תכנון אלגוריתמים – פתרון עבודה 6, מבוא לסיבוכיות

שאלה 1

סעיף א

טענה: קימת זרימה איכותית ברשת הזרימה $N = (G, c, d, s, t)$ $\Leftrightarrow$ קימת זרימה ברשת הזרימה $\tilde{N} = (\tilde{G}, \tilde{c}, \tilde{s}, \tilde{t})$ בה כל הקשתות היוצאות מ- $\tilde{s}$ רוויות.

הוכחה:

$\Leftarrow$

תהא $f: V \times V \to \mathbb{R}$ זרימה איכותית בְּ-N. נגדיר פונקציה חדשה $\tilde{f}: \tilde{V} \times \tilde{V} \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

- לכל $(u,v) \in E$ נגדיר $\tilde{f}(u,v) = f(u,v) - d(u,v)$ וגם $\tilde{f}(v,u) = -\tilde{f}(u,v)$,
- לכל $v \in V$ נגדיר $\tilde{f}(\tilde{s}, v) = \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} d(u,v)$, $\tilde{f}(v,\tilde{t}) = \sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} d(v,u)$, $\tilde{f}(v,\tilde{s}) = -\tilde{f}(\tilde{s},v)$ וְ- $\tilde{f}(\tilde{t},v) = -\tilde{f}(v,\tilde{t})$,
- $\tilde{f}(t,s) = |f|$ וגם $\tilde{f}(s,t) = -\tilde{f}(t,s)$,
- לכל שאר זוגות הקדקודים $u, v \in \tilde{V}$: $\tilde{f}(u,v) = 0$.

עתה נראה כי $\tilde{f}$ היא זרימה חוקית בְּ-$\tilde{N}$ המרווה את כל הקשתות היוצאות מְ-$\tilde{s}$.

- אילוצי קיבול – תהא $e \in \tilde{E}$. נחלק למקרים לפי סוג הצלע:
  - אם $e = (u,v) \in E$ אז הרי $\tilde{f}(u,v) \le c(u,v) - d(u,v) = \tilde{c}(u,v)$,
  - אם $e = (\tilde{s}, v)$ אז $\tilde{f}(\tilde{s},v) = \sum_{u\in V} d(u,v) = \tilde{c}(s,v)$,
  - אם $e = (v,\tilde{t})$ אז גם כן $\tilde{f}(v,\tilde{t}) = \tilde{c}(v,t)$,
  - אם $e = (t,s)$ אז הרי $\tilde{f}(t,s) = |f| \le \infty = \tilde{c}(t,s)$,
  - אם e הינה ההופכית של אחת מן הנ"ל אז $\tilde{f}(e) < 0 = \tilde{c}(e)$,
  - ולכל שאר זוגות הקדקודים הן הזרימה $\tilde{f}$ והן הקיבולת $\tilde{c}$ הן אפס.
- אנטי-סימטריות – נובע מידית מאופן הגדרת הזרימה $\tilde{f}$,
- שימור זרימה – יהא $u \in V$. נראה כי $\sum_{v\in\tilde{V}} \tilde{f}(u,v) = 0$. נחלק למקרים:
  - אם $u = s$ אז:

$$\sum_{v\in\tilde{V}} \tilde{f}(s,v) = \sum_{v\in V-\{t\}} \tilde{f}(s,v) + \tilde{f}(s,t) + \tilde{f}(s,\tilde{s}) + \tilde{f}(s,\tilde{t}) =$$

$$\sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(s,v)\in E}} \big(f(s,v) - d(s,v)\big) - \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(v,s)\in E}} \big(f(v,s) - d(v,s)\big) - \tilde{f}(t,s) - \tilde{f}(\tilde{s},s) + \tilde{f}(s,\tilde{t}) =$$

$$\sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(s,v)\in E}} f(s,v) - \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(s,v)\in E}} d(s,v) - \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(v,s)\in E}} f(v,s) + \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(v,s)\in E}} d(v,s) - |f| - \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(v,s)\in E}} d(v,s) + \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(s,v)\in E}} d(s,v)$$

$$= \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(s,v)\in E}} f(s,v) + \sum_{\substack{v\in V-\{t\}\\(v,s)\in E}} f(s,v) - |f| = \sum_{v\in V-\{t\}} f(s,v) - |f| = |f| - |f| = 0$$

- אם $v = t$ אז:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\tilde V}\tilde f(t,v) &= \sum_{v\in V-\{s\}}\tilde f(t,v)+\tilde f(t,s)+\tilde f(t,\tilde s)+\tilde f(t,\tilde t)\\
&= \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(t,v)\in E}}\big(f(t,v)-d(t,v)\big) - \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(v,t)\in E}}\big(f(v,t)-d(v,t)\big) + \tilde f(t,s) - \tilde f(\tilde s,t) + \tilde f(t,\tilde t)\\
&= \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(t,v)\in E}} f(t,v) - \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(t,v)\in E}} d(t,v) - \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(v,t)\in E}} f(v,t) + \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(v,t)\in E}} d(v,t) + |f|\\
&- \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(v,t)\in E}} d(v,t) + \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(t,v)\in E}} d(t,v) = \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(t,v)\in E}} f(t,v) + \sum_{\substack{v\in V-\{s\}\\(v,t)\in E}} f(t,v) + |f|\\
&= \sum_{v\in V-\{s\}} f(t,v) + |f| = -|f| + |f| = 0
\end{aligned}$$

- אחרת – אם $u \neq s,t$ – אז:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\tilde V}\tilde f(u,v) &= \sum_{v\in V}\tilde f(u,v)+\tilde f(u,\tilde s)+\tilde f(u,\tilde t)\\
&= \sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}}\big(f(u,v)-d(u,v)\big) - \sum_{\substack{v\in V\\(v,t)\in E}}\big(f(v,u)-d(v,u)\big) - \tilde f(\tilde s,u) + \tilde f(u,\tilde t)\\
&= \sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}} d(u,v) - \sum_{\substack{v\in V\\(v,u)\in E}} f(v,u) + \sum_{\substack{v\in V\\(v,u)\in E}} d(v,u) - \sum_{\substack{v\in V\\(v,u)\in E}} d(v,u)\\
&+ \sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}} d(u,v) = \sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}} f(u,v) + \sum_{\substack{v\in V\\(v,u)\in E}} f(u,v) = \sum_{v\in V} f(u,v) = 0
\end{aligned}$$

לכן $\tilde f$ זרימה חוקית ברשת $\tilde N$. נשים לב שבכל הקשתות מהצורה $(\tilde s, v)$ הזרימה הינה $\tilde c(s,v) = \sum_{u\in V} d(u,v) = \tilde f(\tilde s,v)$ ולכן $\tilde f$ זרימה בְּ-N המרווה את כל הקשתות היוצאות מְ-$\tilde s$.

$\Rightarrow$

תהא $\tilde f:\tilde V\times\tilde V\to\mathbb{R}$ זרימה בְּ-$\tilde N$ המרווה את כל הקשתות היוצאות מְ-$\tilde s$. נגדיר פונקציה חדשה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

- לכל $(u,v)\in E$ נגדיר $f(u,v)=\tilde f(u,v)+d(u,v)$ וגם $f(v,u)=-f(u,v)$,
- לכל שאר זוגות הקדקודים $u,v\in V$: $f(u,v)=0$.

נתון שכל הקשתות היוצאות מְ-$\tilde s$ הן רוויות. נראה תחילה כי גם כל הקשתות הנכנסות לְ-$\tilde t$ הן רוויות. נתבונן בשני החתכים:

- $S_1=\{\tilde s\},\ T_1=\tilde V-\{\tilde s\}$
- וְ-$S_2=\tilde V-\{\tilde t\},\ T_2=\{\tilde t\}$

נשים לב כי $\tilde c(S_1,T_1) = \sum_{v\in V}\tilde c(\tilde s,v) = \sum_{v\in V}\tilde f(\tilde s,v) = |\tilde f|$, ועל-כן (S_1,T_1) חתך בעל קיבולת מזערית. נתבונן בחתך (S_2,T_2):

$$\tilde{c}(S_2,T_2)=\sum_{u\in V}\tilde{c}(u,\tilde{t})=\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}d(u,v)=\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}d(u,v)=\sum_{v\in V}\tilde{c}(\tilde{s},v)=\tilde{c}(S_1,T_1)$$

לכן גם (S_2,T_2) חתך בעל קיבולת מזערית. על-כן: $\sum_{u\in V}\tilde{f}(u,\tilde{t}) = |f| = \tilde{c}(S_2,T_2) = \sum_{u\in V}\tilde{c}(u,\tilde{t})$.

נשים לב שבהכרח לכל קשת $\tilde{f}(u,\tilde{t})=\tilde{c}(u,\tilde{t})$, שכן אילו היתה לפחות קשת אחת שעבורה $\tilde{f}(u,\tilde{t})<\tilde{c}(u,\tilde{t})$, אז לא היה שויון בסכום $\sum_{u\in V}\tilde{f}(u,\tilde{t}) = \sum_{u\in V}\tilde{c}(u,\tilde{t})$

לכן כל הקשתות הנכנסות לְ-$\tilde{t}$ רוויות גם הן. עתה נראה כי f היא זרימה איכותית בְּ-N.

- אילוצי קיבול – יהיו $u,v\in V$. נחלק למקרים:
  - אם $(u,v)\in E$ אז הרי:
    $$f(u,v)=\tilde{f}(u,v)+d(u,v)\le\tilde{c}(u,v)+d(u,v)=$$
    $$c(u,v)-d(u,v)+d(u,v)=c(u,v)$$
  - ולכל שאר זוגות הקדקודים הן הזרימה f והן הקיבולת c הן אפס.
- אנטי-סימטריות – נובע מידית מאופן הגדרת הזרימה f,
- שימור זרימה – יהא $u\in V-\{s,t\}$. אזי:

$$\sum_{v\in V}f(u,v)=\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)\ge d(u,v)}}f(u,v)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(v,u)\ge d(v,u)}}f(v,u)=\sum_{\substack{v\in V\\ \tilde{f}(u,v)>0}}\tilde{f}(u,v)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)\ge d(u,v)}}d(u,v)+\sum_{\substack{v\in\tilde{V}\\ \tilde{f}(v,u)>0}}\tilde{f}(v,u)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(v,u)\ge d(v,u)}}d(v,u)$$

$$=\sum_{\substack{v\in V\\ \tilde{f}(u,v)>0}}\tilde{f}(u,v)+\tilde{c}(u,\tilde{t})+\sum_{\substack{v\in V\\ \tilde{f}(v,u)>0}}\tilde{f}(v,u)+\tilde{c}(\tilde{s},u)=\sum_{\substack{v\in V\\ \tilde{f}(u,v)>0}}\tilde{f}(u,v)+\tilde{f}(u,\tilde{t})+\sum_{\substack{v\in V\\ \tilde{f}(v,u)>0}}\tilde{f}(v,u)+\tilde{f}(\tilde{s},u)$$

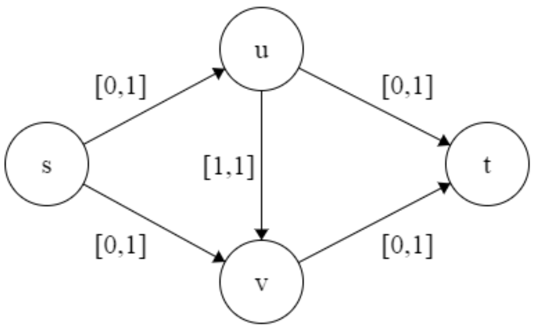
$$=\sum_{\substack{v\in\tilde{V}\\ \tilde{f}(u,v)>0}}\tilde{f}(u,v)+\sum_{\substack{v\in\tilde{V}\\ \tilde{f}(v,u)>0}}\tilde{f}(v,u)=\sum_{v\in\tilde{V}}\tilde{f}(u,v)=0$$

- אילוצי איכות – יהיו $u,v\in V$. נחלק למקרים:
  - אם $(u,v)\in E$ אז $\tilde{f}(u,v)\ge 0$ ולכן $f(u,v)=\tilde{f}(u,v)+d(u,v)\ge d(u,v)$,
  - ולכל שאר זוגות הקדקודים הזרימה f היא אפס והאיכות d היא $-\infty$.

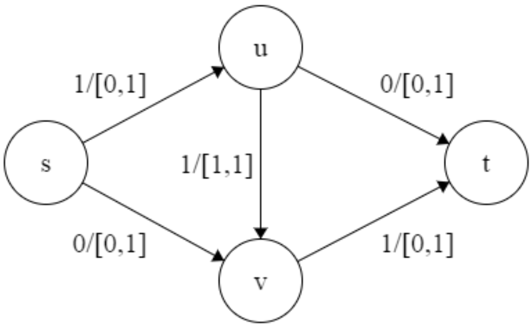
לכן f זרימה איכותית, כנדרש.

סעיף ב

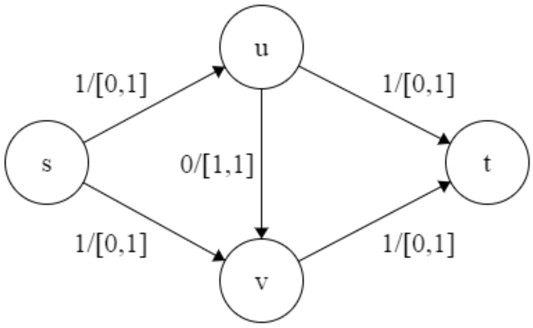
נתבונן ברשת הזרימה האיכותית הבאה:



כאשר הסִמון $[d,c]$ על קשת e כלשהי מציין כי $d(e)=d$ וְ-$c(e)=c$. למשל, בצלע (s,v): $d(s,v)=0$ וְ-$c(s,v)=1$. הזרימה האיכותית (היחידה) הינה:



לפי האלגוריתם שלנו, אנו נתחיל מזרימה זו ואז נמצא זרימת מקסימום באמצעות האלגוריתם של דיניץ. זרימת המקסימום תהא:



זוהי זרימת המקסימום היחידה, ומהוכחת אלגוריתם דיניץ הוא ימצא זרימת מקסימום כאשר הוא מתחיל מזרימה כלשהי ולכן הוא ימצא את הזרימה הזו. נשים לב שבזרימה לעיל אמנם גודל הזרימה הוא 2, שזה הגודל המֵרבי עבור זרימה רגילה, אבל בצלע (u,w) היא אינה מקימת את אילוץ האיכות: $f(u,w) = 0 < 1 = d(u,w)$, ועל-כן אינה זרימה איכותית. נשים לב ששורש הבעיה נעוץ בכך שלא התחשבנו בדרישת האיכות בעת בניית הרשת השיורית. נתקן זאת בסעיף ג'.

סעיף ג

השִׁנוי היחיד יהיה באופן הגדרת הקיבולת השיורית. במקום להגדיר קיבולת שיורית, נגדיר *קיבולת שיורית איכותית* להיות:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(v,u) - d(v,u) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שאר האלגוריתם יישאר ללא שִׁנוי. מהות השנוי היא שבמידה וְ-E $(u,v) \notin$ אך $(v,u) \in E$ נוכל להזרים עוד בצלע (u,v) זרימה שלא תחרוג מ-$d(v,u)$. אילו הינו מזרימים בְּ-(u,v) זרימה הגדולה מ-$d(v,u)$ אז הינו מורידים את הזרימה ב-(v,u) ביותר מאשר $d(v,u)$, ואז הזרימה לא היתה מקימת את אילוץ האיכות. כך, כאשר אנו מקפידים שלא נוכל להוריד את הזרימה בצלע (v,u) ב-$d(v,u)$ או יותר, אנו מודאים שהזרימה תקיים את אילוץ האיכות.

כמו-כן, נשים לב שזמן בנית הרשת השיורית וזמן מציאת זרימה חוסמת לא השתנו והטענה שבכל שלב המרחק ברשת השיורית מְ-s לְ-t גדל לפחות בְּ-1 עדין מתקימת, ולכן זמן הריצה של האלגוריתם עודנו $O(|V|^2|E|)$.

שאלה 2

סעיף א

בהינתן מופע $\langle G,d\rangle$ לבעית evenVC העד יהיה קבוצה $U\subseteq V$, כאשר $G=(V,E)$. אלגוריתם הוִדוּא יבדוק תחילה כי G קשיר, $|U|\le d$ וגם d הוא זוגי. לאחר-מכן, האלגוריתם יעבור על כל הקשתות $(u,v)\in E$ ועבור כל אחת יבדוק האם מתקיים $u\in U$ או $v\in U$. האלגוריתם יקבל אם כל הבדיקות עברו. אחרת, ידחה. מהגדרת הבעיה קיים עד שיגרום לאלגוריתם הוִדוּא לקבל $\Leftrightarrow$ קיימת $U\subseteq V$ כך שֶ-$|U|\le d$ וגם לכל צלע $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in U$ או $v\in U$ $\Leftrightarrow$ קיים כסוי בקדקודים של U בגודל $\le d$ כאשר d זוגי $\Leftrightarrow$ $\langle G,d\rangle\in \text{evenVC}$. הבדיקה הראשונה לוקחת $O(|V|)$ והבדיקה השניה $O(|E|)$. סך הזמן שלהן הינו $O(|V|+|E|)$, לינארי ובפרט פולינומיאלי. כמו-כן, גודל העד קטן מגודל הקלט ולכן גודל העד פולינומיאלי.

לכן $\text{evenVC}\in NP$. עתה נראה כי $\text{evenVC}\in NPH$, וזאת באמצעות רדוקציה $\text{conVC}\le_P \text{evenVC}$. בהינתן מופע $\langle G=(V,E),d\rangle$ לבעית conVC, אם d זוגי נגדיר $\tilde G=G$ וְ-$\tilde d=d$. אחרת, נוסיף שני קדקודים חדשים x,y וקשתות מכל הקדקודים המקוריים לְ-x וגם מִ-x לְ-y. באופן פורמלי, $\tilde V=V\cup\{x,y\}$, $\tilde E=E\cup\{(v,x)\mid v\in V\cup\{y\}\}$, $\tilde G=(\tilde V,\tilde E)$ ונגדיר $\tilde d=d+1$. זמן בנית הגרף הינו $O(|V|+|E|)$ וגודל הגרף החדש הינו מאותו סדר הגודל של הגרף המקורי $O(|\tilde V|+|\tilde E|)=O(|V|+|E|)$. כלומר, הרדוקציה פולינומיאלית.
עתה נראה את נכונותה.

<u>טענה</u>: $\langle G,d\rangle\in \text{conVC} \Leftrightarrow \langle\tilde G,\tilde d\rangle\in \text{evenVC}$.
<u>הוכחה</u>:

$\Leftarrow$

נניח שֶ-$\langle G,d\rangle\in \text{conVC}$. נשים לב שמכיון שֶ-$G$ קשיר אז גם $\tilde G$ קשיר. כלומר קיים כסוי בקדקודים $U\subseteq V$ של G וגודלו $|U|\le d$. אם d זוגי אז באופן מידי $\langle\tilde G,\tilde d\rangle\in \text{evenVC}$. אחרת – נניח כי d אי-זוגי. נסמן: $\tilde U=U\cup\{x\}$. נראה כי $\tilde U$ כסוי בקדקודים של $\tilde G$. תהא $e\in\tilde E$. אם $e=(u,v)\in E$ אז היות וְ-U כסוי מתקיים $u\in U$ או $v\in U$ ולכן $u\in\tilde U$ או $v\in\tilde U$. אחרת, אם $e=(v,x)$ באשר $v\in V\cup\{y\}$ אז הרי $x\in\tilde U$. לכן $\tilde U$ כסוי בקדקודים של $\tilde G$. כמו-כן, $|\tilde U|=|U|+1\le d+1$, כנדרש. לכן $\langle\tilde G,\tilde d\rangle\in \text{evenVC}$.

$\Rightarrow$

יהא $\langle\tilde G,\tilde d\rangle\in \text{evenVC}$. נשים לב שמכיון שֶ-$\tilde G$ קשיר אז גם G קשיר. מכיון שֶ-$\langle\tilde G,\tilde d\rangle\in \text{evenVC}$ קיים כסוי בקדקודים $\tilde U\subseteq\tilde V$ של $\tilde G$ כך שֶ-$|\tilde U|\le\tilde d$. אם במקור d זוגי אז $\tilde d=d$ וגם $\tilde G=G$, אז באופן מידי $\langle G,d\rangle\in \text{conVC}$. אחרת, d אי-זוגי ואז $\tilde d=d+1$. נשים לב שבפרט $\tilde U$ מכסה את (x,y) ולכן $x\in\tilde U$ או $y\in\tilde U$. נגדיר: $U=\tilde U\cap V$. נראה כי U כסוי בקדקודים של G. תהא $(u,v)\in E$. אז $u\in\tilde U$ או $v\in\tilde U$ ולכן $u\in U$ או $v\in U$. משמע, U כסוי בקדקודים של G. כמו-כן, בודאות $|U|<|\tilde U|$ כי $x\in\tilde U$ או $y\in\tilde U$, בעוד שֶ-$x,y\notin U$. גודלו: $|U|\le|\tilde U|-1\le d+1-1=d$, כנדרש. לכן $\langle G,d\rangle\in \text{conVC}$.

הנחנו שֶ- conVC היא NP-קשה, הראנו רדוקציה $\text{conVC}\le_P \text{evenVC}$, ולכן, מהמשפט שראינו בכיתה, נובע שגם evenVC היא NP-קשה. כמו-כן, קודם ראינו כי $\text{evenVC}\in NP$, ולכן evenVC היא NP-שלמה.

סעיף ב

בהינתן מופע $\langle G,d\rangle$ לבעית evenDegVC העד יהיה קבוצה $U\subseteq V$, כאשר $G=(V,E)$. אלגוריתם הוִדוּא יבדוק תחילה שֶ-G קשיר ושדרגת כל קדקוד היא זוגית. אחרי זה הוא יבדוק כי $|U|\le d$. לאחר-מכן, האלגוריתם יעבור על כל הקשתות $(u,v)\in E$ ועבור כל אחת יבדוק האם מתקיים $u\in U$ או $v\in U$. האלגוריתם יקבל אם כל הבדיקות עברו. אחרת, ידחה. מהגדרת הבעיה קיים עד שיגרום לאלגוריתם הוִדוּא לקבל $\Leftrightarrow$ דרגת כל קדקוד היא זוגית וגם קיימת $U\subseteq V$ כך שֶ-$|U|\le d$ וגם לכל צלע $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in U$ או $v\in U$ $\Leftrightarrow$ דרגת כל קדקוד היא זוגית וגם קיים כסוי בקדקודים של U בגודל $\le d$ $\Leftrightarrow$ $\langle G,d\rangle\in \text{evenDegVC}$. שתי הבדיקות הראשונות לוקחות $O(|V|)$ והבדיקה השניה $O(|E|)$. סך הזמן שלהן הינו $O(|V|+|E|)$, לינארי ובפרט פולינומיאלי. כמו-כן, גודל העד קטן מגודל הקלט ולכן העד פולינומיאלי.

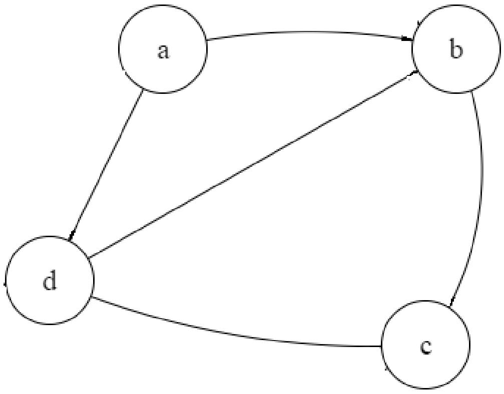
לכן $\text{evenDegVC}\in NP$. עתה נראה כי $\text{evenDegVC}\in NPH$, וזאת באמצעות רדוקציה $\text{conVC}\le_P \text{evenDegVC}$.
נראה שני רעיונות לרדוקציה[1]:

[1] נשים לב שדי לנו באחת הדרכים לבצע רדוקציה. הראינו את שתיהן לצורך העשרה.

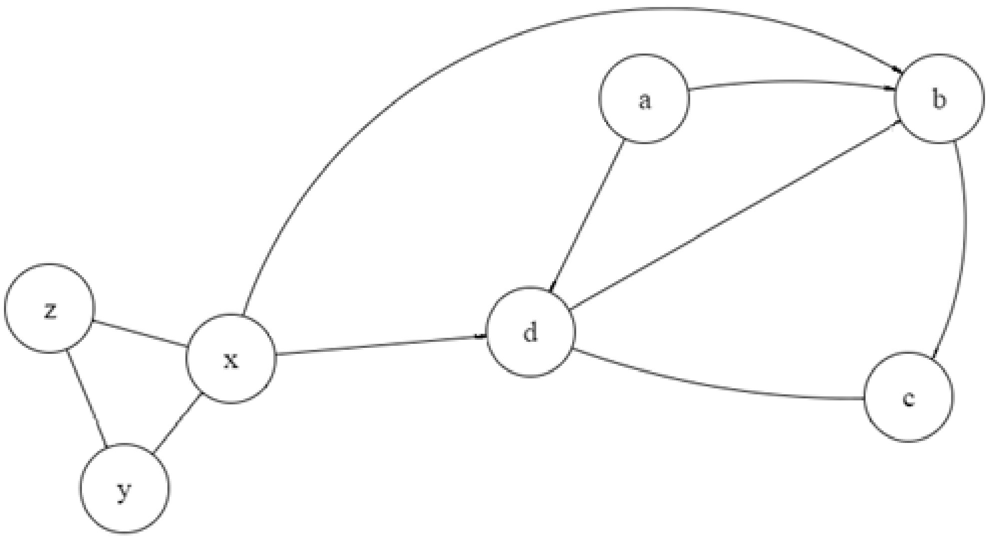
רדוקציה א' - בהינתן מופע $\langle G=(V,E),d\rangle$ לבעיית conVC, ניצור קדקוד חדש ונחברו לכל הקדקודים בעלי דרגה אי-זוגית. בנוסף, ניצור עוד שני קדקודים ונחברם אל הקדקוד החדש. כלומר:

- $V^*=V\cup\{x,y,z\}$,
- $E^*=E\cup\left\{(v,x)\ \mid\ v\in V\wedge \text{דרגת } v \text{ אי} - \text{זוגית}\right\}\cup\{(x,y),(y,z),(x,z)\}$,
- וְ-$G^*=(V^*,E^*)$.

לדוגמא[2], אם נתבונן בגרף:



אז הרדוקציה שלנו תבנה את הגרף:



זמן בנית $|V^*|$ **הינו** $O(|V|)$ **וזמן בנית** $|E^*|$ **הינו** $O(|V|+|E|)$. **זמן בנית הגרף** G^* **הינו** $O(|V|+|E|)$ **וגודלו הינו מאותו סדר הגודל של הגרף המקורי** $O(|V^*|+|E^*|)=O(|V|+|E|)$. כלומר, הרדוקציה פולינומיאלית. עתה נראה את נכונותה.

טענה: $\langle G,d\rangle\in \text{conVC} \Leftrightarrow \langle G^*,d+2\rangle\in \text{evenDegVC}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$

נניח שֶ-$\langle G,d\rangle\in \text{conVC}$. כלומר קיים כסוי בקדקודים $U\subseteq V$ של G וגודלו $|U|\le d$. נשים לב שֶ-G קשיר ולכן גם x מחובר לכל קדקודי V. לכן גם y וְ-z מחוברים לכל שאר קדקודי הגרף, ולכן G^* קשיר. תחילה, נראה כי בְּ-G^* יש דרגה זוגית לכל קדקוד. יהא $v\in V$. אם דרגתו בְּ-G זוגית, לא נוסיף לו צלעות ולכן דרגתו בְּ-G^* לא תשתנה. אם דרגתו בְּ-G אי-זוגית, נוספה לו הצלע (v,x) ולכן דרגתו בְּ-G^* תהיה זוגית. לְ-y ולְ-z יש שתי צלעות כל אחד, ולכן דרגת כל אחד זוגית. כמו-כן, סכום הדרגות של כל הקדקודים בְּ-G הינו זוגי (ושווה לְ-$2\cdot|E|$, כזכור לנו) ולכן בהכרח ישנה כמות זוגית של קדקודים בדרגה אי-זוגית. לכן הדרגה של x זוגית. כלומר, G^* גרף שבו דרגת כל קדקוד הינה זוגית.
נגדיר: $U^*=U\cup\{x,y\}$. נראה כי U^* מכסה את G^*. תהא $e\in E^*$. אם $e=(u,v)\in E$ אז $u\in U$ או $v\in U$ ולכן $u\in U^*$ או $v\in U^*$. אם $e=(v,x)\in E$ אז הרי $x\in U^*$. אם $e=(x,y)$ או $e=(x,z)$

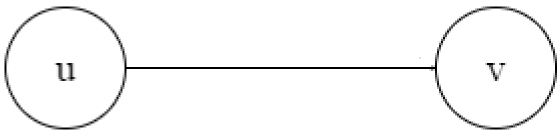
[2] בפתרונכם אל תתארו דוגמא, זה נועד רק עבור צרכים מתודולוגיים.

אז $x \in U^*$. אחרת – האפשרות שנותרה הינה שֶׁ-$e = (y,z)$ – ובמקרה זה הרי $y \in U^*$. כלומר, U^* מכסה את G^*. כמו-כן, $|U^*| = |U| + 2 \le d + 2$. לכן $\langle G^*, d+2 \rangle \in \text{evenDegVC}$.

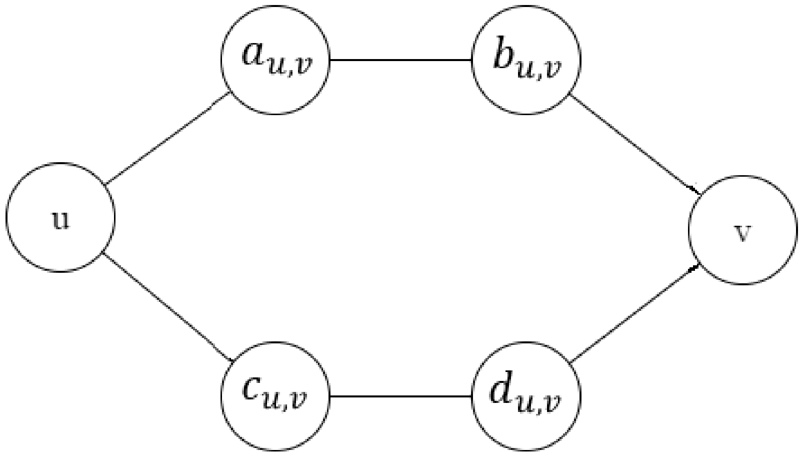
$\Rightarrow$

יהא $\langle G^*, d+2 \rangle \in \text{evenDegVC}$. היות וְ-$G^*$ קשיר אז גם G קשיר. לכן קיים כסוי בקדקודים $U^* \subseteq V^*$ של G^* וגודלו $|U^*| \le d + 2$. כמו-כן, G^* הינו גרף בדרגה זוגית. תחילה, נשים לב כי לפחות שנים מבין x, y, z נמצא בְּ-U^*. זאת מכיון שאחרת, אילו היה בְּ-U^* לכל היותר אחד מהם, אז קדקודי U^* לא היו מכסים את הקשתות $(x,y), (y,z), (x,z)$. נגדיר: $U = U^* \cap V$. כלומר, $x, y, z \notin U$ ולכן $U \subseteq V$. כמו-כן, לפחות אחד מבין x, y, z היה בְּ-U^* ועתה איננו בְּ-U, ולכן $|U| = |U^*| - 2 \le d$. כלומר, $|U| \le d$. נראה כי U מכסה את G. תהא $(u,v) \in E$. אז $(u,v) \in E^*$. לכן $u \in U^*$ או $v \in U^*$. כמו-כן, $(u,v) \in E$ ולכן $u, v \in V$ ולכן $u \in U^* \cap V$ או $v \in U^* \cap V$. כלומר, עבור הקשת $(u,v) \in E$ מתקיים $u \in U$ או $v \in U$. לכן $\langle G, d \rangle \in \text{conVC}$.

רדוקציה ב' - בהינתן מופע $\langle G = (V,E), d \rangle$ לבעית conVC, נהפוך כל צלע למשושה, בו שני הקדקודים בקצוות יהיו המקוריים מהצלע וארבעת הקדקודים באמצע חדשים.
כך למשל הצלע:



תהפוך לְ:



באופן פורמלי:

- $V^* = V \cup \{a_{u,v}, b_{u,v}, c_{u,v}, d_{u,v} \mid (u,v) \in E\}$,
- $E^* = \{(u, a_{u,v}), (a_{u,v}, b_{u,v}), (b_{u,v}, v), (v, d_{u,v}), (d_{u,v}, c_{u,v}), (c_{u,v}, u) \ |(u,v) \in E\}$,
- $G^* = (V^*, E^*)$,
- וְ-$d^* = d + 2|E|$.

זמן בנית $|V^*|$ הינו $O(|V| + |E|)$ ו זמן בנית $|E^*|$ הינו $O(|E|)$. אז זמן בנית הגרף G^* הינו $O(|V| + |E|)$. כלומר, הרדוקציה פולינומיאלית. עתה נראה את נכונותה.

טענה: $\langle G, d \rangle \in \text{conVC} \Leftrightarrow \langle G^*, d^* \rangle \in \text{evenDegVC}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$

נניח שֶׁ-$\langle G, d \rangle \in \text{conVC}$. נשים לב שאם G קשיר אז גם G^* קשיר. כלומר קיים כסוי בקדקודים $U \subseteq V$ של G וגודלו $|U| \le d$. תחילה, נראה כי בְּ-G^* יש דרגה זוגית לכל קדקוד. לכל קדקוד חדש $a_{u,v}$ (וכך גם $b_{u,v}$, $c_{u,v}$ וְ-$d_{u,v}$) שיצרנו יש שתי קשתות שנוגעות בו ולכן דרגתו זוגית. יהא $u \in V$. על כל קשת (u,v) יהיה קיים עתה משושה. כלומר, v לא יהיה שכן של u. השכנים של u יהיו $a_{u,v}$ וְ-$c_{u,v}$. לכן לְ-u תהיה כמות כפולה של שכנים מאשר היו לו קודם. על-כן, דרגתו זוגית. נגדיר: $U^* = U \cup \{a_{u,v}, c_{u,v} \mid (u,v) \in E \wedge v \in U\} \cup \{b_{u,v}, d_{u,v} \mid (u,v) \in E \wedge u \in U\}$. נראה כי U^* מכסה את G^*. תהא $(u,v) \in E$. לכן $u \in U^*$ או $v \in U^*$. נראה כי כל שש הקשתות החדשות מכוסות בידי איברים מִ-U^*. נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי $u \in U$. אז $u, b_{u,v}, d_{u,v} \in U^*$. הקשת

והקשת $(u, a_{u,v})$ והקשת $(c_{u,v}, u)$ מכוסות על-ידי u, הקשתות $(a_{u,v}, b_{u,v})$ ו-$(b_{u,v}, v)$ מכוסות על-ידי $b_{u,v}$ והקשתות $(v, d_{u,v})$ ו-$(d_{u,v}, c_{u,v})$ מכוסות על-ידי $d_{u,v}$. כלומר, U^* מכסה את G^*. נשים לב שלכל קשת (u, v) הוספנו שתי צמתים. על-כן, $d^* = |U^*| = |U| + 2|E| \leq d + 2|E|$.
לכן $\langle G^*, d^* \rangle \in \text{evenDegVC}$.

$\Rightarrow$

יהא $\langle G^*, d^* \rangle \in \text{evenDegVC}$. נשים לב שהיות ו-$G^*$ קשיר אז גם G קשיר. לכן קיים כסוי בקדקודים $U^* \subseteq V^*$ של G^* וגודלו $|U^*| \leq d^*$. כמו-כן, G^* הינו גרף בדרגה זוגית. כל משושה יכוסה על-ידי לפחות 3 קדקודים. נשים לב שלפחות שניים מבין $a_{u,v}, b_{u,v}, c_{u,v}, d_{u,v}$ נמצאים בְּ-U^*. זאת מכיון שאחרת, אילו היה בְּ-U^* לכל היותר אחד מהם, אז קדקודי U^* לא היו מכסים את הקשתות $(a_{u,v}, b_{u,v}), (d_{u,v}, c_{u,v})$. כמו-כן, ניתן להניח, ללא הגבלת הכלליות, שֶבְּ-U^* יש בדיוק שניים, כי אילו היה קדקוד שלישי היה ניתן להחליפו בְּ-u או בְּ-v ועדין כל קשתות המשושה היו מכוסות. לכן אחד מהקדקודים u, v נמצא בכסוי. נגדיר: $U = U^* \cap V$. מהאבחנה, על כל קשת $(u, v) \in E$ יש בְּ-U^* קדקוד אחד מקורי, ולכן: $|U| = |U^*| - 2|E| \leq d^* - 2|E| = d$. תהא $(u, v) \in E$. היות וְ-U^* מכסה את E^* אז הוא בפרט מכסה את $(u, a_{u,v})$ ולכן $u \in U^*$ או $a_{u,v} \in U^*$. אם $u \in U^*$ אז $u \in U$ וגמרנו. אחרת, U^* מכסה גם את $(c_{u,v}, u)$ ולכן $c_{u,v} \in U^*$. מן האבחנה שבכל משושה בְּ-U^* יש בדיוק שני קדקודים חדשים ואחד מקורי, נובע כי $v \in U^*$. לכן $v \in U$, כנדרש. כלומר, לְ-G יש כסוי בגודל $\leq d$.
לכן $\langle G, d \rangle \in \text{conVC}$.

הנחנו שֶ- conVC היא NP-קשה, הראנו רדוקציה $\text{conVC} \leq_P \text{evenDegVC}$, ולכן, מהמשפט שראינו בכיתה, נובע שגם evenDegVC היא NP-קשה. כמו-כן, קודם ראינו כי $\text{evenDegVC} \in NP$, ולכן evenDegVC היא NP-שלמה.

שאלה 3
סעיף א
תחילה, נבחין כי קליקה בגודל 3 היא הרי תת-קבוצה $U \subseteq V$ בגודל $|U| = 3$, שבה בין כל זוג קדקודים יש צלע. כלומר, בכדי לבדוק האם קימת קליקה – עלינו לעבור על כל תתי-הקבוצות $U \subseteq V$ בגודל $|U| = 3$ ולבדוק שעבור כל שני קדקודים מְ-U יש צלע.

1. עבור על כל תתי-הקבוצות $U \subseteq V$ בגודל $|U| = 3$
   1.1. עבור כל $U = \{x, y, z\}$ שכזו בדוק האם $(x, y), (y, z), (x, z) \in E$
      1.1.1. אם כן, החזר "יש קליקה בגודל 3"
2. החזר "אין קליקה בגודל 3"

כלומר, אנו נחזיר "אין קליקה בגודל 3" רק לאחר שנעבור על כל תתי-הקבוצות האפשריות, ובאף אחת מהן לא תהיינה קימות כל שלוש הצלעות בין הקדקודים בתת-הקבוצה לבין עצמם.

מהו זמן הריצה? נשים לב שהיות ואנו עוברים על כל תתי-הקבוצות בגודל 3 של V ישנן $\binom{|V|}{3} \in O(|V|^3)$ כאלו. עבור כל אחת אנו מבצעים $O(1)$ פעולות. כלומר, זמן הריצה הינו $O(|V|^3)$, כנדרש.

סעיף ב
נראה רדוקציה $3 - Clique \leq_P 6 - Clique$. בהינתן מופע $G = (V, E)$ לבעית $6 - Clique$, נבנה גרף חדש באופן הבא:

- $\tilde{V} = \{x_{u,v} \mid (u, v) \in E\}$,
- $\tilde{E} = \left\{(x_{u,v}, x_{w,t}) \;\middle|\; \begin{array}{l} u, v, w, t \in V \text{ ארבעה קדקודים שונים וגם} \\ \{u, v, w, t\} \text{ הינה קליקה בגודל 4} \end{array}\right\}$,
- וְ-$\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$.

לצורך בניית $\tilde{V}$ אנו עוברים על כל זוגות הקדקודים ולכן זמן בנייתו הינו $O(|V|^2)$ וכך גם גודלה. לצורך בניית $\tilde{E}$ אנו עוברים על כל תתי-הקבוצות בגודל 4 של V, מודאים האם היא קליקה או לא בְּ-$O(1)$ זמן, ואם כן יוצרים את הצלע. כלומר, גודל $\tilde{E}$ הוא לכל היותר $O(|V|^4)$ וכך גם זמן בנייתה, שכן בדומה לסעיף א': $\binom{|V|}{4} \in O(|V|^4)$. זמן בנית הגרף $\tilde{G}$ הינו $O(|V|^4)$ וגודלו הינו $O(|\tilde{V}| + |\tilde{E}|) = O(|V|^4)$. כלומר, הרדוקציה רצה בזמן $O(|V|^4)$, כנדרש. עתה נראה את נכונותה.

טענה: $G \in 6 - Clique \Leftrightarrow \tilde{G} \in 3 - Clique$.

הוכחה:

$\Leftarrow$

נניח שֶ-$G \in 6 - Clique$. כלומר קיימת $U \subseteq V$ קליקה בגודל 6. נסמנה: $U = \{u, v, w, t, y, z\}$. נשים לב שכל תת-קבוצה של קליקה הינה בעצמה קליקה, ולכן $\{u, v, w, t\}$ היא קליקה, $\{u, v, y, z\}$ היא קליקה וְ-$\{w, t, y, z\}$ היא קליקה. כמו-כן, בגרף $\tilde{G}$ קימים הקדקודים $x_{u,v}, x_{w,t}, x_{y,z}$. על-כן, מהגדרת $\tilde{E}$, נובע כי $(x_{u,v}, x_{w,t}), (x_{u,v}, x_{y,z}), (x_{w,t}, x_{y,z}) \in \tilde{E}$. נגדיר: $\tilde{U} = \{x_{u,v}, x_{w,t}, x_{y,z}\}$. ישנן צלעות בין כל זוג קדקודים ולכן $\tilde{U}$ קליקה בְּ-$\tilde{G}$ וגודלה 3. לכן $\tilde{G} \in 3 - Clique$.

$\Rightarrow$

נניח כי $\tilde{G} \in 3 - Clique$. לכן קיימת $\tilde{U} \subseteq \tilde{V}$ קליקה בגודל 3. נסמנה: $\tilde{U} = \{x_{u,v}, x_{w,t}, x_{y,z}\}$. היות וְ-$\tilde{U}$ קליקה מתקיים $(x_{u,v}, x_{w,t}), (x_{u,v}, x_{y,z}), (x_{w,t}, x_{y,z}) \in \tilde{E}$. מהגדרת $\tilde{E}$ נובע כי $\{u, v, w, t\}$, $\{u, v, y, z\}$ וְ-$\{w, t, y, z\}$ הן קליקה כל אחת, על שלושה קדקודים $x_{u,v}, x_{w,t}, x_{y,z}$ השונים זה מזה. לכן הקדקודים u, v, w, t, y, z שונים זה מזה. נשים לב כי $U = \{u, v, w, t, y, z\}$ היא קליקה, וזאת משום שלכל שני קדקודים בה קימת צלע ביניהם בְּ-E, מתוך אחת מהקליקות $\{u, v, w, t\}, \{u, v, y, z\}, \{w, t, y, z\}$. לכן $U \subseteq V$ היא קליקה בְּ-G בגודל 6. לכן $G \in 6 - Clique$.

סעיף ג
נשים לב שלהוכיח שאם לא קיים אלגוריתם עבור $6 - Clique$ הרץ בזמן $O(|V|^5)$, אזי לא קיים אלגוריתם עבור $3 - Clique$ הרץ בזמן $O(|V|^{2.5})$ שקול לְהראות שאם קיים אלגוריתם עבור $3 - Clique$ הרץ בזמן $O(|V|^{2.5})$ אז קיים אלגוריתם עבור $6 - Clique$ הרץ בזמן $O(|V|^5)$. נראה זאת.

טענה: אם קיים אלגוריתם עבור $Clique - 3$ הרץ בזמן $O(|V|^{2.5})$ אז קיים אלגוריתם עבור $Clique - 6$ הרץ בזמן $O(|V|^5)$.

הוכחה:

נניח שקיים אלגוריתם, שנסמנו B, עבור $Clique - 3$ הרץ בזמן $O(|V|^{2.5})$. נבנה אלגוריתם, נקרא לו A, עבור $Clique - 6$. האלגוריתם יפעל באופן הבא:

- בהינתן מופע $G = (V, E)$ לבעית $Clique - 6$, נבנה את הגרף $\tilde{G}$ כמתואר ברדוקציה.
- נריץ את אלגוריתם B על $\tilde{G}$ ונענה כמוהו.

נשים לב שנכונות האלגוריתם A מובטחת לנו עקב נכונות הרדוקציה מסעיף ב' ונכונות האלגוריתם B עבור בעית $Clique - 3$. כלומר, A עונה כן על G $\Leftrightarrow$ B עונה כן על $\tilde{G}$ $\Leftrightarrow$ קיימת בְּ-$\tilde{G}$ קליקה בגודל $3 \leq$ $\Leftrightarrow$ קימת בְּ-G קליקה בגודל $6 \leq$ $\Leftrightarrow$ $G \in 6 - Clique$.

כלומר, כל שנותר לודא הוא את זמן הריצה של אלגוריתם A. כפי שהראינו בסעיף ב', זמן בנית $\tilde{G}$ לוקח $O(|V|^4)$ זמן. כמו-כן, $O\left(\left|\tilde{V}\right|\right) = O(|V|^2)$. אלגוריתם B לוקח $O\left(\left|\tilde{V}\right|^{2.5}\right)$ זמן, שזה $O(|V|^5)$ זמן. לכן סך-זמן הריצה הינו $O(|V|^5)$, כנדרש.

שאלה 4

סעיף א

נראה שהרדוקציה שתוארה בכיתה מ-SAT ל-$3SAT$ אינה משמרת מספר הצבות. נקודת המפתח כאן היא לשים לב שעקב הוספת המשתנים החדשים, נוספו גם מספר רב של השמות. נתבונן בפסוק הבא:

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

יש לו 15 השמות מספקות. ברדוקציה אנו נוסיף משתנה חדש y_1 ונבנה את הפסוק:

$$f(\varphi) = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee x_4)$$

כפי שראינו בכיתה, כל השמה מספקת עבור φ ניתן להרחיב להשמה מספקת עבור $f(\varphi)$, ולכן מספר ההשמות המספקות ל-$f(\varphi)$ גדול או שווה ממספר ההשמות המספקות ל-φ. נבחין כי אחת השמות עבור φ המספקות הינה $x_1, x_2, x_3, x_4 \leftarrow true$. השמה זו ניתנת להרחבה לשתי השמות מספקות עבור $f(\varphi)$, אחת בה $y_1 \leftarrow true$ והשניה בה $y_1 \leftarrow false$. משמע, ל-$f(\varphi)$ יש לפחות 16 השמות מספקות.

סעיף ב

נתבונן בפסוק $\varphi = (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow x_3$. טבלת האמת שלו הינה:

x_1	x_2	x_3	φ
false	*false*	*false*	*true*
false	*false*	*true*	*false*
false	*true*	*false*	*false*
false	*true*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*false*
true	*false*	*true*	*true*
true	*true*	*false*	*false*
true	*true*	*true*	*true*

נבנה בתחילה פסוק τ, שאינו בצורת CNF, שמסתפק אם ורק אם φ לא מספק. נעשה זאת בדרך הבאה: נבנה פסוקית לכל אחת מן השורות שעבורן φ מקבל ערך $false$. נשים לב שבשביל שהפסוק יקבל ערך $false$, די שאחת מהן תתקיים. לכן הפסוק τ השקול ל"מתי φ מקבל $false$" הינו:

$$\tau = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

לכן שלילת הפסוק תהיה שקולה ל"מתי φ מקבל $true$". נסמנה: ψ. אז:

$$\psi = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

עקב חוקי דה-מורגן, ψ אכן מתקבל בצורת CNF, כנדרש, והוא אכן משתמש אך ורק במשתנים x_1, x_2, x_3.

סעיף ג

בהינתן פסוקית $\varphi = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_t$ נבנה את הפסוק

$\psi = (x_1 \leftrightarrow \overline{y_1}) \wedge \left((\overline{y_1} \vee x_2) \leftrightarrow \overline{y_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left((\overline{y_{t-1}} \vee x_t) \leftrightarrow \overline{y_t}\right) \wedge (\overline{y_t})$.

<u>טענה</u>: תהי $a_1, \dots, a_t$ השמה המספקת את φ. אזי קיימת השמה יחידה $b_1, \dots, b_t$ למשתנים $y_1, \dots, y_t$ כך ש-$a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ היא השמה המספקת את ψ.

<u>הוכחה</u>:

נשים לב שאם ההשמה $a_1, \dots, a_t$ מספקת את φ אזי היא מספקת לפחות אחד מבין $x_1, x_2, \dots, x_t$. יהי $1 \le i \le t$ האינדקס כך ש-x_i הוא המינימלי כך ש-$a_i = true$. אז $a_1, \dots, a_{i-1} = false$. נגדיר: $b_1, \dots, b_{i-1} = true$ ו-$b_i, \dots, b_t = false$. לכל $j < i$ ההשמה תספק את $\left((\bar{y}_{j-1} \vee x_j) \leftrightarrow \bar{y}_j\right)$ כי $b_{j-1} = b_j = true$ ו-$a_j = false$ ולכן מתקיים $\left((F \vee F) \leftrightarrow F\right)$. עבור $j = i$ ההשמה תספק את

כי הרי $\left(\left(\bar{y}_{i-1} \vee x_i\right) \leftrightarrow \bar{y}_i\right)$ $b_{i-1} = a_i = true$ ו-$b_i = false$ ואז אכן מתקיים $\left((F \vee T) \leftrightarrow T\right)$.
עבור $j > i$ ההשמה תספק את $\left(\left(\bar{y}_{j-1} \vee x_j\right) \leftrightarrow \bar{y}_j\right)$ שכן $b_{j-1} = b_j = false$ ואכן מתקיים $(T \leftrightarrow T)$.
לכן נקבל כי ההשמה $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$, תספק את ψ.
נראה כי זו ההשמה היחידה המספקת את ψ. נזכור שֶׁ-i הוא האינדקס הקטן ביותר כך שֶׁ-$a_i = true$ ומכיון שההשמה מספקת את $\left(\left(\bar{y}_{i-1} \vee x_i\right) \leftrightarrow \bar{y}_i\right)$ אזי $b_i = false$. באופן דומה לכל $j > i$ נקבל כי $b_{i+1}, \dots, b_j = false$. אם $i > 1$ אז $a_1, \dots, a_{i-1} = false$. במקרה זה, מכיון שֶׁ-$x_1 \leftrightarrow \bar{y}_1$ מסתפק אזי $b_1 = true$, ובאופן אינדוקטיבי, היות ו-$a_2, \dots, a_{i-1} = false$ נקבל כי $b_2, \dots, b_{i-1} = true$. לכן ההשמה שהגדרנו עבור $b_1, \dots, b_t$ היא היחידה שתספק את ψ.

טענה: אם $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ מספקת את ψ, אזי $a_1, \dots, a_t$ השמה מספקת של φ
הוכחה:
תהי $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ השמה המספקת את ψ. ההשמה מספקת את כל ψ. יהי $1 \le i \le t$ האינדקס המינימלי כך שֶׁ-$b_i = false$. בהכרח קיים אחד כזה, כי $\left(\bar{y}_t\right)$ מסתפק. אם $i = 1$ אז $b_1 = false$ והיות ו-$\left(x_1 \leftrightarrow \bar{y}_1\right)$ מסתפק אז $a_1 = true$ ולכן φ מסתפק. אחרת, $i > 1$. לכן $b_1 = \ldots = b_{i-1} = true$. על-כן $a_1 = \ldots = a_{i-1} = false$. נבחין שבכדי לספק את החלק $\left(\left(\bar{y}_{i-1} \vee x_i\right) \leftrightarrow \bar{y}_i\right)$ חייב להתקיים $a_i = true$, ולכן ההשמה $a_1, \dots, a_t$ בהכרח תספק את φ, שכן בשביל לספק את φ די לספק ולו אחד מבין המשתנים $x_1, \dots, x_t$.

סעיף ד

בהינתן פסוק φ בצורת CNF בעל n משתנים עבור בעית SAT נמיר אותו לפסוק ψ בצורת $3CNF$ עבור בעית $3SAT$, כך שהרדוקציה תהיה משמרת הצבות. נסמן: $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ כאשר לכל $1 \le i \le m$: C_i היא הפסוקית הַ-i-ית בְּ-φ. נשים לב שכל C_i נראה מהצורה $l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \ldots \vee l_{i,k_i}$ כאשר לכל $1 \le j \le k_i$: $l_{i,j}$ ליטרל. כלומר, כל C_i נראה מהצורה של הפסוק בסעיף ג'. על-כן, נוסיף עבורו משתנים חדשים $y_{i,1}, \dots, y_{i,k_i}$ וניצור את הפסוק D_i, כמתואר בסעיף ג'. כלומר: $D_i = \left(l_{i,1} \leftrightarrow \bar{y}_{i,1}\right) \wedge \left(\left(\bar{y}_{i,1} \vee l_{i,2}\right) \leftrightarrow \bar{y}_{i,2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\left(\bar{y}_{i,k_i-1} \vee l_{i,k_i}\right) \leftrightarrow \bar{y}_{i,k_i}\right) \wedge \left(\bar{y}_{i,k_i}\right)$. עתה, נשים לב שכל פסוקית $D_{i,j}$ (עבור $1 \le j \le k_i$) של D_i היא מהצורה $(a \vee b) \leftrightarrow c$ של סעיף ב', ולכן ניתנת להמרה לפסוק שקול בצורת $3CNF$, כפי שכבר ראינו. במקרי הקצה של הפסוקית הראשונה $D_{i,1} = l_{i,1} \leftrightarrow \bar{y}_{i,1}$ ולכן ניתן לרשום אותה גם כְּ-$\left(l_{i,1} \vee l_{i,1}\right) \leftrightarrow \bar{y}_{i,1}$, ואז היא בדיוק מהצורה של סעיף ב', ומקרה הקצה השני של הפסוקית האחרונה $D_{i,k_i+1} = \bar{y}_{i,k_i}$ היא כבר בצורת $3CNF$, ולכן נותיר אותה כמו שהיא. כלומר, נבנה, כמתואר בסעיף ב', פסוק $E_{i,j}$ בצורת $3CNF$ השקול לפסוק $D_{i,j}$. נשרשר אותם ונגדיר: $E_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} E_{i,j} \wedge D_{i,k_i+1}$ (ניזכר כי $D_{i,k_i+1} = \bar{y}_{i,k_i}$). ניזכר שכל זה היה רק כדי למצוא פסוק בצורת $3CNF$ השקול לפסוקית C_i. לכן נגדיר: $\psi = \bigwedge_{i=1}^{m} E_i$.

תחילה, ננתח את זמן הריצה של הרדוקציה ונראה שהיא אכן פולינומיאלית, ולאחר-מכן נוכיח נכונותה. ננתח את עלות ההמרה של פסוקית C_i. כאשר אנו בונים את D_i אנו מוסיפים משתנים ככמות הליטרלים בפסוקית, כלומר מדובר בְּ-$O(n)$ משתנים[3] חדשים לכל היותר. לכן גודל הפסוק D_i עודנו $O(n)$ ויש בו לכל היותר $O(n)$ פסוקיות. עבור כל פסוק $D_{i,j}$ אנו בונים פסוק $E_{i,j}$ בצורת $3CNF$ כמתואר בסעיף ב'. גודל כל $D_{i,j}$ הוא $O(1)$, ולכן בניית כל $E_{i,j}$ לוקחת $O(1)$. לכן בניית E_i לוקחת $O(n)$. כלומר, עלות ההמרה של פסוקית C_i לפסוק E_i בצורת $3CNF$ הינה $O(n)$. אנו מבצעים זאת עבור m פסוקיות ולכן סך-זמן הריצה הינו $O(m \cdot n)$, שזה פולינומיאלי.

[3] ניתן להניח, ללא הגבלת הכלליות, שגודל כל פסוקית $\le n$, כי כל משתנה יכול להופיע או ללא שלילה או עם שלילה או לא להופיע. אם משתנה יופיע גם הוא וגם שלילתו – הפסוקית בודאות תסתפק ולכן ניתן למחוק אותה. אם יופיע יותר פעמים ומעלה רק המשתנה או רק שלילתו – ניתן למחוק את ההופעות המיותרות ואין זה ישנה את הפסוקית. לכן $k_i \le n$ ולכן יתוספו לכל היותר n משתנים חדשים על כל פסוקית.

טענה: כמות ההשמות המספקות לְ-φ זהה לכמות ההשמות המספקות לְ-ψ.
הוכחה:
נוכיח שכמות ההשמות המספקות לְ-$\varphi \geq$ כמות ההשמות המספקות לְ-ψ ולאחר-מכן נוכיח $\leq$. נשים לב כי ברדוקציה החלפנו כל $D_{i,j}$ בפסוק שקול $E_{i,j}$ ולכן כמות ההשמות המספקות לְ- $\psi = \bigwedge_{i=1}^{m} E_i$ שווה לכמות ההשמות המספקות לְ- $\chi = \bigwedge_{i=1}^{m} D_i$.

$\geq$
נניח של-φ קימות k השמות מספקות. נתבונן באחת מהן, נסמנה: s. נראה שניתן להרחיב אותה להשמה מספקת s^* עבור χ. נסיק כי לְ-χ לפחות k השמות מספקות.
s מספקת את φ ולכן לכל $1 \leq i \leq m$: s מספקת את C_i. בסעיף ג' ראינו שניתן להרחיב את s עם השמות $b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i}$ למשתנים $y_{i,1}, \dots, y_{i,k_i}$ כך שֶההשמה המורחבת תספק את D_i. נאחד את ההשמות המורחבות, ונשים לב שהיות וכולן מוגדרות כמו s על המשתנים המשותפים $x_1, \dots, x_n$ והיות והמשתנים החדשים ייחודיים לכל השמה, אִחוד ההשמות אפשרי ואינו יוצר סתירה. נסמן את ההשמה הנוצרת בְּ-s^*. אם-כן, s^* מספקת כל D_i ולכן s^* מספקת את χ.
נשים לב שאם s_1, s_2 השמות שונות המספקות את φ אז ההרחבות שלהן s_1^* וְ-s_2^* הן השמות שונות המספקות את χ (על-פי הסעיפים הקודמים).

$\leq$
נניח של-χ קימות k השמות מספקות. נבנה מכל השמה s^* שכזו השמה מספקת s עבור φ, ומזה נסיק כי לְ-φ לפחות k השמות מספקות.
נשים לב כי ההשמה s^* מוגדרת על כל המשתנים $x_1, \dots, x_n, y_{1,1}, \dots, y_{1,k_1}, \dots, y_{m,1}, \dots, y_{m,k_m}$. תהא s ההשמה של s^* מצומצמת למשתנים $x_1, \dots, x_n$. על-פי סעיף ג' חלק ב' ההשמה מספקת כל C_i ולכן מספקת את $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$. נשים לב שאין אף השמה נוספת $s^{*\prime} \neq s^*$ אשר מובילה לאותה ההשמה s, כי אילו היתה – היה ניתן להרחיב את s גם להשמה s^* וגם להשמה $s^{*\prime}$, בסתירה לכך שראינו בסעיף ג' חלק א' שניתן להרחיבה להשמה אחת בדיוק.

היות ומספר ההשמות המספקות לְ-φ זהה למספר ההשמות המספקות לְ-ψ נסיק את המסקנה נסיק כי:
מסקנה: $\psi \in 3SAT \Leftrightarrow \varphi \in SAT$

על-כן נסכם כי הרדוקציה פולינומיאלית ומשמרת מספר השמות.

סעיף ה - בונוס
ניזכר ברעיון של הרדוקציה מבעיה כלשהי $A \in NP$ לְ-SAT במשפט קוק-לוין: אנו יודעים כי $A \in NP$ ולכן קיים לה אלגוריתם וִדוּא $V(x,y)$ כך שֶ-$x \in A \Leftrightarrow$ קיים עד y כך שֶ-$V(x,y) = true$ בזמן פולינומיאלי. היות וְ-y לא ידוע לנו, אנו נְיַצג אותו באמצעות משתנים בוליאנים, כאשר כל משתנה בוליאני אומר האם התו שמספרו כך וכך בְּ-y שווה לתו מסוים. כלומר, השמה מסוימת של המשתנים הללו מגדירה בצורה חד-חד ערכית את העד.
שאר הפסוק מייצג את צעדי החישוב. הפסוק נוצר מכל המשתנים המייצגים את כל טבלת החישוב. עבור קלט x ועד y החישוב נקבע באופן חד-ערכי. לכל חישוב קיימת השמה יחידה על המשתנים שתייצג אותו. בפרט, עבור החישוב היחיד של קלט x ועד y גם-כן קיימת השמה יחידה על המשתנים שתייצג אותו. משמע, עבור עד y מסוים ישנה **אך ורק השמה** אחת שתספק את המשתנים הללו, שכן, כפי שציינו, הם מגדירים באופן חד-ערכי את העד y.
עתה נתמקד בבעית $Clique$. יהיו $\langle G = (V,E), k \rangle \in Clique$. נניח שיש קליקה יחידה $U \subseteq V$ בגודל $|U| \geq k$.
ניזכר שבאלגוריתם הוִדוּא עבור $Clique$ העד הוא תת-קבוצה של V שהינה קליקה בגודל k בדיוק. כלומר, במקרה זה, קיים אך ורק עד יחיד והוא אותה הקליקה היחידה U דלעיל. כפי שנימקנו קודם, עבור עד מסוים ישנה בדיוק השמה אחת שתספק את $f_{cl}(G,k)$. אכן U הוא העד היחיד ולכן קיימת השמה יחידה s, המגדירה באופן חד-חד ערכי את העד U, אשר מספקת את $f_{cl}(G,k)$.