מבוא לאנליזה נומרית – עבודה 5

1)

Given: $I = \int_0^1 \ln(1+x^2)$

(a) Find an approximation I^{num} for I, by composite Trapezoidal rule, with **m** sub-intervals of [0,1]. (Your answer should be depend on the parameter **m**). Simplify your answer as possible.

(b) Find the number of sub-intervals **m** (as small as possible), such that an absolute value of error $|E^{total}| \le 10^{-3}$. Write code in MATLAB, which calculate I^{num} for the **m** value you found. Add the code and print the value of I^{num}.

(c) What can you say about the sign of the error $E^{total} = I - I^{num}$ for any $\mathbf{m} \ge 1$? Explain your answer.

(a) $\int_0^1 \ln(1+x^2) \approx \frac{\Delta x}{2}\sum_{k=1}^{m}(\ln(1+x_{k-1}^2) + \ln(1+x_k^2)) =$

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{m} = \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\ln(1) + 2\sum_{k=1}^{m-1}\ln(1+x_k^2) + \ln(2)\right) = \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m-1}\ln(1+x_k^2) + \frac{\ln(2)}{2m} =$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\ln\left(\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k^2)\right) + \frac{\ln(2)}{2m} = \frac{1}{m}\cdot\ln\left(\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k^2)\right) + \frac{\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}{m} =$$

$$I \approx \frac{1}{m}\cdot\ln\left(\sqrt{2}\prod_{k=1}^{m-1}(1+x_k^2)\right)$$

(b) *We begin by calculating the derivatives:*

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$From\ a\ graph\ of\ f''(x),$

$\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| = 2$

$E^{total} = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi) = -\frac{f''(\xi)}{12m^2}$ for some ξ in the interval [0, 1].

$|E^{total}| = \left|\frac{f''(\xi)}{12m^2}\right| \le \frac{2}{12m^2} = \frac{1}{6m^2}$

To ensure $|E^{total}| \le 10^{-3}$, *we will choose m so big that*

$\frac{1}{6m^2} \le 10^{-3} \quad \to \frac{10^3}{6} \le m^2 \quad \to \sqrt{\frac{10^3}{6}} \le m \quad \to m = 13$

Code mathlab:

```
m = 13
phi = 1
for k = 1: m,
      phi *= (1+(k/m)*(k/m))
end;
I = (1/m) * log (phi) + log(2)/(2*m)
```

Result:

I = 0.31776

(c) *The sign is negative because each iteration the surface of m>0 is getting lower, until the infinity that I = I^{num}, also we can see that f''(x)>0 in [0,1], hence f is Concave downwards, that why each block is under the graph.*

By submitted different value for m you can see that I^{num} is decreasing and get closer to 0.26928. when I = 0.26394.

<u>שאלה 2:</u>

נתון: $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1, h = 0.1, \lambda = \frac{2}{3}$

חישוב בשיטת אוילר:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) = y_i + h \cdot (x_i + y_i) = (1 + h) \cdot y_i + h \ \cdot x_i = \mathbf{1.1 y_i + 0.1\ x_i}$$

חישוב בשיטת runge-kutte מסדר 2:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\left(\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \cdot f(x_i, y_i) + \frac{1}{2\lambda} \cdot f(x_i + \lambda h, yi + \lambda h \cdot f(x_i, y_i)\right)\right]$$

$$= y_i + \frac{h}{4} \cdot \left[f(x_i, y_i) + 3 \cdot f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}h \cdot f(x_i, y_i)\right)\right]$$

$$= y_i + \frac{1}{40} \cdot \left[(x_i + y_i) + 3 \cdot f\left(x_i + \frac{1}{15}, y_i + \frac{1}{15} \cdot (x_i + y_i)\right)\right]$$

$$= y_i + \frac{1}{40} \cdot \left[(x_i + y_i) + 3(x_i + \frac{1}{15} + y_i + \frac{1}{15} \cdot (x_i + y_i)\right]$$

$$= y_i + \frac{1}{40} \cdot \left[(x_i + y_i) + 3\left(\frac{16}{15}x_i + \frac{12}{15} + \frac{16}{15}y_i\right)\right]$$

$$= \mathbf{1.105 y_i + 0.105 x_i + \frac{1}{200}}$$

סעיפים a+b:

y_i / x_i	אויילר	רונגה-קטה	פיתרון מדוייק	שגיאה באויילר	שגיאה ברונגה-קטה
0.1	1.1000	1.1100	1.1103	0.0103	0.0003
0.2	1.2200	1.2421	1.2428	0.0228	0.0008
0.3	1.3620	1.3985	1.3997	0.0377	0.0013
0.4	1.5282	1.5818	1.5836	0.0554	0.0018
0.5	1.7210	1.7949	1.7974	0.0764	0.0025
0.6	1.9431	2.0409	2.0442	0.1011	0.0034
0.7	2.1974	2.3231	2.3275	0.1301	0.0044
0.8	2.4872	2.6456	2.6511	0.1639	0.0055
0.9	2.8159	3.0124	3.0192	0.2033	0.0068
1.0	3.1875	3.4282	3.4366	0.2491	0.0084

סעיף c:

בשיטת אוילר הפונקציה $f(x, y)$ חושבה פעם אחת בכל איטרציה ובסה"כ – 10 פעמים בעוד שבשיטת RK2 היא חושבה פעמיים בכל איטרציה (פעם אחת $f(x, y)$ ופעם שנייה $f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}h \cdot f(x_i, y_i)\right)$ ובסה"כ 20 פעמים.

סעיף d:

כאשר h=0.05 נבצע 20 איטרציות בטווח [0,1] ולכן $f(x, y)$ תחושב 20 פעמים.

סעיף e:

בחרנו ערך h שונה בין השיטות בשביל להשוות באופן הוגן בין שתי השיטות. בשיטת אוילר אנחנו מבצעים חישוב של הפונקציה $f(x, y(x))$ פעם אחת בכל איטרציה בעוד שבשיטת RK2 אנחנו מבצעים זאת פעמיים. לכן, על מנת להשוות בין השיטות צריך לוודא שכמות החישובים שהשיטות מבצעות זהות מכאן הקטנו בחצי את כמות האיטרציות של RK2 ע"י הגדלת h פי 2 וכך כמות החישוב של כל אחת מהשיטות זה.

y_i x_i	**אויילר**	**רונגה-קטה**	**פיתרון מדוייק**	**שגיאה באויילר**	**שגיאה ברונגה-קטה**
0.1	1.1000		1.1103	0.0103	
0.2	1.2200	1.2400	1.2428	0.0228	0.0028
0.3	1.3620		1.3997	0.0377	
0.4	1.5282	1.5768	1.5836	0.0554	0.0068
0.5	1.7210		1.7974	0.0764	
0.6	1.9431	2.0317	2.0442	0.1011	0.0125
0.7	2.1974		2.3275	0.1301	
0.8	2.4872	2.6307	2.6511	0.1639	0.0204
0.9	2.8159		3.0192	0.2033	
1.0	3.1875	3.4054	3.4366	0.2491	0.0312