מבוא לאנליזה נומרית – עבודה 3

1) א. נגדיר את P_2, מכיוון שהינו פולינום ממעלה לכל היותר שתיים, הרי $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, עבור

$P_2(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \ \to c = 1$

$P_2(0.5) = a \cdot 0.5^2 + b \cdot 0.5 + 1 = \cos(1)$

$P_2(-0.5) = a \cdot (-0.5)^2 - b \cdot 0.5 + 1 = \cos(-1)$

מכאן נקבל שפולינום האינטרפולציה הוא: $P_2(x) = -1.838x^2 + 1, a = -1.838, b = 0, c = 1$

מסקנה מנוסחת השגיאה באינטרפולציה: $E_2(x) = |f(x) - p_2(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) =$

$[\cos(2x)]^{(3)} = -8\sin(2x)$

$$\left|\frac{f^{(2+1)}(\varepsilon)}{(2+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{2}(x - x_i)\right| = \left|-\frac{8\sin(2 \cdot 0.5)}{3!} \cdot (x - 0)(x - 0.5)(x + 0.5)\right| =$$

$$= \left|-\frac{8}{6} \cdot \sin(1) \cdot x(x^2 - 0.25)\right| \leq \left|-1\frac{1}{3} \cdot \sin(1) \cdot 0.04811\right| = 0.053977$$

כאשר -0.04811 היא נקודת המקסימום של $x(x^2 - 0.25)$ בטווח.

ב. נשתמש בטור טילור עבור $f(x) = \cos(2x)$ ג, לפיתוח שני האיברים הראשונים סביב 0:

$$p(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} = 1 - 2x^2$$

$$E(x) = |f(x) - p(x)| = |\cos(2x) - 1 + 2x^2| \leq |\cos(2 \cdot 0.5) - 1 + 2(0.5)^2| = 0.403$$

- מכיוון שאין נקודות חיתוך לפונקציות הנ"ל חוץ מאפס והקו הישר נמצא תמיד תחת F לכן הקצוות הם החסם העליון.

על פי צ'בישב השגיאה הינה:

$$E_2(x) = |f(x) - p_2(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \leq \left|-\frac{8}{6} \cdot \sin(1) \cdot \frac{0.5^3}{2^2}\right| = 0.035$$

ניתן לראות שהחסם על פי צבישב קטן יותר.

ג. מכיוון שהנקודות שלנו הן בתחום [-0.5,0.5] אז מתקיים עבור כל $\forall i$, $(x - x_i) < 1$ לכן $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \leq 1^n$, מכאן ניתן לחשב את השגיאה עבור אינסוף נקודות התחום:

$$E_n(x) = |f(x) - p_n(x)|$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \leq \left|(-1)^n \cdot 2^n \cdot \sin(2\varepsilon) \cdot \frac{1^n}{(n+1)!}\right| =$$

$$= 2^n \cdot \sin(2\varepsilon) \cdot \frac{1^n}{(n+1)!}$$

$$E_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \sin(2\varepsilon) \cdot \frac{1^n}{(n+1)!} \to 0$$

(2

א. נסתכל על השגיאה לפי 2-norm – הנורמה האוקלידית:

$$||\mathrm{E}(A,B,C)||_2 = \sum_{i=1}^{N}\left(g(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\right)^2$$

נגזור ונשווה ל-0 בכדי למצוא את המשוואה הנורמלית:

$$\frac{dE}{dA} = \sum_{i=1}^{N} -2\left(g(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\right)x_i = 0$$

$$\frac{dE}{dB} = \sum_{i=1}^{N} -2\left(g(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\right)y_i = 0$$

$$\frac{dE}{dC} = \sum_{i=1}^{N} -2\left(g(x_i,y_i) - (Ax_i + By_i + C)\right) = 0$$

ב. לאחר ארגון אלגברי של סע' א מקבלים:

.1

$$\sum_{i=1}^{N} g(x_i,y_i)\,x_i = A\sum_{i=1}^{N}(x_i^2) + B\sum_{i=1}^{N}(y_ix_i) + C\sum_{i=1}^{N}(x_i)$$

.2

$$\sum_{i=1}^{N} g(x_i,y_i)\,y_i = A\sum_{i=1}^{N}(y_ix_i) + B\sum_{i=1}^{N}(y_i^2) + C\sum_{i=1}^{N}(y_i)$$

.3

$$\sum_{i=1}^{N} g(x_i,y_i) = A\sum_{i=1}^{N}(x_i) + B\sum_{i=1}^{N}(y_i) + C\sum_{i=1}^{N}(1)$$

נציב את ארבע הנקודות: $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$:

.1

$$-2.078*0 + 1.1424*0 + 3.0574*1 + 5.8197*1 \\ = A(0+0+1+1) + B(0+0+0+1) + C(0+0+1+1)$$

.2

$$-2.078*0 + 1.1424*1 + 3.0574*0 + 5.8197*1 \\ = A(0+0+0+1) + B(0+1+0+1) + C(0+1+0+1)$$

.3

$$-2.078 + 1.1424 + 3.0574 + 5.8197 = 2A + 2B + 4C$$

נקבל את מערכת המשוואת:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{matrix} 8.8771 \\ 6.9621 \\ 7.9415 \end{matrix}$$

נפתור:

1.

$$8.8771 = 2A + B + 2C \rightarrow B = 8.8771 - 2A - 2C$$

2.

$$6.9621 = A + 2B + 2C \rightarrow A = 6.9621 - 2(8.8771 - 2A - 2C) - 2C \rightarrow$$

$$-3A = -10.7921 + 2C \ \rightarrow A = 3.5973 - \frac{2}{3}C$$

$$\downarrow$$

$$B = 8.8771 - 2\left(3.5973 - \frac{2}{3}C\right) - 2C = 8.8771 - 7.1946 + \frac{4}{3}C - 2C$$

$$= 1.6825 - \frac{2}{3}C$$

3.

$$7.9415 = 2\left(3.5973 - \frac{2}{3}C\right) + 2\left(1.6825 - \frac{2}{3}C\right) + 4C \rightarrow$$

$$7.9415 = 7.1946 - \frac{4}{3}C + 3.365 - \frac{4}{3}C + 4C \rightarrow$$

$$-2.6181 = \frac{4}{3}C \rightarrow \boldsymbol{C} = \mathbf{-1.963575}$$

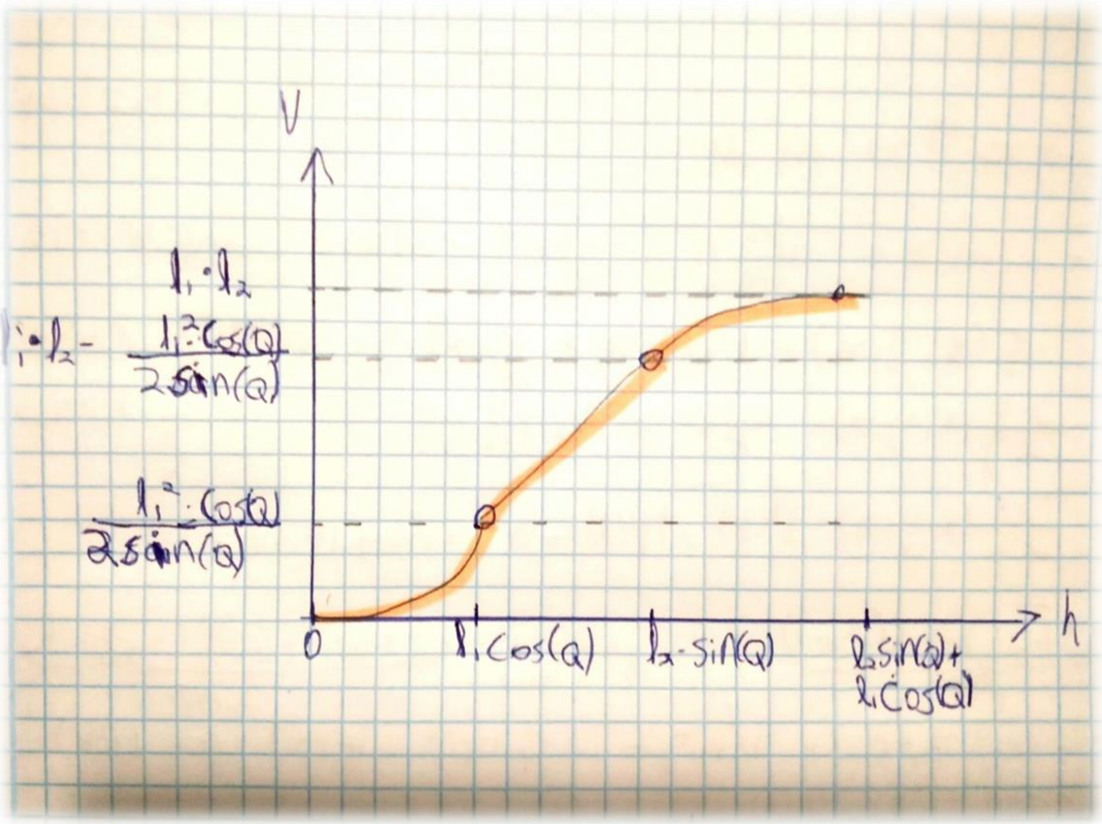
$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{A} = 3.5973 - \frac{2}{3}(-1.963575) = \mathbf{4.90635}$$

$$\boldsymbol{B} = 1.6825 - \frac{2}{3}(-1.963575) = \mathbf{2.99155}$$

3)

א.



ב. הגרף מחולק לשלושה חלקים, ניצור עבור כל חלק משוואה ונתאים את תנאי הגרף כך שיתאימו המשוואות. שתי פרבולות וישר:

$$V_0(h,\theta) = ah^2 + bh + c$$
$$V_1(h,\theta) = dh + e$$
$$V_2(h,\theta) = fh^2 + gh + i$$

עבור הפרבולה הראשונה היא עוברת בנקודות $(0,0)$, ו-$(l_1 \cos(\theta), l_1^2 \cdot \frac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)})$. ו-$(0,0)$ גם נקודת מינימום

לכן משוואתה היא (*אחרי חישוב בתוכנה):

$$V_0(h,\theta) = \frac{1}{\sin(2\theta)} h^2$$

הישר עובר בנקודות $(l_1 \cos(\theta), l_1^2 \cdot \frac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)})$, ו-$(l_2 \sin(\theta), l_1 \cdot l_2 - \frac{l_1^2}{2\tan(\theta)})$. מכאן:

$$V_1(h,\theta) = \frac{l_1}{sin\theta} h + \frac{l_1^2}{2sin\theta}$$

עבור הפרבולה השנייה היא עוברת בנקודות $(l_2 \sin(\theta), l_1 \cdot l_2 - \frac{l_1^2}{2\tan(\theta)})$,

ו-$(l_2 \sin(\theta) + l_1 \cos(\theta), l_1 l_2)$. ובגלל הרציפות אנחנו יודעים שבנקודה $(l_2 \sin(\theta) + l_1 \cos(\theta), l_1 l_2)$ הנגזרות של הקו והפרבולה שוות. לכן משוואתה היא (*אחרי חישוב בתוכנה):

$$V_2(h,\theta) = -\frac{1}{\sin(2\theta)} h^2 + \left(\frac{l_1}{\sin(\theta)} + \frac{l_2}{\cos(\theta)}\right) h - \frac{l_1^2}{2\tan(\theta)} - \frac{l_2^2 \tan(\theta)}{2}$$

4)

תחילה נראה את ההגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציות:

$s_0'(x) = 2 - 3x^2, \quad s_0''(x) = -6x$

$s_1'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2, \quad s_1''(x) = 2c + 6d(x-1)$

כעת, מהגדרת natural cubic splime ידוע שמתקיים:

1) $s_0(1) = s_1(1)$
2) $s_0{}'(1) = s_1{}'(1)$
3) $s_0{}''(1) = s_1{}''(1)$
4) $s_1''(2) = 0$

ולכן:

1) $1 + 2 - 1 = a \ \rightarrow a = 2$
2) $2 - 3 = b \ \rightarrow b = -1$
3) $-6 = 2c \rightarrow c = -3$
4) $2c + 6d(2-1) = 0 \rightarrow -6 + 6d = 0 \rightarrow d = 1$

5) א. קודם נהפוך את המשוואה $f(x) = axe^{-bx}$ לבעיה ב-Linear least square כלומר:

$$y = axe^{-bx} \;\rightarrow\; \ln(y) = \ln(axe^{-bx}) \;\rightarrow\; \ln(y) = \ln(a) + \ln(x) + \ln(e^{-bx})$$
$$\rightarrow\; \ln(y) - \ln(x) = -bx + \ln(a) \;\rightarrow\; \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}\right) = -\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + \mathbf{ln}(\boldsymbol{a})$$

נחפש את הישר $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + \mathbf{ln}(\boldsymbol{a})$ עבור כל נקודה (x_i, y_i) בטבלה כשאר $y = \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$ על פי פיתוח מודל לינארי.

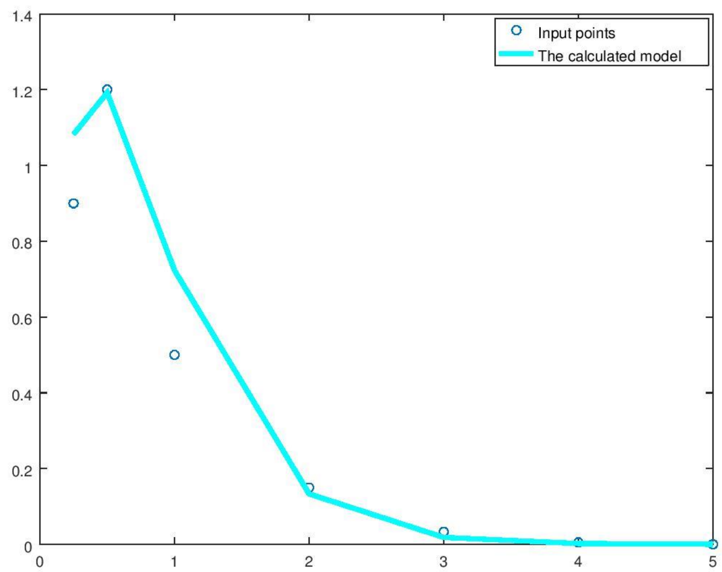
הקוד במטלאב:

```
x_i = [.25, .5, 1, 2, 3, 4, 5];
y_i = [.9, 1.2, .5, .15, .033, .005, .0001];

p_lin = polyfit(x_i,log(y_i./x_i),1);
a = exp(p_lin(2))
b = -p_lin(1)

F_X = (exp(a*x_i)) .* (-b*x_i);
plot(x_i,y_i,'o',x_i,F_X,'5','LineWidth', 3);
legend('Input points', 'The calculated model');
```

התוצאה:

a = 7.8602
b = 2.3856

$f(x) = 7.8602xe^{-2.3856x}$



ב. הקוד במטלאב:

```
x_i = [.25, .5, 1, 2, 3, 4, 5];
y_i = [.9, 1.2, .5, .15, .033, .005, .001];

p_lin = polyfit(x_i,log(y_i./x_i),1);
a = exp(p_lin(2))
b = -p_lin(1)

F_X = (exp(a*x_i)) .* (-b*x_i);
plot(x_i,y_i,'o',x_i,F_X,'5','LineWidth', 3);
legend('Input points', 'The calculated model');
```

התוצאה:

```
a = 5.3330
b = 2.0671
```

$$f(x) = 5.3330xe^{-2.0671x}$$