עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2017

תאריך הגשה: 23.3.2017, 12:00 בצהריים, תאים מספר 95,96 בקומת כניסה של בניין 37. כמו כן, יש להגיש עותק של העבודה במערכת ההגשה.
מתרגל אחראי: אורן רוט.
הוראות כלליות:

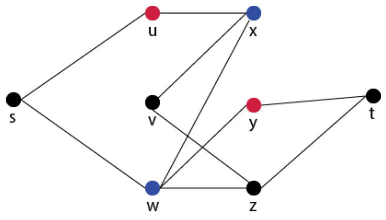
- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה (**כולל** זמן הריצה של הקופסה השחורה).
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.

שאלה 1 (25 נקודות)

בעיית המסלול האדום-כחול

מופע: גרף לא מכוון $G=(V,E)$, שני קודקודים $s,t\in V$ ושתי תתי קבצות זרות ולא ריקות של קודקודים אדומים וכחולים $R\subset V\backslash\{s,t\},\ \ B\subset V\backslash\{s,t\},\ \ R\cap B=\emptyset$.
נגדיר מסלול אדום-כחול כמסלול $P=\langle s=v_1,v_2,\dots,v_k=t\rangle$ מ- s ל- t אשר בו קיימים רק שני קודקודים v_i,v_j, אחד אדום ושני כחול ומתקיים $v_i\in R,\ v_j\in B,\ \ 1<i<j<k$ וכל שאר הקודקודים במסלול לא צבועים, כלומר, לכל אינדקס $l\neq i,j$ מתקיים $v_l\notin B\cup R$.
פתרון: מסלול אדום-כחול קצר ביותר מ- s ל- t בגרף G או להכריז "לא קיים" במידה ואין מסלול כזה מ- s ל- t ב- G.

דוגמא:



כאן, $B=\{w,x\}$ $R=\{u,y\}$
$\langle s,u,x,v,z,t\rangle$ הוא מסלול אדום-כחול קצר ביותר בין s ל-t.
$\langle s,w,z,t\rangle$ הוא מסלול קצר ביותר בין s ל-t אך אינו מסלול אדום-כחול.

בעיית מסלול קצר ביותר:

מופע: גרף מכוון $G=(V,E)$ וקודקודים $s,t\in V$.
פתרון: מסלול קצר ביותר מ- s ל- t (על פי אורך מסלול - מספר הצלעות במסלול), אם קיים או להכריז "לא קיים" במידה ואין מסלול בין s ל- t ב- G.
קיים אלגוריתם (לדוגמא, BFS) הפותר את בעיית מסלול קצר ביותר בזמן $O(|V|+|E|)$.

תארו אלגוריתם לבעיית המסלול האדום-כחול מבוסס רדוקציה שצורך זמן $O(|V|+|E|)$.

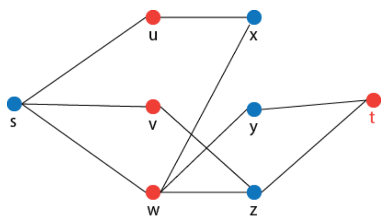
שאלה 2 (25 נקודות)

בעיית 2-צביעה

נגדיר צביעה חוקית של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ בשני צבעים כפונקציה $c: V \to \{0,1\}$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $c(u) \neq c(v)$. במילים, לכל קודקוד צבע יחיד (אפס או אחד) ואין קשת אשר שני קודקודיה צבועים באותו הצבע.

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
פלט: פונקציה $c: V \to \{0,1\}$ המהווה צביעה חוקית של גרף G בשני צבעים, או "לא קיימת צביעה" כנ"ל.

דוגמא לצביעה חוקית:



$$c(s) = c(x) = c(y) = c(z) = 1$$

$$c(u) = c(v) = c(w) = c(t) = 0$$

בעיית $2 - SAT$ (2 Satisfiability Problem)

- בבעיית $2 - SAT$ משתתפים n משתנים בוליאניים $x_1, x_2, \dots, x_n$
- ליטרל הינו משתנה בוליאני או שלילתו $x_i, \overline{x_i}$ (בבעיה קיימים $2n$ ליטרלים $(x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots, x_n, \overline{x_n})$.
- פסוקית באורך 2 הינה חיבור של שני ליטרלים ובינהם האופרטור הלוגי $\vee$ (OR).
  דוגמאות: $(x_1 \vee x_2), (x_4 \vee \overline{x_6})$
- פסוק φ מצורת CNF (Conjunction Normal Form) הינו חיבור של פסוקיות ובינהן האופרטור הלוגי $\wedge$ (AND).
  דוגמא: $\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \overline{x_6})$
- השמה לפסוק φ הינה השמה של ערך אמת T או F לכל אחד ממשתני הפסוק.
- השמה מספקת את פסוק φ אם עבור ערכי האמת שקבעה ההשמה לכל אחד ממשתני הפסוק, הפסוק מקבל ערך אמת.

לדוגמא עבור הפסוק הבא:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

ההשמה הבאה מספקת: $x_1 = T, x_2 = F, x_3 = F$

וההשמה הבאה לא מספקת: $x_1 = T, x_2 = T, x_3 = T$

קלט: פסוק φ מצורת CNF בו בכל פסוקית יש בדיוק שני ליטרלים.
פלט: השמה מספקת לפסוק φ, או "לא קיימת השמה" כנ"ל.

תארו אלגוריתם לפתרון בעיית ה- 2-צביעה מבוסס רדוקציה לבעיית 2-SAT. הסתמכו על כך שקיים אלגוריתם הרץ בזמן $O(n + m)$ לבעיית $2 - SAT$, כאשר n מספר המשתנים ו- m מספר הפסוקיות בפסוק הקלט.

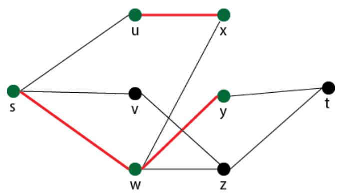
שאלה 3 (25 נקודות)

בעיה A

הגדרה:
יהי גרף לא מכוון $G = (V, E)$, ותהא $F \subseteq E$ קבוצת קשתות ב- G. נגדיר את $V(F)$ להיות קבוצת הקדקודים ב- V בהן נוגעות הקשתות בקבוצה F.

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
פלט: קבוצת קשתות $F \subseteq E$ לא ריקה עם יחס $|V(F)|/|F|$ מינימאלי.

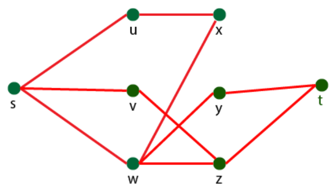
בגרף הבא, הקבוצה F מסומנת באדום והקבוצה $V(F)$ מסומנת בירוק:



$$F = \{(s,w),(w,y),(u,x)\}, \qquad V(F) = \{s,w,y,x,u\}$$

היחס כאן הוא $\frac{5}{3}$, והוא לא אופטימלי (מינימלי).

לעומת זאת הבחירה הבאה של F, מינמלית:



$$F = E, \qquad V(F) = V$$

עם יחס של $\frac{8}{10}$

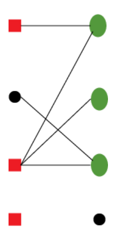
בעיה B

הגדרה: גרף דו חלקי לא מכוון $G = (L, R, E)$ הינו גרף לא מכוון בו ישנן שתי קבוצת קודקודים לא ריקות, קבוצת קודקודים שמאלית L וקבוצת קדקודים ימנית R, וכל קשת ב- E מחברת קודקוד ב-L עם קודקוד ב-R.

הגדרה: תהא $U \subseteq V$ קבוצת קודקודים ב- G. נגדיר את הסביבה של U, $N(U)$, להיות קבוצת הקודקודים שיש להם שכן ב- U. עוד נגדיר את יחס ההרחבה של U להיות היחס $|N(U)|/|U|$.

קלט: גרף דו חלקי לא מכוון $G = (L, R, E)$
פלט: קבוצת קודקודים $U \subseteq L$ עם יחס הרחבה $|N(U)|/|U|$ מינימאלי.

בגרף הבא, הקבוצה U מסומנת באדום (ריבועים) והקבוצה $N(U)$ מסומנת בירוק (אליפסות):



יחס ההרחבה של U כאן הוא $1 = \frac{3}{3}$

(שימו לב: זו לא בחירה של קודקודים עם יחס הרחבה מינימלי)

תארו אלגוריתם לפתרון בעיה A מבוסס רדוקציה לבעיה B.
הסתמכו על כך שקיים אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V| * |E| * \log|V|)$ לבעיה B.

שאלה 4 (25 נקודות)

בחנות "טיול בראש" מבצע חיסול לכבוד האביב הקרב. "אוהל משפחתי בהרכבה עצמית". ניתן לבחור שני מוטות בגדלים שונים, נסמנם (x, y) ועל ידי שני מוטות בגודל x ושני מוטות בגודל y לקבל אוהל משפחתי (המתפרש על שטח בגודל $x \cdot y$) לקמפינג בחיק הטבע.
חברת הטיולים "קמפינג בראש" החליטה לחדש את מלאי האוהלים שברשותה ולרכוש את כל המוטות שנותרו בחנות "טיול בראש".
עיזרו למהנדס החברה להחליט כיצד לצמד את זוגות המוטות על מנת לקבל אוהלים עם שטח גדול ככל האפשר.

באופן פורמלי:
<u>בעיית האוהלים</u>
קלט: $2n$ זוגות של מוטות באורכים שונים נסמן את האורכים ב- $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$. האורכים אינם בהכרח שונים זה מזה.
פלט: רשימה של n זוגות של אורכי מוטות $(l_{11}, l_{12}), (l_{21}, l_{22}), \ldots, (l_{n1}, l_{n2})$ כך ש- $\sum_{j=1}^{n} l_{j1} \cdot l_{j2}$ מקסימאלי.

<u>דוגמא:</u>
עבור הקלט $\langle 148, 1, 5, 6, 6, 6, 90, 6 \rangle$
פתרון אופטמלי הוא רשימת הזוגות: $\langle (1,5), (6,6), (6,6), (90,148) \rangle$

תארו אלגוריתם חמדן יעיל ככל הניתן אשר בונה פתרון לבעיית האוהלים ב-n שלבים: בכל שלב בוחר זוג אורכי מוטות מתוך הקלט.

<u>הנחיה להוכחת נכונות האלגוריתם:</u>
יש לעקוב אחר הסכימה המומלצת להוכחת אלגוריתמים חמדניים:
1. יש לנסח משפט נכונות ראשי.
2. יש לנסח טענה נשמרת: בכל שלב בריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את קבוצת הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה.
3. יש להוכיח את נכונות המשפט על סמך נכונות הטענה הנשמרת.
4. יש להוכיח את נכונות הטענה הנשמרת באינדוקציה על שלבי בניית הפתרון:
   a. בסיס האינדוקציה
   b. נסחו את הנחת האינדוקציה: בסיום השלב ה-$i-1$ בריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטימאלי O המכיל את קבוצת $i-1$ הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה.
   c. הוכיחו את נכונות צעד האינדוקציה והראו כי גם לאחר הבחירה הבאה של זוג אורכי מוטות הנחת האינדוקציה מתקיימת (הוכיחו כי קיים פתרון אופטימאלי O^* המכיל את קבוצת i הזוגות שבחר החמדן עד לשלב זה). מומלץ להשתמש בטיעון החלפה.

בהצלחה!