

## תרגיל 2- מציאת שורשים

### שאלה מספר 1:

היכן נחתכים הגרפים של  $y = \cos(x)$  ושל  $y = x^3 - 1$ ?  
פתור את הבעיה ב Matlab, בעזרת שיטת החצייה ובעזרת Regula Falsi. הצג את תוכניותיך, והשווה ביצועים (מספר איטרציות ואופן התקדמות הניחוש) תוך שימוש באותם תנאי התחלה של  $x_0 = -3$  ו  $x_1 = 3$ .

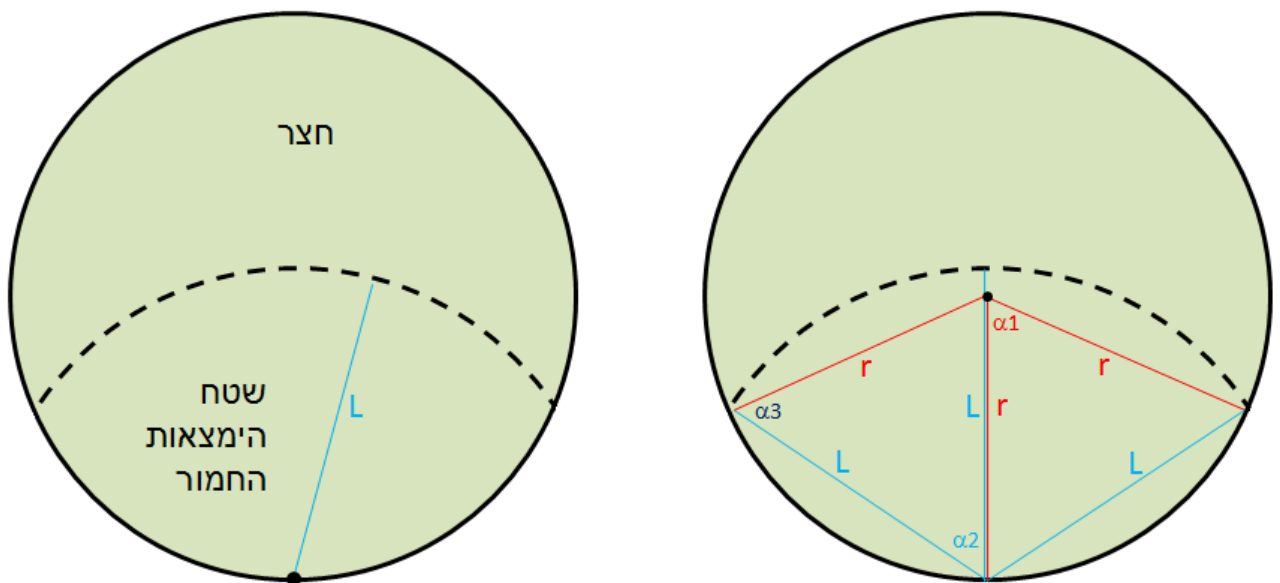
### שאלה מספר 2:

תכנן פונקציית נקודת שבת המתכנסת לוקלית ל  $\sqrt{a}$  בסדר התכנסות 4 !!  
א. פרט שלבי התכנון והוכח כי הפונקציה עונה לדרישות הנ"ל.  
ב. מצא את קבוע ההתכנסות האסימפטוטי של הפונקציה.  
ממש פונקציית Matlab ותן מספר דוגמאות הרצה (כרגיל, הצג הפונקציה והתוצאות).

### שאלה מספר 3:

קושרים חמור עם חבל לנקודה מסוימת על גדר של חצר עגולה המלאה בדשא. החמור יכול לאכול את הדשא שהחבל מאפשר לו להגיע אליו. בשאלה זו נענה על השאלה מה צריך להיות היחס בין אורך החבל  $l$  לבין רדיוס החצר  $r$  כך שהחמור יוכל לאכול בדיוק חצי מהדשא בחצר (זו דרישתו של בעל החצר). נניח כי החמור מגיע בדיוק למרחק  $l$  מהנקודה בה הוא קשור וש  $r = 1$ .

העזרו בשרטוט הבא כדי לענות על הסעיפים הבאים:



א. מצא טווח ערכים  $[a, b]$  עבור  $l$  כך שערכו של  $l$  המקיים את הדרישה הנ"ל יהיה שייך לטווח זה. גבולות הטווח צריכים להיות מנומקים מילולית בצרף שרטוט מתאים (לא צריך להציב בנוסחאות). רצוי שגודל הטווח לא יעלה על 0.5:

$$l \in [a, b], b - a < 0.5$$

ב. הוכח כי השטח  $S$  אליו מגיע החמור כפונקציה של  $l$  (אפשר גם כפונקציה של  $r$  ו  $l$  אבל יש לזכור ש  $r = 1$ ) הינו  $S(x) = (x - \pi) \cos(x) - \sin(x) + \pi$ , לאחר החלפת המשתנים

$$\text{הבאה: } l = 2 * \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

יש להראות דרך מלאה וחישובים מפורטים.

ג. מיצאו פתרון מקורב למשוואה בעזרת שיטת ניוטון. הוכיחו כי מובטחת התכנסות מהתחום ההתחלתי שסיפקתם. כמה איטרציות נדרשות כדי להגיע לשגיאה של  $\delta = 0.0001$ ?

הערה: ניתן לפתור עבור  $x$  ולהציב כדי לקבל את  $l$  (חשוב: לא לשכוח לחשב את הטווח המתאים ל- $x$  לפי הטווח שחשבתם בסעיף א). כמו כן מומלץ להציב את התוצאה שקבלתם בביטוי של  $S$  שמצאתם בסעיף ב' כדי לוודא את נכונות הפתרון.

#### שאלה 4

נתונה הפרבולה  $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ , לה יש בדיוק שני שורשים שונים.

א. נסח איטרצית ניוטון  $g(x)$  עבור הפרבולה

ב. בנה פונקציה ב Matlab המקבלת  $a, b, c$  ומציירת את  $g(x)$ ,  $g'(x)$  ו  $P_2(x)$  על אותו גרף.

ג. הראה ש  $g(x)$  מתכנסת לאחד השורשים של  $P_2(x)$  עבור כל ניחוש התחלתי שונה

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

#### שאלה מספר 5

תהא  $x = g_1(x)$  איטרצית נקודת שבת בעלת סדר התכנסות  $R_1$ .

תהא  $x = g_2(x)$  איטרצית נקודת שבת בעלת סדר התכנסות  $R_2$ .

נבנה את איטרצית נקודת השבת  $x = g_2(g_1(x))$  המהווה הרכבה של שתי האיטרציות הנ"ל, קרי

איטרצית נקודת שבת המוגדרת על בסיס  $g_3 = g_1 \circ g_2$  או בכיתוב ישיר,  $g_3(x) = g_2(g_1(x))$ . מצא

והוכח את סדר ההתכנסות של  $g_3(x)$ .

הניסוח הבא של אותה בעיה עשוי לסייע לכם בפתרונה:

תהייה  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_\infty$  סדרת נחושים של הפעלות לסירוגין של  $g_1(x)$  ו  $g_2(x)$ , קרי

$$x_1 = g_1(x_0)$$

$$x_2 = g_2(x_1)$$

$$x_3 = g_1(x_2)$$

$$x_4 = g_2(x_3)$$

$$\vdots$$

חשוב כעת על סדרת הניחושים הזו כאילו כל שניים עוקבים מהם מתרחשים באיטרציה אחת.

לכן, האיטרציה המורכבת דנה בסדרת המספרים  $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots, x_\infty$  וסדר ההתכנסות של אותה

סדרה הוא אותו  $R$  אשר מביא לערך סופי וחיובי את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{2n+2}|}{|e_{2n}|^R}$$

עליך למצוא ולהוכיח את ערכו של  $R$ .