בס"ד

מגישות:
עדן כהן, 212991640
שיר כהן, 207365024

עבודה במתמטיקה

שאלה 1

הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

בסיס האינדוקציה -

$n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} 1(\overset{2}{1+1})(\overset{3}{1+2}) = \frac{1(1+1)(\overset{3}{1+2})(\overset{4}{1+3})}{4}$$

$$6 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}$$

$$\frac{24}{4} = 6$$

$$\checkmark \quad 6 = 6$$

* הנחת נכונות הטענה עבור k, כלומר מתקיים -

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

ונרצה להוכיח שהדבר מתקיים עבור $n=k+1$ (שלב האינדוקציה)

כלומר נרצה להוכיח שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

הצבת $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2) + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + \overset{4}{\diagup}(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

בס"ד

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)[k+4]}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

כלומר הגענו לכך ש - $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ ✓

הוכחנו -

* בסיס האינדוקציה מתקיים

* שלב האינדוקציה מתקיים

↓

הטענה נכונה

שאלה 2

הוכיחו באינדוקציה כי לכל מספר טבעי n גדול מ-3 מתקיים:

$$n^2 - 7n + 12 \geq 0.$$

צ"ל שלכל $n>3$ מתקיים $n^2-7n+12 \geq 0$

בסיס האינדוקציה - $n=4$

$4^2-7\cdot4+12 \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0$ ✓

* הנחת נכונות הטענה עבור k כלומר מתקיים $k^2-7k+12 \geq 0$

ונרצה להוכיח שהדבר מתקיים עבור $n=k+1$ (שלב האינדוקציה)

$$(k+1)^2-7\cdot(k+1)+12 \overset{?}{\geq} 0$$

$$k^2+2k+1-7k-7+12 \overset{?}{\geq} 0$$

$$\underbrace{k^2-7k+12}_{\text{מתקיים}} + 2k-6 \geq 0 \checkmark$$

מתקיים ≥ 0 עפ"י הנחת האינדוקציה

k חייב להיות גדול מ-3 ולכן $2k-6 \geq 0$

הוכחנו -

* בסיס האינדוקציה מתקיים

* שלב האינדוקציה מתקיים

↓

הטענה נכונה

בס"ד

שאלה 3

הוכיחו באינדוקציה כי לכל מספר טבעי n, 21 מתחלק ב: $4^{n+1}+5^{2n-1}$

בסיס האינדוקציה: $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ $(n=1)$

$$4^{1+1}+5^{2\cdot 1-1}=4^2+5^1=16+5=21$$

$$\downarrow$$

$$21 \% 21=0 \quad \checkmark$$

* הנחת נכונות הטענה עבור k, כלומר מתקיים ש- $4^{k+1}+5^{2k-1}$ מתחלק ב- 21

ונרצה להוכיח שהדבר מתקיים עבור $n=k+1$ (שלב האינדוקציה)

$$4^{k+2}+5^{\overbrace{2(k+1)-1}^{2k+2}}=4^{k+2}+5^{2k+1}$$

כלומר נרצה להראות ש- $4^{k+2}+5^{2k+1}$ מתחלק ב- 21

$$4^{k+1}\cdot 4+5^{2k-1}\cdot \overset{(5^2)}{25}=4^{k+1}\cdot 4+5^{2k-1}\cdot(21+4)$$

$$4^{k+1}\cdot 4+21\cdot 5^{2k-1}+4\cdot 5^{2k-1}=4\underbrace{(4^{k+1}+5^{2k-1})}_{\text{מתחלק ב-21 לפי הנחת האינדוקציה והכפלה ב-4 לא משנה זאת.}}+\underbrace{21\cdot 5^{2k-1}}_{\text{אם שמורכב מ-21 כפול.. מתחלק ב-21}} \quad \checkmark$$

הוכחנו -

* בסיס האינדוקציה מתקיים

* שלב האינדוקציה מתקיים

$\downarrow$

הטענה נכונה

שאלה 4

תהי $\Sigma=\{0,1\}$ א"ב של שפות L_1 ו- L_2 הבאות:

$L_1 = \{ w: |w| \%2 = 0 \}$

$L_2 = \{ w: |w| = 3k, k \geq 0 \}$

$L_3 = L_1 \circ L_2$

הוכיחו (**ע"י הכלה דו - כיוונית**) :

$L_3 = L_1 \circ L_2 = \{ w: |w| \neq 1 \}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$L_1 = \{w: |w| \% 2 = 0\}$ כל המילים באורך זוגי

$L_2 = \{w: |w| = 3k, k \geq 0\}$ כל המילים שאורך כפולה של 3

$L_3 = L_1 \circ L_2$

צריך להוכיח ע״י הכלה דו כיוונית ש. $L_3 = L_1 \circ L_2 = \{w: |w| \neq 1\}$

* כלומר, במילים אחרות צריך להוכיח שמתקיים $L_3 = L_1 \circ L_2 \subseteq \{w: |w| \neq 1\}$

וגם שמתקיים $\{w: |w| \neq 1\} \subseteq L_3 = L_1 \circ L_2$

$L_3 = L_1 \circ L_2 \rightarrow L_3 = \{w: |w| \% 2 = 0\} \circ \{w: |w| = 3k, k \geq 0\}$

$L_3 = \{w_1 w_2 : |w_1| \% 2 = 0 \wedge |w_2| = 3k, k \geq 0\}$

* $L_3 = L_1 \circ L_2 \subseteq \{w: |w| \neq 1\}$:

ניקח $w \in L_3$ ונרצה להראות ש- $w \in \{w: |w| \neq 1\}$

$w \in L_3 \rightarrow w \in \{w_1 w_2 : |w_1| \% 2 = 0 \wedge |w_2| = 3k, k \geq 0\}$

$w \in \{w: |w| \neq 1\}$

מהגדרה לא באורך אחד כי הוא שרשור של חיבור מס זוגי
ביחד עם כפולה של 3. מוכרח השרשור של שניהם מיוחד
לא באורך 1 (לא יתכן) ולכן שייכת גם לקבוצת המילים
שאורכן שונה מ-1

$L_3 = L_1 \circ L_2 \subseteq \{w: |w| \neq 1\}$ ✓

* $\{w:|w|\neq 1\} \subseteq L_3 = L_1 \circ L_2$:

נוכיח בשלילה.

נניח ש- $\{w:|w|=1\} \subseteq L_3$. אם האורך של המילה שווה 1 ($|w|=1$) אז
המילה היא באורך אי זוגי וכן לא באורך כפולה של 3.

הנ"ל סתירה להנחה ולכן הטענה המקורית נכונה - $\{w:|w|\neq 1\} \subseteq L_3$

$$\downarrow$$

$$\{w:|w|\neq 1\} \subseteq L_3 = L_1 \circ L_2 \quad \checkmark$$

* הוכחנו ש- $L_3 = L_1 \circ L_2 \subseteq \{w:|w|\neq 1\}$ וכן ש- $\{w:|w|\neq 1\} \subseteq L_3 = L_1 \circ L_2$
כלומר הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן קיים שיוויון ← הטענה נכונה.

שאלה 5

יהי Σ א"ב כלשהו, ותהיינה L_1, L_2, L שפות כלשהן מעל הא"ב Σ.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם מתקיים שוויון, או שמתקיימת הכלה בכיוון אחד בלבד, או שלא מתקיימת הכלה באף כיוון. עבור כל טענה של שוויון או הכלה עליכם להוכיח את תשובתכם.

עבור כל טענה שאין הכלה, יש לספק דוגמה נגדית.

א. $(L \cup \{\varepsilon\})^* = L^*$

ב. $L^* = (L^+)^+$

ג. $(L1 \cap L2)^* \subseteq (L1^*) \cap (L2^*)$

ד. $\Sigma^* = \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

(א)

$(L \cup \{\varepsilon\})^* \overset{?}{=} L^*$

$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} = \{L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots\} = \{\varepsilon \cup L^1 \cup L^2 \ldots\}$

$(L \cup \{\varepsilon\})^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} (L \cup \underset{\substack{\uparrow \\ L^0 = \{\varepsilon\}}}{\{\varepsilon\}})^i = \bigcup_{i=0}^{\infty} (L \cup L^0)^i = L^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (L - L^0)^i = L^0 \cup (L - \{\varepsilon\})^i =$

הוצאת L^0 החוצה

$L^0 \cup \underbrace{(L - \{\varepsilon\})^i}_{L^+} = L^0 \cup L^+ = L^*$

כי i מתחיל מ-1 עד ∞

מתקיים <u>שיוויון</u>: $\{L \cup \{\varepsilon\}\}^* = L^*$

(ב)

$L^* = (L^+)^+$

$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = \{L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots\} = \{\varepsilon \cup L^1 \cup L^2 \ldots\}$

$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = \{L^1 \cup L^2 \ldots\}$

$\{L^1 \cup L^2 \cup \ldots\}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{L^1 \cup L^2 \cup \ldots\}^i$

ניקח $w \in (L^+)^+$. נאמר שבהכרח $w \in L^*$.

הדבר לא מתקיים הפוך משום שלא קיימות לנו מילים ריקות.

משמע מתקיים <u>הכלה לכיוון אחד</u> בלבד- $(L^+)^+ \subseteq L^*$

בס"ד

ג)

$(L_1 \cap L_2)^* \subseteq (L_1^*) \cap (L_2^*)$

ניקח $w \in (L_1 \cap L_2)^*$ לכן קיים $n \geq 0$ כך ש- $w \in (L_1 \cap L_2)^*$

* נחלק למקרים:

- אם $n=0$ אז $w=\varepsilon$. $\varepsilon \in (L_1 \cap L_2)^*$. כמו כן, $\varepsilon \in L_1^* \wedge \varepsilon \in L_2^*$

$\downarrow$

$\varepsilon \in L_1^* \cap L_2^*$

- אם $n \neq 0$ אז נאמר שקיים $w \in L_1 \cap L_2$ כך שמתקיים ש- $w_i \in (L_1 \cap L_2)^*$,
כלומר הסגור מאפשר חזרה על מילים מהשפה מס פעמים $w_1 w_2 \dots w_n \in (L_1 \cap L_2)^*$.
משמע מתקיים שהרצף יכול להופיע גם ב- L_1^* וגם ב- L_2^*.
אם $w_1 w_2 \dots w_n \in L_1^* \wedge w_1 w_2 \dots w_n \in L_2^*$ ניתן לומר ש-
$w_1 w_2 \dots w_n \in L_1^* \cap L_2^*$ [כלומר הוא איבר שלהם]
-הכוונו ש- $w_i \in (L_1 \cap L_2)^*$ שייכת גם ל- $L_1^* \cap L_2^*$ ומכאן שניתן להגיד
ש- $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$.

$(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^*)$, מהגדרת החיתוך קיים מוכל ב- L_1^*.
הדבר מתקיים גם עבור L_2^* ← $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_2^*$.
אם מוכל גם ב- L_1^* וגם ב- L_2^* מוכל גם בחיתוך ← $((L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$

③ $\Sigma^* = \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

* נראה הכלה לשני הכיוונים ע"מ להראות שיוויון. כלומר $\Sigma^* \subseteq \Sigma^* \cdot \Sigma^*$ וגם $\Sigma^* \cdot \Sigma^* \subseteq \Sigma^*$

כיוון אחד: $\Sigma^* \subseteq \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

ניקח $w \in \Sigma^*$, נניח שקיים $k \in \mathbb{N}$ כלשהו כך ש- $w \in \Sigma^k$

ניקח $i, j \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $k = i + j$ ולכן מתקיים $w \in \Sigma^{i+j}$

$w \in \Sigma^{i+j} \rightarrow w \in \Sigma^i \cdot \Sigma^j \rightarrow w \in \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

הראנו שעבור $w \in \Sigma^*$ מתקיים $w \in \Sigma^* \cdot \Sigma^*$ ולכן $\Sigma^* \subseteq \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

כיוון שני: $\Sigma^* \cdot \Sigma^* \subseteq \Sigma^*$

ניקח $w \in \Sigma^* \cdot \Sigma^*$, נניח שקיימים $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש- $w \in \Sigma^i \cdot \Sigma^j$

ניקח $k \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $k = i + j$ ולכן מתקיים $w \in \Sigma^k$

$w \in \Sigma^k \rightarrow w \in \Sigma^*$

הראנו שעבור $w \in \Sigma^* \cdot \Sigma^*$ מתקיים $w \in \Sigma^*$ ולכן $\Sigma^* \subseteq \Sigma^* \cdot \Sigma^*$

בס"ד

שאלה 6

תנו דוגמאות לשפה L כך שמתקיים:

1. $L^{*} = L^{+}$
2. $L^{*} \neq L^{+}$
3. $L = L^{*}$
4. $L \neq L^{*}$
5. L^{*} סופית

1. $L^{*} = L^{+}$

דוגמא - $L = \{\varepsilon, a, b\}$

$$L^{*} = L^{+} \quad \begin{cases} L^{*} = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, \ldots\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{i} \\ L^{+} = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^{i} \end{cases}$$

2. $L^{*} \neq L^{+}$

דוגמא - $L = \{0, 1\}$

$$L^{*} \neq L^{+} \quad \begin{cases} L^{*} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, \ldots\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{i} \\ L^{+} = \{0, 1, 00, 01, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^{i} \end{cases}$$

3. $L = L^{*}$

דוגמא - $L = \{\varepsilon\}$

$$L^{*} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{i} = \{L^{0} \cup L^{1} \cup L^{2} \ldots\} = \{\varepsilon\}$$

בס״ד

4. $L \neq L^*$

דוגמא.

$L = \{a, b\}$

$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = \{\varepsilon, a, b, aa, \dots\}$

5. L^* סופית

דוגמא.

$L = \phi$

$L^* = \{\varepsilon\}$

שאלה 7

הוכיחו (**ע"י הכלה דו - כיוונית**) :

אם $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ וגם $\varepsilon \in L_1$, אזי $(L_1 \cup L_1L_2)^* = L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

טענת עזר $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$.

עלינו להוכיח שאם $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ו- $\varepsilon \in L_1$ אז $(L_1 \cup L_1L_2)^* = L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

* בהוכחה נדרש להוכיח שני הכיוונים, כלומר ש- $(L_1 \cup L_1L_2)^* \subseteq L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

וגם ש- $L_1(L_1 \cup L_2L_1)^* \subseteq (L_1 \cup L_1L_2)^*$

כיוון ראשון - $(L_1 \cup L_1L_2)^* \subseteq L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

$\forall w \in (L_1 \cup L_1L_2)^* \wedge \varepsilon \in L_1 \to w \in ((L_1 \cup L_1L_2)L_1)^*$

מטענת העזר הנתונה משאלה $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$

$w \in (L_1L_1 \cup L_1L_2L_1)^*$

$w \in (L_1(L_1 \cup L_2L_1))^*$

$\exists n \ge 0 : w = x_1x_2\ldots x_n$ where $x_i \in (L_1(L_1 \cup L_2L_1))$

$\forall 1 \le i \le n : x_i \in (L_1(L_1 \cup L_2L_1)) \subseteq (L_1 \cup L_2L_1)(L_1 \cup L_2L_1) = (L_1 \cup L_2L_1)^2 \subseteq (L_1 \cup L_2L_1)^*$

$(L_1 \cup L_2L_1)^* = \{(L_1 \cup L_2L_1)^0 \cup (L_1 \cup L_2L_1)^1 \cup (L_1 \cup L_2L_1)^2 \cup \ldots\}$

$\to w = x_1x_2\ldots x_n$ where $x_i \in (L_1 \cup L_2L_1)^* \to w \in (L_1 \cup L_2L_1)^*$

$w \in (L_1 \cup L_2L_1)^* \wedge \varepsilon \in L_1 \to w \in L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

-כלומר לקחנו מילה ששייכת ל-$(L_1 \cup L_1L_2)^*$

והראנו שגם $w \in L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$-ש כלומר הוכחנו מההכלה שמתקיים

$$(L_1 \cup L_1L_2)^* \subseteq L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$$

כיוון שני - $L_1(L_1 \cup L_2L_1)^* \subseteq (L_1 \cup L_1L_2)^*$

$\forall w \in L_1(L_1 \cup L_2L_1)^*$

$\exists n \geq 0 : w = yx_1x_2 \dots x_n$ where $y \in L_1, x_i \in (L_1 \cup L_2L_1)$

$w = yx_1x_2 \dots x_n$ where $y, x_i \in (L_1 \cup L_2L_1) \rightarrow w \in (L_1 \cup L_2L_1)^*$

$(L_1 \cup L_2L_1)^* = \{(L_1 \cup L_2L_1)^0 \cup (L_1 \cup L_2L_1)^1 \cup \dots\}$

$w \in (L_1 \cup L_2L_1)^* \wedge \varepsilon \in L_1 \rightarrow w \in (L_1(L_1 \cup L_2L_1))^*$

מטענת העזר הנתונה מעלה -

$w \in (L_1L_1 \cup L_1L_2L_1)^* \quad \leftarrow \quad (L_1 \cup L_2)L = L_1L \cup L_2L$

$w \in ((L_1 \cup L_1L_2)L_1)^* \quad \leftarrow \quad L_1L \cup L_2L = L(L_1 \cup L_2)$

$w \in ((L_1 \cup L_1L_2)L_1)^*$

$\exists n \geq 0 : w = x_1x_2 \dots x_n$ where $x_i \in (L_1 \cup L_1L_2)L_1$

$\forall i \leq i \leq n : x_i \in (L_1 \cup L_1L_2)L_1 \subseteq (L_1 \cup L_1L_2)(L_1 \cup L_1L_2) = (L_1 \cup L_1L_2)^2 \subseteq (L_1 \cup L_1L_2)^*$

$w = x_1x_2 \dots x_n$ where $x_i \in (L_1 \cup L_1L_2)^* \rightarrow w \in (L_1 \cup L_1L_2)^2$

-כלומר לקחנו מילה ששייכת ל- $L_1(L_1 \cup L_2 L_1)^*$

והראנו גם ש- $w \in (L_1 \cup L_1 L_2)^*$ כלומר הוכחנו מההכלה שמתקיים

$$L_1(L_1 \cup L_2 L_1)^* \subseteq (L_1 \cup L_1 L_2)^*$$

* הכחנו הכלה דו כיוונית ולכן קיים שיוויון ← הטענה נכונה.

מ.ש.ל