תכנון אלגוריתמים תרגיל 4 – דף תשובות

אנא הגישו רק חלק זה. <u>אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה!</u>

ציון	

שאלה 1

תיאור האלגוריתם

1) אם $f(s)\neq 0$ החזר "לא". אחרת $S\leftarrow\emptyset$

2) לכל $v\in V$ (חוץ מ-s):

אם $f(v)\neq \min_{(u,v)\in E}\{f(u)+w(u,v)\}$ החזר "לא".

אחרת $S\leftarrow S\cup\{(u,v)\}$ כך ש $f(v)=\min_{(u,v)\in E}\{f(u)+w(u,v)\}$.

3) בנה את $G'=(V,S)$. אם קיים קודקוד שלא ניתן להגיע אליו מ-s ב-G', החזר "לא".

4) החזר "כן".

הוכחת נכונות האלגוריתם

<u>משפט נכונות:</u> האלג' מחזיר "כן" $\Leftrightarrow$ $f(v)=\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

<u>טענת עזר 1:</u> אם קיים $v\in V$ כך ש $f(v)<\delta(s,v)$ האלג' יחזיר "לא".

<u>טענת עזר 2:</u> אם לכל $v\in V$ מתקיים $f(v)\geq\delta(s,v)$ אזי כל $v\in V$ עבורו $f(v)\neq\delta(s,v)$ אינו נגיש מ-s ב-G'.

<u>טענת עזר 3:</u> לכל קשת (u,v) מתקיים $\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+w(u,v)$.

<u>הוכחת המשפט באמצעות טענות העזר:</u>

$\Leftarrow$: נניח כי האלג' החזיר "כן" אזי מט.ע. 1, לכל $v\in V$ מתקיים $f(v)\geq\delta(s,v)$. כמו כן, כל $v\in V$ נגיש מ-s ב-G', ולכן מט.ע 2 לא קיים $v\in V$ כך ש $f(v)\neq\delta(s,v)$, כלומר לכל $v\in V$, $f(v)=\delta(s,v)$.

⇐: נניח כי האלג' החזיר כן, אם האלג' החזיר לא בשלב 2, אז
קיים קודקוד $v\in V$ כך ש: $f(v) \neq \min_{(u,v)\in E} f(u)+w(u,v)$ בשלב 3
אז שמתקיים ש- $f(v) < \delta(s,v)$ ולכן בהכרח $\delta(s,v) \le \delta(s,u)+w(u,v)$
$\delta(s,u) < f(u)$ ולכן קיים $(u,a)\in E$ מאחרו $\delta(s,a) \neq f(a)$.
אם האלג' החזיר לא בשלב 3 אז קיים $v\in V$ שאינו נגיש מ-s ב-G'.
נתבונן במסלול הקל ביותר P מ-s אל v ב-G. בה"כ v הינו הקודקוד
הראשון ב-P שאינו נגיש מ-s ב-G'. תהי (u,v) הקשת האחרונה ב-P.
מכיוון ש-P הינו מסלול קל ביותר $\delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)$.
כמו כן u נגיש מ-s ב-G' ו-v אינו נגיש מ-s ב-G' ולכן בהכרח (u,v)
לא נמצאת ב-G'. כלומר $f(v) \neq f(u)+w(u,v)$ ולכן בהכרח מתקיים
$f(v)\neq\delta(s,v)$ או $f(u)\neq\delta(s,u)$.

הוכחת ט.א. 1: נניח כי קיים $v\in V$, כך ש $\delta(s,v) \neq f(v)$.
יהי P מסלול קל ביותר מ-s ל-v ב-G, ותהי (u,v) הקשת האחרונה
ב-P. בה"כ ניתן להניח כי v הוא הקודקוד הראשון ב-P המקיים את תנאי
השוויון הנ"ל. בהכרח $\delta(s,u)=f(u)$ ולכן כאשר האלג' יבחן את
(u,v) בשלב 2, יתקיים כי $f(v) > \delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v) \ge f(u)+w(u,v)$
והאלג' יחזיר לא.

הוכחת ט.א. 2: נניח כי קיים $v\in V$ כך ש $\delta(s,v) < f(v)$ ו-v נגיש מ-s
ב-G. כלומר קיים ב-G' מסלול P מ-s ל-v.
תהי (u,v) הקשת האחרונה ב-P. כיוון ש-(u,v) קשת ב-G' מתקיים
$f(v)=f(u)+w(u,v)$. בה"כ ניתן להניח כי v הוא הקודקוד הראשון ב-P
המקיים את תנאי השוויון הנ"ל. בהכרח $f(u)=\delta(s,u)$. בנוסף מ-ט.א.3
$\delta(s,v) \le \delta(s,u)+w(u,v)$. מכך
$f(v)=f(u)+w(u,v)=\delta(s,u)+w(u,v) \ge \delta(s,v) > f(v)$.
סתירה.

הוכחת ט.א. 3: קיים מסלול ב-G מ-s ל-v שמשקלו $\delta(s,u)+w(u,v)$
(המסלול הקל ביותר מ-s ל-u משורשר עם הקשת (u,v)). ולכן
$\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(u,v)$

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

שלב 1: $O(1)$
שלב 2: לולאה שרצה על G הקודקודים. בכל איטרציה עוברים על כל הצלעות שנכנסות לקודקוד $O(\|V\|+\|E\|)$
שלב 3: הרצת DFS על G הפוך מ-s. $O(\|V\|+\|E\|)$.
סה"כ: $O(\|V\|+\|E\|)$.

שאלה 2

סעיף א – נוסחת מבנה

$$OPT(v,i)=\begin{cases} 0, & v=s,\ i=0 \\ \infty, & v\neq s,\ i=0 \\ \min\{\{OPT(v,i-1)\}\cup\{OPT(u,i-1)+w(u,v):(u,v)\in E\}\}, & i>0 \end{cases}$$

סעיף ב – אלגוריתם איטרטיבי

נסמן $V=\{s=v_0,v_1,v_2,\dots,v_{|V|-1}\}$.

<u>האלגוריתם</u>

(א) אתחול מערך דו-מימדי $M[j,i]$ בגודל $|V|\times|V|$, $0\le j,i\le |V|-1$.

(ב) $M[0,0]\leftarrow 0$

(ג) לכל $1\le j\le |V|-1$, $M[j,0]\leftarrow\infty$

(ד) עבור $i=1$ עד $|V|-1$:

עבור $j=0$ עד $|V|-1$:

$M[j,i]\leftarrow\min\{\{M[j,i-1]\}\cup\{M[k,i-1]+w(v_k,v_j):(v_k,v_j)\in E\}\}$

(ה) לכל $(v_k,v_0)\in E$, אם $M[\ell,|V|-1]>M[k,|V|-1]+w(v_k,v_0)$,

החזר כי קיים מעגל שלילי ב-G.

סעיף ג – הוכחת הטענה

נסמן $d_i(v)$ - ערך $d(v)$ לאחר i איטרציות של האלגוריתם בלמן פורד. נראה כי לכל i, $d_i(v) \le OPT(v,i)$.

נוכיח זאת באינדוקציה על i:

$i=0$: לכל $s \ne v \in V$, $d_0(v) = \infty = OPT(v,0)$.

כמו כן, $d_0(s) = 0 = OPT(s,0)$

הנחת האינדוקציה:

נניח כי בתום האיטרציה ה-i לכל $v \in V$ $d_i(v) \le OPT(v,i)$,

צעד:

נראה נכון לקודקוד $v \in V$ כלשהו לאחר האיטרציה ה-$i+1$.

(א) אם $OPT(v,i+1) = \infty$, ברור כי $d_{i+1}(v) \le OPT(v,i+1)$.

(ב) אם $v = s$ ו- $OPT(s,i+1) = 0$, נובע כי $d_{i+1}(s) \le OPT(s,i+1)$ משום שהערך ההתחלתי של $d(s)$ הוא 0, ו- $d(s)$ יכול רק לרדת במהלך הריצה.

(ג) אחרת, קיים מסלול $P = (s=u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = v)$ כך ש- $w(P) = OPT(v,i+1)$ ו- $k \le i+1$. נסמן $P' = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$, בנוסף נסמן $d'(u_{k-1})$ ו- $d'(u_k)$ הערכים של $d(u_{k-1})$ ו- $d(u_k)$ ברגע כי מתבצע $Relax(u_{k-1}, u_k, w)$ באיטרציה ה-$i+1$. נקבל כי:

$$d_{i+1}(v) = d_{i+1}(u_k) \overset{1}{\le} d'(u_k) \overset{2}{\le} d'(u_{k-1}) + w(u_{k-1},u_k) \overset{3}{\le} d_i(u_{k-1}) + w(u_{k-1},u_k) \overset{4}{\le}$$
$$\le OPT(u_{k-1}, i) + w(u_{k-1},u_k) \overset{5}{\le} w(P') + w(u_{k-1},u_k) = w(P) = OPT(v,i+1)$$

1. הערך $d(u_k)$ בסוף האיטרציה ה-$i+1$ $\ge$ מהערך $d(u_k)$ במהלך האיטרציה הנ"ל.
2. תכונת פעולת Relax.
3. הערך $d(u_{k-1})$ בסוף האיטרציה ה-i $\le$ מהערך $d(u_{k-1})$ במהלך האיטרציה ה-$i-1$.
4. מהנחת האינדוקציה.
5. נובע מהגדרת OPT כיוון שאורך P' הוא, $k-1$.

□

סעיף ד – הוכחת נכונות Bellman-Ford

משפט: אם אין מעגל שלילי נגיש מ-s, אז לכל $v \in V$, $OPT(v, |V|-1) = \delta(s,v)$.

הוכחת המשפט בעזרת משפט העזר:

האלג' בלמן-פורד מבצע $|V|-1$ איטרציות, לכן, מסעיף ג', לכל $v \in V$ $d(v) \le OPT(v,|V|-1)$. מטענת העזר נובע $d(v) \le \delta(s,v)$,

מלמת החסם התחתון, לכל $v \in V$, $d(v) \ge \delta(s,v)$.

לכן, בסיום האלג', לכל $v \in V$, $d(v) = \delta(s,v)$.

הוכחת טענת העזר:

נניח בשלילה כי המסלול הקצר ביותר צריך מ-s ל-v הוא באורך $> |V|-1$. נסמנו P.

אז משובך היונים קיים קודקוד u המופיע במסלול יותר מפעם אחת,

לכן קיים מעגל במסלול.

נסמנו p'

נתבונן במסלול התוצר מהשמטת המעגל מקבל המסלול p' השקול ששווה
למשקל המסלול המקורי, ואחרת מתקיים אחד משניים:
- המעגל שהוצאנו הוא במשקל שלילי, בסתירה לנתון.
- $w(p') < w(p)$ בסתירה להנחה ש-p מסלול במשקל מינימלי.

ניתן להסיק כי $w(p)=w(p')$, בסתירה לכך ש-p הוא המסלול
הקצר ביותר מבין המסלולים הקלים ביותר מ-s ל-v.
לכן המסלול הקל ביותר מ-s ל-v הוא באורך $\le |V|-1$.
לכן $OPT(v,|V|-1)=\delta(s,v)$.

□

שאלה 3

תיאור האלגוריתם

1. הרץ DFS ובחר את v - הקודקוד עם זמן הסיום המאוחר ביותר.
2. הרץ DFS מ-v.
3. החזר את הקודקודים לפי זמני הסיום בסדר עולה.

הוכחת נכונות האלגוריתם

משפט נכונות: האלג' מחזיר את הקודקודים לפי הסדר המבוקש.
טענה 1: אם קיים קודקוד ממנו ניתן להגיע לכל הצמתים בגרף, אז הקודקוד עם
זמן הסיום המאוחר ביותר בהרצת DFS יהיה קודקוד ממנו ניתן להגיע לכל
הצמתים בגרף.
טענה 2: בהרצת DFS מקודקוד שממנו ניתן להגיע לכל הצמתים בגרף,
זמני הסיום יהוו סדר כנדרש בשאלה.
הוכחת המשפט ע"ס ט.ע: לפי טענה 1 בסיום שלב א' נקבל קודקוד
v שממנו ניתן להגיע לכל הצמתים בגרף, ולפי ט.2 לאחר שלב ב' כי
הסידור ע"פ זמני הסיום יהוו את הסידור הנדרש.
הוכחת ט. 1: קודקוד שממנו ניתן להגיע לכל צמתי הגרף, יהיה הקודקוד
הראשון במיון הטופולוגי, מטענה שראינו בכיתה, הקודקוד עם זמן הסיום המאוחר
ביותר אם הרצת DFS יהיה הקודקוד הראשון במיון הטופולוגי.

הוכחת ט. 2: נוכיח באינדוקציה כי לכל שלב בהסרת קודקודי הגרף
לפי סדר זמן הסיום המוגדר בכל השאלה מתקיימת. (אינדוקציה על השלבים והסרה).
בסיס: $i=0$ - עדיין לא הסרנו אף קודקוד, ולפי ההנחה ניתן להגיע
מ-v לכל קודקוד בגרף.

שעדיין לא הוסר

הנחת האינדוקציה: נניח כי לאחר i הסרות, ניתן להגיע מ-v לכל קודקוד בגרף.
צעד: יהי u הקודקוד שהסרנו בשלב ה-i+1. נראה כי ניתן להגיע מ-v לכל קודקוד בגרף שעדיין לא הוסר. נניח בשלילה כי קיים קודקוד t שלא ניתן להגיע אליו מ-v. עפ"י האלג', זמן הסיום של t > מזמן הסיום של u. כמו כן, נשים לב שה-DFS הורץ מ-v, אשר כל הקודקודים נגישים ממנו, לכן אם t באותו עץ של u בעץ עומק הסריקה אז $f(t) < f(u)$ בסתירה להנחת השלילה. אחרת, t אינו באותו עץ של u בעץ עומק הסריקה, מהנחת האינדוקציה, לפני הסרת u, היה ניתן להגיע מ-v ל-t. לכן, גם לאחר הסרת u, ניתן להגיע מ-v ל-t, בסתירה להנחת השלילה.

□

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

א) - הרצת DFS ב- $O(|V|+|E|)$,
ב) - " " ב- $O(|V|+|E|)$
ג) החזרת הקודקודים לפי סדר זמני הסיום - $O(|V|)$

סה"כ - $O(|V|+|E|)$

שאלה 4

תיאור האלגוריתם

א) שנה את כל המשקלות בגרף להיות $w(e)=1$ לכל $e \in E$.
ב) הרץ את דייקסטרה על הגרף החדש ועדכן שדה בשם $l(v)$ במקום $d(v)$.
ג) הרץ את דייקסטרה על הגרף עם המשקלות המקוריים עם הפונקציה Relax' במקום Relax ועדכן את השדה $d(v)$.

```
Relax'(u,v,w):
if (d(v) > d(u)+w(u,v) and l(v) ≥ l(u)+1) {
    d(v) ← d(u)+w(u,v)
}
```

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 1: כאשר קודקוד u נכנס ל-S בחלק (ג) ערך $d(u)$ לא משתנה עד תום ריצת האלג'.

טענה 2: בסיום חלק (ב) באלג', לכל $v \in V$: $l(v) =$ (המרחק מ-s ל-v)

טענה 3: לאחר כל ריצת $Relax'(u,v,w)$ מתקיים: $d(v) \le d(u) + w(u,v)$ או $l(v) < l(u) + 1$

הגדרה: משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-v מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-v = $\delta'(s,v)$

משפט נכונות: בסיום האלג' $d(v) = \delta'(s,v)$ לכל $v \in V$.

טענת עזר: כאשר קודקוד u נכנס ל-S בחלק (ג), $d(u) = \delta'(s,u)$.

הוכחת המשפט: בכל שלב בחלק (ג) נכנס קודקוד יחיד v ל-S וערכו $d(v) = \delta'(s,v)$ מטענת העזר. מטענה 1 ערך זה לא משתנה עד לסיום הריצה. לכן בסיום הריצה, $S = V$! $d(v) = \delta'(s,v)$ לכל v.

הוכחת טענת העזר: נוכיח באינדוקציה על שלבי חלק (ג) באלג'.

בסיס: $S = \{s\}$. $d(s) = 0 = \delta'(s,s)$

הנחת האינדוקציה: נניח כי בסיום השלב ה-$i-1$ כל קודקוד ב-S עם ערך $d(v) = \delta'(s,v)$.

צעד: יהי u הקודקוד שנבחר בתחילת השלב ה-i. נתבונן ברגע לפני ש-u מתווסף ל-S. נסמן ב-P מסלול כלשהו קל ביותר מ-s ל-u מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-u. נסמן ב-(x,y) את הקשת הראשונה ב-P המקיימת $x \in S$, $y \notin S$. נסמן ב-P_1 את הרישא של P מ-s ל-x וב-P_2 את הסיפא של P מ-y ל-u. נקבל כי:

$$w(P_2) \ge 0$$

$$\delta'(s,u) = w(P) = w(P_1) + w(x,y) + w(P_2) \overset{①}{=} \delta'(s,x) + w(x,y) + w(P_2) \ge$$
$$\ge \delta'(s,x) + w(x,y) = d(x) + w(x,y) \overset{②}{\ge} d(y) \overset{③}{\ge} d(u)$$

ה.א

מאידך תמיד מתקיים $\delta'(s,u) \le d(u)$ ולכן $\delta'(s,u) = d(u)$.

① P_1 הוא מסלול קצר ביותר מ-s ל-x שכן אם P הוא מסלול קצר ביותר מ-s ל-v שעובר דרך x. באופן דומה ניתן להסיק כי P_1 הוא גם הקל מביניהם.

② $l(y) = l(x) + 1$ משום שהמסלול $P \circ (x,y)$ הוא רישא של מסלול קצר ביותר מ-s ל-v. בנוסף לפני הכנסת x ל-S הרצנו $Relax'(x,y,w)$. לכן, מטענה 3, מתקיים $d(y) \le d(x) + w(x,y)$.

③ u הוערך על פני y בשלב ה-i לכן ניתן להסיק כי $d(u) \le d(y)$.

□

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

שלב (א) ירוץ בזמן $O(|E|)$.

שלב (ב) – הרצת דייקסטרה $O(|E|+|V|\log|V|)$

שלב (ג) – הרצת דייקסטרה עם $Relax'$ – $O(|E|+|V|\log|V|)$

סה"כ זמן ריצה $O(|E|+|V|\log|V|)$

שאלה 5

תיאור האלגוריתם

נגדיר אלג' מבוסס רדוקציה לבעיית מציאת מסלול כבד ביותר בצמתים בגרף מכוון חסר מעגלים.

מימוש קלט: בהינתן G, נבנה את G^{scc} בעזרת קוסרג'ו-שריר כאשר לכל $v\in V^{scc}$ נגדיר פו' $w(v)$ = מס' הקודקודים ברק"ה המיוצג ע"י v.

מימוש פלט: בהינתן קב' קודקודים $S\subseteq V^{scc}$ (המהווה מסלול ב-G^{scc}), החלף כל קודקוד ב-S בקודקודים המרכיבים את הרק"ה שהוא מייצג ב-G.

הוכחת נכונות האלגוריתם

משפט נכונות: האלג' מחזיר קבוצה מקסימלית $U\subseteq V$ כך שקיים מסלול העובר דרך כל צמתי U.

טענת עזר: יהי $k\in\mathbb{N}$ כלשהו. נגדיר $U_p=\{v\in V:$ v קודקוד ברק"ה המיוצג ע"י קודקוד במסלול $p\}$

U_p הוא איחוד רק"ה

אזי: p מסלול ב-G^{scc} כך ש $w(p)=k$ $\iff$ $|U_p|=k$ וקיים מסלול מכוון העובר דרך כל צמתי U_p

הוכחת המשפט באמצעות טענת העזר:

לאחר הפעלת מימוש הקלט נקבל את G^{scc}. לאחר הפעלת האלג' למציאת מסלול כבד ביותר בצמתים בגרף מכוון חסר מעגלים על G^{scc} (G^{scc} חסר מעגלים כפי שהוכח בכיתה), נקבל מסלול p פשוט כבד ביותר בצמתים ב-G^{scc}. נניח $w(p)=k$. לאחר הפעלת מימוש הפלט נקבל את U_p, ומטענת העזר נובע כי $|U_p|=k$. נניח בשלילה שקיימת U' כך שקיים מסלול מכוון העובר דרך כל צמתי U' וגם $|U_p|<|U'|$. אז מטענת העזר, קיים מסלול p' ב-G^{scc} כך ש $w(p)=|U_p|<|U'|=w(p')$, בסתירה לכך ש-p מסלול כבד ביותר בצמתים ב-G^{scc}.

הוכחת טענת העזר:

$\Rightarrow$: נניח $w(p)=k$. נסמן $p=\langle v_1,v_2,\dots,v_n\rangle$. מהגדרת w, ניתן להסיק כי $\sum|v_i|=k$ כאשר $|v_i|$ הוא מספר הקודקודים ברק"ה המיוצג ע"י v_i ב-G. לכל $1\le i\le n$ קיים מסלול בין כל הקודקודים ב-G הנמצאים ברק"ה v_i, מהגדרת רק"ה. כמו כן, לכל $1\le i\le n-1$ קיימת צלע ב-G מקודקוד ברק"ה v_i לקודקוד ברק"ה v_{i+1} משום ש (v_i,v_{i+1}) היא צלע ב-G^{scc}. לכן קיים מסלול העובר דרך כל צמתי U_p.

$\Leftarrow$: יהי U_p כך שקודקודי U_p מהווים איחוד של רק"ה, קיים מסלול העובר דרך כל צמתי U_p ו-$|U_p|=k$. נסמן את המסלול לה $p'=(u_1,u_2,\dots,u_m)$. ניתן להבחין כי ב-G^{scc} מתקיים ש $p=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ מסלול כאשר לכל v_i קיים רצף של קודקודים ב-p' אשר מהווים את הרק"ה המיוצג ע"י v_i.

$w(p)=\sum_{i=1}^{n}w(v_i)=\sum_{i=1}^{n}|v_i|=|U_p|=k$

p מהווה מסלול חוקי ב-G^{scc} כי עבור כל (v_i,v_{i+1}), $(1\le i\le n-1)$ קיימת צלע ב-G מקודקוד ברק"ה המיוצג ע"י v_i לקודקוד ברק"ה המיוצג ע"י v_{i+1}. מכיוון ש p הוא מסלול חוקי ב-G^{scc} ו-$w(p)=k$.

D

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט: הפעלת קוסרג'ו שריר - $O(|V|+|E|)$.

קופסה שחורה: האלג' למציאת מסלול כבד ביותר בגרפים הוא ב-$O(|V|+|E|)$

ממיר הפלט: בניית טבלת גודל נקבע ע"י המעבר מרכיב הקשירות לקודקודים שנמצאים בו ב-$O(|V|)$.

סה"כ: $O(|V|+|E|)$