

Assignment 3 – Interpolation and Least Squares Approximation

הנחיות: אם לא מצוין אחרת, יש להציג ולהסביר את צעדי החישוב שביצעתם.
 בכל שאלה בה אתם נדרשים לספק קוד מטלב יש לצרף לכל שאלה **בצורה מסודרת** הדפסה של הקוד (הפונקציות) ושל שורות הפקודה הרלוונטיות בהן השתמשתם על מנת להריצו. יש לדאוג כי הקוד מוצג בצורה קומפקטית וקריאה ולא מתפרש על פני מספר רב של עמודים. **עבודות אשר יוגשו בצורה מרושלת או שלא יהיו קריאות לא ייבדקו והניקוד עליהן יהיה בהתאם.**

שאלה מספר 1

תהי הפונקציה $f(x) = \cos(2x)$ באינטרוול $[-0.5, 0.5]$.

(א) מהו פולינום האינטרפולציה המתלכד עם $f(x)$ בנקודות $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$.

תן את ביטוי השגיאה עבור פולינום זה ומצא חסם עליון לשגיאה.

(ב) פתח שני האיברים הראשונים בטור טיילור עבור הפונקציה $f(x) = \cos(2x)$ סביב 0. תן חסם לשגיאה של הפולינום שקיבלת בתחום. האם חסם השגיאה המתקבל ע"י פולינום ממעלה 2 לפי מרווחי צ'בישב גדול או קטן מהחסם שקיבלת?

(ג) תאר את התנהגות השגיאה כאשר אנו מגדילים את מספר הנקודות בהן מתלכד פולינום האינטרפולציה עם $f(x)$. השאף מספר זה לאינסוף ומצא חסם לשגיאה גדלה או קטנה.

שאלה מספר 2

בשאלה זו נרצה למצוא התאמה בין דגימות של פונקציה דו-מימדית (שייתכן ואינה ידועה) $f(x, y)$ מעל \mathbb{R}^2 , לפונקציה הליניארית הדו-מימדית (המישור) $g(x, y) = Ax + By + C$.

א. נסח את המשוואות הנורמאליות.

ב. מצא את המישור הטוב ביותר עבור סדרת

$$f(0,0) = -2.078$$

$$f(0,1) = 1.1424$$

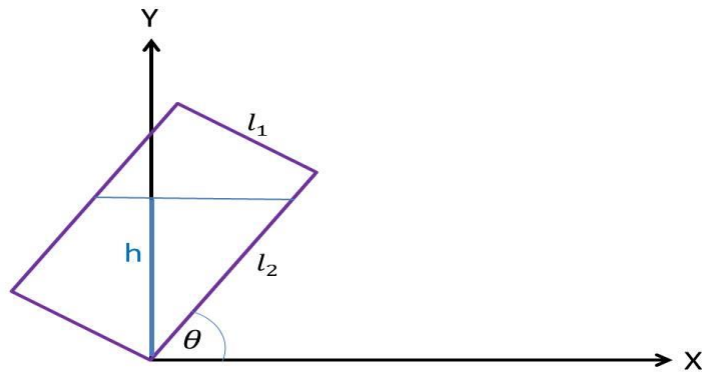
$$f(1,0) = 3.0574$$

$$f(1,1) = 5.8197$$

הנקודות:

שאלה מספר 3

נתון תיבה מלבנית דו מימדית אותה רוצים למלא מים עד גובה h . אורך ורוחב התיבה הם $l_1 < l_2$ והתיבה מסובבת בזווית $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ביחס לציר ה- x (ראה ציור). יש למצוא כמה מים יש להזרים לתיבה. כלומר, בהינתן θ , מה V , נפח המים בתוך התיבה כדי שמפלס המים יהיה בגובה h (ראה ציור).



- א. שרטט באופן סכמתי גרף של V כפונקציה של h . סמן את הנקודות בהן מפלס המים הוא בגובה של אחת הפינות של התיבה. בנקודות אלו יש שינוי בביטוי המייצג את V כפונקציה של h . חשב את הקואורדינטות של נקודות אלו על גרף הפונקציה ששרטטת.
- ב. במידה והשירטוט נכון אפשר להבחין שיש רציפות בנגזרת בנקודות שסימנת על הגרף. עליך לבנות spline מתאים שיתאר את נפח המים V כפונקציה של המפלס h ו θ
- בדיקת הפתרון (לא להגשה): ניתן לפתור שאלה זו באופן מתמטי כדי לבדוק את הפתרון שקבלתם. ניתן להעזר בחישוב סימבולי של MATLAB.

שאלה מספר 4

מצא את a, b, c, d ב Natural Cubic Spline הבא

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + 2x - x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ s_1(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

שאלה מספר 5

בצע least square curve fitting של המודל $f(x) = axe^{-bx}$ לנקודות הבאות

Point number - i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.25	0.5	1	2	3	4	5
y_i	0.9	1.2	0.5	0.15	0.033	0.005	0.0001

- א. הסבר כיצד הנך הופך את הבעיה ל Linear least square וכתוב תוכנית Matlab המבצעת את החישוב ומציגה את התוצאות גם מספרית וגם בגרף הכולל את נקודות הקלט והמודל המחושב.

ב. שנה את y_7 ל 0.001 חזור על התהליך והשווה לגרף מ'א'. בברור השינוי המזערי בערך הפונקציה ב x_7 אשר בקושי שינה את שגיאת הריבועים השפיע באופן דרמטי על ה fit בקטע $[0,1]$. כיצד הינך מיישב זאת עם העובדה ששיטת הריבועים המינימאליים אינה אמורה להיות רגישה לרעשים?