עבודה 3: תכנון דינאמי

<u>תאריך הגשה:</u> 7 למאי, 12:00 בצהריים.

יש להגיש את העבודה לתיבת הדואר של הקורס (תאים מספר 96,95 בקומת הכניסה של בניין 37) ובנוסף גם במערכת ההגשה.

<u>מתרגל אחראי:</u> ליאור חן

<u>הערות:</u>

א. כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
   1. תיאור מילולי של האלגוריתם
   2. הוכחת נכונות
   3. ניתוח זמן ריצה

ב. פתרון יש לרשום בדף התשובות הנלווה לעבודה

ג. אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא יתקבל.

ד. בכל שימוש במשפט שהוכח בכיתה יש לצטט את המשפט באופן מדוייק.

ה. אין לחרוג מן המקום המוקצה בדף התשובות

<u>*שאלה 1:*</u>

פיצפונת ואנטון החליטו לחגוג את יום נישואיהם בפריז. פיצפונת מתעניינת מאד באמנות מודרנית, אבל אנטון מעדיף לעשות שופינג בשדרת השדות האליזיים (Avenue des Champs-Élysées). פצפונת נעתרה לבקשתו של אנטון, בתנאי שהיא תקבע את התנאים:

השניים יתחילו את מסע הקניות בחנות האחרונה בשדרה. אחרי שיבקרו בחנות זו, יטיל אנטון קוביה (ערכי ההטלה הינם 1,...,6). לאחר הטלת הקוביה, יתקדמו השניים מספר חנויות במורד הרחוב, מספר הזהה לזה אשר הופיע על הקוביה, ויכנסו אליה מבלי להיכנס לאף חנות בדרכם לחנות זו.

אנטון הסכים לתנאי המשחק, ובלבד שפיצפונת תאפשר לו להכניס שני חוקים משלו:

החוק הראשון – אנטון יקבע מראש מהו הסכום אשר הוא מתכוון "לבזבז" (יש שיגידו "להשקיע") בכל חנות; ואילו החוק השני – אם באחת מן ההטלות יתברר שהשניים צריכים להגיע לחנות "שלילית" (כלומר לחנות ה-i כך ש-$i < 0$), אזי יקבל אנטון תקציב בזבוזים אינסופי באיזו חנות שרק יבחר.

עזרו לפצפונת להבין מהו החסם התחתון לסכום שיבזבז אנטון במהלך ביקורם בשדרה המפורסת.

<u>קלט:</u>

$\boldsymbol{n}$: מספר החנויות בשדרה,

$b_1, \dots, b_n$: התקציב אשר הוקצה לאנטון בכל אחת מ-n החנויות בשדרה.

<u>פתרון חוקי:</u>

סדרת הטלות קוביה, כך שבכל הטלה מתקבל ערך בתחום [1,6].

<u>משקל פתרון חוקי:</u>

כל סדרת הטלות מיצגת באופן חד-חד ערכי סדרת חנויות בהן יבקר הזוג. תהא $t_1, \dots, t_k$ סדרת הטלות, ו-$s_1, \dots, s_k$ החנויות בהן יבקרו. אזי, משקל הפתרון הינו $\sum_{1 \le i \le k} b(s_i)$, כאשר $b(s_i)$ מיצג את התקציב אשר נקבע מראש עבור החנות s_i.

<u>יש למצוא:</u>

פתרון חוקי בעל ערך מינימלי.

<u>דוגמא:</u>

נניח כי שדרת האליזה מכילה 10 חנויות בלבד, וכי $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 10$,

וכן $b_5, \dots b_{10} = 20$. פתרון חוקי לדוגמא הינו סדרה של 3 ההטלות הבאות: $t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 4$. כלומר, הזוג יתחיל את מסעו בחנות ה-10 (ויכנס אליה), משם ימשיך לחנות מספר 8, הישר אל חנות מספר 4 ולבסוף – ינחת בחנות

ה-0, ולכן יסיים מסעו כאשר החנות האחרונה אליה נכנס היא חנות מספר 4. בסכך הכל יבקרו השניים ב-3 חנויות שונות, כאשר בחנויות 10 ו-8 צפוי אנטון לבזבז 20 יורו (בכל אחת מהן) ובחנות מספר 4 יבזבז 10 יורו. בסה"כ יבזבז אנטון 50 יורו.

הפתרון האופטמלי עבור בעיה זו יתקבל אם אנטון יטיל 6 ואז יטיל 4. במקרה זה, הזוג יכנס לחנויות מספר 10 ו-4 ולכן עלות מסע קניות שכזה תהיה 30 יורו בלבד.

סעיף א':
נסחו תת-בעיה אופיינית (כלומר, הגדירו $\text{OPT}(\ldots)$) לחישוב עלות פתרון אופטימלי.

סעיף ב':
נסחו נוסחת מבנה לחישוב OPT על סמך תתי הבעיות שהגדרתם.

סעיף ג':
הוכיחו את נוסחת המבנה על פי הסכמה שניתנה בהרצאות.

סעיף ד':
נסחו אלגוריתם איטרטיבי מבוסס תכנון דינאמי הפותר את הבעיה בסיבוכיות $O(n)$. נתחו את זמן הריצת האלגוריתם **והוכיחו** את נכונות האלגוריתם.

שאלה 2:
יצרנית הטלפונים הסלולריים Pinokia מעוניינת להחזיר עטרה ליושנה, ולשווק טלפונים סלולריים ללא מסך-מגע, אלא בעלי 12 לחצנים. החברה מעוניינת לשווק את מכשיריה במספר מדינות בעולם. כל יליד שנות ה-80 וה-90 יודע, למשל, שאם האותיות א', ב' ו-ג' חולקות את אותו המקש, אזי יצטרך המשתמש להקיש 3 פעמים על מקש זה על מנת לכתוב את האות ג'. כאמור, פעולת ההקשה החוזרת על מקש מסוים מאיטה באופן משמעותי את קצב כתיבת הטקסט, ולכן מעוניינת חברת Pinokia לחלק את תווי האלף-בית באופן שימזער ככל הניתן את כמות הלחיצות המשוערת לצורך כתיבת תווים.

מספר ההקשות הדרוש לצורך כתיבת הודעת טקסט מסוימת, הינו סכום ההקשות הדרוש לצורך כתיבת כל אחד מן התווים בהודעה זו. למשל, אם נניח שהאותיות א', ב' ו-ג' חולקות את אותו המקש, כך שהאות א' הינה הראשונה, ב' היא השניה ו-ג' הינה השלישית, אזי תדרשנה 4 לחיצות על-מנת לכתוב את המילה "אבא", ו-6 לחיצות בכדי לכתוב את המילה "אגב".

ב-Pinokia הבינו שסידור האותיות האופטימלי (כלומר, סידור אשר יצריך מספר הקשות קטן ככל האפשר) תלוי בטקסט אשר רוצה המשתמש לכתוב. תארו לעצמכם טלפון סלולרי עם 2 מקשים בלבד, ואלף-בית המונה את התווים א',ב' ו-ג' בלבד. אם ברצוננו לכתוב את המילה "אבא", הסידור האופטימלי יהיה **מקש1** = א', **מקש2** = ב' ג' (מאחר וכך נדרש ל-3 לחיצות בלבד), בעוד שסידור זה אינו אופטימלי במקרה ונרצה לכתוב את המילה "גאגא".

בסופו של דבר, הוחלט החברה לפעול באופן הבא: לפני שמשתמש יכתוב הודעה, הוא יצטרך להזין את מספר פעמים בהן יעשה שימוש בכל אחד מן התווים באלף-בית. לאחר שיזין פרטים אלו, יופעל אלגוריתם אשר יחלק את תווי השפה באופן שיצמצם את מספר הלחיצות הדרושות לצורך כתיבת ההודעה הנוכחית (תחת נתוני תדירות התווים שהזין המשתמש). התמזל מזלכם, ונחברתם לתכנן מנגנון זה.

הערה:
אנו משערים שקצת מוזר לדמיין אנשים אשר יודעים מראש כמה פעמים תופיע כל אחת מן האותיות בהודעה אותה הם מתכננים לרשום, אבל תאמינו או לא – ילידי שנות ה-80 וה-90 יכלו לעשות זאת בקלות רבה.

<u>קלט:</u>
n תווים ממוינים לקסיקוגרפית $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (כלומר $c_i < c_j$ אמ"מ $i < j$). עבור כל תו c_i, נתון מספר הפעמים אשר יופיע בהודעה הבאה f_i, $1 \leq i \leq n$.

<u>פתרון חוקי:</u>
חלוקת n התווים ל-12 מקטעים זרים המכסים את כל תווי האלף-בית. שימו לב, יש לחלק את האלף-בית למקטעים <u>רצופים</u> תוך שמירה על יחס הסדר כפי שהוגדר.

<u>עלות פתרון:</u>
סך מספרי ההקשות אשר ידרש המשתמש לבצע על-מנת לכתוב את ההודעה במלואה.

<u>יש למצוא:</u>
מספר ההקשות המינימלי אשר יבוצע ע"י חלוקה חוקית של תווי האלף-בית.

סעיף א'
נסחו תת-בעיה אופיינית (כלומר הגדירו $(\text{OPT}(\ldots))$ לחישוב עלות פתרון אופטימלי.

סעיף ב'
נסחו נוסחת מבנה לחישוב OPT על סמך תת הבעיות שהגדרתם (כולל מקרה קצה ומיקום/חישוב ערך הפתרון).

סעיף ג'
הוכיחו את נוסחת המבנה על פי הסכמה שניתנה בהרצאה.

סעיף ד'
נסחו אלגוריתם איטראטיבי מבוסס תכנון דינאמי הפותר את הבעיה בסיבוכיות $O(n^3)$. נתחו את זמן ריצת האלגוריתם והסבירו את נכונות האלגוריתם בקצרה.

<u>שאלה 3:</u>
עוגיפלצת, הדמות החביבה ביותר ברחוב סומסום נוהג לצאת מדי פעם למסעות צייד עוגיות. יום אחד נתקל עוגיפלצת בשורה ארוכה של עוגיות הממוקמות במרחקים שווים זו מזו. עוגיפלצת, הדמות הכי מסודרת ברחוב סומסום, מעוניין לסדר את העוגיות בערמות. כל אחת מן העוגיות הינה בעלת משקל המאפיין אותה; וכמו-כן, כל עוגיה ממוקמת במיקום ייחודי. מאחר ועוגיפלצת עצלן לא פחות מהיותו מסודר, הוא מעוניין לעבוד כמה שפחות בכדי לסדר את העוגיות בערמות. הערמות ממוקמות לאורך השביל ועוגיפלצת יכול להתחיל ערימה חדשה בכל מקום שירצה. עוגיפלצת יכול להניע את העוגיות **אך ורק אחורה** במורד השביל, כלומר מנקודה בעלת אינדקס גבוהה – לנקודה בעלת אינדקס נמוך מן האינדקס ההתחלתי שלה. עזרו לעוגיפלצת לסדר את n העוגיות ב-k ערמות בדרך היעילה ביותר.
<u>קלט:</u>
$\boldsymbol{n}$ **עוגיות:** $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ כך שעבור על עוגיה c_i $(1\le i\le c)$ נתון משקל העוגיה w_i, ומיקום העוגיה x_i.
שימו לב כי בפועל $x_i=i$.
$\boldsymbol{k}$: מספר הערימות בהן עוגיפלצת יעשה שימוש.

<u>פתרון חוקי:</u>
חלוקה של n העוגיות ל-k קבוצות. כלומר, הגדרת $G_1,\ldots,G_k$ המקיימות:
$\bigcup_i G_i=\{c_1,\ldots,c_n\}$ וגם $G_i\cap G_j=\emptyset\ \forall i\neq j$, כך שכל ערימה G_i ממוקמת בנקודה p_i.

<u>משקל פתרון חוקי:</u>
עלות העברת עוגיה במשקל w מנקודה a לנקודה b הינה $w*(a-b)$. שימו לב כי ניתן להעביר עוגיה מ-a ל-b אמ"מ $a>b$. כמו-כן, עבור עוגיה c, נסמן ב-$x(c)$ את מיקומה ההתחלתי של העוגיה c, וב-$w(c)$ את משקלה של עוגיה זו.

יהא O פתרון חוקי כלשהו המגדיר חלוקה כלשהי של עוגיות הקלט ל-k תתי הקבוצות $G_1,\ldots,G_k$, ו-$p_1,\ldots,p_k$ הנקודות בהן נבנו הערמות. עלות הפתרון הינה סכום עלויות העברת העוגיות ממקום למקום. כלומר,
$$cost(O)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{c\in G_i}w(c)*(x(c)-p_i).$$

יש למצוא: פתרון חוקי בעל משקל מינימלי.

דוגמא:
נתבונן בקלט המכיל 5 עוגיות: $C = \{c_1, \dots, c_5\}$ כך ש-$w_i = i$ (כלומר משקלה של כל עוגיה זהה למיקומה על ציר המספרים), ו-$k = 2$.
אחד מן הפתרונות החוקיים הינו חלוקת העוגיות לערימות הבאות: $G_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, G_2 = \{c_5\}$, כך שהערימה הראשונה תמוקם בנקודה 1, ואילו הערימה השניה תמוקם בנקודה 5.
במסגרת פתרון זה, עוגיפלצת יזיז את c_2 מנקודה 2 לנקודה 1 (עלות 2), את עוגיה c_3 מנקודה 3 לנקודה 1 (עלות 6) ואת העוגיה c_4 מנקודה 4 ל-1 (12). כאמור, העוגיות c_1 ו-c_5 לא תוזזנה.
בסה"כ עלות פתרון זה הינה $2 + 6 + 12 = 20$.

נבחין כי הפתרון האופטימלי עבור בעיה זו הינו החלוקה $G_1 = \{c_1, c_2, c_3\}, G_2 = \{c_4, c_5\}$ כך ש-$p_1 = 1, p_2 = 4$.
עלות פתרון זה הינה 13.

סעיף א'
יהא $G_1, \dots, G_k$ פתרון אופטימלי עם $p_1, \dots, p_k$. הוכיחו כי $p_i = \min\{x(c) : c \in G_i\}$. במילים אחרות, הוכיחו כי כל ערימה תמוקם בנקודה ההתחלתית של העוגיה בעלת האינדקס הנמוך ביותר המשויכת לערימה זו.

סעיף ב'
תהא G_i ערימה כלשהי בפתרון אופטימלי. נסמן ב-m_i את אינדקס העוגיה מינימלי בקבוצה זו, וב-M_i את אינדקס העוגיה המקסימלי בקבוצה. הוכיחו כי קבוצת האינדקסים ב-G_i מהווה רצף עוגיות, כלומר לכל $m_i \le j \le M_i$ מתקיים ש-$c_j \in G_i$.

סעיף ג'
נסחו תת-בעיה אופיינית (כלומר, הגדירו $\text{OPT}(\dots)$) עבור חישוב **משקל** פתרון אופטימלי.

סעיף ד'
נסחו נוסחת מבנה לחישוב OPT על סמך תתי הבעיות שהגדרתם ונמקו בקצרה את נכונותו.

סעיף ה'
נסחו אלגוריתם איטרטיבי לבעיה הרץ בזמן $O(n^3)$. אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם שתיארתם.

סעיף ו'
נסחו אלגוריתם לשחזור הפתרון האוטימלי המשתמש בסעיף ה'. אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם.