מבוא לאנליזה נומרית – na181
Assignment 1

<u>שאלה 1</u>:

בייצוג מספרים בינאריים במחשב על פי סטנדרט IEEE 754, ענה על השאלות הבאות:

א. כתוב את המספר ‎-581.4‎ בעזרת הפרוטוקול (כתוב את השבר, החזקה וסיבית הסימן בבינארי.

ב. כמה מספרים שלמים ניתן לייצג באמצעות משתנה מסוג single (float ב-C)?

ג. מה המספר המינימלי של ספרות עשרוניות משמעותיות עם חיתוך עבור מספר המיוצג במשתנה מסוג single מנורמל*?

ד. מה המספר הגדול ביותר הניתן לייצוג במשתנה מסוג single:
   i. בייצוג מנורמל*
   ii. בייצוג לא מנורמל**?

ה. כמה מספרים בין 1 ל-2 (לא כולל) ניתן לייצג במשתנה מסוג single?

* ייצוג מנורמל – הכוונה לייצוג מהסוג $x = (-1)^S * 1.fraction * 2^{\widehat{Exp}}$.

** ייצוג לא מנורמל – הכוונה לייצוג מהסוג $x = (-1)^S * 0.fraction * 2^{\widehat{Exp}}$.

הערכים ש-$\widehat{Exp}$ יכול לקבל בייצוג מנורמל ולא מנורמל הם על פי הגדרות הסטנדרט.

<u>שאלה 2</u>:

גרסת התוכנה המקורית בטיל Patriot ייצגה את פרק הזמן של עשירית השנייה ע"י מספר בינארי של 23 ספרות אחרי הנקודה הבינארית וחיתוך. (להלן $0.\tilde{1}$).

המערכת עקבה אחר מטרות אפשריות. על מנת למדוד את המרחק שעברו המטרות בין שתי נקודות בזמן (להלן t1,t2) המערכת חישבה את מכפלת הזמן שחלף במהירות המטרה (נסמנה V) כשהפרשי הזמן מחושבים מתוך שעון המערכת המונה ביחידות של עשיריות שנייה (שם לב, המונה הינו מונה ב<u>שלמים</u>. כל פעימת מונה מייצגת עשירית שנייה שעברה).

n1,n2 – מייצגים את מספר פעימות המונה כפי שנספרו ע"י המערכת מאז איתחולה האחרון. נסמן:

$$\tilde{t}_1 \leftarrow 0.\tilde{1} \times n_1$$
$$\tilde{t}_2 \leftarrow 0.\tilde{1} \times n_2$$
$$\Delta\tilde{t} \leftarrow \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1$$

א. מהם 0.1 ו $0.\tilde{1}$ בבסיס 2?

ב. מה השגיאה המוחלטת ומהי השגיאה היחסית ב $0.\tilde{1}$?

ג. לכמה ספרות בינאריות משמעותיות מקרב $0.\tilde{1}$ את 0.1 ?

ד. נניח כי n_1 נקרא משעון המערכת 8 שעות לאחר איתחולה, ו- n_2 נקרא 2 שניות מאוחר יותר. מהן השגיאות המוחלטות והיחסיות ב $\Delta\tilde{t}$ במקרה זה?

ה. חזור על סעיף ד', עבור 100 שעות פעילות.

ו. נניח שתוכנת המעקב עודכנה בחישובי זמנים מדויק יותר, אך עקב טעות בוצע השיפור באופן חלקי בלבד. חזור על ד' תחת ההנחה שכעת $\tilde{t}_2$ מחושב על בסיס 0.1 אך $\tilde{t}_1$ מחושב עדיין על בסיס $0.\tilde{1}$.

ז. חזור על סעיף ו' עבור 100 שעות פעילות. (זהו המצב שגרם לכשל טיל הפטריוט בערב הסעודית בחודש פברואר 1991 והסתיים במותם של 28 נחתים!)

<u>שאלה 3:</u>
<u>שימו לב: קוד המטלב עבור שאלה זו יצורף בצורה מסודרת על פני לא יותר מעמוד או שניים.</u>

סטודנט הציע דרך לחישוב פאי בצורה הבאה:

$$\pi \approx 2^n * \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

כש *n* הוא מספר הפעמים שמופיע 2 מתחת לשורשים.

א. כתוב פונקציה *calcPi* ב-*MATLAB* המקבלת ***n*** חיובי ממש (כלומר *n* גדול או שווה ל-*1*) ומחזירה את הערך של פאי לפי הקירוב הנ"ל, את השגיאה ואת מספר הספרות המשמעותיות עם חיתוך.
נתייחס לערכו האמיתי של פאי בתור הערך אותו מחזירה תוכנת מטלב.
יש ליצור קובץ *m* בשם *calcPi.m* (בחלון ה- *Editor* אשר ניתן לפתיחה ע"י לחיצה על *Toolbar>Desktop* וסימון "וי" על *Editor*) כאשר השורה הראשונה בפונקציה זו הינה:

```
function[est_pi,error,d]=calcPi(n)
```

זכרו לשמור את הקובץ בספריה בה אתם עובדים (*Current Folder* הנמצאת בחלק העליון של החלון) על מנת ש-*MATLAB* תצליח לגשת אליה.

ב. העזר בפונקציה מסעיף 1. כתוב עבור *n=4,8,12,16,20,24* לכמה ספרות משמעותיות עם חיתוך תוצאת החישוב *calcPi.m* המקרבת את פאי. הצג התוצאות בטבלה.
הדרכה: ניתן להניח שמספר הספרות המשמעותיות הוא מיקום הספרה הראשונה הגדולה מ 0 מימין לנקודה בשגיאה היחסית (מתחילים לספור מהנקודה).

ג. בהציעו את הקרוב לפאי הנ"ל, היה הסטודנט משוכנע שככול שנבחר n יותר גדול כך הדיוק בתוצאת <u>החישוב</u> יהיה טוב יותר. האם הסטודנט צדק על פי התוצאות שקבלתם? כיצד ניתן להסביר זאת?

הדרכה: השתמש בחישוב ערכו של הגבול הבא (ו/או בערך הטור עבור *n* סופי).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

n-the number of 2's under square root

ד. הצע דרך להתגבר על הבעיה שהתגלתה בסעיף הקודם וכתוב פונקציה חדשה *calcPi1* המממשת את הפתרון שהצעת. השתמש בשורה הבאה:

```
function[est_pi1,error1,d1]=calcPi1(n)
```

ה. חזור על סעיף 2 שוב בעזרת הפונקציה החדשה כדי לוודא שהפתרון שהצעת אכן פותר את הבעיה. הצג התוצאות בטבלה.

ו. צייר בעזרת *MATLAB* גרף של השגיאה כפונקציה של *n* (*n* בין 1 ל 27). צייר את השגיאה של *calcPi* ו- *calcPi1* באותו הגרף כך שציר *y* יהיה פולינומי.

ניתן להיעזר בפקודות *hold on* ו *semilogy*.
צרפו את שורות הקוד שכתבתם על מנת לקבל את הגרף המבוקש. תוכלו לשמור אותן בקובץ *m* נפרד ממנו תקראו לפונקציות *calcPi* ו- *calcPi1*.

<u>שאלה 4:</u>

בחן את מערכת החישוב הבאה.

$$\xrightarrow{\ \tilde{x}\ } \boxed{\ F\ } \xrightarrow{\ \tilde{y}\ }$$

בהזנת המספר האמיתי $x = 124.567576893$ המערכת מפיקה את הפלט $y = 0.0017634856$.
בהזנת הקרוב $\tilde{x} = 124.567465$ מפיקה המערכת את הפלט $\tilde{y} = 0.0017683475$.
השתמש במחשבון על מנת לענות על הסעיפים הבאים וכתוב את התשובות ב Normalized Floating Point עם 5 ספרות עשרוניות משמעותיות וחיתוך.

א) מהי השגיאה המוחלטת בקלט $\tilde{x}$?
ב) מהי השגיאה היחסית בקלט $\tilde{x}$?
ג) מהי השגיאה היחסית בפלט $\tilde{y}$?
ד) מהי רגישות המערכת כפי שמתגלה מהמספרים הנתונים?
ה) לכמה ספרות עשרוניות משמעותיות מקרב $\tilde{y}$ את y (עם חיתוך)?

** בשאלה זו יש לייצג את התשובות הסופיות עם חמש ספרות עשרוניות משמעותיות בייצוג מנורמל. לדוגמא: המספר 35.6488899 ייוצג כ- 3.5648*10^1. אין צורך להמיר לבינארי.

<u>שאלה 5:</u>

נתונות שתי נקודות במישור (x_0, y_0) ו-(x_1, y_1). הקו הישר העובר דרכן חותך את ציר x בנקודה $\left(X = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}, 0 \right)$. ניתן לחשב את החיתוך ע"י הנוסחה השקולה $\left(X = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}, 0 \right)$.

בהינתן $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ ו -$(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$ ובהנחה שעובדים עם 3 ספרות משמעותיות ועיגול:

א. מהי הנוסחה העדיפה לחישוב ? נמקו.
ב. בעזרת שיטת הגראדינט כתוב ביטוי לחסם על השגיאה המוחלטת ב X לפי אחת הנוסחאות.
ג. הצב את ערכי הנקודות ואת השגיאה המוחלטת בקואורדינטות כדי לקבל חסם מספרי לשגיאה המוחלטת ב X.
ד. הוכח את הטענה הבאה: אם x ו y בעלי אותו סימן אזי מתקיים: $\delta(\tilde{x} + \tilde{y}) \leq \max(\delta\tilde{x}, \delta\tilde{y})$