פתרון עבודה 2: אלגוריתמים חמדניים ו- MST

שאלה 1

<u>סעיף א</u>

עבור המשימות

$$c_1 = 5 \;, d_1 = 4$$
$$c_2 = 3 \;, d_2 = 7$$

פתרון חוקי עם איחור מינימלי הוא $S = (1,2)$

$$l(1) = \max\{0, 0 + 5 - 4\} = 1$$
$$l(2) = \max\{0, 5 + 3 - 7\} = 1$$

האיחור של הפתרון הנ"ל הוא 1.

הפתרון שהאלגוריתם יחזיר הוא (2,1) כאשר :

$$l(1) = \max\{0, 0 + 3 - 7\} = 0$$
$$l(2) = \max\{0, 3 + 5 - 4\} = 4$$

מכאן שהאיחור של הפתרון הנ"ל הוא 4 ולכן האלגוריתם נכשל.

<u>סעיף ב</u>

יהא $S = (j_1, j_2, \dots, i_1, i_2, \dots, j_k)$ כך ש – $(1) d_{i2} \le d_{i1}$
ויהא $S^* = (j_1, j_2, \dots, i_2, i_1, \dots, j_k)$.
לכל פעילות $m \neq i_1, i_2$ מתקיים $l^*(m) = l(m)$ שכן זמן התחלת ביצוע המשימה בשני הפתרונות זהה.
מתקיים: $l(i_1) = \max\{0, s_{i1} + c_{i1} - d_{i1}\}$, בנוסף $s_{i2} = s_{i1} + c_{i1}$ ולכן:

$$l(i_2) = \max\{0, s_{i2} + c_{i2} - d_{i2}\} = \max\{0, s_{i1} + c_{i1} + c_{i2} - d_{i2}\}.$$

נחשב את איחור הפעילויות i_1, i_2 בפתרון החדש S^*:
מתקיים:

$$(2)\; s^*_{i1} = s^*_{i2} + c_{i2} = s_{i1} + c_{i2}$$
$$l^*(i_1) = \max\{0, s^*_{i1} + c_{i1} - d_{i1}\} =_{(2)} \max\{0, s_{i1} + c_{i2} + c_{i1} - d_{i1}\} \le_{(1)}$$
$$\le \max\{0, s_{i1} + c_{i2} + c_{i1} - d_{i2}\} = l(i_2)$$
$$l^*(i_2) = \max\{0, s^*_{i2} + c_{i2} - d_{i2}\} = \max\{0, s_{i1} + c_{i2} - d_{i2}\} \le \max\{0, s_{i2} + c_{i2} - d_{i2}\} = l(i_2)$$

לסיכום: הראנו כי $l^*(i_1) \le l(i_2)$ וגם כי $l^*(i_2) \le l(i_1)$ ומכאן נקבל כי האיחור של S^* לא גדול מהאיחור של S כנדרש.

סעיף ג

תיאור האלגוריתם:

אתחול:
- $M \leftarrow A$
- $S \leftarrow \langle\ \ \rangle$ הפרמוטציה שבונה החמדן

צעד: כל עוד $M \neq \emptyset$ בצע
1. הורד מ- M פעילות i עם זמן יעד d_i קטן ביותר
2. הוסף את i כפעילות אחרונה בסידור S

סיום: החזר את S

הוכחת נכונות האלגוריתם:
הטענה הראשית: האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי S עם איחור מינימלי.
הוכחת הטענה הראשית:
יהא O פתרון חוקי כלשהו עם איחור מינימלי. אם $O = S$ אז סיימנו.
אחרת, $O \neq S$: S הוא פתרון שהאלגוריתם מחזיר ולכן מתקיים כי הוא מיון של הפעילויות לפי זמן יעד לביצוע הפעילות מהקטן לגדול. מכך ש - $S \neq O$ נובע כי קיימות פעילויות סמוכות ב- O, i_1, i_2 כך ש - i_1 קודמת ל - i_2 בסידור ומתקיים $d_{i2} \leq d_{i1}$. מהטענה בסעיף ב' נקבל כי ניתן להחליף את הפעילויות הללו ולקבל פתרון חדש O^* עם איחור לא גדול יותר, ולכן גם הוא פתרון עם איחור מינימלי.
אם $O^* = S$ אז סיימנו. אחרת, נחליף בין פעילויות סמוכות בסידור עבורן בפעילות השנייה בסידור היא עם זמן יעד לא גדול מהפעילות הראשונה בסידור, ונמשיך בתהליך עד שנקבל פתרון ממוין לפי זמני הסיום S'. מהטענה בסעיף ב' נקבל כי בכל החלפה כנ"ל לא הגדלנו את האיחור ולכן האיחור של S' לא גדול יותר מהאיחור של O ומכאן שגם הוא פתרון עם איחור מינימלי. כעת, אם $S = S'$ סיימנו. אחרת, נחליף בין פעילויות סמוכות בסידור S' כך שהן מופיעות בסדר אחר ב – S עד שנגיע לפתרון S.
בכל החלפה כזו, מתקיים כי אנו מחליפים בין פעילויות עם זמני סיום שווים (כי S וגם S' ממוינים לפי זמני סיום וכן כל זוג פעילויות שאנו מחליפים מופיע בסדר שונה בשני הסידורים), ולכן מהטענה בסעיף ב' לא הגדלנו את האיחור והאיחור של S לא גדול יותר מהאיחור של S' ומכאן שהוא גם מינימלי.

מימוש וניתוח זמן ריצה:
בשלב הראשון ניתן למיין את הפעילויות לפי זמן היעד לביצוע הפעילות $O(n \log n)$.
כעת, הפרמוטציה S שנחזיר היא בדיוק סדר הפעילויות במיון.
לכן סה"כ זמן הריצה הוא $O(n \log n)$.

שאלה 2

<u>סעיף א</u>

הוכחה באינדוקציה על i, מספר האיטרציות.

<u>בסיס</u>: $i=0$: $B_0=\{e\}$ כך ש – e היא קשת במשקל מינימום מבין כל הקשתות החלות על v.
יהא עץ פורש $T_v=(V,E_T)$ של G במשקל מינימום. אם $B_0\subseteq E_T$ אז סיימנו. אחרת, תהא $e'\in E_T$ קשת החלה על v, קיימת בדיוק אחת כזו כי v הוא עלה בעץ T_v. נתבונן ב - $(V,E_T\backslash\{e'\})$, גרף זה הוא חסר מעגלים בו v הוא קדקוד בודד. נוסיף את הצלע e ונקבל $T'_v=(V,E_T\backslash\{e'\}\cup\{e\})$, זהו גרף עם $|V|-1$ צלעות וללא מעגלים שכן לפי הוספת e, v היה קדקוד בודד, ולכן ממשפט 1 מתקיים כי T'_v הוא עץ פורש של G. בנוסף מאופן בחירת e מתקיים $w(e)\le w(e')$ ולכן $w(T'_v)\le w(T_v)$ ומכאן נקבל כי T'_v הוא גם עץ מינימלי של G והוא מכיל את הקשת e כנדרש.

<u>הנחה</u>: קיים עץ פורש $T_v=(V,E_T)$ של G במשקל מינימום B_{i-1} כך ש - $B_{i-1}\subseteq E_T$.

<u>צעד</u>: תהא $e=(x,y)$ הקשת שנשקלת ע"י האלגוריתם באיטרציה ה – i

מקרה א: e סוגרת מעגל עם קשתות B_{i-1} אזי מתקיים $B_i=B_{i-1}\subseteq E_T$.

מקרה ב: e לא סוגרת מעגל עם B_{i-1}, אזי $B_i=B_{i-1}\cup\{e\}$
- מקרה ב1: $e\in E_T$ ולכן נקבל $B_i\subseteq E_T$.

מקרה ב2: $e\notin E_T$. נביט בגרף $H=(V,E_T\cup\{e\})$. ממשפט 2, גרף זה מכיל מעגל C בו קיימת קשת $e'\neq e$ כך ש - $e'\in E_T\backslash B_{i-1}$ כי אחרת, אם כל קשתות C מלבד e היו ב - B_{i-1}, אז e הייתה סוגרת מעגל עם קשתות B_{i-1} בסתירה. נתבונן ב - $T'=(V,E_T\cup\{e\}\backslash\{e'\})$. ממשפט 2 נקבל כי T' הוא עץ פורש של G וכן מתקיים, $B_i\subseteq E_T$.
נראה כי T' הוא עץ v-עלה וכן כי הוא מינימלי:

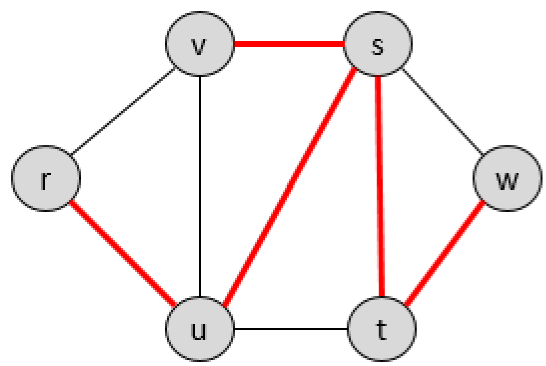
1. מינימלי: e לא סוגרת מעגל עם קשתות B_{i-1} וכן e' לא סוגרת מעגל עם קשתות B_{i-1} כיוון ש - $B_{i-1}\cup\left\{e'\right\}\subseteq E_T$ ו T- הוא עץ ולכן חסר מעגלים. האלגוריתם בחר את e ולא את e' ולכן $w(e)\le w(e')$ ומכאן $w\left(T'\right)\le w(T_v)$. ממינימליות T_v נקבל כי T' מינימלי.
2. v- עלה: e אינה חלה על v שכן האלגוריתם מסיר את כל הקשתות החלות על v מ F- לפני הכניסה ללולאה. בנוסף, ב- T_v יש רק קשת אחת החלה על v שכן זהו עץ v- עלה, וקשת זו שייכת ל - B_{i-1} ולכן מכך ש - $e'\in E_T\backslash B_{i-1}$ נקבל כי e' אינה חלה על v. סה"כ לא השפענו על דרגת v ולכן v הוא עלה גם ב - T' כנדרש.

סעיף ב

הטענה העיקרית: האלגוריתם מחזיר עץ פורש T_v של G במשקל מינימום.
הוכחה: נתון כי קיים ל – G עץ פורש בו v הוא עלה, ולכן בהכרח יש $|V|-1$ קשתות שלא סוגרות מעגל זו עם זו כך שבדיוק קשת אחת ביניהן חלה על v.האלגוריתם עובר על כל הקשתות עד שהוא מגיע ל - $|B|=|V|-1$ ולכן מובטח כי תנאי העצירה של הלולאה יתקיים בזמן סופי.
מהטענה בסעיף א', מתקיים כי בכל שלב קיים עץ v-עלה מינימלי המכיל את קבוצת הקשתות שהאלגוריתם בחר עד אותו שלב. לכן בפרט בסיום הריצה קיים עץ פורש $T_v=(V,E_T)$ של G במשקל מינימום המכיל את B. מכך שהאלגוריתם עצר נקבל כי $|E_T|=|V|-1=|B|$ ולכן $B=E_T$.
כלומר האלגוריתם מחזיר עץ פורש v-עלה במשקל מינימום כנדרש.

שאלה 3

סעיף א



סעיף ב

נניח בשלילה כי קיים MST, $T_1=(V,E_1)$, ועץ פורש $T_2=(V,E_2)$, כך ש – $w(T_2)>w(T1)$ ולכל צלע $e_2\in E_2\backslash E_1$, אם נוסיף את e_2 ל T_1 ייסגר מעגל C בו לכל צלע $e_1\in E_1\backslash E_2$ במעגל מתקיים $w(e_1)\geq w(e_2)$.
נסמן ב – T_{bad} את קבוצת כל זוגות העצים (T_1,T_2) כנ"ל. מההנחה, הקבוצה הנ"ל לא ריקה.
יהא $(T_1,T_2)\in T_{bad}$ זוג עצים עם הפרש $|E_1\backslash E_2|$ מינימלי מבין כל זוגות העצים ב – T_{bad}.
מכך ש – $w(T_2)>w(T_1)$ נקבל כי $E_1\neq E_2$ ובפרט $E_2\backslash E_1\neq\phi$.
תהא $e_2\in E_2\backslash E_1$ צלע עם משקל מקסימלי מבין צלעות $E_2\backslash E_1$. ממשפט 2, בהוספת e_2 לעץ T_1 ייסגר מעגל C_1.
קיימת צלע $e_1\in E_1\backslash E_2$ במעגל שנסגר כי אחרת המעגל C_1 יהיה ב – T_1 בסתירה לכך ש – T_1 הוא עץ.
נתבונן בגרף $T_1'=(V,E_1'=E_1\cup\{e_2\}\backslash\{e_1\})$, ממשפט 2, T_1' הוא עץ פורש של G.
מההנחה כי $w(e_1)\geq w(e_2)$ נקבל: $w(T_1')=w(T_1)+w(e_2)-w(e_1)\leq w(T_1)$.
T_1 הוא עפ"מ של G ולכן בהכרח מתקיים $w(T_1')=w(T_1)$, ומכאן ש- T_1' הוא גם עפ"מ של G.
טענת עזר: $(T_1',T_2)\in T_{bad}$.
מטענת העזר נקבל :

$$|E_1'\backslash E_2|=|E_1\cup\{e_2\}\backslash\{e_1\}\backslash E_2|=_{e_2\in E_2}|E_1\backslash\{e_1\}\backslash E_2|=|E_1\backslash E_2|-1$$

בסתירה להנחה כי (T_1,T_2) הם זוג מ – T_{bad} עם הפרש $|E_1\backslash E_2|$ מינימלי.

הוכחת טענת העזר:
$w(T_2) > w(T_1) = w(T_1')$ ולכן נותר להראות כי לכל צלע $e_2' \in E_2 \backslash E_1'$, אם נוסיף אותה ל $T_1' -$ ייסגר מעגל C בו לכל צלע $e_1' \in E_1' \backslash E_2$ מתקיים $w(e_1') \geq w(e_2)$, ומכאן נקבל כי $(T_1', T_2) \in T_{bad}$.
תהא $e_2' \in E_2 \backslash E_1'$. בהוספת $e_2' = (x, y)$ ל $T_1' -$ ייסגר מעגל C_2 המורכב מהצלע e_2' וממסלול P בעץ T_1' בין הקדקודים x ו- y.
מקרה א': המסלול P נמצא בעץ T_1. במקרה זה, הוספת e_2' לעץ T_1 תסגור את אותו מעגל C_2.
מההנחה כי $(T_1, T_2) \in T_{bad}$ נקבל כי כל צלע $e_1' \in C_2 \backslash E_2$ מקיימת $w(e_1') \geq w(e_2')$ כנדרש.
מקרה ב': המסלול P אינו בעץ T_1. מכאן נקבל כי $e_2 \in P$. בנוסף, מתקיים $e_2' \notin E_1$ מכיוון ש $e_2' \notin E_1' -$.
$e_1 \notin E_2, e_2' \in E_2$ ולכן $e_1 \neq e_2'$. מכאן, אם נוסיף את $e_2' = (x, y)$ לעץ T_1, נסגור מעגל C_2' המורכב מהצלע e_2' וממסלול P' בעץ T_1 בין x ו- y. בהכרח מתקיים $e_1 \in P'$ כי אחרת המסלול P' היה גם ב T_1' בסתירה לכך שיש בעץ מסלול פשוט יחיד בין כל שני קדקודים ($\mathrm{P} \neq P'$).
נוכיח כי מתקיים $C_2 \subseteq C_1 \cup C_2{}'$:
- $e_2' \in C_2$, ומתקיים מההגדרה כי $e_2' \in C_1 \cup C_2'$ כי הצלע $e_2{}'$ היא חלק מהמעגל $\mathrm{C}_2{}'$.
- $P \in C_2$, מסלול בעץ $T_1{}'$ בין הקדקודים x ו- y. נראה כי כל קשתות P נמצאות ב - $C_1 \cup C_2{}'$.
$e_1 = (u, v) \in P'$, ונסמן $P' = P_1 \circ e_1 \circ P_2$. נשים לב כי P_1, P_2 נמצאים בעץ T_1' שכן כל צלעות T_1 למעט e_1 נמצאות ב - $T_1{}'$. כעת, נסמן ב - P'' את המסלול $C_1 \backslash \{e_1\}$, זהו מסלול בעץ T_1 בין הקדקודים u ו- v. מסלול זה הוא גם כן ב - $T_1{}'$. סה"כ P_1 הוא מסלול מ $x -$ ל $u -$, P'' הוא מסלול מ $u -$ ל- v ו- P_2 הוא מסלול מ $v -$ ל- y, כאשר כל שלושת המסלולים הנ"ל בעץ $T_1{}'$. נבנה את המסלול $P^* = P_1 \circ P'' \circ P_2$, זהו מסלול ב - T_1' מ- x ל- y .
$T_1{}'$ הוא עץ פורש של G ולכן יש בו מסלול פשוט יחיד בין כל שני קדקודים ובפרט P^* הוא מסלול פשוט יחיד בין הקדקודים x, y. ולכן $P \subseteq P^*$ ובנוסף מהבניה נקבל $P^* \subseteq P'' \cup P' \subseteq C_1 \cup C_2{}'$ ולכן $P \subseteq C_1 \cup C_2{}'$ - ו $C_2 \subseteq C_1 \cup C_2'$.
כעת, תהא $e_1' \in C_2 \cap (E_1' \backslash E_2)$. מכיוון ש $C_2 \subseteq C_1 \cup C_2'$, בהכרח מתקיים $e_1' \in C_1$ או $e_1' \in C_2'$.
אם $e_1' \in C_2'$ אזי מההנחה כי $(T_1, T_2) \in T_{bad}$ בהכרח מתקיים $w(e_1') \geq w(e_2')$ (מכיוון ש - C_2' הוא מעגל שהצלע e_2' סוגרת ב - T_1).
אחרת, $e_1' \in C_1 \backslash E_2$. כפי שצוין קודם, צלע כזו חייבת לקיים $w(e_1') \geq w(e_2)$. e_2 היא צלע עם משקל מקסימלי מבין צלעות $E_2 \backslash E_1$. $e_2' \in E_2 \backslash E_1$ ולכן $w(e_2) \geq w(e_2')$, סה"כ $w(e_1') \geq w(e_2) \geq w(e_2')$, כנדרש.

<u>סעיף ד</u>

תיאור האלגוריתם:
1. מצא עץ פורש מינימלי של $G = (V, E)$, $T = (V, E_T)$.
2. $D \leftarrow \infty$
3. לכל קשת $e \in E \backslash E_T$:
   3.1. הוסף את e ל $\mathrm{T} -$ וקבל גרף $H = (V, E_T \cup \{e\})$
   3.2. עבור על המעגל שנוצר ב- H ומצא צלע e' במעגל עם משקל מקסימלי מבין הצלעות שמשקלן שונה ממשקל e. אם לא קיימת כזו חזור ל $3 -$.
   3.3.חשב $d = w(e) - w(e')$
   3.4. אם $d < D$:
      3.4.1. $D \leftarrow d$
      3.4.2. $T' = (V, E_T \cup \{e\} \backslash \{e'\})$

4. אם $D = \infty$ החזר "לא קיים", אחרת החזר T'.

הוכחת נכונות:
הטענה הראשית: האלגוריתם מחזיר 2-MST של G אם קיים, אחרת מחזיר "לא קיים".
הוכחה: נניח כי קיים 2-MST, T', של G, אזי מתקיים $w(T') > w(T)$. מהטענה בסעיף ב', קיימת צלע $e \in E_{T'} \backslash E_T$ כך שאם נוסיף אותה ל – T נקבל מעגל בו יש צלע e' כך ש - $w(e') < w(e)$.
לכן, אם קיים 2-MST בהכרח קיימת צלע $e \in E \backslash E_T$ כך שבשלב 3.2 נמצא צלע e' כך ש - $w(e') < w(e)$ ולכן נמשיך לשלבים 3.3,3.4 ובסוף האלגוריתם בהכרח יתקיים כי $D \neq \infty$ והאלגוריתם לא יחזיר "לא קיים". כלומר, אם לא קיים 2-MST האלגוריתם יחזיר "לא קיים".
כעת, מסעיף ג' מתקיים כי קיים 2-MST הנבדל מעפ"מ של G בקשת אחת בלבד.
האלגוריתם עובר על כל האפשרויות להחלפת צלע אחת בעץ הפורש של G, T, שהתקבל בשלב 1 מהאלגוריתם של קרוסקל ומחזיר את העץ עם המשקל הכי קרוב ל- T מבין אלו הנבדלים בקשת אחת ולכן הוא בהכרח עץ 2-MST של G.
אם לא קיים 2-MST אזי כל העצים הפורשים של G הם במשקל זהה לעץ הפורש המינימלי שחזר משלב 1, ולכן בשלב 3.2 האלגוריתם לא ימצא קשת במשקל שונה מ – e. ולכן בסוף האלגוריתם יתקיים $D = \infty$ והאלגוריתם יחזיר "לא קיים".

מימוש וניתוח זמן ריצה:
1. מציאת עץ פורש מינימלי של G ע"י קרוסקל $O(|E|\log|V|)$.
3. מעבר על כל הקשתות $O(|E|)$, ולכל קשת מציאת המעגל שנוצר לאחר הוספתה לעץ ע"י סריקת BFS כאשר מספר הקשתות בעץ עליו מתבצעת הסריקה הוא $|V|$ בזמן $O(|V|)$
מעבר על קשתות המעגלים ומציאת קשת מתאימה אם קיימת בזמן $O(|E|)$.
לכן סה"כ זמן הריצה $O(|E| \cdot |V|)$

שאלה 4

תיאור האלגוריתם:
נפתור את הבעיה באמצעות רדוקציה לבעיית עץ פורש מינימלי.
ממיר הקלט: בהינתן גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: V \to \mathbb{R}^+$ ממיר הקלט יחזיר את הגרף G ופונקציית משקל $w': E \to \mathbb{R}^+$ כך שלכל $(u, v) \in E$: $w'(u, v) = w(u) + w(v)$
ממיר הפלט: בהינתן עץ פורש של G, ממיר הפלט יחזיר אותו ללא שינוי.
האלגוריתם:
1. בהינתן גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: V \to \mathbb{R}^+$ הרץ את ממיר הקלט וקבל גרף G ופונקציית משקל $w': E \to \mathbb{R}^+$.
2. הרץ אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי על הגרף G עם פונקציית המשקל w'.
3. הרץ את ממיר הפלט על תוצאת הקופסא השחורה והחזר את תשובת ממיר הפלט.

הוכחת נכונות:
הטענה הראשית: האלגוריתם מחזיר עץ פורש של G עם עלות מינימלית.
טענת עזר: עבור עץ פורש $T = (v, E_T)$ של G, מתקיים כי עלותו לפי w שווה למשקלו לפי w'.
כלומר, מתקיים $\sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v) = w'(T)$.
הוכחת הטענה הראשית: יהא $T = (v, E_T)$ העץ הפורש שהאלגוריתם החזיר. נניח בשלילה כי עלותו לא מינימלית, אזי קיים עץ פורש $T' = (v, E_{T'})$ שעלותו קטנה יותר, כלומר מתקיים

$$w'(T') =_{\text{מטענת העזר}} \sum_{v \in V} d_{T'}(v) \cdot w(v) < \sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v) =_{\text{מטענת העזר}} w'(T)$$

T הוא העץ שחזר מהאלגוריתם ומפעולת ממיר הפלט מתקיים כי הוא חזר מהקופסא השחורה ולכן הוא עץ פורש מינימלי של G לפי w' בסתירה לכך ש - $w'(T') < w'(T)$.
הוכחת טענת העזר:

$$w'(T) = \sum_{e=(u,v) \in E_T} w'(e = (u, v)) = \sum_{(u,v) \in E_T} w(v) + w(u) = \sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v)$$

מימוש וניתוח זמן ריצה:
ממיר הקלט: יצירת הפונקציה w' ע"י מעבר על קשתות הגרף בזמן $O(|E|)$
הקופסא השחורה: מציאת עץ פורש מינימלי של G באמצעות האלגוריתם של קרוסקל בזמן $O(|E| \log |V|)$.
ממיר הפלט: החזרת העץ ללא שינוי $O(1)$.
סה"כ זמן הריצה: $O(|E| \log |V|)$.