עבודת הגשה 3 אוטומטים

מגישות:
עדן כהן, 212991640
שיר כהן, 207365024

<u>שאלה 1</u> (15 נק')

נתונה שפה L מעל ה - א"ב { a, b } :

$$L = \{ w \mid w = xaa , x \in \Sigma^* \}$$

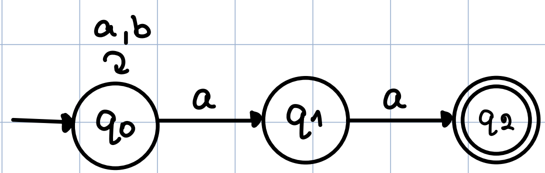
א. (**5 נק'**) בנה אוטומט סופי *לא דטרמיניסטי* המקבל את השפה L .

ב. (**10 נק'**) בנה אוטומט סופי *לא דטרמיניסטי* המקבל את השפה L^*.

$\Sigma = \{a,b\}$

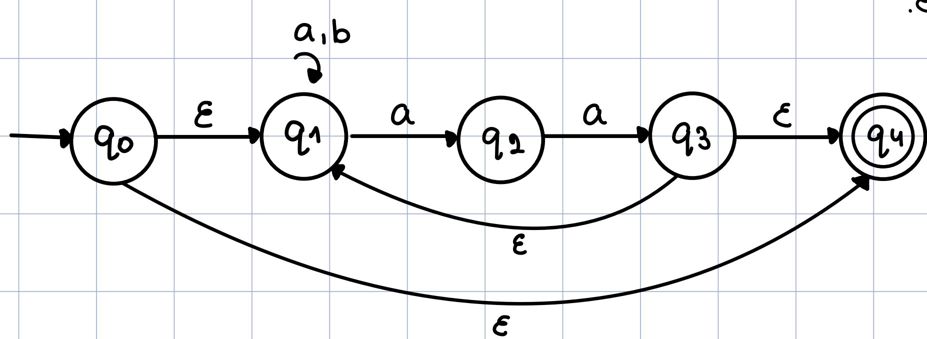
$L = \{w \mid w = xaa ,\ x \in \Sigma^*\}$

א) אוטומט סופי לא דטרמיניסטי המקבל את השפה L



ב) אוטומט סופי לא דטרמיניסטי המקבל את השפה L^*

עבור L^* האוטומט יכול להגיע
למצב מקבל גם עבור ε.



מבס"ד

שאלה 2 (20 נק' = 5 נק' x 4)

Give regular expressions that generate each of the following languages.

In all cases, the alphabet is $\Sigma = \{ a, b \}$.

a). $L = \{ w \mid$ w contains at least two a's, **or** exactly two b's $\}$.

b). $L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w ends in a double letter $\}$.

A string contains a double letter if it contains aa or bb as a substring.

c). $L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w does not end in a double letter $\}$.

d). $L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w contains *exactly one* double letter $\}$.

For example: baaba has exactly one double letter, but baaaba has two double letters.

$\Sigma = \{a, b\}$

ⓐ $L = \{w \mid w$ contains at least two a's, or exactly two b's$\}$

$L = \{w \mid \#a(w) \geq 2$ OR $\#b(w) = 2\}$

$\#a(w) \geq 2 \rightarrow b^* a b^* a (a|b)^*$

$\#b(w) = 2 \rightarrow a^* b a^* b a^*$

$L = b^* a b^* a (a|b)^* \mid a^* b a^* b a^*$

ⓑ $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ ends in a double letter$\}$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = xaa$ OR $w = xbb, x \in \Sigma^*\}$

$xaa \rightarrow (a|b)^* aa$

$xbb \rightarrow (a|b)^* bb$

$\rightarrow L = (a|b)^* aa \mid (a|b)^* bb = (a|b)^* (aa|bb)$

בס״ד

(c) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ doesn't end in a double letter}\}$

$\downarrow$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = xa \text{ OR } w = xb \text{ , } x \in \Sigma^*\}$

כלומר מסתיימת ב- b/a
ולפני לא יכולה לבוא אות זהה

$$\left.\begin{aligned} xa &\rightarrow (a|b)^*(ba)|a^* \\ xb &\rightarrow (a|b)^*(ab)|b^* \end{aligned}\right\} \rightarrow L = (a|b)^*(ba)|a^*|(a|b)^*(ab)|b^*$$

(d) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contains exactly } \underline{\text{one}} \text{ double letter}\}$

$\downarrow$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \#aa(w) = 1 \text{ OR } \#bb(w) = 1\}$

$\#aa(w) = 1 \rightarrow b^*(ab)^*aa(ba)^*b^*$

$\#bb(w) = 1 \rightarrow a^*(ba)^*bb(ab)^*a^*$

$\downarrow$

$L = b^*(ab)^*aa(ba)^*b^* | a^*(ba)^*bb(ab)^*a^*$

בס״ד

שאלה 3 (10 נק')

נתונה שפה L מעל ה - א"ב { 0, 1 } :

$$L = \{\, w \mid \#0(w) \geq 2 \ \ OR\ \ \#1(w) = 1 \,\}$$

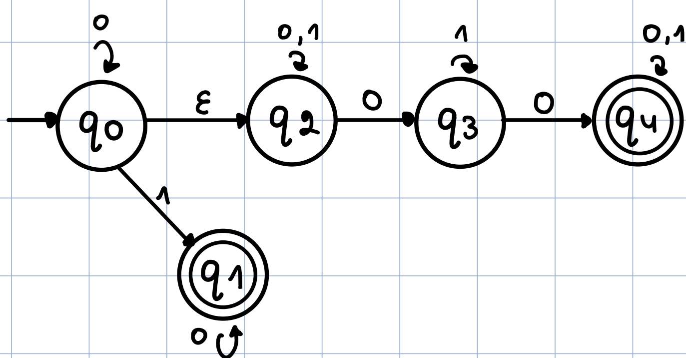
בנה אוטומט סופי *לא דטרמיניסטי* המקבל את השפה L .

$\Sigma = \{0,1\}$

$L = \{w \mid \#0(w) \geq 2 \text{ OR } \#1(w) = 1\}$

קבוצת כל המילים מעל האל"ב ש-0 מופיע לפחות פעמיים במילה או ש-1 מופיע פעם אחת.

נבנה אוטומט סופי לא דטרמיניסטי המקבל את השפה L -



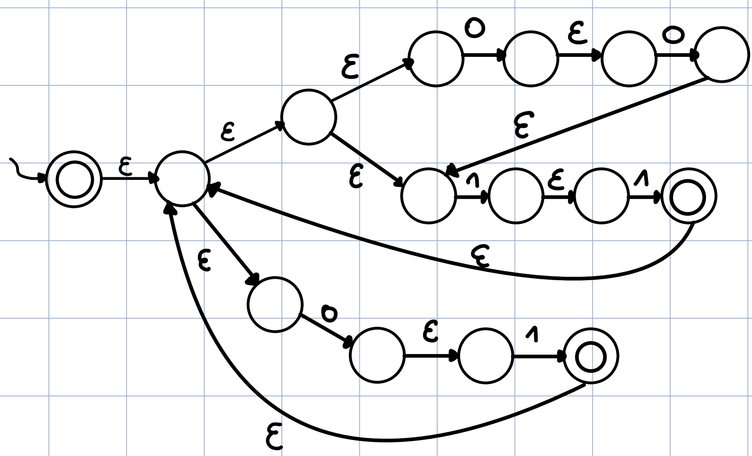
בס"ד

שאלה 4 (10 נק')

בנה אוטומט סופי *לא דטרמיניסטי* NFA *אם מעברי* ε עבור ביטוי רגולרי הבא :

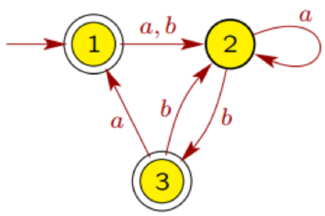
$$((00)^* (11) \cup 01)^*$$

ע"פ ***האלגוריתם Thompson***.



שאלה 5 (10 נק')

נתון אוטומט *סופי דטרמיניסטי* המקבל שפה L מאל א"ב { a, b } :



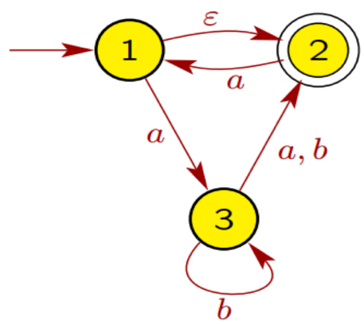
בנה ביטוי רגולרי r כך ש - L(r) = L.

$r = \varepsilon \cup (a \cup b)(a \cup bb \cup ba(a \cup b))^*(b \cup ba)$

בס"ד

שאלה 6 (15 נק')

נתון אוטומט סופי *לא דטרמיניסטי* **A** :



בנה אוטומט *סופי דטרמיניסטי* **M** שקול לאוטומט סופי לא דטרמיניסטי **A**

מדובר ב- NFA עם מעברי ε. קודם נעבור ל- NFA ללא מעברי אפסילון ורק לאחר מכן נעבור ל- DFA.

$\Sigma = \{a, b\}$

עבור $q = 1, 2, 3$:

$$\hat{\delta}(q,\sigma) = E(\delta(E(q),\sigma)) \quad \begin{cases} E(1) = \{1, 2\} \\ E(2) = \{2\} \\ E(3) = \{3\} \end{cases}$$

$$\hat{\delta}(1,a) = E(\delta(E(1),a)) = E(\delta\{1,2\},a) = E(1,3) = \{1,2,3\}$$
$$\hat{\delta}(1,b) = E(\delta(E(1),b)) = E(\delta\{1,2\},b) = E(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

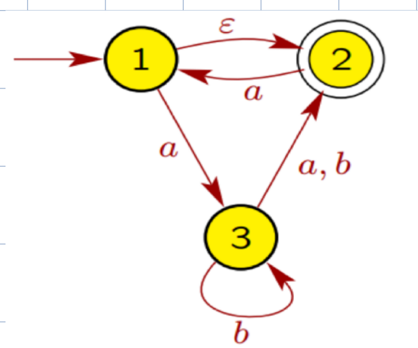
$$\hat{\delta}(2,a) = E(\delta(E(2),a)) = E(\delta\{2\},a) = E(1) = \{1,2\}$$
$$\hat{\delta}(2,b) = E(\delta(E(2),b)) = E(\delta\{2\},b) = E(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

בס״ד

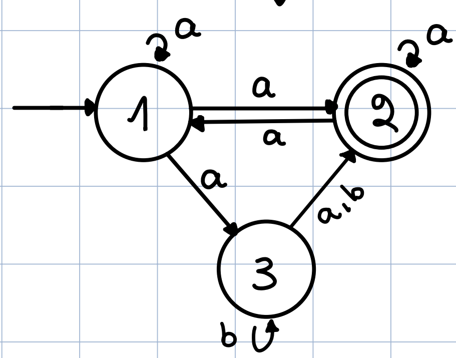
$\hat{\delta}(3,a) = E(\delta(E(3),a) = E(\delta(\{3\},a) = E(2) = \{2\}$

$\hat{\delta}(3,b) = E(\delta(E(3),b) = E(\delta(\{3\},b)) = E(2,3) = \{2,3\}$

NFA עם מעברי אפסילון

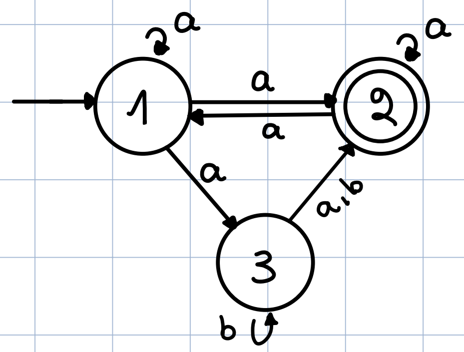


NFA ללא מעברי אפסילון



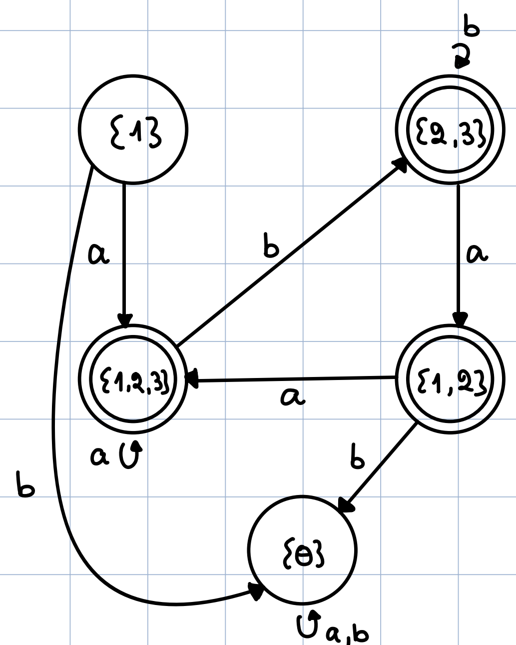
ע״מ לעבור לאוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA) נבנה טבלה בה נגדיר את המעברים של ה-NFA

בס״ד



	a	b
→{1}	{1,2,3}*	{∅}
{1,2,3}*	{1,2,3}*	{2,3}*
{2,3}*	{1,2}*	{2,3}*
{1,2}*	{1,2,3}*	{∅}
{∅}	{∅}	{∅}

DFA



בס״ד

שאלה 7 (20 נק' = 5 נק' x 4)

For each of the following languages :

If it is regular, describe a regular expresion for it , if it is non regular *prove it using the pumping lemma*.

1. $L = \{ w \mid w = a^{n!}, n \geq 0 \}$
2. $L = \{ w \mid w = a^n b^l c^k , k \neq n + l \}$
3. $L = \{ wtw \mid w, t \in \{0, 1\}^+ \}$
4. $L = \{ w \mid w = x^n y^m, (m + n) \% 2 = 0 \}$

1. $L = \{ w \mid w = a^{n!}, n \geq 0 \}$

נניח בשלילה ש-L היא רגולרית ויהי קבוע הניפוח $p \geq 1$.

לפי למת הניפוח נקבל:

$$w = a^{p!}$$

$$w = xyz \;,\; x,z \in \Sigma^* ,\; y \in \Sigma \;,\; |xy| \leq p \;,\; |y| \geq 1 \;,\; \forall i \geq 0 \;\; xy^iz \in L$$

$$x = a^{\alpha} ,\; \alpha \geq 0 ,\; y = a^{\beta} ,\; \beta \geq 1 ,\; z = a^{p! - \alpha - \beta}$$

$$xy^iz = a^{\alpha} \cdot a^{i\beta} \cdot a^{p! - \alpha - \beta} = a^{p! + (i-1)\beta}$$

$$\text{אזי } i = 2 \rightarrow a^{p! + (2-1)\beta} = a^{p! + \beta}$$

$$p! \underset{\beta \geq 1 \text{ כי}}{<} p! + \beta \underset{\beta \leq p}{\leq} p! + p < (p+1)! = p! + (p+1)$$

$p!+\beta$ נמצא בין $p!$ לבין $p!+(p+1)$ שהם שני מס' עצרת עוקבים.

כלומר הגענו למצב ש- $p!+\beta$ לא מקיים את תכונת העצרת ולכן לא שייך לשפה. סתירה ללמת הניפוח.

$$a^{p!+\beta} \notin L$$

לא מדובר בביטוי רגולרי

בס"ד

2 $L=\{w \mid w=a^n b^l c^k ,k \neq n+l\}$

נניח בשלילה ש-L היא רגולרית. אם L רגולרית מהכפת גם $\bar{L}$ רגולרית (שפות רגולריות סגורות תחת השלמה).

$\bar{L}=\{w \mid w=a^n b^l c^k \mid k=n+l\}$

$$\downarrow$$

$a^n b^l c^{n+l} \in L$

יהא קבוע הניפוח $p \geq 1$. לפי למת הניפוח נקבל:

$w=xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$, $\forall i \geq 0$ $xy^i z \in L$

$w=a^p b^p c^{2p} \in L$

$y=a^k$ $1 \leq k \leq p$ $\rightarrow$ $x=a^{p-k}$, $z=b^p c^{2p}$

$a^{p-k} a^k b^p c^{2p} = a^p b^p c^{2p} \checkmark \in L$

$i=0$ אם $\rightarrow w=xy^0z \rightarrow x\varepsilon z = xz = a^{p-k} b^p c^{2p} \notin L$

סתירה ללמת הניפוח, לכן מדובר מביטוי רגולרי (וכך גם המשלים שלו שהוא הביטוי המקורי).

(3) $L=\{wtw \mid w,t\in\{0,1\}^+\}$

נניח בשלילה ש-L היא רגולרית.

לפי למת הניפוח יהא מקדם הניפוח $p\geq 1$ ועבור כל $w\in L$.

כאשר מתקיים:

$$|w|\geq p,\ w=xyz,\ |xy|\leq p,\ |y|\geq 1,\ \forall i\geq 0\ \ xy^iz\in L$$

נבחר $0^j0^k0^m10^p \leftarrow 0^{j+k+m}10^p$ כאשר $j+k+m=p$

אם $i=2=xy^2z=0^j\underbrace{0^k0^k}_{y^2}0^m10^p=0^{p+k}10^p$ $\qquad 0^{p+k}10^p\notin L$

סתירה ללמת הניפוח. הביטוי אינו רגולרי.

(4) $\{w \mid w=x^ny^m,\ (m+n)\%2=0\}$

מדובר בביטוי רגולרי, להלן ביטוי רגולרי עבור L:

$$(xx)^*(yy)^* \mid (xx)^*x(yy)^*y$$

או שמדובר במילה ריקה
או נבנה זוגי עבור כל
אחד מהם

או שמדובר מבנה
אי זוגי עבור כל אחד
מהם שביחד יוצרו זוגי.