

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования



Университет ИТМО

Отчет по проекту
по теме «Моделирование силовых линий и
сечений эквипотенциальных поверхностей
электрического поля для нескольких точечных
зарядов»
по дисциплине Электричество и магнетизм

Выполнили:
Иванов А. К., 368220
Велюго К. О., 367971
ЭМ СУиР ПРО 1.1

Преподаватель:
Смирнов Александр Витальевич

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1	Введение	3
2	Цели	3
3	Задачи	3
4	Общие сведения	4
4.1	Закон Кулона	4
4.2	Напряженность электрического поля	5
4.3	Потенциал электрического поля	6
5	Практическая часть	8
6	Вывод	12
7	Приложение	13

1 Введение

Электрическое поле играет ключевую роль во многих областях физики, включая электродинамику, электростатику. Понимание свойств электрического поля, в частности, распределения силовых линий и эквипотенциальных поверхностей, является важным аспектом изучения этих дисциплин.

В этом проекте мы стремимся смоделировать электрическое поле, создаваемое несколькими точечными зарядами, расположенными в вершинах правильного многоугольника. Это позволит нам более глубоко понять взаимодействие между зарядами и влияние их расположения на общую картину электрического поля.

2 Цели

Создание компьютерной программы, которая моделирует силовые линии и сечения эквипотенциальных поверхностей электрического поля для нескольких точечных зарядов.

3 Задачи

1. Проанализировать силы, действующие на заряды.
2. Написать программу, строящую векторное поле электрического поля нескольких зарядов.
3. Модернизировать программу так, чтобы она строила силовые линии.
4. Добавить построение эквипотенциальных поверхностей электрического поля.

4 Общие сведения

Разберемся, что из себя представляют электрические заряды, как они взаимодействуют. Обсудим закон Кулона.

4.1 Закон Кулона

Все частицы, обладающие электрическим зарядом, принимают участие в электромагнитном взаимодействии. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величине и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

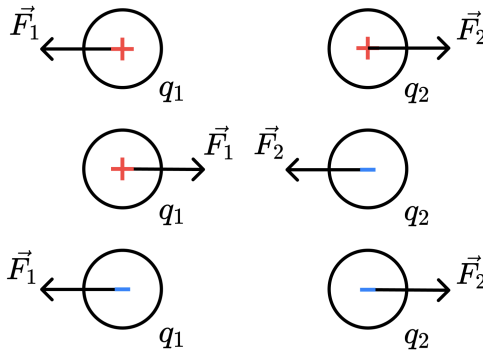


Рис. 1. Взаимодействие точечных зарядов

Тогда сформулируем закон Кулона:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}, \quad (1)$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon)$ – постоянная, q_1 и q_2 – количества каждого из взаимодействующих зарядов, r_{12} – расстояние между зарядами.

Полученная величина является скалярной, нам же необходимо учесть направление силы, то есть величина F должна быть векторной. Для этого домножим на единичный вектор \vec{e}_{12} .

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12} \vec{r}_{12}}{r_{12}} = k \frac{q_1 q_2 r_{12} \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (2)$$

Принцип суперпозиции, которому подчиняются кулоновские силы и электрическое поле, позволяет распространить закон Кулона на любое количество точечных зарядов. Сила, действующая на точечный заряд от системы других точечных зарядов, представляет собой векторную сумму сил, действующих по отдельности на этот точечный заряд от каждого из остальных зарядов. Вектор результирующей силы, действующей на точечный заряд в данной точке, параллелен вектору электрического поля, создаваемого в этой точке всеми остальными зарядами и представляющего собой векторную сумму электрических полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности.

Принцип суперпозиции для рассматриваемого заряда можно записать в виде:

$$\vec{F} = q_0 \sum_i k \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}, \quad (3)$$

где q_0 – величина пробного заряда (электрически заряженная материальная точка).

4.2 Напряженность электрического поля

Для количественного определения электрического поля введем силовую характеристику – напряженность электрического поля. Напряженностью электрического поля назовем физическую величину, равную отношению силы, с которой поле действует на пробный заряд, помещенный в данную точку пространства, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (4)$$

Направление вектора \vec{E} в каждой точке пространства совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов в данной точке пространства, равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых в той же точке зарядами в отдельности (принцип суперпозиции). Тогда подставив \vec{F} (3) в формулу напряженности \vec{E} (4) получим:

$$\vec{E} = \sum_i k \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3} \quad (5)$$

Для наглядности электрического поля будем использовать силовые линии (Рисунок 2). Эти линии необходимо проводить так, чтобы направление вектора \vec{E} в каждой точке совпадало с направлением касательной к силовой линии.

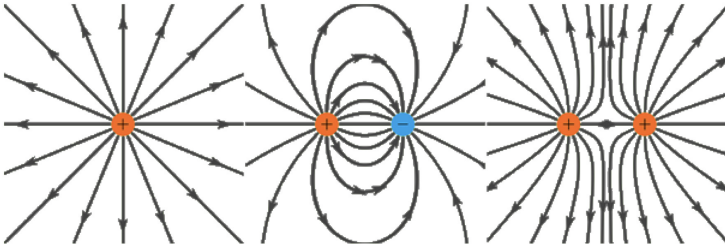


Рис. 2. Примеры силовых линий электрического поля

4.3 Потенциал электрического поля

Помимо напряженности, электростатическое поле имеет следующую характеристику – потенциал. Потенциалом будем называть скалярную энергетическую характеристику электростатического поля, определяющую потенциальную энергию, которой обладает единичный положительный пробный заряд, помещённый в данную точку поля.

Электростатический потенциал равен отношению потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем к величине этого заряда:

$$\phi = \frac{W}{q}, \quad (6)$$

где W – потенциальная энергия точечных зарядов.

Если два точечных заряда расположены на расстоянии друг от друга, то их потенциальная энергия взаимодействия описывается формулой:

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (7)$$

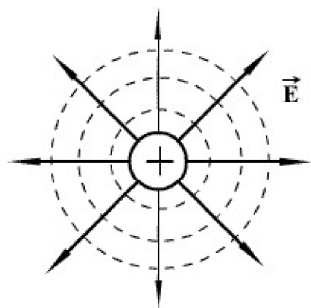
Подставим W (7) в ϕ (6) и получим формулу для нахождения потенциала точечного заряда q :

$$\phi = k \frac{q}{r} \quad (8)$$

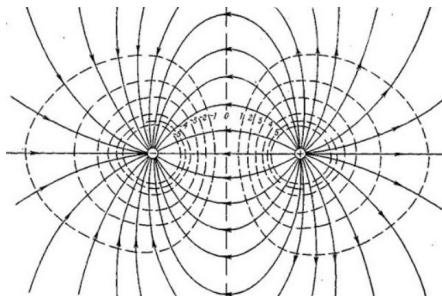
Если рассмотреть поле, создаваемое точечным зарядом, то его напряженность падает по мере удаления от заряда в любом направлении. Следовательно, по мере удаления происходит и уменьшение потенциала поля. При этом в пространстве вокруг заряда можно указать ряд точек, обладающих одинаковым потенциалом.

Точки вокруг точечного заряда, обладающие одним и тем же потенциалом, будут образовывать сферу с центром, лежащим в точечном заряде.

При перемещении заряда по этой сфере работа поля равна нулю, поскольку потенциальная энергия во всех точках этой поверхности одинакова. Стоит так же отметить, что вектор напряженности перпендикулярен этой сфере (а значит, и направлению перемещения).



(a) Для точечного заряда



(b) Для двух точечных зарядов

Рис. 3. Эquipотенциальные поверхности

5 Практическая часть

Для моделирования данного явления был использован язык Python.

```
1 import numpy as np
2 import math
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 charges = [[[-3, -3], -6], [[-3, 3], 3], [[3, 3], -3],
7             [[2, -3], 3], [[0, 0], 4]]
8
9
10 x_min = -8
11 x_max = 8
12 y_min = -8
13 y_max = 8
14
15 # cast to required format
16 for i in range(len(charges)):
17     charges[i] = [np.array(charges[i][0]), charges[i]
18                   ][1]]
19
20 def vector_from_points(point1, point2):
21     return point2 - point1
22
23
24 def vector_length(vec):
25     return math.sqrt(vec[0] ** 2 + vec[1] ** 2)
26
27
28 def F(pos): # Coulombs force
29     k = 1 / epsilon
30     force = np.array([0.0, 0.0])
31
32     for i in range(len(charges)): # sum force from
33         each charge
34         x, y, charge = charges[i][0][0], charges[i]
```



```

    ][0][1], charges[i][1]
34     R = vector_from_points(charges[i][0], pos) #
        vector from charge to test charge
35     if(not vector_length(R)): return np.array
        ([0.0, 0.0]) # to avoid division by zero if
        point and charge at the same place
36     force += k * charge * R / vector_length(R) **
        3 # Coloumbs law
37     return force
38
39
40 def pot(pos, charges):
41     phi = 0
42     k = 1 / epsilon
43     for i in range(len(charges)): # sum potential from
        each charge
44         x, y, charge = charges[i][0][0], charges[i]
            ][0][1], charges[i][1]
45         R = vector_from_points(charges[i][0], pos) #
            vector from charge to test charge
46         if(not vector_length(R)): return 0
47         phi += k / (4 * 3.14) * charge / vector_length
            (R)
48     return phi
49
50
51 # configure canvas
52 figure = plt.figure()
53 ax = plt.gca()
54 ax.set_xlim([x_min, x_max])
55 ax.set_ylim([y_min, y_max])
56 ax.set_aspect('equal')
57
58 # draw field lines
59 for charge in charges:
60     x, y = charge[0]
61     R = 0.01
62     for alpha in range(-180, 180, 15): # arrange start
        point around charge
63         xcurr, ycurr = x + R * math.cos(math.radians(

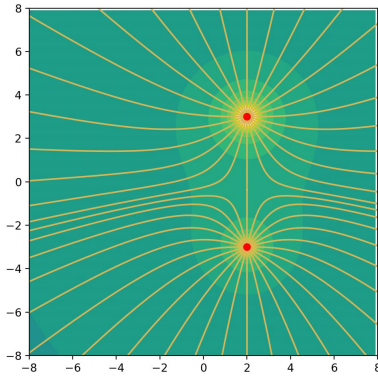
```

```

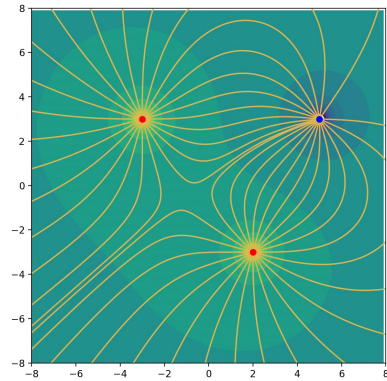
        alpha)), y + R * math.sin(math.radians(
        alpha)) # line start point
64     xpath, ypath = [], []
65     for i in range(10000):
66         xpath.append(xcurr)
67         ypath.append(ycurr)
68
69         force = F(np.array([xcurr, ycurr])) # find
        force at point
70     # gradient descent
71     xcurr, ycurr = (force / vector_length(
        force) if vector_length(force) != 0
        else 0) * 0.01 + np.array([xcurr, ycurr
        ])
72     plt.plot(xpath, ypath, color="#d9b555") # draw
        field line
73
74
75     xx, yy = np.arange(x_min, x_max, 0.1), np.arange(y_min
        , y_max, 0.1)
76     z = np.zeros(shape=(len(yy), len(xx)), dtype=np.double
        )
77
78     # calculate potential at each point
79     for i in range(len(xx)):
80         for j in range(len(yy)):
81             z[j][i] = pot(np.array([xx[i], yy[j]]),
                charges)
82
83     # plot equipotential lines
84     plt.contourf(xx, yy, z, levels=np.linspace(-1, 1, 20))
85
86     # plot charges
87     for charge in charges:
88         x, y = charge[0]
89         plt.plot(x, y, 'o', color="#FF0000" if charge[1] >
            0 else "#0000FF")
90
91     plt.show()

```

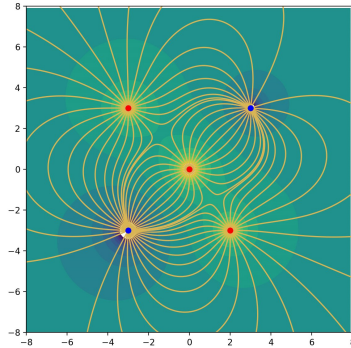
В результате работы программы получим следующие примеры (желтым показаны силовые линии):



(a) Два точечных заряда



(b) Три точечных заряда



(c) Пять точечных зарядов

Рис. 4. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Так же были построены векторные поля электрических полей с разным количеством точечных зарядов (Приложение).

Исходные коды можно посмотреть на [GitHub](#) (кликабельно).

6 Вывод

В результате работы была создана программа, позволяющая визуализировать силовые линии и эквипотенциальные поверхности системы нескольких зарядов. Получаемые результаты сходятся с теоретическими ожиданиями, благодаря чему можно сделать вывод, что программа работает корректно.

Таким образом, создание данной программы позволяет упростить процесс визуализации силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

7 Приложение

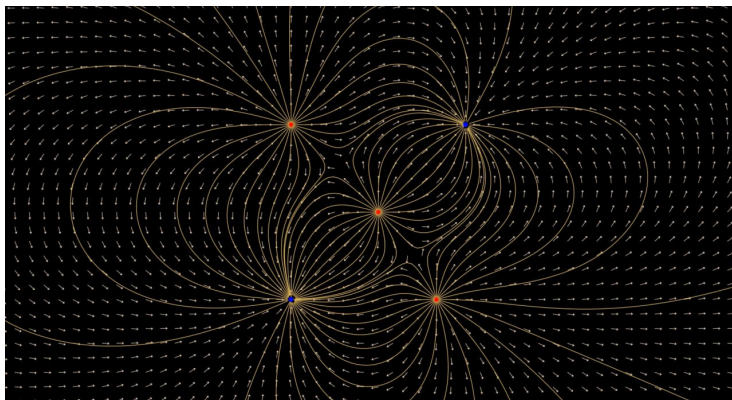


Рис. 5. Векторное поле для 5 точечных зарядов

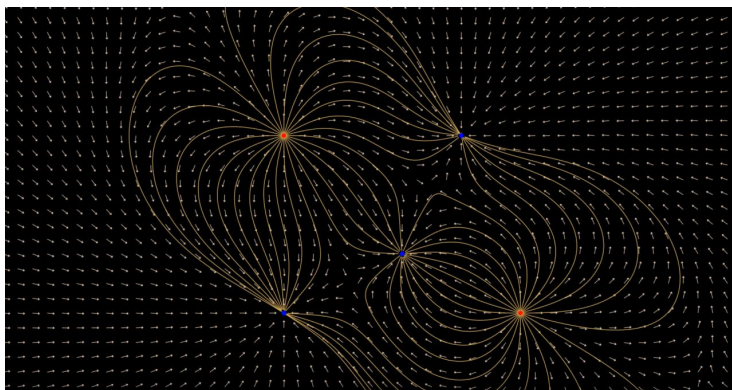


Рис. 6. Векторное поле для 5 точечных зарядов

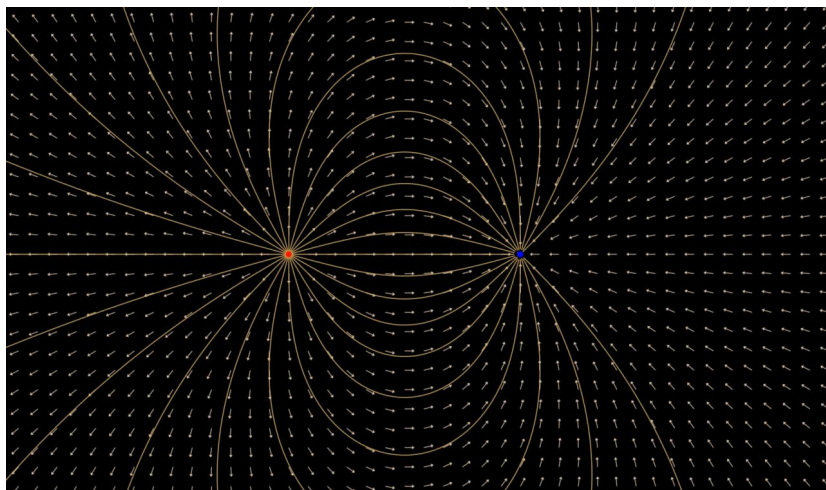


Рис. 7. Векторное поле для 2 точечных зарядов