תכנון אלגוריתמים עבודה 6:

זרימה ומבוא לסיבוכיות

הנחיות

תאריך הגשה: 30/06/2015, $12^{\underline{00}}$ בצהרים (כשהשמש למעלה בשמיים וחם בחוץ), תא 95 או 96 בקומת כניסה של בניין 37.

מתרגל אחראי: אריאל ספיר.

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם (או רדוקציה) יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן הריצה וקביעה האם הוא פולינומיאלי.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלוה לעבודה.
- אם אתם נדרשים להוכיח טענה ואתם מוכיחים במקומה טענה אחרת שקולה, עליכם לנסח הטענה השנייה ולציין שהיא שקולה לטענה המקורית (יש לנמק זאת אם השקילות אינה טריויאלית).
- כל מונח שאתם משתמשים בו חייב להיות מוגדר היטב. אם הוא לא הוגדר בקורס זה או בקורס אחר עליכם להגדיר אותו בעבודה.
- במידה ואתם רוצים להסתמך על משפט שהוכח בהרצאה יש לצטט אותו במדויק בדף התשובות. רק אז ניתן להשתמש בו בהוכחות.
- אנא זכרו להגיש את העבודה סרוקה בַּ-submission system, בנוסף להגשה בתא.

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון ותהא $N=(G,c,s,t)$ רשת זרימה. נניח כי אין בְּ-G קשתות אנטי מקביליות, כלומר לא קיימים $u,v\in V$ כך שֶׁ-$(u,v)\in E$ וגם $(v,u)\in E$. נתבונן בגרסת מוכללת לבעיית הזרימה, הנקראת *בעיית הזרימה האיכותית*. בגרסה זו, לכל זוג צמתים $u,v\in V$ ישנו, בנוסף לקיבולת $c(u,v)$, גם הספק מזערי $d(u,v)$, אשר יבטיח את איכות הזרימה במים, כך שהזרימה בכל צלע צריכה להיות לפחות $d(u,v)$. באופן פורמלי, רשת זרימה מוכללת היא $N=(G,c,d,s,t)$ כאשר $d:V\times V\to\mathbb{R}^+\cup\{-\infty\}$ כך שֶׁ-$d(u,v)=-\infty$ לכל $(u,v)\notin E$ וְ-$d(u,v)\geq 0$ לכל $(u,v)\in E$. *זרימה איכותית* הינה פונקציית זרימה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ כך שבנוסף לאילוצי הזרימה הרגילים, אנו דורשים בנוסף שלכל $u,v\in V$, $d(u,v)\leq f(u,v)\leq c(u,v)$.

שימו לב, כי יתכן שהאילוצים סותרים זה את זה ולא קיימת זרימה איכותית ברשת. נראה קודם איך לבדוק אם קיימת זרימה איכותית על ידי רדוקציה לבעיית זרימת מקסימום.

בהינתן רשמת זרימה מוכללת $N=(G,c,d,s,t)$, ניצור:

- קדקודים חדשים $\tilde{s},\tilde{t}$,
- קשתות $(\tilde{s},v)$ לכל $v\in V$,
- קשתות $(v,\tilde{t})$ לכל $v\in V$,
- קשת (t,s),

נגדיר פונקציית קיבולות חדשה $\tilde{c}:\tilde{V}\times\tilde{V}\to\mathbb{R}^+$, כאשר $\tilde{V}=V\cup\{\tilde{s},\tilde{t}\}$, בצורה הבאה:

- לכל $v\in V$: $\tilde{c}(\tilde{s},v)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} d(u,v)$ וגם $\tilde{c}(v,\tilde{t})=\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} d(v,u)$,
- לכל $(u,v)\in E$: $\tilde{c}(u,v)=c(u,v)-d(u,v)$,
- וגם $\tilde{c}(t,s)=\infty$.
- לכל זוג קדקודים אחר, הקיבולת היא 0.

נסמן: $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$, באשר $\tilde{E}$ הן הקשתות המקוריות בְּ-G והקשתות שהוספו.

סעיף א
הוכיחו כי קיימת זרימה איכותית ברשת הזרימה $N=(G,c,d,s,t)$ $\Leftrightarrow$ קיימת זרימה ברשת הזרימה $\tilde{N}=\left(\tilde{G},\tilde{c},\tilde{s},\tilde{t}\right)$ בה כל הקשתות היוצאות מ- $\tilde{s}$ רוויות. הסבירו איך להשתמש בטענה זו כדי למצוא האם קיימת זרימה איכותית בְּ-N.

סעיף ב
להלן אלגוריתם שגוי למציאת זרימה איכותית מקסימלית:
1. מצאו זרימה איכותית חוקית f בְּ-N (או החזירו שאין זרימה כנ"ל ועצרו).
2. הריצו את האלגוריתם של דיניץ כאשר מתחילים מהזרימה f.

הראו דוגמה לכך שהאלגוריתם לא יחזיר זרימה איכותית מקסימלית.

סעיף ג
שנו את חישוב הקיבולת ברשת השיורית כך שיהיה ניתן להתאים את אלגוריתם דיניץ לפתרון הבעיה. יש לנמק ולהסביר את השינוי אשר ביצעתם, אך אין צורך בהוכחת נכונותו. בנוסף, עליכם לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם (כולל מציאת זרימה איכותית).

שאלה 2
נתבונן בשפות הבאות:

$$\text{conVC}=\{(G,d): G \text{ is a connected graph that has a vertex cover of size at most } d\}$$

$$\text{evenVC}=\{(G,d): d \text{ is even}, G \text{ is a connected graph that has a vertex cover of size at most } d\}$$

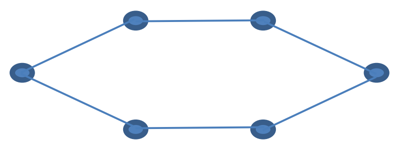
$$\text{evenDegVC}=\left\{(G,d) \quad : \quad \begin{array}{l} G \text{ is a connected graph such that:} \\ 1. \text{the degree of each vertex in } G \text{ is even} \\ 2. G \text{ has a vertex cover of size at most } d \end{array}\right\}$$

בסעיפים הבאים ניתן להסתמך על העובדה כי conVC היא NP-קשה.

סעיף א
הראו כי השפה evenVC היא NP-שלמה.

סעיף ב
הראו כי השפה evenDegVC היא NP-שלמה.

הדרכה: כדי להראות כי evenDegVC היא NP-קשה הראו רדוקציה מ- conVC. ברדוקציה השתמשו בגרף להלן:



שאלה 3

לכל k טבעי, נגדיר את השפה $k\text{-}CLIQUE$:

$$k\text{-}CLIQUE = \{G\ :\ G\ is\ an\ undirected\ graph\ that\ contains\ a\ clique\ of\ size\ k\}$$

סעיף א

תארו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V|^3)$ עבור $3\text{-}CLIQUE$ והסבירו בקצרה מדוע הוא רץ בזמן הנדרש. אין צורך להוכיח נכונות האלגוריתם.

סעיף ב

הראו רדוקציה מ-$6\text{-}CLIQUE$ ל-$3\text{-}CLIQUE$ שמקבלת גרף G עם n קודקודים ומחזירה גרף $f(G)$ עם $O(n^2)$ קדקודים כך שאם $G \in 6\text{-}CLIQUE$, אזי $f(G) \in 3\text{-}CLIQUE$. זמן הריצה הנדרש של חישוב הרדוקציה הוא $O(n^4)$. יש להוכיח את נכונות הרדוקציה ולנתח בקצרה את זמן הריצה שלה.

סעיף ג

הראו שאם לא קיים אלגוריתם עבור $6\text{-}CLIQUE$ הרץ בזמן $O(|V|^5)$, אזי לא קיים אלגוריתם עבור $3\text{-}CLIQUE$ הרץ בזמן $O(|V|^{2.5})$.

שאלה 4

בשאלה זו פסוק הוא בצורת *3CNF* אם כל פסוקית בו מכילה לכל היותר שלושה ליטרלים. נאמר כי רדוקציה f מ-*SAT* ל-*3SAT* משמרת מספר הצבות אם לכל פסוק φ בצורת *CNF*, הפסוק $f(\varphi)$ הוא פסוק *3CNF* כך שמספר ההצבות המספקות ל-φ שווה למספר ההצבות המספקות ל-$f(\varphi)$.

סעיף א

הראו שהרדוקציה שתוארה בכיתה מ- *SAT* ל- *3SAT* לא משמרת מספר הצבות.

מטרת הסעיפים הבאים לבנות רדוקציה פולינומיאלית משמרת מספר הצבות מ- *SAT* ל- *3SAT*.

סעיף ב

הראו כי בהינתן פסוק $(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow x_3$ (כלומר $x_3 = T$ אם ורק אם $x_1 \vee x_2 = T$), קיים פסוק שקול לו בצורת *3CNF* המשתמש רק במשתנים x_1, x_2, x_3.

סעיף ג

בהינתן פסוקית $\varphi = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_t$ נבנה את הפסוק

$$\psi = (x_1 \leftrightarrow \overline{y}_1) \wedge \left((\overline{y}_1 \vee x_2) \leftrightarrow \overline{y}_2\right) \wedge \cdots \wedge \left((\overline{y}_{t-1} \vee x_t) \leftrightarrow \overline{y}_t\right) \wedge (\overline{y}_t).$$

הוכיחו כי:

א. תהי $a_1, \dots, a_t$ הצבה המספקת את φ. אזי קיימת הצבה יחידה $b_1, \dots, b_t$ למשתנים $y_1, \dots, y_t$ כך שֶ-$a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ היא הצבה המספקת את ψ.

ב. אם $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ מספקת את ψ, אזי $a_1, \dots, a_t$ הצבה מספקת של φ.

סעיף ד

תארו רדוקציה פולינומיאלית מ-*SAT* ל-*3SAT* המשמרת מספר הצבות. הוכיחו את נכונות הרדוקציה והסבירו מדוע היא פולינומיאלית.

סעיף ה - בונוס

נסתכל על הרדוקציה f_{cl} שבנינו בהרצאה בהוכחת משפט קוק-לוין עבור השפה $CLIQUE$. הוכיחו כי אם בְּ-G יש קליק יחיד בגודל k, אזי לְ-$f_{cl}(G,k)$ יש בדיוק הצבה אחת מספקת.

<u>הערה:</u> בכיתה לא ראינו רדוקציה ייעודית מהשפה $CLIQUE$ לשפה SAT, אלא משפה כלשהי במחלקה NP (המכילה את השפה $CLIQUE$).