שאלה 1

תיאור הרדוקציה

בהינתן $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, $s, t \in V$ ו-$R, B \subset V \setminus \{s, t\}$ קלט לבעיית המסלול האדום-כחול, נבנה גרף מכוון $G' = (V', E')$ קלט לבעיית המסלול הקצר ביותר, כך:

$$
\begin{aligned}
&V' = V^1 \cup V^2 \cup V^3 \cup V^4 \cup V^5 \\
&V^1 = \{v^1 : v \in V \setminus R \cup B\} \\
&V^2 = \{v^2 : v \in R\} \\
&V^3 = \{v^3 : v \in V \setminus R \cup B\} \\
&V^4 = \{v^4 : v \in V \setminus R, v \neq t\} \\
&V^5 = \{v^5 : v \in V \setminus R \cup B\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E' = E^1 \cup E^2 \cup E^3 \cup E^4 \cup E^5 \cup E^6 \cup E^7 \cup E^8 \\
&E^1 = \{< u^1, v^2 >: (u, v) \in E\} \quad E^2 = \{< u^2, v^3 >: (u, v) \in E\} \quad E^3 = \{< u^3, v^4 >: (u, v) \in E\} \\
&E^4 = \{< u^4, v^5 >: (u, v) \in E\} \quad E^5 = \{< u^2, v^4 >: (u, v) \in E\} \quad E^6 = \{< u^1, v^1 >: (u, v) \in E\} \\
&E^7 = \{< u^3, v^3 >: (u, v) \in E\} \quad E^8 = \{< u^5, v^5 >: (u, v) \in E\}
\end{aligned}
$$

[הסבר הבניה: אנחנו למעשה בונים 5 עותקים של קודקודי הגרף המקורי- עותק ראשון שלישי וחמישי רק עם קודקודים שחורים (V_1, V_3, V_5) עותק שני רק עם קודקודים אדומים (V_2) עותק רביעי רק עם קודקודים כחולים (V_4). הצלעות המכוונות בגרף רק מתקדמות באינדקסים לא יורד של קודקודים ומסלול מ- s_1 ל- t_5 תמיד חייב לעבור דרך שכבות 2 ו-4 שהן השכבות שמכילות רק קודקודים אדומים וכחולים בהתאמה. בשכבות אלו אין צלעות לאותה שכבה אלא רק צלעות המתקדמות לשכבות הבאות.]

נריץ את הקופסא השחורה על $< G', s^1, t^5 >$.
אם הקופסא השחורה מחזירה מסלול $P' =< s^1 = u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \dots, u_k^{i_k} = t^5 >$ אז נחזיר את $P =< s = u_1, u_2, \dots, u_k = t >$ בתור מסלול אדום-שחור בין s ל-t ב-G. אחרת אם יוחזר "לא קיים מסלול" ב-G' נחזיר לא קיים מסלול אדום-כחול ב-G.

הוכחת נכונות

משפט: אם האלגוריתם מחזיר "לא קיים מסלול אדום-כחול" אז לא קיים מסלול אדום-כחול ב-G ואחרת P המוחזר בסיום האלגוריתם הוא מסלול אדום-כחול קצר ביותר ב-G.

טענת עזר: אם קיים מסלול אדום-כחול באורך m בין s ל-t ב-G אז קיים מסלול באורך m בין s^1 ל-t^5 ב-G'.

אבחנה $P =< s = u_1, u_2, \dots, u_k = t >$ המוחזר ממיר הפלט הוא מסלול חוקי בין s ל-t ב-G.

הסבר לפי בניית G' כל צלע $< u_j^{i_j}, u_l^{i_l} >$ ב-P' מקיימת כי (u_j, u_l) היא צלע ב-E.

מצוידים בט״ע והאבחנה נעבור להוכחת נכונות המשפט:
יהי $P' =< s^1 = u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_k^{i_k} = t^5 >$ המסלול המוחזר מן הקופסא השחורה. מאופן בניית הצלעות המכוונות בגרף כל מסלול בין s^1 לt^5 מורכב מקוד׳ אדום יחיד ואחריו מגיע קוד׳ כחול יחיד ולכן יחד עם האבחנה, נסיק כי P המוחזר ממיר הפלט הוא אכן מסלול אדום כחול ב-G. כעת נראה כי הוא מינמלי בתכונה זו:
אם בשלילה קיים מסלול אדום-כחול מ-s ל-t קצר יותר מ-P באורך $m < k$, אזי לפי ט״ע קיים מסלול באורך m בין s^1 ל-t^5 ב-G' וזו סתירה לכך שP' נבחר כמסלול הקצר ביותר.

אחרת, אם לא קיים מסלול P' כזה, נניח בשלילה שקיים מסלול אדום-כחול מ-s ל-t, אז לפי ט״ע נקבל שקיים מסלול בין s^1 ל-t^5 ב-G' ושוב קיבלנו סתירה.

נעבור להוכחת ט״ע:

$P =< s = u_1, u_2, \ldots, u_m = t >$ מסלול אדום-כחול באורך m בין s ל-t ב-G

$\Leftarrow$

$P =< s = u_1, u_2, \ldots, u_m = t >$ מסלול בין s ל-t ב-G וקיימים $1 < i < j < m$ כך ש- $u_i \in R$ $u_j \in B$ ולכל $l \neq i, j$ $u_l \notin R \cup B$.

$\Leftarrow$

(מאבחנה ומבניית G')
$P' =< s^1 = u_1^1, u_2^1, \ldots u_{i-1}^1, u_i^2, u_{i+1}^3, \ldots, u_{j-1}^3, u_j^4, u_{j+1}^5, \ldots, u_m^5 = t^5 >$
מסלול באורך m בין s^1 ל-t^5 ב-G'.

ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט: בניית מס׳ עותקים קבוע של הגרף G - $O(|V| + |E|)$

הרצת הקופסא השחורה: על הקלט G' - $O(|V'| + |E'|)$
אך $|V'| + |E'| = O(|V| + |E|)$
סה״כ נקבל - $O(|V| + |E|)$
ממיר הפלט: מעבר על הקודקודים במסלול - $O(|V'|) = O(|V|)$

סה״כ קיבלנו - $O(|V| + |E|)$

שאלה 2

תיאור אלגוריתם מבוסס רדוקציה

בהינתן $G=(V,E)$ קלט לבעיית 2-צביעה נגדיר $|V|$ משתנים:

$$\{X_v : v \in V\}$$

ונגדיר את הפסוק:

$$\varphi = \bigwedge_{(u,v)\in E} (X_u \vee X_v) \wedge (\overline{X_u} \vee \overline{X_v})$$

φ הינו קלט לבעיית $2-SAT$. כעת נריץ את הקופסא השחורה על φ, אם נקבל "אין השמה" נחזיר "אין צביעה" ואחרת בהינתן ההשמה ל- φ:

$$f : \{X_v : v \in V\} \to \{T,F\}$$

נחזיר את הצביעה הבאה:

$$c : V \to \{0,1\}$$

באופן הבא:

$$c(v) = \begin{cases} 0, & f(X_v) = F \\ 1, & f(X_v) = T \end{cases}$$

הוכחת נכונות

<u>משפט:</u> אם קיימת צביעה חוקית האלגוריתם מחזיר צביעה חוקית. אחרת מחזיר "אין צביעה".

לצורך הוכחת המשפט נתבונן בשתי התשובות האפשריות של הקופסא השחורה ונראה כי בכל אחת מהן המשפט נכון:

1. <u>ל- φ אין השמה מספקת</u>
במקרה זה האלגוריתם יחזיר "אין צביעה חוקית". נניח בשלילה נניח שיש צביעה c חוקית ל-G אזי נראה כי ההשמה הבאה מספקת את φ:

$$f(X_v) = \begin{cases} T, & c(v) = 1 \\ F, & c(v) = 0 \end{cases}$$

ואכן לכל הפסוקיות מהצורה $(X_u \vee X_v)$ ההשמה מספקת כי c צביעה חוקית, $(u,v) \in E$ ולכן בהכרח $f(X_u) \neq f(X_v)$ ולכן לפחות אחד מהליטרלים מסתפק. מאותה סיבה בדיוק גם הפסוקית מהצורה $(\overline{X_u} \vee \overline{X_v})$ מסתפקות וזה נכון לכל הפסוקיות ב- φ ומכאן φ ספיקה. סתירה.

2. ל- φ יש השמה מספקת f
תהי c הצביעה המוחזרת במקרה זה מממיר הפלט, אם בשלילה c לא צביעה חוקית, קיימת צלע $(u,v) \in E$ כך ש- $c(u) = c(v)$ ומכאן $f(X_u) = f(X_v)$. אך אם $f(X_u) = f(X_v) = T$ אזי הפסוקית $(\overline{X_u} \vee \overline{X_v})$ לא מסתפקת ואם $f(X_u) = f(X_v) = F$ הפסוקית $(X_u \vee X_v)$ לא מסתפקת. בכל מקרה קיבלנו סתירה לכך שf השמה מספקת ל φ.

מסקנה: ממיר הפלט פועל כשורה ומחזיר תוצאה נכונה.

ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט: בניית φ בונה 2 פסוקיות לכל צלע - $O(|E|)$

הרצת הקופסא השחורה: ישנם $|V|$ משתנים ו-$2|E|$ פסוקיות ולכן $O(|V| + |E|)$

ממיר הפלט: מעבר על כל המשתנים $O(|V|)$

סה"כ קיבלנו - $O(|V| + |E|)$

שאלה 3

תיאור הרדוקציה

בהינתן $G = (V, E)$ קלט לבעיה A נבנה $G' = (L, R, E')$ קלט לבעיה B כאשר:

$$L = E$$
$$R = V$$
$$E' = \{(e, v), (e, u) : \quad e = (u, v) \in E\}$$

כל קודקוד ב- L המתאים לקשת (u, v) בגרף G מחובר לקודקודים ב-R המתאימים ל-u, v.
נריץ את הקופסא השחורה על G' ונקבל $U \subseteq L$ המקיימת $|N(U)||U|$ מינימלי. נחזיר את U כפתרון לבעיה A.

הוכחת נכונות

מכיוון ו-L ב-G' הוא בדיוק E, $U \subseteq L$ שמוחזר מן הקופסא השחורה היא תת קבוצה של E. נניח בשלילה כי היחס $|V(U)|/|U|$ המתקבל מ-U שהוחזרה מן הקופסא השחורה אינו מינימאלי ב-G אזי קיימת $F' \subseteq E$ כך ש:

$$|V(F')|/|F'| < |V(U)|/|U|$$

אבחנה: עבור קבוצת צלעות $F \subseteq E$, $V(F)$ ב-G הוא בדיוק $N(F)$ ב-G'.
הסבר: $V(F)$ זו קבוצת כל הקודקודים שנוגעים ב-F אך ב-G', F הן קבוצת קודקודים מ-L ו-$N(F)$ זו קבוצת כל השכנים של F. אך לפי הבנייה של G' זו בדיוק קבוצת כל הקודקודים שנוגעים בצלעות ב-F. מכאן $V(F)$ ב-G זו בדיוק הקבוצה $N(F)$ ב-G'.

מכאן לפי האבחנה, נסיק:

$$|N(F')|/|F'| < |N(U)|/|U|$$

מצאנו קבוצת קודקודים $L \subseteq F'$ ב-G' כך שיחס ההרחבה שלו יותר קטן וזו סתירה למינמליות של U.

ניתוח זמן ריצה

ממיר הקלט: בניית גרף, L ו-R זה בדיוק V ו-E מספר הצלעות הוא בדיוק $2 \cdot |E|$ - סה״כ $O(|E| + |V|)$

הרצת הקופסא השחורה: ישנם $|V| + |E|$ קודקודים בגרף החדש ו-$2 \cdot |E|$ צלעות לכן זמן הריצה הוא- $O((|V| + |E|) \cdot 2|E| \cdot log(|V| + |E|)) = O((|E|^2 + |V| \cdot |E|) \cdot log(|V| + |E|))$

סה״כ קיבלנו - $O((|E|^2 + |V| \cdot |E|) \cdot log(|V| + |E|))$

שאלה 4

תיאור האלגוריתם

אתחול: מיון ובנית רשימה לפי הגודל $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_{2n}$
נאתחל קבוצת זוגות ריקה L - היא קבוצת הזוגות שבוחר החמדן.
עבור $i = 1..n$ בצע:
$L \leftarrow L \cup \{l_{2i-1}, l_{2i}\}$
סיום: החזר את L

הוכחה לפי הסכימה

טענה עיקרית קבוצת הזוגות L המוחזרת ע״י האלגוריתם היא קבוצת זוגות של אורכי מוטות כך ש-

$$\sum_{(l,l')\in L} (l \cdot l')$$

מקסימלית.

טענה נשמרת בכל שלב בריצת האלגוריתם קיים פתרון O אופטמלי המכיל את קבוצת הזוגות L שהחמדן בחר עד כה.

הוכחת הטענה העיקרית על בסיס הטענה הנשמרת ראשית נשים לב שהאלגוריתם מסתיים. תוך n שלבים בחרנו את כל זוגות אורכי המוטות ונסיים.
לפי הטענה הנשמרת בסיום ריצת האלגוריתם קיים פתרון אופטמלי של זוגות אורכי מוטות O המכיל את L המוחזר בסיום האלגוריתם ומכאן באופן מיידי בגלל שבשתי הקבוצות יש בדיוק n זוגות נסיק

$L = O$ ולכן הפתרון המוחזר הוא אופטמלי.

הוכחת הטענה הנשמרת נוכיח באינדוקציה על מספרי השלבים, נסמנו ב-n:

בסיס: $L = \emptyset$ ולכן מוכלת בכל פתרון אופטימלי.
נניח כי בסיום השלב ה-$i-1$ בריצת האלגוריתם קיים פתרון O אופטמלי המכיל את L_{i-1} (הפתרון שנבנה עד שלב זה). יהי L_i הפתרון שנבנה בשלב ה-i ו- (l_{i_1}, l_{i_2}) הזוג שהחמדן הוסיף בשלב ה-i.
אם O מכיל את הזוג (l_{i_1}, l_{i_2}) סיימנו. אחרת נסמן את הצמד של l_{i_1} ב-O ב- l'_{i_1} והצמד של l_{i_2} ב-O ב- l'_{i_2}. כלומר:

$$(l_{i_1}, l'_{i_1}), (l_{i_2}, l'_{i_2}) \in O$$

נגדיר את O^* להיות O פרט לשני הזוגות הנ"ל אותם נחליף בזוגות הבאים:

$$(l_{i_1}, l_{i_2}), (l'_{i_1}, l'_{i_2})$$

נראה כי ערך הפתרון O^* גדול שווה מערך הפתרון O ומכאן נסיק כי O^* אופטמלי.

l'_{i_1}, l'_{i_2} לא נבחרו ב-L_{i-1} (כי אחרת מתקבלת סתירה לכך ש-L_{i-1} מוכל ב-O) ולכן לפי הבחירה החמדנית נסיק:

$$l_{i_1}, l_{i_2} \geq l'_{i_1}, l'_{i_2}$$

מכאן נוכל לכתוב $l_{i_2} = l'_{i_1} + m$ עבור $m \geq 0$ כלשהו. ננתח את הערך של השינוי בין O ו-O^*:

$$\begin{aligned} l_{i_1} \cdot l_{i_2} + l'_{i_1} \cdot l'_{i_2} &= l_{i_1} \cdot (l'_{i_1} + m) + l'_{i_1} \cdot l'_{i_2} = \\ = l_{i_1} \cdot l'_{i_1} + m \cdot l_{i_1} + l'_{i_1} \cdot l'_{i_2} &\geq l_{i_1} \cdot l'_{i_1} + m \cdot l'_{i_2} + l'_{i_1} \cdot l'_{i_2} \geq \\ \geq l_{i_1} \cdot l'_{i_1} + l'_{i_2} \cdot (m + l'_{i_1}) &= l_{i_1} \cdot l'_{i_1} + l'_{i_2} \cdot l_{i_2} \end{aligned}$$

מצד שמאל התחלנו עם הערך שנוצר משני מהזוגות שהוספנו ל-O^* ומצד ימין הגענו לערך משני הזוגות שהסרנו מ-O, מכאן נסיק כי ערך הפתרון O^* גדול שווה מערך הפתרון O ולכן מצאנו פתרון אופטמלי O^* המכיל את L_i.

ניתוח זמן ריצה

- ☐ מיון הרשימה - $O(n \cdot logn)$
- ☐ מעבר על מוטות בלולאה - $O(n)$

סה"כ קיבלנו - $O(n \cdot logn)$