עבודת בית 4

תאריך הגשה: 01.06.2015, 12:00 בצהריים, תא מספר 95 או 96 בקומת כניסה של בניין 37.
מתרגל אחראי: אוהד בן ברוך.
הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה.
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.
- אם אתם נדרשים להוכיח טענה ואתם מוכיחים **במקומה** טענה אחרת שקולה, עליכם לנסח הטענה השנייה ולציין שהיא שקולה לטענה המקורית (יש לנמק זאת אם השקילות אינה טריוויאלית).
- כל **מונח** שאתם משתמשים בו חייב להיות מוגדר היטב: אם הוא לא הוגדר בקורס אחר או בקורס זה עליכם להגדיר אותו בעבודה.
- במידה ואתם רוצים להסתמך על משפט שהוכח בהרצאה יש לצטט אותו במדויק בדף התשובות. רק אז ניתן להשתמש בו בהוכחות.
- אנא זכרו להגיש את העבודה סרוקה ב- submission system בנוסף לתא.

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, $w:E\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציית משקל על הקשתות, ו-$s\in V$ צומת מקור. לכל $v\in V$ נסמן ב-$\delta(s,v)$ את משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-v בגרף G.
נתונה פונקציה $f:V\rightarrow\mathbb{R}$. תארו אלגוריתם הבודק האם $f(v)=\delta(s,v)$ לכל $v\in V$. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V|+|E|)$.
הדרכה: ניתן להניח כי כל הצמתים בגרף נגישים מ-s.

שאלה 2

בכיתה ראינו מימוש מבוסס Relax של אלגוריתם Bellman-Ford המעדכן מערך חד מימדי d.
ניתן לממש את Bellman-Ford גם כאלג' תכנון דינאמי בו תת-הבעיה האופיינית מיוצגת ע"י:
$OPT(v,i)$ – משקל מסלול קל ביותר מצומת s לצומת v באורך (=מס' הקשתות) של לכל היותר i.

א. נסחו נוסחת מבנה לחישוב $OPT(v,i)$.

ב. הציגו אלגוריתם איטרטיבי לחישוב $\delta(s,v)$ לכל $v\in V$ על בסיס הנוסחה בסעיף 1.
הדרכה: במידה וקיים מעגל עם משקל שלילי נגיש מ-s, על האלגוריתם להחזיר "קיים מעגל שלילי ב-G". אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם.

ג. נסתכל על ריצה של אלגוריתם בלמן-פורד. הוכיחו כי לכל i הערכים $d(v)$ שחושבו אחרי i סיבובים של האלגוריתם מקיימים $d(v)\leq OPT(v,i)$..

ד. הראו כיצד סעיף 3 מבטיח את נכונות אלג' Bellman-Ford במימוש שהוצג בכיתה.
הדרכה: ניתן להניח כי בגרף לא קיים מעגל במשקל שלילי הנגיש מ-s.

שאלה 3

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון.
ידוע כי קיים צומת ממנו ניתן להגיע לכל הצמתים בגרף. תארו אלגוריתם המוצא סדר על הצמתים, כך שבהסרת צמתי הגרף לפי הסדר, בכל שלב קיים צומת אשר ממנו ניתן להגיע לכל הצמתים בשארית הגרף שנותרה. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V| + |E|)$.

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון, $s \in V$ צומת, ו-$w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ פונקצית משקל אי-שלילית.
תארו אלגוריתם אשר מחשב לכל $v \in V$ את משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-v מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-v. כלומר, אם מספר הקשתות במסלול קצר ביותר מ-s ל-v הוא k, אנו מחפשים את המסלול הקל ביותר מאלו שאורכם k. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|E| + |V| \log|V|)$.

שאלה 5

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון.
תארו אלגוריתם המחשב קבוצה $U \subseteq V$ מגודל מקסימלי כך שקיים מסלול מכוון (לא בהכרח פשוט) העובר דרך כל צמתי U. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V| + |E|)$.

הדרכה: ניתן לעשות שימוש (ללא הוכחת נכונות) באלג' למציאת מסלול כבד ביותר בצמתים בגרף מכוון חסר מעגלים בעל זמן ריצה של $O(|V| + |E|)$.
מסלול כבד ביותר בצמתים - בהינתן גרף מכוון חסר מעגלים $G = (V, E)$ ופונקצית משקל על צמתי הגרף $w: V \rightarrow \mathbb{R}$, מסלול כבד ביותר בצמתים בגרף הוא מסלול P כך שסכום משקלי הצמתים ב-P מקסימלי מבין כל המסלולים הקיימים בגרף. כלומר, לכל מסלול בגרף P' מתקיים:

$$\sum_{v \in P} w(v) \geq \sum_{v \in P'} w(v)$$

בהצלחה!