עבודה 5: אלגוריתמים אקראיים וזרימה ברשתות

<u>תאריך הגשה:</u> 15 ביוני, 12:00 בצהריים.

יש להגיש את העבודה לתיבת הדואר של הקורס (תאים מספר 96,95 בקומת הכניסה של בניין 37) ובנוסף גם במערכת ההגשה.

<u>מתרגלת אחראית:</u> שקד מטר

<u>הערות:</u>

א. כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם
  2. הוכחת נכונו
  3. ניתוח זמן ריצה

ב. פתרון יש לרשום בדף התשובות הנלווה לעבודה

ג. אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא יתקבל.

ד. בכל שימוש במשפט שהוכח בכיתה יש לצטט את המשפט באופן מדוייק.

ה. אין לחרוג מן המקום המוקצה בדף התשובות

<u>שאלה 1:</u>

בשאלה זו נבחן את בעיית התאמת תתי מטריצות.

הגדרה: לצורך שאלה זו, נסמן A^{ij} את תת המטריצה של A מגודל $k \times k$ כך שהאינדקס הראשון בה הוא $a_{i,j}$. כלומר,

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} a_{i,j} & \cdots & a_{i,j+k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+k-1,\mathrm{j}} & \cdots & a_{\mathrm{i}+k-1,\mathrm{j}+k-1} \end{bmatrix}$$

מופע: מטריצה A מסדר $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ וכן מטריצה B מסדר $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$, כך ש- $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$.

פתרון לבעיה הינו רשימה של זוגות אינדקסים $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, כך ש- $\boldsymbol{A^{ij}} = \boldsymbol{B}$.

נבחן אלגוריתם הסתברותי לבעיה זו:

1. $\emptyset \to S$
2. הגרל וקטור $v \in \{0, \dots, r\}^k$ בהתפלגות אחידה.
3. חשב $res \leftarrow B \times v$
4. עבור $j = 1, \dots, n-k+1$
   4.1. עבור $i = 1, \dots, n-k+1$
      4.1.1. אם $res = A^{ij} \times v$
         4.1.1.1. $S \cup \{< i,j >\} \to S$
5. החזר את S

לדוגמה, עבור הקלט:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

נרצה להחזיר את $S = \{<1,1>, <2,2>\}$.

שימו לב כי פעולת חשבון על שני מספרים הניתנים לייצוג על ידי $O(\log n)$ ביטים, דורשת $O(1)$ זמן.

א. יש להראות כי לכל i,j, אם $A^{ij} = B$ אז הקבוצה S שהאלגוריתם יחזיר מכילה את הזוג $<i,j>$.
ב. קבעו את הערך של r, כך שבהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$, לקבוצה S שהאלגוריתם מחזיר לא שייכים זוגות $<i,j>$ כך ש- $A^{ij} \neq B$. הוכיחו תשובתכם.
ג. ממשו את האלגוריתם בזמן $O(n^2 k)$. הסבירו מדוע האלגוריתם שתיארתם נכון, ומדוע הוא עונה לדרישת הסיבוכיות.

<u>שאלה 2:</u>

הגדרה: נאמר שפולינום $p(x_1, \dots, x_k)$ שווה זהותית לפולינום האפס ($p(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$) אמ"מ לכל $x_1, \dots, x_k$, $p(x_1, \dots, x_k) = 0$. לדוגמה, הפולינום $p(x,y) = (x+y)(x-y) - x^2 + y^2$ שווה זהותית לפולינום האפס, ואילו הפולינום $q(x,y) = (x+y)(x-y)$ לא שווה זהותית לפולינום האפס.

אליס מנסה לפתור בעיה A, באמצעות פרוטוקול תקשורת עם בוב. לאליס אלגוריתם F שאיננו אקראי, הרץ בזמן $O(n^2)$ עבור קלט באורך $O(n)$. במהלך ריצתו, לכל היותר n פעמים הוא מייצר פולינום $p(x_1, \dots, x_k)$ הניתן לייצוג כמחרוזת באורך $O(n)$ ביטים, ומבקש מאליס לשלוח את הפולינום לבוב. בוב מחזיר האם $p(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$, והאלגוריתם ממשיך בהתאם לתשובתו של בוב. בסוף ריצתו, האלגוריתם מחזיר "כן" או "לא".

שימו לב שבוב תמיד מחזיר תשובה נכונה.

בשאלה זו, נניח כי קיים אלגוריתם אקראי SZ המקבל פולינום $p(x_1, \dots, x_k)$ הניתן לייצוג על ידי מחרוזת באורך $O(n)$, ומחזיר בזמן $O(n^2)$ האם $p(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$. אם $p(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$, האלגוריתם תמיד עונה "כן". אחרת, בהסתברות לכל היותר חצי האלגוריתם עונה "כן" ובהסתברות לכל הפחות חצי האלגוריתם עונה "לא".

א. נבחן את האלגוריתם המקומי (כלומר, ללא פרוטוקול תקשורת) F_R:
1. אליס מריצה את האלגוריתם F.
2. בכל פעם שהאלגוריתם מבקש לדעת עבור פולינום $p(x_1, \dots, x_k)$ האם $p(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$, אליס מריצה את SZ על $p(x_1, \dots, x_k)$ ומזינה לאלגוריתם F את תשובת SZ.

הראו כי אלגוריתם זה מחזיר תשובה נכונה בהסתברות לפחות $\frac{1}{2^n}$.

ב. הראו כי קיים אלגוריתם מקומי הפותר בזמן פולינומי את בעיה A, ועונה נכון בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$. נתחו את הסתברות ההצלחה של האלגוריתם וכן את זמן הריצה.

שאלה 3:

אין קשר בין סעיפי השאלה.

א. מסלול זרימה מ- s ל- t הינו מסלול $P = (s = u_1, u_2, \dots, u_k = t)$ בגרף G כך שלכל קשת (u_i, u_{i+1}) במסלול מתקיים $f(u_i, u_{i+1}) > 0$.
נתונה רשת זרימה $N = (G = (V, E), c, s, t)$ $(\forall(u, v) \in E, c(u, v) > 0)$, וזרימה כלשהי f.
הוכיחו או הפריכו: אם $|f| > 0$, אז ב- G יש מסלול זרימה.

ב. תהי $N = (G = (V, E), c, s, t)$ רשת זרימה בה כל הקיבולים שלמים $(\forall(u, v) \in E, c(u, v) > 0)$, כך שהקיבול המקסימלי הינו c_{max}. נסמן d_{max} הינה דרגת היציאה המקסימלית של קודקוד ב- G. הראו שכל ריצה של אלגוריתם Ford – Fulkerson מסתיימת לאחר $c_{max} \cdot d_{max}$ איטרציות לכל היותר.

שאלה 4:

נתונה רשת זרימה $N = (G = (V, E), c, s, t)$ $(\forall(u, v) \in E, c(u, v) > 0)$ וזרימת מקסימום f $(|f| > 0)$, כך שברשת השיורית $N_f = (G_f = (\mathrm{V}, \mathrm{E}_f), c_f, s, t)$ אין מעגלים מכוונים. בנוסף, נתון מיון טופולוגי על קודקודי הגרף G_f, המסדר את קודקודי הגרף בסדר $v_1, v_2, \dots v_n$.

כלומר, לכל קשת $(v_i, v_j) \in E_f$ (לכל קשת ברשת השיורית) מתקיים $i < j$.

א. יש להוכיח כי: אם אין מסלול ברשת השיורית מ- u ל-s אז לכל v שכן של u, $f(u, v) = 0$. כמו כן, אם אין מסלול ברשת השיורית מ- t ל-v אז לכל u שכן של v, $f(u, v) = 0$.

ב. יש להראות שאם קשת (v_i, v_j) שייכת לחתך מינימלי כלשהו, אז מתקיים $i > j$.

עבור הסעיפים הבאים, נסמן $s = v_{i_0}, t = v_{j_0}$.

ג. יש להראות כי מתקיים $j_0 < i_0$.

ד. יש להראות כי לכל k, אם $j_0 \leq k < i_0$, אז החלוקה (S, T) כך ש- $S = \{v_l | l > k\}$, היא חתך מינימלי.

ה. יש להראות כי לכל קשת $(v_k, v_l) \in E$, קיים חתך מינימלי המכיל את (v_k, v_l) אמ"מ $j_0 \leq l < k \leq i_0$.

בהצלחה ☺