פתרון עבודת בית 4

שאלה 1

תיאור האלגוריתם

1. אם $f(s) \neq 0$ החזר "לא".
2. אם קיימת $(u,v) \in E$ כך שמתקיים $f(v) > f(u) + w(u,v)$ החזר "לא".
3. הגדר $G' = (V, E')$ כאשר $E' = \{(u,v) \in E \mid f(v) = f(u) + w(u,v)\}$.
   a. אם קיים צומת שאינו נגיש מ-s ב-G' החזר "לא".
4. החזר "כן".

הוכחת נכונות האלגוריתם

<u>טענת עזר</u>

במידה והאלג' הגיע לשלב 3: ב-G' כל הצמתים נגישים מ-s אם"ם $f(v) = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$

<u>הוכחת נכונות האלג'</u>

נשים לב כי $\delta(s,s) \in \{0, -\infty\}$, זאת כי אם $\delta(s,s) \neq 0$ אזי בהכרח קיים מסלול במשקל שלילי מ-s לעצמו. בפרט במקרה בו $f(s) \neq 0$ מתקיים כי $\delta(s,s) \neq f(s)$, והאלג' אכן מחזיר לא.

נניח מעתה כי $f(s) = 0$.

נניח כי האלגוריתם החזיר "כן". בפרט נסיק כי הוא הגיע לשלב 3 ומצא כי כל הצמתים ב-G' נגישים מ-s. לפי ט.עזר מתקיים כי $f(v) = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$.

נניח כי $f(v) = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$ (בפרט, $f(v) \neq -\infty$). נניח בשלילה כי קיימת $(u,v) \in E$ המקיימת את תנאי שורה 2, כלומר $\delta(s,v) = f(v) > f(u) + w(u,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$. בסתירה לכך שקיים מסלול מ-s ל-v דרך u במשקל $\delta(s,u) + w(u,v)$. לכן, האלג' יגיע לשלב 3, ולפי ט.עזר כל הצמתים ב-G' נגישים מ-s, ולכן האלג' יחזיר "כן" כנדרש.

<u>הוכחת טענת עזר</u>

למה: אם קיים $x \in V$ כך ש-$f(x) > \delta(s,x)$ אזי קיימת קשת $(u,v) \in E$ כך ש-$f(v) > f(u) + w(u,v)$.
(הוכחת הלמה בהמשך)

מאחר והאלג' הגיע לשלב 3, לפי הלמה מתקיים $f(v) \leq \delta(s,v)$ לכל $v \in V$ (אחרת האלג' היה עוצר בשלב 2 ומחזיר לא).

$\Rightarrow$ נניח כי $f(v) = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$. יהי H עץ מסלולים קלים ביותר מ-s (שימו לב כי קיים כזה). לכל (u,v) בעץ, מאחר והיא חלק ממסלול קל ביותר, מתקיים $f(v) = \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v) = f(u) + w(u,v)$, ולכן $(u,v) \in E'$. קיבלנו כי H הוא תת גרף של G', ומאחר וב-H כל הצמתים נגישים מ-s מהגדרתו, כך גם ב-G'.

$\Leftarrow$ נניח כי כל הצמתים נגישים מ-s ב-G', ונניח בשלילה כי קיים צומת v כך ש-$f(v) < \delta(s,v)$. נשים לב כי $f(s) = 0 = f(s,s)$, ובפרט $v \neq s$. נתבונן במסלול $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_k, v)$ מ-s ל-v ב-G' (המובטח לנו מהנחה). בה"כ נניח כי v הצומת הראשון במסלול המקיים את אי-השיוויון (אחרת ניקח רישא של P). מהנחה זו נובע $f(v_k) = \delta(s, v_k)$ וכן $f(v) < \delta(s,v)$. מאחר והקשת $(v_k, v) \in E'$ מתקיים:

$$\delta(s,v) > f(v) = f(v_k) + w(v_k, v) = \delta(s, v_k) + w(v_k, v) \geq \delta(s,v)$$

כאשר האי-שיוויון מימין נובע מכך שזהו ערך של מסלול מ-s ל-v (דרך v_k). קיבלנו סתירה.

הוכחת למה

נניח כי קיים מעגל שלילי בגרף $C = (v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$. בפרט, התנאי בלמה מתקיים לכל צומת במעגל. נניח שלכל קשת במעגל מתקיים: $f(v_{i+1}) \le f(v_i) + w(v_i, v_{i+1})$ (עבור $0 \le i < k$). נחבר ונקבל:

$$f(v_0) = f(v_k) \le f(v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_k) \le \cdots \le f(v_0) + \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = f(v_0) + w(C)$$

קיבלנו כי $w(C) \ge 0$ בסתירה להנחה. לכן קיימת קשת במעגל המקיימת $f(v_{i+1}) > f(v_i) + w(v_i, v_{i+1})$.

נניח כי אין מעגלים במשקל שלילי בגרף, ובפרט $\delta(s, v)$ סופי ומוגדר לכל $v \in V$. יהי v כך ש-$f(v) > \delta(s, v)$. נתבונן במסלול קל ביותר מ-s ל-v בגרף $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_k, v)$. נשים לב כי $f(s) = 0 = \delta(s, s)$, ובפרט $v \ne s$. בה"כ נניח כי v הצומת הראשון במסלול עבורו $f(v) > \delta(s, v)$ (אחרת ניקח רישא של P). מהנחה זו נסיק כי מתקיים $f(v_k) \le \delta(s, v_k)$. מתכונת מסלולים קלים ביותר, כל רישא של P גם היא מסלול קל ביותר, ובפרט הרישא עד לצומת v_k. לכן מתקיים $f(v) > \delta(s, v) = \delta(s, v_k) + w(v_k, v) \ge f(v_k) + w(v_k, v)$. מצאנו קשת (v_k, v) כנדרש.

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

שלב 2 במעבר על כל הקשתות, בזמן כולל $O(|E|)$.

בניית G' בזמן $O(|V| + |E|)$.

בדיקת נגישות ב-G' בעזרת BFS בזמן $O(|V| + |E|)$ (מאחר וזה תת גרף של G).

סה"כ זמן ריצה: $O(|V| + |E|)$.

שאלה 2

סעיף א

$$OPT(v,i)=\begin{cases}0, & v=s\wedge i=0\\ \infty, & v\neq s\wedge i=0\\ \min\limits_{(u,v)\in E}\{OPT(u,i-1)+w(u,v)\}, & else\end{cases}$$

סעיף ב

נסמן $n=|V|$. נתחזק מערך דו-מימדי A מגודל $n\times(n+1)$

```
for all 0 ≤ i ≤ n, v ∈ V do:
      A[v,i] ← ∞
A[s,0] ← 0
for i ← 1 to n do:
      for each v ∈ V do:
            for each (u,v) ∈ E do:
                  A[v,i] ← min{A[v,i], A[u,i−1] + w(u,v)}
If ∃v ∈ V such that A[v,n] ≠ A[v,n−1]
      Retuen "G contains negative cycle"
for each v ∈ V return A[v,n]
```

סעיף ג

נוכיח את הטענה באינדוקציה על k, מס' הסיבובים בריצת אלגוריתם בלמן-פורד.

אבחנה: ערכי $d(v)$ יכולים רק לקטון במהלך הריצה.

<u>בסיס</u>: $k=0$. לפי הגדרת האתחול באלגוריתם, בתחילת הסיבוב הראשון מתקיים $d(s)=0=OPT(s,0)$, וכן לכל צומת $s\neq v$ מתקיים $d(v)=\infty=OPT(v,0)$.

<u>הנחה</u>: נניח כי לאחר k סיבובים של האלגוריתם לכל $v\in V$ מתקיים: $d(v)\leq OPT(v,k)$.

<u>צעד</u>: יהי $v\in V$. נוכיח את נכונות הטענה עבור v בסיום הסיבוב ה-$k+1$ של האלגוריתם.

אם $OPT(v,k+1)=\infty$ אזי ברור כי הטענה מתקיימת בסיום הסיבוב. אחרת בהכרח $OPT(v,k+1)$ סופי. יהי $P=(s=v_0,v_1,\dots,u,v)$ מסלול קל ביותר בגרף מ-s ל-v מאורך לכל היותר $k+1$ (נשים לב כי קיים כזה). נתבונן ברישא שלו P' אשר מסתיימת בצומת u. בהכרח מתקיים $OPT(u,k)=w(P')$, זאת כי אם היה קיים מסלול L מ-s ל-u קל יותר מ-P' מאורך לכל היותר k, אזי $L\circ(u,v)$ היה מסלול מאורך לכל היותר $k+1$ מ-s ל-v ממשקל קל יותר מ-P, בסתירה להגדרת P. מאחר וקיימת קשת $(u,v)\in E$, הרי שבמהלך הסיבוב ה-$k+1$ יתבצע $Relax$ על צלע זו. לפי הנחת האינדוקציה, בתחילת הסיבוב מתקיים $d(u)\leq OPT(u,k)$, ולפי אבחנה ערך $d(u)$ יכול רק לקטון, ולכן נסיק כי בעת ביצוע פעולת ה-$Relax$ על הקשת אי-השוויון הנ"ל מתקיים גם כן. לאחר ביצוע פעולת ה-$Relax$ מתקיים:

$$d(v)\leq d(u)+w(u,v)\leq OPT(u,k)+w(u,v)=w(P')+w(u,v)=w(P)=OPT(v,k+1)$$

מאחר וערך $d(v)$ יכול רק לקטון, נסיק כי בסיום הסיבוב מתקיים $d(v)\leq OPT(v,k+1)$ כנדרש.

סעיף ד

יהי $v\in V$. מאחר ואין מעגל ממשקל שלילי נגיש מ-s, לפי טענה מהכיתה (קיים מעגל שלילי נגיש מ-s $\Leftrightarrow$ בלמן-פורד מזהה מעגל שלילי) האלג' יחזיר את ערך $d(v)$ שחושב בסיום הסיבוב ה-$|V|-1$.

נניח $\delta(s,v)=\infty$ (כלומר v אינו נגיש מ-s). לפי טענה מהכיתה על אלגוריתם מבוסס $Relax$, בכל שלב בריצה מתקיים $d(v)\geq\delta(s,v)$, ובפרט בסיום מתקיים $d(v)=\infty$ כנדרש.

נניח עתה כי v נגיש מ-s. מאחר ואין מעגל ממשקל שלילי נגיש מ-s נסיק כי $\delta(s,v)$ סופי, ובפרט קיים מסלול קל ביותר P מ-s ל-v. לפי טענה מהכיתה, ניתן להניח כי P מסלול פשוט, ובפרט אורכו $\leq|V|-1$. לפי הגדרת OPT מתקיים $\delta(s,v)=w(P)\geq OPT(v,|V|-1)$, ולכן לפי סעיף ג מתקיים $d(v)\leq OPT(v,|V|-1)\leq\delta(s,v)$ בסיום הסיבוב ה-$|V|-1$. לפי טענה מהכיתה על אלגוריתם מבוסס $Relax$, בכל שלב מתקיים $d(v)\geq\delta(s,v)$. נסיק כי בסיום הסיבוב ה-$|V|-1$ מתקיים $d(v)=\delta(s,v)$ כנדרש.

שאלה 3

תיאור האלגוריתם

1. בנה את גרף הרכיבים הקשירים G^{SCC} של G.
2. מצא רכיב מקור C ב-G^{SCC}, ובחר $s \in C$ כלשהו.
3. הרץ DFS החל מצומת s. לכל $v \in V$ יהיו $d(v), f(v)$ זמני ההתחלה והסיום (בהתאמה) של ריצה זו.
4. החזר סדר $v_1, \dots, v_n$ כך ש-$d(v_1) > d(v_2) > \dots > d(v_n)$.

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענת עזר

ב-G^{SCC} קיים רכיב מקור יחיד C, ולכל $s \in C$ מתקיים כי כל הצמתים בגרף נגישים מ-s.

הוכחת נכונות האלגוריתם

לפי טענת עזר, בשלב 2 יבחר צומת s כך שכל הצמתים בגרף נגישים מ-s. לכן, בשלב 3 ריצת ה-DFS תחזיר עץ מושרש ב-s שמכיל את כל צמתי הגרף (בתחילת הריצה קיים מסלול לבן מ-s לכל צומת).
נניח כי הסרנו את הצמתים $v_1, \dots, v_{k-1}$. נסמן את שארית הגרף לאחר ההסרה ב-G'. יהי v צומת ב-G'. נראה כי קיים מסלול מ-s ל-v ב-G'. אם $v = s$ סיימנו. אחרת, יהי $P = (s, \dots, v)$ המסלול מ-s ל-v בעץ ה-DFS שנוצר. אזי, לכל $u \neq v$ במסלול, מתקיים כי u אב קדמון של v, ולכן לפי טענה מהכיתה מתקיים:

$$I_v = [d(v), f(v)] \subset [d(u), f(u)] = I_u$$

בפרט נסיק כי $d(u) < d(v)$. לפי הגדרת הסדר הצומת u מופיע לאחר הצומת v, ומאחר והצומת v טרם הוסר, נסיק כי גם הצומת u קיים ב-G'. הראנו כי כל הצמתים ב-P נותרו ב-G', ולכן P מסלול מ-s ל-v ב-G', כנדרש.

הוכחת טענת עזר

נתון כי קיים צומת v כך שכל הצמתים נגישים ממנו. נסמן ב-C את הרכיב של v ב-G^{SCC}. לכל רכיב אחר C', ולכל $u \in C'$, קיים מסלול מ-v ל-u ב-G, ולכן לפי טענה מהכיתה, קיים מסלול מ-C ל-C' ב-G^{SCC}, ובפרט קיימת קשת נכנסת ל-C' והוא אינו רכיב מקור. בהכרח קיים רכיב מקור ב-G^{SCC}, אחרת לכל רכיב קיימת קשת נכנסת, ולכן קיים מעגל ב-G^{SCC} (נתחיל מרכיב כלשהו, ובכל שלב ניתן לעבור לרכיב אחר על פני קשת נכנסת, עד שמגיעים לרכיב שכבר ראינו), בסתירה לכך שזהו גרף חסר מעגלים. נסיק כי C רכיב מקור יחיד בגרף G^{SCC}.
יהי $s \in C$, ויהי $u \in V$. קיים מסלול P מ-v ל-u בגרף (כי כל הצמתים נגישים מ-v). בנוסף, s ו-v באותו רכיב קשירות היטב, ולכן קיים מסלול P' מ-s ל-v. קיבלנו כי $P' \circ P$ מסלול מ-s ל-u בגרף, ולכן כל הצמתים בגרף נגישים מ-s כנדרש.

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

1. בניית גרף רכיבים קשירים היטב בזמן $O(|V| + |E|)$.
2. מציאת רכיב מקור בגרף G^{SCC} בזמן $O(|V|)$.
3. ריצת DFS בזמן $O(|V| + |E|)$.
4. נשים לב כי ניתן לסדר את הצמתים לפי סדר גילויים בעת ריצת ה-DFS, ואין צורך במיון. זאת ללא תוספת עלות לזמן ריצה.

סה"כ זמן ריצה: $O(|V| + |E|)$

שאלה 4

תיאור האלגוריתם

1. יהי c המשקל של הקשת הכבדה ביותר בגרף.
2. נגדיר פונ' משקל חדשה: $w'(e) = w(e) + c \cdot n$ לכל $e \in E$ (כאשר $n = |V|$).
3. נריץ $Dijkstra$ על גרף G עם פונ' משקל w', וצומת מקור s.
לכל $v \in V$ נסמן ב-$d'(v)$ את תוצאת ריצת האלגוריתם.
4. לכל $v \in V$ נחזיר $d(v) = d'(v)\ (mod\ c \cdot n)$ (שארית בחלוקה עם $c \cdot n$).

הוכחת נכונות האלגוריתם

אבחנה 1: עבור מסלול P מ-s ל-v מתקיים: $w'(P) = nc|P| + w(P)$.
אבחנה 2: לכל מסלול פשוט P מתקיים $w(P) \leq (n-1)c < nc$.

יהי $v \in V$, ויהי P מסלול קל ביותר מ-s ל-v תחת w', כלומר $d'(v) = w'(P)$. נשים לב כי P מסלול פשוט (תכונת מסלול קל ביותר תחת פונ' משקל אי-שלילית).
נוכיח כי P מסלול קצר ביותר מ-s ל-v ב-G. נניח בשלילה כי קיים מסלול L מ-s ל-v כך ש-$|L| < |P|$. אזי מתקיים:
$$w'(L) = nc|L| + w(L) < nc|L| + nc = nc(|L|+1) \leq nc|P| \leq nc|P| + w(P) = w'(P)$$
בסתירה למינימליות P תחת w'.
נראה כי P מסלול קל ביותר תחת w מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-v ב-G. נניח בשלילה כי קיים מסלול L מ-s ל-v כך ש-$|L| = |P|$ וגם $w(L) < w(P)$. אזי מתקיים:
$$w'(L) = nc|L| + w(L) < nc|P| + w(P) = w'(P)$$
בסתירה למינימליות P תחת w'.
לכן P מסלול קל ביותר (תחת w) מבין המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-v, כמו-כן, לפי אבחנה 2 מתקיים:
$$d'(v)(mod\ c \cdot n) = w'(P)(mod\ c \cdot n) = \big(nc|P| + w(P)\big)(mod\ c \cdot n) = w(P)$$
כלומר האלגוריתם מחזיר את $w(P)$ עבור צומת v כנדרש.

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

מציאת קשת כבדה ביותר בזמן $O(|E|)$.
הגדרת w' בזמן $O(|E|)$.
ריצת $Dijkstra$ בזמן $O(|E| + |V|\log|V|)$.
חישוב $d(v)$ לכל הצמתים בזמן $O(|V|)$.
סה"כ זמן ריצה: $O(|E| + |V|\log|V|)$

הערה

קיים אלגוריתם בעל זמן ריצה לינארי:
נמצא את מרחק כל הצמתים מ-s (בעזרת BFS), ונמיין את הצמתים בשכבות לפי מרחקם מ-s: V_i יהיו כל הצמתים במרחק i מ-s. נסיר מ-G קשתות, ונשאיר רק קשתות בין צמתים בשכבות עוקבות (כלומר, בין צומת ב-V_i לצומת ב-V_{i+1}). נעבור על השכבות לפי הסדר, ולכל שכבה נעבור על כל הצמתים, ולכל צומת v נבצע $Relax$ על פני כל הקשתות היוצאות מ-v (כאשר האיתחול הוא לפי $Dijkstra$). בסיום נקבל את התוצאה הרצויה.
הרעיון הוא להשאיר רק קשתות שהם חלק ממסלולים קצרים ביותר, ואת כל הקשתות הנ"ל. לאחר מכן, פעולות ה-$Relax$ לפי הסדר דואגות שבכל שלב נעדכן נכון את השכבה הבאה (ניתן להוכיח באינדוקציה).

שאלה 5

תיאור האלגוריתם

1. חשב את גרף הרכיבים קשירים G^{SCC}.
2. לכל רכיב C ב-G^{SCC} הגדר $w(C) = |C|$.
3. מצא מסלול כבד ביותר בצמתים בגרף G^{SCC} עם פונ' המשקל w. יהי $P = (C_1, \dots, C_k)$ מסלול כנ"ל.
4. החזר $U = C_1 \cup \dots \cup C_k$.

הוכחת נכונות האלגוריתם

נראה כי קיים מסלול מכוון העובר בכל צמתי U המוחזר ע"י האלג'. הבניה היא באינדוקציה. בתחילה, קיים מסלול P_1 העובר דרך כל צמתי C_1, מאחר והם באותו רכיב קשירות (ניתן להגיע מכל צומת לכל צומת, ולכן תמיד ניתן להאריך את המסלול לצומת הבא ברכיב שטרם ביקרנו בו). נניח עתה ובנינו את P_i שעובר דרך כל צמתי $C_1, \dots, C_i$, ומסתיים בצומת ב-C_i שנסמנה v. עבור צומת $u \in C_{i+1}$, מאחר וקיימת קשת (C_i, C_{i+1}) בגרף G^{SCC}, לפי טענה מהכיתה קיים מסלול מ-v ל-u ב-G. שרשור מסלול זה ל-P_i יחד עם מסלול מ-u שעובר דרך כל צמתי C_{i+1} (קיים כזה כי הם באותו רק"ה) מגדיר מסלול P_{i+1} שעובר דרך כל צמתי $C_1, \dots, C_{i+1}$.
נניח בשלילה כי U אינה מקסימלית. אזי קיימת קבוצה $W \subseteq V$ כך ש-$|W| > |U|$, וכן קיים מסלול $L = (w_1, \dots, w_k)$ בגרף G אשר עובר בכל צמתי W. נתבונן במסלול L' ב-G^{SCC}, שהוא המסלול המתאים ל-L. כלומר, לכל צומת ב-L נרשום את רכיב הקשירות שלו ונמחק חזרות (אם אותו רכיב מופיע ברצף כמה פעמים, נשאיר עותק יחיד). נסמן $L' = (D_1, \dots, D_r)$. נשים לב כי L' אכן מסלול חוקי ב-G^{SCC}, זאת כי יש קשת בין רכיב של w_i לרכיב של w_{i+1} בגלל קשת ביניהם בגרף G. בנוסף, מהגדרת L' נסיק כי כל צומת שמופיע ב-L שייך לאחד הרכיבים המופיעים ב-L', כלומר $W \subseteq D_1 \cup \dots \cup D_r$, ובפרט מתקיים $|W| \le |D_1| + \dots + |D_r|$. באופן דומה, ומאחר ורק"ה הם זרים, נוכל להסיק $|U| = |C_1| + \dots + |C_k|$. נחבר ונקבל:

$$w(C_1) + \dots + w(C_k) = |C_1| + \cdots |C_k| = |U| < |W| \le |D_1| + \dots + |D_r| = w(D_1) + \dots + w(D_r)$$

מצאנו מסלול L' ב-G^{SCC} כך שסכום משקלי הצמתים ב-L' גדול ממש מסכום משקלי הצמתים ב-P, בסתירה למקסימליות P. לכן U קבוצה מקסימלית בגודלה, כנדרש.

מימוש האלגוריתם וניתוח זמן ריצה

1. חישוב גרף רכיבים קשירים בזמן $O(|V| + |E|)$.
2. הגדרת w בזמן $O(|V|)$.
3. מציאת מסלול כבד ביותר בצמתים ב-G^{SCC} בעזרת האלג' הנתון בהדרכה בזמן לינארי בגודל G^{SCC}. מאחר ו-G^{SCC} קטן או שווה בגודלו לגרף G, נקבל זמן $O(|V| + |E|)$.
4. הגדרת U בזמן $O(|V|)$.

סה"כ זמן ריצה: $O(|V| + |E|)$