עבודה 2: אלגוריתמים חמדניים ו- MST

תאריך הגשה: 26 באפריל, 12:00 בצהריים.

יש להגיש את העבודה לתיבת הדואר של הקורס (תאים מספר 96,95 בקומת כניסה של בניין 37) ובנוסף גם במערכת ההגשה.

מתרגלת אחראית: פנינה נסים

הערות:

א. כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
   1) תיאור מילולי של האלגוריתם.
   2) הוכחת נכונות.
   3) ניתוח זמן ריצה.

ב. פתרון יש לרשום בדף התשובות הנלווה לעבודה.

ג. אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא יתקבל.

ד. בכל שימוש במשפט שהוכח בכיתה יש לצטט את המשפט באופן מדויק.

שאלה 1

קלט: קבוצה של n משימות $\mathrm{A} = \{1, \dots, n\}$. לכל משימה i $(i = 1, \dots, n)$ נתונים:
- משך זמן הביצוע שלה - c_i *(completion time)*
- זמן היעד לסיום הביצוע - d_i *(deadline)*

פתרון חוקי: סדר ביצוע המשימות, כך שלא מתבצעות שתי משימות במקביל. כלומר, מתחילים לבצע משימה מיד לאחר סיום ביצוע המשימה הקודמת.
פורמלית פתרון חוקי הוא פרמוטציה $S = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ של המשימות $\{1, \dots, n\}$.
עבור משימה i נסמן ב – s_i את זמן תחילת ביצוע המשימה, אזי לכל $1 \le j \le n - 1$ מתקיים $s_{i_{j+1}} = s_{i_j} + c_{i_j}$, ו - $s_{i_1} = 0$.

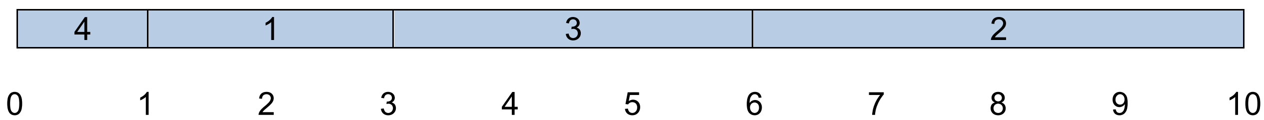
הגדרה: עבור פתרון חוקי $S = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. נסמן את האיחור בביצוע משימה i_j ב - $l(i_j)$ ונגדיר אותו להיות ההפרש בין זמן סיום המשימה בפועל לפי הפתרון לבין זמן היעד לסיום המשימה.
כלומר, $l(i_j) = \max\{0, s_{i_j} + c_{i_j} - d_{i_j}\}$.
נסמן את איחור הפתרון S ב - $l(S)$ ונגדיר אותו להיות האיחור המקסימלי מבין איחורי כל המשימות בפתרון.
כלומר, $l(S) = \max_{1 \le j \le n} l(i_j)$.

פלט: פתרון חוקי עם איחור מינימלי.

<u>דוגמא</u>:
עבור הקלט

$$c_1 = 2\ \ , d_1 = 3$$
$$c_2 = 4\ \ , d_2 = 8$$
$$c_3 = 3\ \ , d_3 = 5$$
$$c_4 = 1\ \ , d_4 = 2$$

פתרון חוקי עם איחור מינימלי הוא $S = (4,1,3,2)$



$$l(1) = \max\{0,1 + 2 - 3\} = 0$$
$$l(2) = \max\{0,6 + 4 - 8\} = 2$$
$$l(3) = \max\{0,3 + 3 - 5\} = 1$$
$$l(4) = \max\{0,0 + 1 - 2\} = 0$$

האיחור של הפתרון הנ"ל הוא 2.

סעיף א:
הראו כי האלגוריתם החמדן הבא <u>נכשל</u> בפתרון הבעיה:

אתחול:
- $M \leftarrow A$
- $S \leftarrow \langle\ \ \rangle$ הפרמוטציה שבונה החמדן

צעד: כל עוד $M \neq \emptyset$ בצע
1. הורד מ- M פעילות i עם משך זמן ביצוע קצר ביותר
2. הוסף את i כפעילות אחרונה בסידור S

סיום: החזר את S

סעיף ב:
הוכיחו את הטענה הבאה:

יהא S סידור (פתרון) בו קיימות שתי פעילויות <u>רצופות</u> i_1, i_2 כך שהפעילות המאוחרת בסידור (i_2) בעלת זמן יעד לסיום הביצוע <u>מוקדם או שווה</u> לזמן היעד לסיום הביצוע של הפעילות המוקדמת בסידור (i_1). כלומר, ב- S מתקיים $d_{i2} \leq d_{i1}$.
אזי אפשר להחליף בינהן (ולהשאיר את שאר הפעילויות בסידור S כמו שהן) ולקבל פיתרון S^* עם איחור לא גדול יותר.

סעיף ג:
תארו אלגוריתם <u>**חמדן**</u> לבעיה הנתונה. הוכיחו את נכונותו, וממשו ונתחו את זמן הריצה.

שאלה 2

בעיית מציאת עץ פורש v-עלה

קלט: $G = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון וממושקל, $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית המשקל על קשתות הגרף.
$v \in V$ קודקוד כלשהו בגרף. נתון כי בגרף G קיים עפ"ם של G בו v הוא עלה.

- עבור עץ פורש T של G וקודקוד $v \in V$ נסמן ב - T_v עץ פורש של G בו הקודקוד v הוא עלה.

פלט: עץ פורש T_v של G במשקל מינימום (אנו מחפשים עץ פורש בעלות מינימאלית מבין כל העצים בהם הקודקוד v הוא עלה).

נתון האלגוריתם הבא הפותר את בעיית מציאת עץ פורש v-עלה:

אלגוריתם Kruskal v-עלה

אתחול:
- בחר קשת $e = (v, u)$ במשקל מינימום מבין כל הקשתות (v, u) כך ש- u שכן של v.
- $B = \{e\}$
- $F \leftarrow E$
- הסר מ $F-$ את כל הקשתות שמכילות את הקודקוד v.

צעד: כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
1) הסר מ- F קשת קלה ביותר, e
2) אם e לא סוגרת מעגל עם הקשתות B בצע $B \leftarrow B \cup \{e\}$

סיום: החזר (V, B)

סעיף א:
נסמן ב- B_i את קבוצת הקשתות שבחר החמדן בסיום השלב ה-i.
באינדוקציה את הטענה הנשמרת הבאה:
בסיום השלב ה- i בריצת האלגוריתם קיים עץ פורש T_v של G במשקל מינימום המכיל את קבוצת הצלעות B_i.

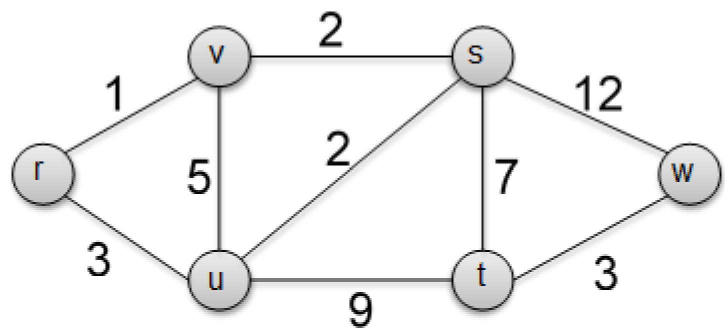
שימו לב כי מקרה הבסיס בו $i = 0$, $B_0 = \{e\}$ אינו טריוויאלי ודורש הוכחה.

סעיף ב:
נסחו את משפט הנכונות של האלגוריתם והוכיחו אותו על סמך נכונות הטענה מסעיף א.

שאלה 3

יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון וממושקל. תהי $w: E \to \mathbb{R}^+$ פונקציית המשקל על קשתות הגרף.
נגדיר $\mathrm{MST}-2$ של G להיות עץ פורש של G שמשקלו מינימלי מבין כל העצים הפורשים של G שאינם עצים פורשים מינימליים.

סעיף א:
ציירו במשבצת הריקה בדף התשובות $\mathrm{MST}-2$ של הגרף הנתון.



סעיף ב:
יהא $T_1 = (V, E_1)$ עץ פורש מינימלי של G, ויהא $\mathrm{T}_2 = (V, E_2)$ עץ פורש של G כך ש - $w(T_2) > w(T_1)$.
הוכיחו כי קיימת קשת $e_2 \in E_2 \setminus E_1$ כך שאם נוסיף אותה ל - T_1 היא תסגור מעגל בו יש קשת $e_1 \in E_1 \setminus E_2$ כך ש - $w(e_2) > w(e_1)$.

סעיף ג:
יהא $T_1 = (V, E_1)$ עץ פורש מינימלי של גרף G עבורו קיים $\mathrm{MST}-2$.
הוכיחו כי קיים $\mathrm{MST}-2$ של G, $\mathrm{T}_2 = (V, E_2)$, כך ש - T_1 ו- T_2 נבדלים זה מזה בקשת אחת בדיוק. כלומר $|E_2 \setminus E_1| = |E_1 \setminus E_2| = 1$.

סעיף ד:
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר בהינתן גרף G מחזיר $\mathrm{MST}-2$ של G אם קיים, אחרת מחזיר "לא קיים". השתמשו בסעיפים הקודמים לצורך הוכחת נכונותו. יש לנתח זמן ריצה.

שאלה 4

<u>בעיית עץ פורש עם קודקודים ממושקלים</u>

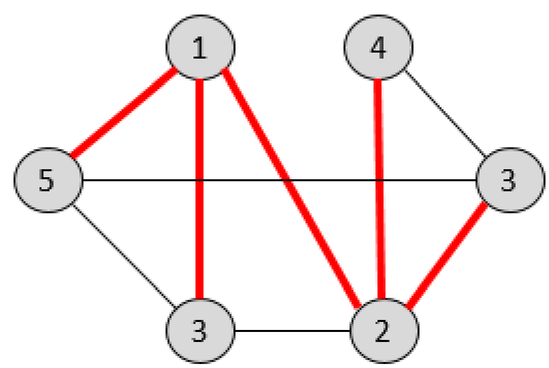
<u>קלט</u>: $\mathrm{G} = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון וממושקל, $w: V \to \mathbb{R}^+$ פונקציית המשקל על **קודקודי הגרף.**

הגדרות:

- עבור עץ פורש T של G וקודקוד $v \in V$ נסמן ב - $\boldsymbol{d_T(v)}$ **את דרגת הקודקוד בעץ.**
- עבור עץ פורש T של G נגדיר את **עלות העץ** להיות $\sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v)$

<u>פלט</u>: עץ פורש T של G עם עלות מינימלית.

<u>דוגמא</u>:



עלות העץ הפורש המסומן באדום בציור היא:

$$\sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 24$$

זהו עץ פורש עם עלות מינימלית מבין כל העצים הפורשים של הגרף הנתון.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון בעיית עץ פורש עם קודקודים ממושקלים.
רמז: השתמשו באחת מהטכניקות שכבר נלמדו בקורס.