# מבוא לאנליזה נומרית – עבודה 2

1) ניצור את המשוואה $f(x) = x^3 - 1 - \cos(x)$ , שהיא משוואת החיתוך בין הישרים, ע"י פונקצייה במטלב:

```
function[y]=f(x)
     y=x^3-1-cos(x);
end
```

נבדוק את ביצועי שיטת החצייה:

```
function[est_root,counter,progress]=calcRootByBisect(x0,x1,del)
if f(x0)*f(x1)>0
    disp("wrong values");
    est_root=0;
    counter=0;
else
    counter=1;
    est_root = (x0 + x1)/2;
    progress=[];
    while x1-x0 >= 2*del
       progress=[progress,est_root];
        counter=counter+1;
       if f(x0)*f(est_root)<0
           x1 = est_root;
       else
           x0 = est_root;
       end
       est_root = (x0 + x1)/2;
    end
end
```

ונקבל עבור x0=-3, x1=3 ועבור delta=0.001:

<u>התקדמות הניחוש:</u>

0 1.5000 0.7500 1.1250 1.3125 1.2188 1.1719
1.1484 1.1367 1.1309 1.1279 1.1265 1.1272

<u>מספר הסיבובים:</u>

13

נבדוק את ביצועי regula falsi:

```
function[est_root,counter,progress]=regulaFalsi(x0,x1,del)
counter=0;
if f(x0)*f(x1)>0
    disp("wrong values");
    est_root=0;

else
    Fest_root=1;
    progress=[];
    while(abs(Fest_root)>= del)
        counter=counter+1;

        est_root=x1-f(x1)*((x1-x0)/(f(x1)-f(x0)));
```

```
        Fest_root=f(est_root);
        progress=[progress,est_root];
        if(Fest_root*f(x1)<0)
            x0=est_root;
        else
            x1=est_root;
        end
    end
end
```

ונקבל עבור x0=-3, x1=3 ועבור delta=0.001:

<u>התקדמות הניחוש:</u>

```
0.0011    0.2080    0.3979    0.5655    0.7069    0.8205
0.9081    0.9731    1.0202    1.0534    1.0766    1.0926
1.1036    1.1110    1.1161    1.1195    1.1218    1.1233
1.1244    1.1251    1.1256    1.1259    1.1261    1.1263
1.1264
```

<u>מספר הסיבובים:</u>

25

2) א. אנו רוצים לחשב את $\sqrt{a}$ עבור $a > 0$ כלשהו. מספר זה הוא השורש החיובי של של הופנקציה $f(x) = x^2 - a$ שניגזרתה היא $f'(x) = 2x$. בעזרת שיטת ניוטון-רפסון שסדר התכנסות שלה הוא ריבועי נפתור ובתור איבר ראשון באיטרציה נבחר את a עצמו, כלומר נביט בסדרה המוגדרת כך:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

מכיוון שאנו רוצים סדר התכנסת רביעי נבצע שיטה זו עוד פעם:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} - \frac{\left(\frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}\right)^2 - a}{2\left(\frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}\right)} =$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} - \frac{\left(\frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}\right)}{2} + \frac{a}{x_n + \frac{a}{x_n}} = \frac{x_n}{4} + \frac{a}{4x_n} + \frac{a \cdot x_n}{{x_n}^2 + a}$$

בעזרת משוואה זו ניתן להגדיר את $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{a}{4x} + \frac{ax}{x^2+a}$.

נוכיח שהפונקציה עונה לדרישות הנ"ל בעזרת בדיקה של הנגזרת הרביעית:

$$g(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{4} + \frac{a}{4\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2 + a} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{a\sqrt{a}}{2a} = \sqrt{a}$$

$$g'^{(x)} = \frac{a^3+2a^2*x^2+5a^2+ax^4-2ax^2+x^4}{4(a+x^2)^2},\ g'(\sqrt{a}) = 0$$

$$g''(x) = \frac{2ax(x^2-3a)}{(a+x^2)^3},\ g''(\sqrt{a}) = 0$$

$$g'''(x) = \frac{6a(-a^2+6ax^2-x^4)}{(a+x^2)^4},\ g'''(\sqrt{a}) = 0$$

$$g''''(x) = \frac{24ax(5a^2-10ax^2+x^4)}{(a+x^2)^5},\ g''''(\sqrt{a}) = \frac{24a\sqrt{a}\left(5a^2-10a\sqrt{a}^2+\sqrt{a}^4\right)}{\left(a+\sqrt{a}^2\right)^5} = \frac{3\sqrt{a}}{a^2} \neq 0$$

ב. עבור $q = 4$, המינמלי ביותר שמקיים $g^{(4)}(x) = \frac{3\sqrt{a}}{a^2} \neq 0$ נחשב את קבוע התכנסות:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^q} = \frac{1}{q!}\left|g^{(q)}(p)\right| = \frac{1}{4!} \cdot \frac{3\sqrt{a}}{a^2}$$

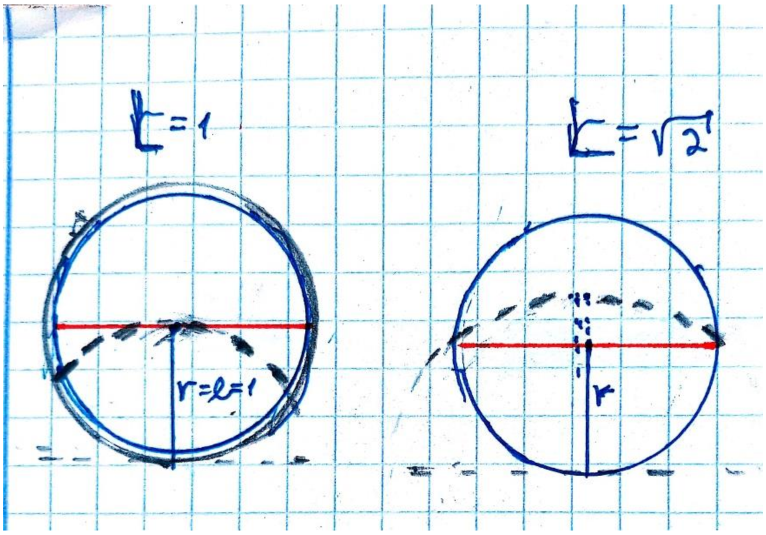
```
function g = sqrt_a(a)
g = (1/24)*[3*(a^0.5)/(a^2)];
end;
```

- sqrt_a(2)
- ans =  0.044194

- sqrt_a(3)
- ans =  0.024056

- sqrt_a(100)
- ans =   1.2500e-004

3) א.
נבין אילו ערכי a,b עלינו לבחור:
עבור $r = 1 = a$ המעגל שהחמור ייצור יהיה בעל רדיוס 1 ושטח הגזרה (קטן מ-$0.5\pi$) יהיה קטן משטח חצי המעגל שרדיוסו 1 ($0.5\pi$)
עבור $\sqrt{2} = b$ המעגל שהחמור ייצור יהיה בעל רדיוס $\sqrt{2}$ ושטח הגזרה הרלוונטית יהיה גדול משטח חצי המעגל ($0.5\pi$), זאת מאחר והוא מכסה את כל חצי המעגל עם עודף.
לפי השירטוט ניתן לראות שבמקרה בו המעגל המקורי והמעגל שהחמור יוצר נחתכים בדיוק בנקודת חצי המעגל, אורך הקשת במשולש שנוצר היא $\sqrt{2}$ (לפי פיתגורס):




ובנוסף מתקיים $0.5 > 04142 = 1 - 1.41421 = b - a$.

ב.
שטח המעגל: $\pi r^2 =$ ח
שטח הגזרה המסומנת באדום מתוך המעגל המקורי: $a_1 = r^2 * \frac{2\alpha_1}{2}$
שטח הגזרה המסומנת בתכלת מתוך המעגל אותו יוצר החמור: $a_2 * l = l^2 * \frac{2a_2}{2}$
נשים לב כי יש שטח חפיפה בין שני השטחים הנ"ל – שטח שני המשולשים.
נעזר בכך שזהו משולש שווה שוקיים – הגובה והתיכון מתלכדים. נוריד גובה, ונחשב את אורכו: $\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$ וכעת נחשב את שטח שני המשולשים:

$$\frac{2 * l * \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}}{2} = l * \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$$

לכן בכדי למצוא את שטח S נחבר את שתי הגזרות ונחסר את השטח החופף:
$S = a_1 + a_2 * l - l * \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$.

נסתכל על סכום הזויות במשולש ונקבל:
$a_1 + a_2 + a_2 = \pi \rightarrow a_2 = \frac{\pi - a_1}{2}$.
לפי משפט הקוסינוס במשולש:
$$\cos(a_1) = \frac{r^2 + r^2 - l^2}{2r^2} = \frac{2 - l^2}{2} \rightarrow a_1 = \cos^{-1}\frac{2 - l^2}{2}$$
נציב בשטח שמצאנו:

$$S=\cos^{-1}\left(\frac{2-l^2}{2}\right)+\frac{\pi-a_1}{2}*l-l*\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}$$

נציב $l=2\sin(\frac{x}{2})$:

$$S=\cos^{-1}\left(\frac{2-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}\right)+\frac{\pi-a_1}{2}*2\sin\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)*\sqrt{1-\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{4}}=$$

נשתמש בזהויות טריגונומטריות:

$$x+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)*2*2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\sin(x)=$$

$$x\left(1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)-\pi\left(1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)-\sin(x)+\pi=$$

$$\left(1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)(x-\pi)-\sin(x)+\pi=$$

$$\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\pi$$

כנדרש.

ג. נשים לב :

שטח המעגל: $\pi r^2=\pi$ ← שטח חצי מעגל: $\frac{\pi}{2}$.

אנחנו רוצים שהשטח אותו חישבנו S יהיה כשטח חצי מעגל. לכן ניצור את המשוואה:

$$g(x)=S-\frac{\pi}{2}=\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\pi-\frac{\pi}{2}=\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\frac{\pi}{2}$$

פונקציית האיטרציה:

$$f(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}=x-\frac{\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\frac{\pi}{2}}{-\sin(x)\,(x-\pi)-\cos(x)+\cos(x)}$$

$$=x+\frac{\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\frac{\pi}{2}}{\sin(x)\,(x-\pi)}$$

ע"מ שהשיטה תתכנס, צריך להתקיים כי $|f'(x)|<1$

מתקיים: $f'(x)=\frac{g(x)*g''(x)}{(g'(x))^2}$

נגזור: $g'(x)=\cos(x)-\sin(x)\,(x-\pi)-\cos(x)=-\sin(x)\,(x-\pi)$

$$g''(x)=\cos(x)\,(x-\pi)+\sin(x)$$

$$f'(x)=\frac{(\cos(x)\,(x-\pi)-\sin(x)+\frac{\pi}{2})*((x-\pi)*\cos(x)+\sin(x))}{\left(-\sin(x)\,(x-\pi)\right)^2}$$

נבדוק כיווץ: נבדוק האם מקיים $|f'(x)|<1$, בטווח שבחרנו:

עבור a : $1\to 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)=x\to\frac{x}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\to\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\to x=\frac{\pi}{3}$

עבור $b$ : $\sqrt{2}\to 2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x\to\frac{x}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\to\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}\to x=\frac{\pi}{2}$

בטווח הנ"ל הפונקציות sin ו-cos מתנהגות כך:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \le \boldsymbol{sinX} \le \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \le \boldsymbol{cosX} \le 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

נסתכל על הערך המקסימלי של המונה והמינימלי של המכנה בטווח:

<u>מכנה</u>: $\left|\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)\right)^2\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} * \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right| = \frac{3\pi^2}{16}$

<u>מונה</u>: $= |(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}) * (\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right) * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\frac{\pi}{2}))|$

$$\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) * (0+1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

כעת נבחן את הנגזרת:

$$|f'(x)| \le \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\pi^2}{16}} = \frac{0.70477}{1.85055} < 1$$

אזי הפונקציה f מכווצת בתחום $\frac{pi}{3} \le x \le \frac{pi}{2}$.

אז נבחר $x_0 = \frac{pi}{2}$ ונבצע:

1)

$$x_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}-1}{-\frac{\pi}{2}} = 1.20742$$

אז

$|g(1.20742)| = 1.01846 > 0.0001$.

2)

$$x_i = 1.20742 + \frac{\cos(1.20742)\,(1.20742-\pi) - \sin(1.20742) + \frac{\pi}{2}}{\sin(1.20742)\,(1.20742-\pi)} = 1.43683$$

אז $g(1.43683)| = 0.50032 > 0.0001$ .

3)

$$x_i = 1.43683 + \frac{\cos(1.43683)\,(1.43683-\pi) - \sin(1.43683) + \frac{\pi}{2}}{\sin(1.43683)\,(1.43683-\pi)} = 1.22845$$

אז $g(1.22845\,)| = 0.01341 > 0.0001$ .

4)

$$x_i = 1.22845 \; + \frac{\cos(1.22845\;)\,(1.22845\; - \pi) - \sin(1.22845\;) + \frac{\pi}{2}}{\sin(1.22845\;)\,(1.22845\; - \pi)}$$
$$= 1.23589$$

אז $\delta > 0.00001 = |g(1.23589)|$ .

אז לאחר 4 איטרציות הגענו לפתרון הרצוי בקירוב המתאים:

$$l = 2\sin\left(\frac{1.23589}{2}\right) = 1.15872$$

4) א.

$$P(X) = ax^2 + bx + c$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a{x_n}^2 + bx_n + c}{2ax_n + b}$$

נגדיר את $g(x)$:

$$g(x) = x - \frac{ax^2 + bx + c}{2ax + b}$$

ב.

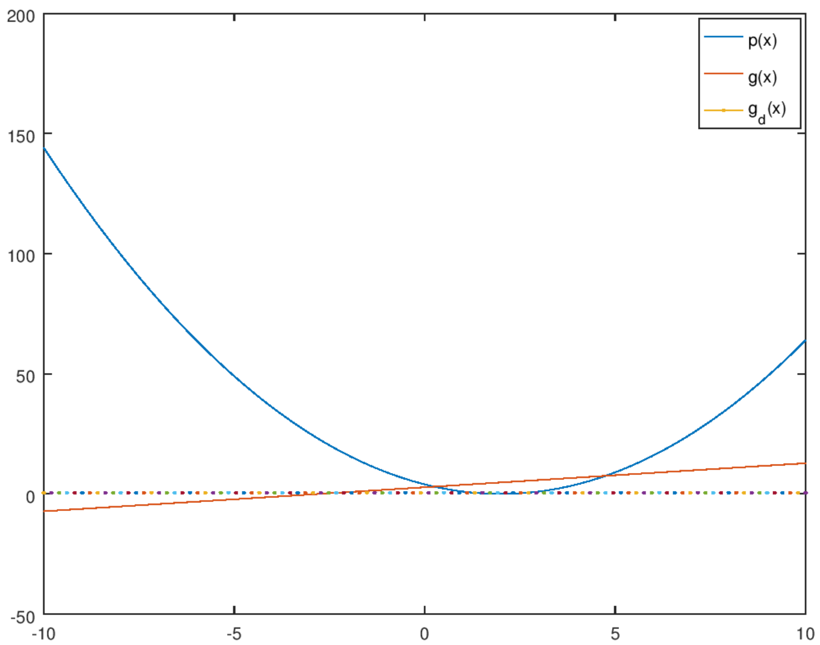
$$g'(x) = 1 - \frac{2a^2x^2 + 2abx - 2ac + b^2}{(2ax + b)^2}$$

מימוש הפונקציה בתוכנה:

```
function m = f4(a, b ,c)
hold off;
x = linspace;(10,10-)
p = a.*x.*x + b.*x + c;
plot(x,p)
hold on;
g = x - (a.*x.*x + b.*x + c)/(2*a.*x + b);
plot(x,g)
g_d = 1 - (2*a.*a.*x.*x + 2*a.*b.*x - 2.*a.*c + b.*b)/((2*a.*x + b).*(2*a.*x + b));
plot(x,g_d)
legend('p(x)', 'g(x)', 'g_d(x)');
end;
```

דוגמא:

עבור $a = 1, b = -4, c = 4$




ג.  עבור הסדרה $x_{n+1} = x_n - \frac{a{x_n}^2+bx_n+c}{2ax_n+b}$ ניתן להוכיח בקלות שהיא יורדת וחסומה מלטה.
כמו כן כל סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת לגבול. נסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. אזי מתקיים ש-
$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$. ולכן לאחר הצבה $L = L - \frac{f(L)}{f\prime(L)}$, עבור
$f'(L) = 2ax + b \neq 0$ נקבל מיידית ש-$f(L) = 0$ מכיוון שהחסם היחידי מלמטה הוא אז
נקבל שהגבול שווה לשורש. מש"ל להתכנסות.
מכאן שהסדרה מתכנסת אל השורש עבור כל $X$ ששונה מ- $f'(L) = 2ax + b \neq 0$ ,
כלומר $x \neq -\frac{b}{2a}$.

5) נשים לב כי מתקיימים:

1. $|e_{2n+2}| = |p - x_{2n+2}|$
2. $|e_{2n}| = |p - x_{2n}|$
3. $x_{2i+1} = g_1(x_{2i})$
4. $x_{2i} = g_2(x_{2i-1})$
5. $p = g_3(p)$
6. $g_{3(x)} = g_2(g_1(x))$
7. $g_1(x) = x$
8. $g_2(x) = x$
9. קיים $k < 1$ כך ש- $g'(c) \le k$
10. $|f(p) - f(x_n)| = f'(c) * (p - x_n)$ משפט ערך הביניים של לגרנג'

לכן:

$$|e_{2n+2}| \overset{1}{=} |p - x_{2n+2}| \overset{5,4}{=} |g_3(p) - g_2(x_{2n+1}))| \overset{6}{=} |g_2(g_1(p)) - g_2(x_{2x+1})| \overset{10}{=}$$
$$|g_2(c)| * |g_1(p) - x_{2n+1}| \overset{3}{=} |g_2(c)| * |g_1(p) - g_1(x_{2n})| \overset{9}{\le} k * |g_1(p) - g_1(x_{2n})| \overset{7.8}{=}$$
$$k * |p - x_{2n}| \overset{2}{=} k * |e_{2n}|$$

קיבלנו:

$$|e_{2n+2}| \le k * |e_{2n}| \rightarrow \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|} \le k \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^1} = k$$

אז קיבלנו R=1 ← סדר התכנסות 1 ← התכנסות לינארית.

עם קבוע שגיאה אסיפטוטי $\mathrm{A} = k$