canvas
```

```
figure = plt.figure()
ax = plt.gca()
ax.set_xlim([x_min, x_max])
ax.set_ylim([y_min, y_max])
ax.set_aspect('equal')

# draw field lines
for charge in charges:
    x, y = charge[0]
    R = 0.01
    for alpha in range(-180, 180, 15): # arrange start point around charge
        xcurr, ycurr = x + R * math.cos(math.radians(alpha)), y + R * math.sin(math.radians(alpha)) # line start point
        xpath, ypath = [], []
        for i in range(10000):
            xpath.append(xcurr)
            ypath.append(ycurr)

            force = F(np.array([xcurr, ycurr])) # find force at point
            # gradient descent
            xcurr, ycurr = (force / vector_length(force) if vector_length(force) != 0 else 0) * 0.01 + np.array([xcurr, ycurr])
        plt.plot(xpath, ypath, color="#d9b555") # draw field line


xx, yy = np.arange(x_min, x_max, 0.1), np.arange(y_min, y_max, 0.1)
z = np.zeros(shape=(len(yy), len(xx)), dtype=np.double)

# calculate potential at each point
```

```
for i in range(len(xx)):
        for j in range(len(yy)):
                z[j][i] = pot(np.array([xx[i], yy[j]])
                    , charges)


# plot equipotential lines
plt.contourf(xx, yy, z, levels=np.linspace(-1, 1, 20))

# plot charges
for charge in charges:
        x, y = charge[0]
        plt.plot(x, y,'o', color="#FF0000" if charge
            [1] > 0 else "#0000FF")


plt.show()
```

5.2 Запуск программы

Для запуска программы необходимо воспользоваться фалом charges.txt, введя туда входные параметры для моделирования. Формат входных данных указан в файле. Для запуска моделирования следует воспользоваться одной из команд:

```
Field.py: manim -p Field.py

equip.py: python3 equip.py
```

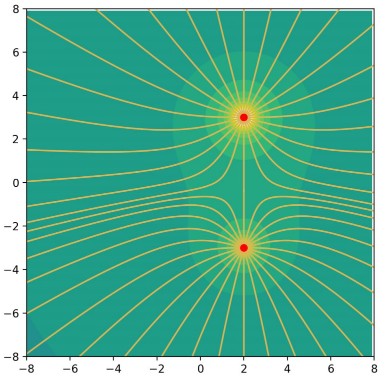
Первая запускает моделирование векторного поля электрического поля, вторая – силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

Необходимые для запуска библиотеки указаны в файле requirements.txt.

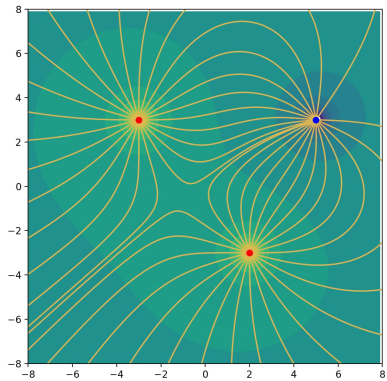
Исходные коды можно посмотреть на GitHub (кликабельно).

5.3 Результаты моделирования

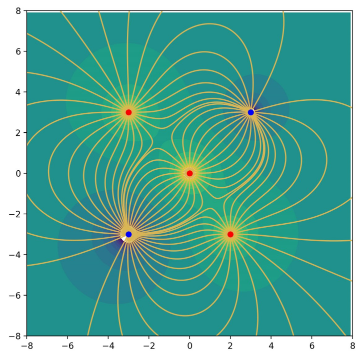
В резльтате работы программы получим следующие примеры (желтым показаны силовые линии):



(a) Два точеченых заряда



(b) Три точечных заряда



(c) Пять точечных зарядов

Рис. 4. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Так же были построены векторные поля электрических полей с разным количеством точечных зарядов (Приложение).

6 Вывод

В результате работы была создана программа, позволяющая визуализировать силовые линии и эквипотенциальные поверхности системы нескольких зарядов. Получаемые результаты сходятся с теоретическими ожиданиями, благодаря чему можно сделать вывод, что программа работает корректно.

Таким образом, создание данной программы позволяет упростить процесс визуализации силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

7 Приложение

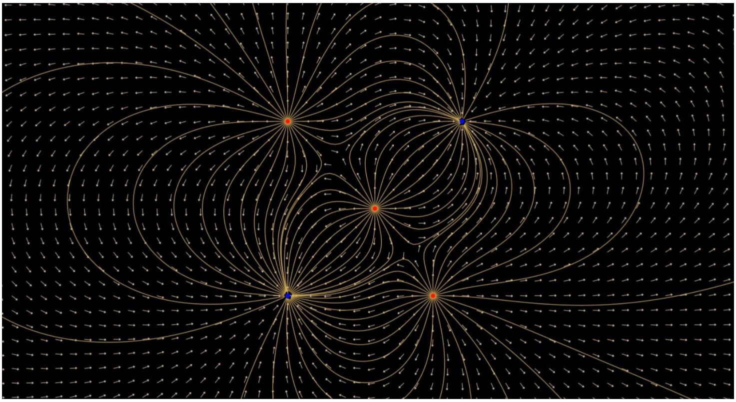


Рис. 5. Векторное поле для 5 точечных зарядов

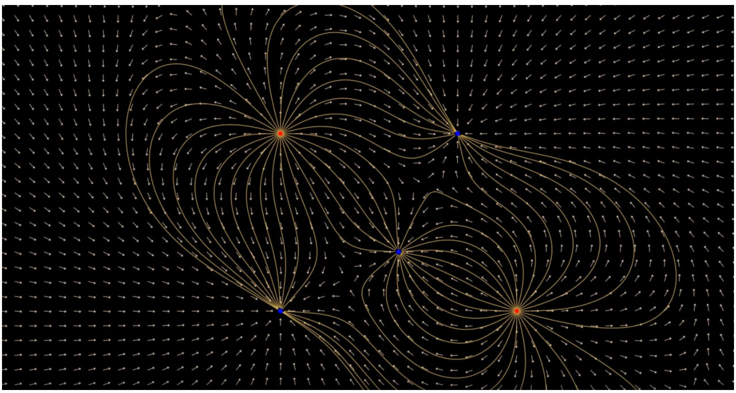


Рис. 6. Векторное поле для 5 точечных зарядов

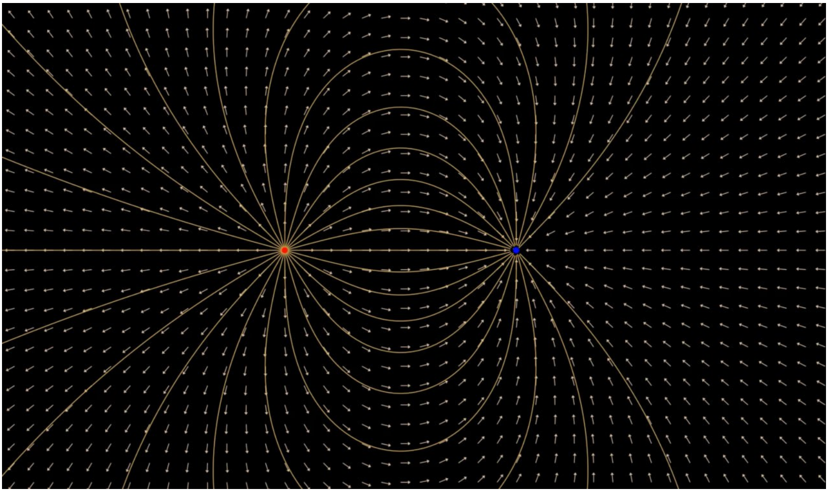


Рис. 7. Векторное поле для 2 точечных зарядов